

© Pedro José Hernando Oter, 2025

pedroj@math.uc3m.es
www.clasesde.eu

Departamento de Matemáticas
Escuela Politécnica Superior
UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
Avda de la Universidad, 30
28911 Leganés
SPAIN

ISBN: xxx-xx-xxx-xxxx-x

Versión 3.8 - Septiembre 2025
Made by L^AT_EX - TeX Live

This is pdfTeX, Version 3.141592653-2.6-1.40.27 (TeX Live 2026/dev/Arch Linux) kpathsea version 6.4.2/dev

Índice

Tema	Página
0 Introducción	1
0.1 Introducción	3
0.1.1 Ramas de las Matemáticas	3
0.2 Infinito	4
0.3 El Lenguaje Matemático	4
0.3.1 Nomenclatura Básica	5
Alfabeto Griego Simplificado	5
0.4 Elementos de las Matemáticas	6
0.5 Tipos de Implicaciones	8
0.5.1 Condición Suficiente (\implies)	8
0.5.2 Condición Necesaria y Suficiente (\iff)	8
0.6 Demostraciones	9
0.6.1 Método Directo	10
0.6.2 Métodos Indirectos	10
0.6.3 Método por Contraposición	11
0.6.4 Método por Contraejemplo	13
0.6.5 Método de Reducción al Absurdo	13
0.6.6 Método de Inducción Matemática	14
1 Números Reales \mathbb{R}	17
1.1 Los Números y sus Tipos	19
1.1.1 Conjunto de los Números Naturales \mathbb{N}	19
Características de \mathbb{N}	20
Operaciones Internas en \mathbb{N}	20
Propiedades de $(\mathbb{N}; +, \cdot)$	20
Conclusión sobre \mathbb{N}	20
1.1.2 Conjunto de los Números Enteros \mathbb{Z}	21
Características de \mathbb{Z}	21
Número de Elementos de \mathbb{Z}	22
Operaciones en \mathbb{Z}	22
Propiedades de $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$	22
Conclusión sobre \mathbb{Z}	23
1.1.3 El Conjunto de los Números Racionales \mathbb{Q}	23
Operaciones en \mathbb{Q}	23
Propiedades de $(\mathbb{Q}; +, \cdot)$	24
Numerabilidad de \mathbb{Q}	25
Número de Elementos de \mathbb{Q}	26
Tipos de Números en \mathbb{Q}	26
Carácter incompleto de \mathbb{Q}	27
Conclusión sobre \mathbb{Q}	27
1.1.4 El Conjunto de los Números Irracionales \mathbb{I}	28
Características de \mathbb{I}	28
Conclusión sobre \mathbb{I}	29
1.1.5 El Conjunto de los Números Reales \mathbb{R}	29

	Características de \mathbb{R}	29
	La Recta Real	30
1.2	Intervalos	30
1.2.1	Tipos de Intervalos	31
	Operaciones Básicas con Intervalos	33
1.2.2	Entornos	34
1.2.3	Cotas y Extremos	35
1.3	Desigualdades	36
1.3.1	Propiedades de las Desigualdades	36
1.3.2	Resolución de Desigualdades	37
	Desigualdades Lineales	37
	Desigualdades No Lineales	38
	Desigualdades Racionales	39
1.4	Métrica en \mathbb{R}	40
1.4.1	Valor Absoluto, $ x $	40
	Propiedades de $ x $	40
	Valor Absoluto e Intervalos	41
1.4.2	Distancia en \mathbb{R}	41
	Propiedades de la Distancia	41
1.4.3	Desigualdades con Valores Absolutos	42
	Desigualdades Simples con Valores Absolutos	42
	Desigualdades con Valores Absolutos (Caso I)	43
	Desigualdades con Valores Absolutos (Caso II)	44
2	Funciones Reales de Variable Real	47
2.1	Función o Aplicación	49
2.2	Clasificación de las Funciones	50
2.2.1	Tipo de Conjuntos: Funciones Reales y Complejas	51
2.2.2	Funciones Escalares y Vectoriales	51
2.3	Representación Gráfica de Funciones Reales	52
2.4	Funciones Inyectivas, Sobreyectivas y Biyectivas	52
2.4.1	Determinación de la Inyectividad y Sobreyectividad	54
2.5	Función Par, Impar, Periódica y Monótona	55
2.6	Función Inversa $f^{-1}(x)$	55
2.6.1	Determinación de la Función Inversa	56
2.7	Composición de Funciones	57
2.8	Funciones Elementales	58
2.8.1	Funciones Polinómicas	58
2.8.2	Funciones Racionales	59
	Ejemplos	59
2.8.3	Funciones Irracionales o Radicales	60
	Radicales Simples	60
	Convenio con el Signo Negativo	60
	Ejemplos	61
2.8.4	Funciones Potenciales	61
	Ejemplos	62
2.8.5	Funciones Exponenciales	62
2.8.6	Funciones Logarítmicas	63
2.8.7	Funciones Trigonométricas	64
	Funciones Trigonométricas Inversas	64
2.8.8	Funciones Hiperbólicas	65
	Características de las Funciones Hiperbólicas Directas	65
	Características de las Funciones Hiperbólicas Inversas	65
2.9	Otras Formas de Expresar Funciones	66
2.9.1	Curva Plana	66
2.9.2	Forma Implícita	67
2.9.3	Forma Paramétrica	67

2.9.4	Curvas Polares	69
	Coordenadas Polares	69
	Curvas en Coordenadas Polares	69
	Relación entre Coordenadas Polares y Paramétricas	71
3	Límites de Funciones	73
3.1	Límite de una Función	75
3.1.1	Límites Laterales	77
3.1.2	Límites Infinitos	79
3.1.3	Límites en el Infinito	80
3.2	Propiedades de los Límites	81
3.3	Indeterminaciones	81
3.4	Infinitésimos e Infinitos	85
3.4.1	Propiedades de los Infinitos e Infinitésimos	85
3.4.2	Notación de Landau	86
	Propiedades y Operaciones con la Notación de Landau	87
3.4.3	Órdenes de los Infinitésimos e Infinitos	90
	Órdenes de Infinitos e Infinitésimos Simples	91
3.4.4	Infinitésimos Equivalentes	92
3.4.5	Principio de Sustitución	92
3.5	Cálculo de Límites de Funciones	93
4	Continuidad	95
4.1	Continuidad de una Función en un Punto	97
4.1.1	Primeras Propiedades de la Continuidad	98
4.1.2	Continuidad Lateral	98
4.2	Discontinuidad de una Función	99
4.2.1	Tipos de Discontinuidades	99
4.3	Continuidad en Intervalos	101
4.3.1	Propiedades de las Funciones Continuas	101
	Operaciones Básicas con Funciones Continuas	101
4.3.2	Composición de Funciones Continuas	101
4.4	Continuidad de las Funciones Elementales	102
4.5	Teoremas sobre Continuidad de Funciones	103
4.5.1	Teorema del Valor Intermedio	103
4.5.2	Teorema de Bolzano	103
4.5.3	Teorema de Weierstrass	105
4.6	Estudio de la Continuidad de una Función	105
5	Derivabilidad	109
5.1	Concepto de Derivada	111
5.1.1	Derivada de una Función en un Punto	111
5.1.2	Interpretación Geométrica de la Derivada	112
	Ecuaciones Básicas de la Recta	112
5.1.3	Ecuación de la Recta Tangente	112
5.1.4	Derivada Lateral	114
5.1.5	Derivada Infinita	115
5.1.6	Derivada en un Intervalo	115
5.1.7	Función Derivada	116
5.1.8	Derivada de las Funciones Elementales	117
5.2	Propiedades de la Derivada	119
5.2.1	Operaciones Básicas con Funciones Derivables	119
5.2.2	Derivación y Continuidad	120
5.2.3	Derivada de la Función Compuesta. Regla de la Cadena	121
5.2.4	Derivada de la Función Potencial. Derivación Logarítmica	122
5.2.5	Derivada de la Función Inversa	123
5.2.6	Derivada de la Función Implícita	124
5.2.7	Derivada de la Función Paramétrica	124

5.2.8	Derivada de la Función en Coordenadas Polares	125
5.3	Derivadas de Orden Superior	126
5.3.1	Funciones de Clase \mathcal{D}^n y \mathcal{C}^n	128
5.3.2	Derivadas de Orden Superior de la Función Paramétrica	128
5.4	Extremos Relativos y Absolutos	129
5.4.1	Crecimiento y Decrecimiento de una Función	129
5.4.2	Extremos de una Función	130
5.5	Teoremas del Valor Medio	132
5.5.1	Teorema del Valor Medio (de Lagrange)	132
	Aplicación del Teorema del Valor Medio (TVM)	133
5.5.2	Teorema de Rolle	134
	Aplicación del Teorema de Rolle	135
5.5.3	Teorema del Valor Medio de Cauchy	136
5.6	Regla de L'Hôpital	136
5.6.1	Aplicación de la Regla de L'Hôpital en otras Indeterminaciones	139
6	Desarrollos de Taylor	141
6.1	Introducción: Ajuste de Funciones por Polinomios	143
6.2	Aproximación Polinómica de Funciones	145
6.2.1	Recordatorio: Notación de Landau	145
6.2.2	Aproximación Polinómica de una Función	145
6.3	Teorema de Taylor	147
6.3.1	Resto del Polinomio de Taylor	148
6.3.2	Desarrollo de McLaurin	149
6.3.3	Desarrollo de Taylor de un Polinomio	149
6.3.4	Operaciones con Desarrollos de Taylor	150
6.4	Acotación del Resto	152
6.5	Aplicación de los Desarrollos de Taylor en el Cálculo de Límites de Funciones	156
6.5.1	Indeterminación $0/0$	156
6.5.2	Indeterminación ∞/∞	158
6.5.3	Indeterminación $0 \cdot \infty$	160
6.5.4	Indeterminación $\infty - \infty$	161
6.5.5	Indeterminación 1^∞	162
6.5.6	Indeterminaciones 0^0 e ∞^0	163
7	Aplicaciones del Cálculo Diferencial	165
7.1	Estudio Local de Funciones	167
7.1.1	Extremos Relativos	167
7.1.2	Concavidad y Convexidad	168
7.1.3	Asíntotas	170
7.2	Estudio Global de una Función	172
7.2.1	Representación Gráfica de Funciones	172
7.3	Optimización	177
8	Sucesiones	181
8.1	Sucesiones	183
8.1.1	Concepto de Sucesión	183
8.1.2	Formas de Expresar de Sucesión	183
8.1.3	Subsucesión	184
8.2	Tipos Básicos de Sucesiones	184
8.2.1	Progresiones Aritméticas	184
8.2.2	Progresiones Geométricas	185
8.2.3	Progresiones Aritmético-Geométricas	186
8.2.4	Progresiones Hipergeométricas	186
8.2.5	Progresiones Armónicas	187
8.2.6	Sucesiones de Potencias	187
8.2.7	Sucesión de Fibonacci	187
8.3	Representación Gráfica de Sucesiones	188

8.3.1	Representación en la Recta Real	188
8.3.2	Representación en Ejes de Coordenadas	188
8.4	Operaciones con Sucesiones	189
8.5	Monotonía	189
8.5.1	Determinación de la Monotonía	190
8.6	Acotación	192
8.7	Límite de una Sucesión	193
8.7.1	Convergencia	195
8.7.2	Sucesión de Cauchy o Fundamental	195
8.7.3	Propiedades de los Límites de Sucesiones	196
8.7.4	Divergencia	197
8.7.5	Sucesión Oscilante	198
8.7.6	Resumen: Tipos de Sucesiones	198
8.8	Teorema de la Convergencia	199
8.8.1	Relación entre Monotonía, Acotación y Convergencia	200
8.8.2	Límite de una Sucesión en Forma Recurrente	200
8.8.3	Ejercicios	201
8.9	El Número e	202
8.9.1	Definiciones Alternativas del Número e	203
8.9.2	Función Exponencial	204
8.10	Cálculo de Límites de Sucesiones	204
8.10.1	Operaciones con Infinito	204
8.10.2	Tipos de Indeterminaciones	206
8.10.3	Proceso de Cálculo de Límites de Sucesiones	206
8.10.4	Límite de Funciones Simples	207
8.10.5	Límite de Polinomios	208
8.10.6	Límite de Sucesiones Racionales y similares	209
8.10.7	Indeterminaciones	210
	Indeterminación $\infty - \infty$ en Polinomios	210
	Indeterminación $\infty - \infty$ en Raíces	210
	Indeterminaciones ∞/∞ y $0/0$. Criterio de Stolz	211
	Consecuencias del Criterio de Stolz	212
	Indeterminación $0 \cdot \infty$	214
	Indeterminaciones 0^0 e ∞^0	214
	Indeterminación 1^∞	215
8.11	Infinitésimos e Infinitos	216
8.11.1	Propiedades de los Infinitésimos	216
8.11.2	Órdenes de los Infinitos	217
8.11.3	Órdenes de los Infinitésimos	219
8.11.4	Infinitésimos Equivalentes	220
8.11.5	Infinitos Equivalentes	220
8.11.6	Principio de Sustitución	221
9	Series	225
9.1	Introducción	227
9.2	Sumatorio	227
9.2.1	Propiedades de los Sumatorios Finitos	228
9.3	Series Infinitas	229
9.4	Convergencia de las Series	230
9.4.1	Asociatividad de las Series	230
9.4.2	Conmutatividad de las Series	231
9.4.3	Convergencia de Series Notables	232
	Serie Aritmética	232
	Serie Geométrica	232
	Serie Aritmético-Geométrica	233
	Serie Armónica	233
9.4.4	Serie Telescópica	234

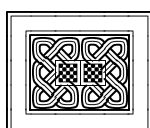
9.5	Criterios de Convergencia	235
9.5.1	Criterios de Convergencia Generales	235
9.5.2	Criterios de Convergencia para Series de Términos No Negativos	236
	Criterios Generales de Comparación	236
	Serie Armónica Generalizada	237
	Criterios Automáticos de Convergencia	237
	Otros Criterios: del Logaritmo y de la Integral	239
9.5.3	Criterios de Convergencia para Series de Términos Positivos y Negativos	240
	Series Alternadas	240
9.5.4	Criterios de Convergencia Absoluta	240
	Propiedades de las Series Absolutamente Convergentes	241
9.6	Series de Potencia	242
9.6.1	Series de Taylor	242
9.6.2	Series de Potencia	244
9.6.3	Radio de Convergencia	245
9.6.4	Criterios de Convergencia	245
10	Integración	249
10.1	Cálculo del Área	251
10.1.1	Área Debajo de una Curva	251
10.1.2	Sumas Inferiores y Superiores	252
10.2	Integral de Riemann	252
10.2.1	Propiedades de la Integral Definida	253
10.3	Teoremas Fundamentales del Cálculo (TFC)	254
10.3.1	Primer Teorema Fundamental del Cálculo (TFC1)	254
10.3.2	Función Primitiva e Integral Indefinida	255
10.3.3	Segundo Teorema Fundamental del Cálculo	256
10.3.4	Generalización del Teorema Fundamental del Cálculo	257
10.4	Métodos Básicos para el Cálculo de Primitivas	260
10.4.1	Integrales Inmediatas	260
10.4.2	Métodos Simples de Integración	261
10.4.3	Descomposición	261
10.4.4	Integración por Partes	261
10.4.5	Cambio de Variable o Sustitución	262
11	Técnicas de Integración	265
11.1	Cálculo de Primitivas de Funciones Racionales	267
11.1.1	Descomposición de una Fracción en Fracciones Simples	267
11.1.2	Integración Racional	272
11.1.3	Integración de Funciones Trigonométricas	274
	Cambio de Variable	274
11.2	Integrales Impropias	276
11.2.1	Definición	276
11.2.2	Convergencia de las Integrales Impropias	277
11.2.3	Clasificación de las Integrales Impropias	278
11.2.4	Integrales Impropias de Primera Especie	279
	Criterios de Convergencia para Integrales Impropias de Primera Especie	279
11.2.5	Integrales Impropias de Segunda Especie	281
	Criterios de Convergencia para Integrales Impropias de Segunda Especie	281
12	Aplicaciones del Cálculo Integral	283
12.1	Aplicaciones de la Integral	285
12.2	La Integral como una Suma Infinita	285
12.3	Cálculo de Áreas Planas	286
12.3.1	Área de Funciones en Coordenadas Paramétricas	287
12.3.2	Área de Funciones en Coordenadas Polares	287
12.4	Cálculo de Longitudes de Curvas	289
12.4.1	Longitud de Funciones en Coordenadas Paramétricas	289

12.4.2	Longitud de Funciones en Coordenadas Polares	290
12.5	Cálculo de Volúmenes de Sólidos de Revolución	291
12.5.1	Volumen Alrededor del Eje X	291
12.5.2	Volumen Alrededor del Eje Y	291
12.6	Cálculo del Área de una Superficie de Revolución	293
12.6.1	Área Alrededor del Eje X	293
12.6.2	Área Alrededor del Eje Y	293
12.6.3	Coordenadas Paramétricas	293
12.7	Resumen de Fórmulas	294

APÉNDICES 295

A	Temas de Repaso	297
A.1	Conjuntos	298
A.1.1	Cuerpo	299
A.2	Relaciones	299
A.3	Productos Notables	300
A.4	Binomio de Newton	301
A.5	Polinomios	302
	Raíces o Ceros de un Polinomio	302
	División entre Polinomios	303
A.5.1	Regla de Ruffini	304
	Cálculo de las Raíces de un Polinomio	305
	Descomposición de un Polinomio en Factores	305
A.6	Distancia Euclídea	307
A.6.1	Distancia en \mathbb{R}	307
A.6.2	Distancia en \mathbb{R}^2	307
A.6.3	Distancia en \mathbb{R}^3	307
A.7	Trigonometría	308
A.7.1	Medida de Ángulos: Radianes	308
	Relación Grados-Radianes	308
A.7.2	Funciones Trigonométricas	309
	Definición de Seno, Coseno y Tangente	309
	Valores Trigonométricos: Seno, Coseno y Tangente	310
	Determinación Simplificada	311
	Representación Gráfica de las Funciones Trigonométricas Directas	313
	Inversas de las Funciones Trigonométricas	313
	Representación Gráfica de las Inversas de las Funciones Trigonométricas	314
	Funciones Inversas de las Funciones Trigonométricas	314
	Representación Gráfica de las Funciones Trigonométricas Inversas	315
	Relaciones Trigonométricas Básicas	316
A.8	Funciones Hiperbólicas	318
	Inversar de las Funciones Hiperbólicas	318
	Funciones Hiperbólicas Inversas	318
	Representación Gráfica de las Funciones Hiperbólicas	318
	Relaciones Hiperbólicas Básicas	318
B	Números Complejos	321
B.1	Introducción	323
B.2	Formas de los Números Complejos	323
B.2.1	Forma Cartesiana, $z = (a, b)$	323
B.2.2	Forma Binómica, $z = a + bi$	324
B.3	Operaciones Básicas en \mathbb{C}	324
B.3.1	Suma de Números Complejos	324
	Propiedades de la Suma	324
B.3.2	Producto de Números Complejos	325
B.3.3	Potencias Enteras de i	325

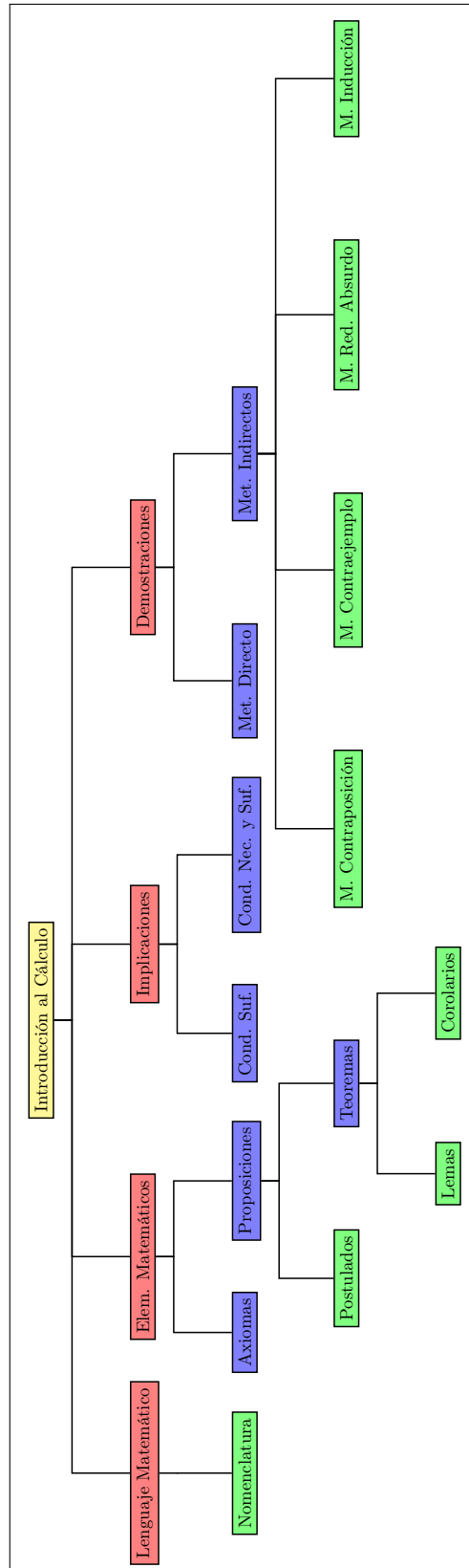
B.3.4	Elemento Inverso, z^{-1}	326
B.3.5	División en \mathbb{C}	326
	Propiedades del Producto	327
B.3.6	El Cuerpo de los Números Complejo	327
B.4	Conjugado de un Número Complejo	327
	B.4.1 Propiedades del Conjugado	327
	B.4.2 Conjugado y División de Números Complejos	327
B.5	Representación Geométrica de \mathbb{C}	328
	B.5.1 El Plano Complejo	328
	B.5.2 Módulo de un Número Complejo	329
	Propiedades del Módulo, $ z $	329
	Módulo y División de Números Complejos	329
	B.5.3 Argumento de un Número Complejo	330
	Determinación General del Argumento	330
B.6	Otras Formas de los Números Complejos	332
B.7	Forma Trigonométrica y Polar	332
	B.7.1 Propiedades y Operaciones Básicas de la Forma Polar	333
	Multiplicación y División en Forma Polar	333
	B.7.2 Potencia n-ésima en Forma Polar	334
B.8	Forma Exponencial	335
	B.8.1 Exponencial Compleja. Fórmula de Euler	335
	B.8.2 Fórmula de De Moivre	336
	B.8.3 Forma Exponencial	337
	B.8.4 Operaciones en Forma Exponencial	337
B.9	Logaritmo Complejo	337
B.10	Potencia Compleja	339
B.11	Raíz n-ésima de un Número Complejo	340
	Geometría de las Raíces n-ésimas	341
	B.11.1 Raíz Cuadrada Generalizada	342
B.12	Seno y Coseno Complejo	343
C	Software Matemático	345
C.0	Software Matemático	346
C.1	Introducción a <i>GeoGebra</i>	346
	C.1.1 Formas de Ejecutar el Programa	347
	C.1.2 Calculadora Gráfica	348
	C.1.3 Calculadora CAS	355
	Operaciones exactas con Números, Fracciones, Variables y Funciones	355
	Operaciones con Números Complejos	357
	Operaciones con Polinomios y Funciones Racionales	358
	Resolución de Ecuaciones, Inecuaciones y Sistemas de Ecuaciones (lineales y no lineales)	360
	Sucesiones y Series	361
	Cálculo de Límites, Derivadas, Integrales y Desarrollos de Taylor de Funciones	363
	Bibliografía	367



Introducción

Contenido

0.1	Introducción	3
0.1.1	Ramas de las Matemáticas	3
0.2	Infinito	4
0.3	El Lenguaje Matemático	4
0.3.1	Nomenclatura Básica	5
0.4	Elementos de las Matemáticas	6
0.5	Tipos de Implicaciones	8
0.5.1	Condición Suficiente (\implies)	8
0.5.2	Condición Necesaria y Suficiente (\iff)	8
0.6	Demostraciones	9
0.6.1	Método Directo	10
0.6.2	Métodos Indirectos	10
0.6.3	Método por Contraposición	11
0.6.4	Método por Contraejemplo	13
0.6.5	Método de Reducción al Absurdo	13
0.6.6	Método de Inducción Matemática	14



0.1. Introducción

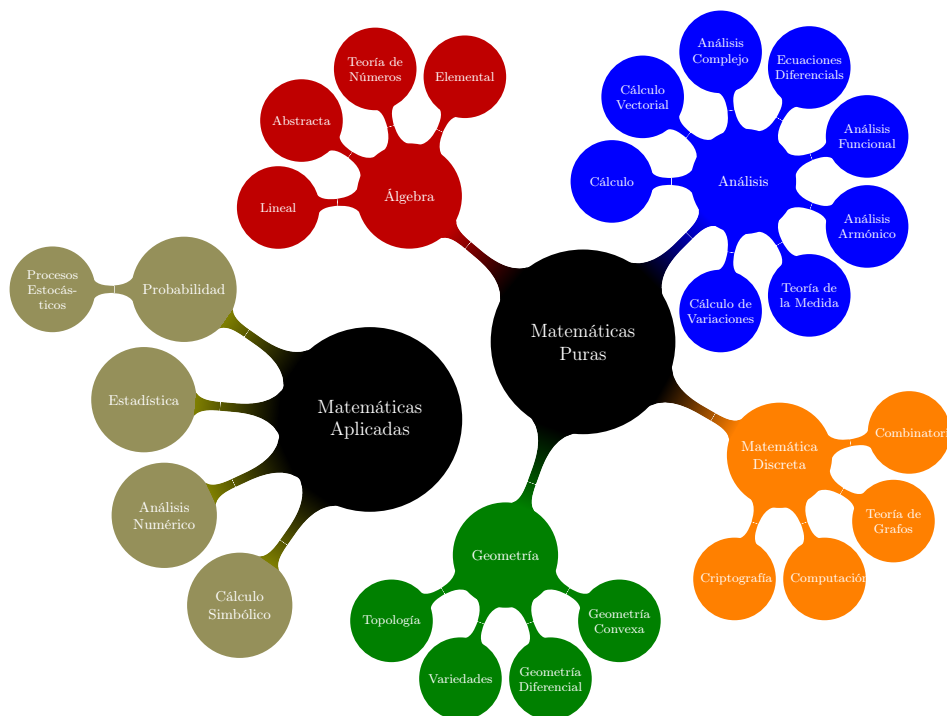
Definición 0.1. Cálculo

El **Cálculo Infinitesimal**¹ es un área de las Matemáticas² en la que se estudian diferentes métodos y técnicas útiles para la resolución de un gran número de problemas de interés científico y tecnológico.

- El *Cálculo* se ocupa entre otras cuestiones del estudio de los incrementos en las variables, límites, series infinitas, integrales, pendientes de curvas, valores máximo y mínimo de funciones y de la determinación de longitudes, áreas y volúmenes.
- Su uso es muy extenso, sobre todo en ciencias e ingenierías, siempre que haya cantidades que varíen de forma **continua**.
- El *Cálculo* constituye una parte muy importante de las matemáticas modernas, dividiéndose en dos áreas: *Cálculo Diferencial* y *Cálculo Integral*, estudiándose ambas en este curso.

0.1.1. Ramas de las Matemáticas

El campo de estudio de las matemáticas es muy amplio de forma que se suele clasificar³ en distintas áreas denominadas *ramas*⁴. Una clasificación simplificada⁵ es la siguiente:



¹Es habitual denominarlo simplemente *Cálculo*. En inglés se denomina *Infinitesimal Calculus* o simplemente *Calculus*.

²Más concretamente el *Cálculo* es una parte del *Análisis Matemático Real*. Desde un punto de vista simplista, los libros sobre *Cálculo* suelen carecer de ciertas demostraciones para enfatizar más en las matemáticas como instrumento práctico, mientras que los libros sobre *Análisis Matemático* aparecen ciertas nociones más teóricas. Muchas veces se considera el *Cálculo* como las matemáticas apropiadas para los ingenieros mientras que el *Análisis* es más propia para matemáticos y físicos que necesitan unas nociones extra de formalismo.

³Hay diferentes clasificaciones en función de las características de interés.

⁴La palabra *rama* proviene del símil de la clasificación con un árbol y sus correspondientes ramas.

⁵La Sociedad Matemática Americana (AMS) distingue unas 5000 ramas distintas de las matemáticas.

0.2. Infinito

Definición 0.2. Infinito

La palabra **infinito** proviene del latín y significa *aquello que no tiene (ni puede tener) término o fin*.



El símbolo matemático de *infinito*⁶ es similar a una curva *lemniscata*⁷ y se cree que podría proceder de símbolos religiosos o alquímicos antiguos. Fue introducido en la notación matemática por el matemático inglés *John Wallis* en 1656.

El concepto de *infinito* aparece en varias ramas de las matemáticas⁸, filosofía, astronomía, etc. en referencia a una cantidad sin límite ni final, y es contrapuesto al concepto de **finitud**.

0.3. El Lenguaje Matemático

Definición 0.3. Lenguaje Matemático

El **lenguaje matemático** es una forma de comunicación, similar al lenguaje natural, cuyo objetivo es la expresión de los contenidos de forma **precisa y sencilla**.

El *lenguaje matemático* es **universal**, siendo igual en cualquier parte del mundo.

Vamos a repasar los elementos del *lenguaje matemático* que le confieren estas importantes propiedades.

- El *lenguaje matemático*, además de naturalmente números está formado por una serie de **símbolos**, cuyas grafías representan conceptos muy determinados, como por ejemplo el símbolo de la *integral*, de la *raíz cuadrada*, de *infinito*, etc.
- Además, aparecen **términos matemáticos especiales**, como los correspondientes a las funciones trigonométricas *seno*, *coseno* y *tangente*, al de los *logaritmos*, a los *límites*, etc.
- Por último, también aparecen **términos generales** del lenguaje natural, pero que en matemáticas tienen significados muy particulares. Por ejemplo, aparecen *letras latinas*, tanto mayúsculas como minúsculas, para referirse a variables, conjuntos, vectores, etc. y también aparecen *letras griegas* que sirven como operadores, ángulos y números, entre otros.

- Símbolos
- Términos Especiales
- Términos Generales

⁶Ver también la [Definición 1.15, página 32](#).

⁷Cuya representación gráfica fue creada por *Jacob Bernoulli* en 1694.

⁸En geometría, en análisis matemático y en teoría de conjuntos entre otras.

0.3.1. Nomenclatura Básica

SÍMBOLO	SIGNIFICADO
\forall	Para todo
\exists	Existe
\in	Pertenece
\subset	Incluido

SÍMBOLO	SIGNIFICADO
\nexists	No existe
\notin	No pertenece
$\not\subset$	No incluido

SÍMBOLO	SIGNIFICADO
\backslash	Tal que
$:$	Tal que
\implies	Implicación (entonces, por tanto)
\iff	Doble Implicación (si y solo si = sii)

SÍMBOLO	SIGNIFICADO
\equiv	Equivalente
\neq	Distinto
\approx	Aproximado
$>, <$	Mayor/menor que
\geq, \leq	Mayor/menor o igual que
\wedge, \vee	y/o lógico
\neg	negación

SÍMBOLO	SIGNIFICADO
\mathbb{N}	Conjunto de números Naturales
\mathbb{Z}	Conjunto de números Enteros
\mathbb{Q}	Conjunto de números Racionales
\mathbb{I}	Conjunto de números Irracionales
\mathbb{R}	Conjunto de números Reales
\mathbb{C}	Conjunto de números Complejos

SÍMBOLO	SIGNIFICADO
Σ	Sumatorio
Π	Productorio
\cup	Unión
\cap	Intersección
\int	Integral
$\sqrt{\quad}$	Raíz cuadrada
$\sqrt[n]{\quad}$	Raíz n-ésima

SÍMBOLO	SIGNIFICADO
\emptyset	Conjunto Vacío
∞	Infinito
i	$\sqrt{-1}$
lim	Límite
log	Logaritmo
ln	Logaritmo natural o neperiano
$\{\dots\}$	Conjunto

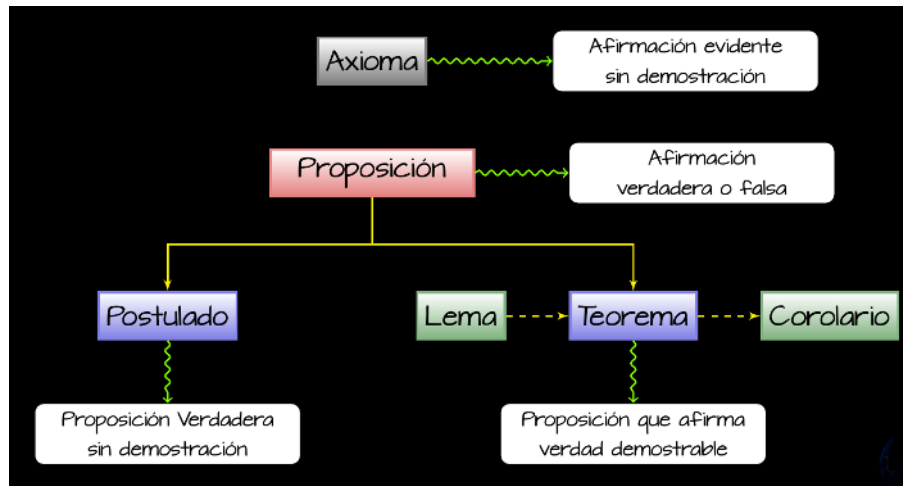
Alfabeto Griego Simplificado

	alfa	beta	gamma	delta	epsilon	eta	theta	kappa	lambda
Minúscula	α	β	γ	δ	ϵ	η	θ	κ	λ
Mayúscula	A	B	Γ	Δ	E	H	Θ	K	Λ

	mu	nu	xi	pi	rho	sigma	tau	phi	chi	psi	omega
Minúscula	μ	ν	ξ	π	ρ	σ	τ	φ	χ	ψ	ω
Mayúscula	M	N	Ξ	Π	P	Σ	T	Φ	X	Ψ	Ω

0.4. Elementos de las Matemáticas

En la siguiente gráfica se resumen los distintos elementos que analizaremos en esta sección.



Definición 0.4. Axioma

Un **axioma**⁹ es una afirmación que se considera *evidente* y es aceptado sin requerir demostración previa.

Los *axiomas* son los pilares sobre los que se construye el edificio de las matemáticas¹⁰.

Ejemplo 0.1. Axiomas

- El *todo* es mayor que cualquiera de sus *partes*.
- El *espacio* tiene infinitos *puntos*, *rectas* y *planos*.
- El *plano* tiene infinitos *puntos* y *rectas*.
- La *recta* tiene infinitos *puntos*.
- Por un *punto* pasan infinitas *rectas*.
- Por una *recta* pasan infinitos *planos*.
- La *línea recta* es la distancia más corta entre dos *puntos*.

Definición 0.5. Proposición Matemática

Una **proposición**¹¹ es una *afirmación* que solo puede ser *verdadera* o *falsa*, pero no ambas a la vez.

Ejemplo 0.2. Proposiciones

- El número 8 es múltiplo de 2. (Verdadera)
- Todos los triángulos son equiláteros. (Falsa)

⁹La palabra *axioma* proviene del griego y significa *lo que parece justo*.

¹⁰Se puede ver una lista de axiomas matemáticos por ejemplo en https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_axioms.

¹¹La palabra *proposición* viene del latín y significa *acción y efecto de poner adelante*.

Hay dos tipos básicos de *proposiciones*:

- **Postulado**¹²: *proposición* cuya veracidad se admite sin demostración, pero sin la evidencia de un *axioma*
- **Teorema**¹³: *proposición* que afirma una *verdad no obvia* pero *demostrable* de forma lógica

Ejemplo 0.3. Postulados

- Todos los **ángulos rectos** son iguales entre sí.
- Una **recta finita** puede prolongarse continuamente por ambos extremos.

Ejemplo 0.4. Teoremas

- **Teorema de Pitágoras**¹⁴. En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de sus catetos es igual al cuadrado de su hipotenusa.
- **Teorema de Fermat**¹⁵. Si n es entero mayor que 2, entonces no existen números enteros positivos a , b y c que cumplan la siguiente igualdad: $a^n + b^n = c^n$.

- En la demostración de grandes *teoremas*, a veces es necesario partirlos en trozos más pequeños, denominados **lemas**¹⁶ que se demuestran por separado como teoremas menores independientes¹⁷.
- Otras veces a partir de los *teoremas* se pueden obtener los **corolarios** que son afirmaciones que siguen inmediatamente a un teorema sin necesidad de demostración. Los *corolarios* son por tanto *proposiciones* que se deducen de lo ya demostrado por los *teoremas*.

Ejemplo 0.5. Lema

- **Lema de Euclides**¹⁸: Si n es un número entero y divide a un producto ab y es coprimo¹⁹ con uno de los factores, entonces n divide al otro factor.
- **Lema de Zorn**²⁰: Todo conjunto parcialmente ordenado no vacío en el que toda cadena (subconjunto totalmente ordenado) tiene una cota superior, contiene al menos un elemento maximal.

Ejemplo 0.6. Corolario

- **Teorema 1**: La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180° .
- **Corolario del Teorema 1**: En un triángulo rectángulo la suma de los dos ángulos contiguos a la hipotenusa es igual a 90° .

¹²Proviene del latín y significa *premisa*, *principio* o *razonamiento*.

¹³Proviene del griego y según el contexto podía significar: *examinar*, *observar*, *reflexionar*, *analizar*, *demostrar*, etc. Se puede ver una lista de teoremas matemáticos por ejemplo en https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_theorems.

¹⁴Fue comprobado en el siglo VI a.C. por el filósofo y matemático griego Pitágoras, pero se estima que pudo haber sido previo a su existencia, o demostrado bajo otra denominación.

¹⁵Este teorema se conocía su veracidad desde 1637 aunque no pudo ser demostrado hasta 1995 por Andrew Wiles.

¹⁶El término *lema* proviene del griego y significa *cualquier cosa que es recibida*, tal como un regalo, una dádiva o un soborno.

¹⁷En algunos casos ciertos lemas demostrados son más famosos que el teorema para el que fueron creados. Se puede ver una lista de lemas matemáticos por ejemplo en https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_lemmas.

¹⁸*Euclides* fue un matemático griego que vivió alrededor del año 300 a.C. y es considerado el padre de la geometría.

¹⁹Dos números enteros a y b son *coprimos*, *primos entre sí* o *primos relativos* si no tienen ningún factor primo en común, es decir, si no tienen otro divisor común más que 1 y -1.

²⁰*Max August Zorn* (1906-1993) fue un matemático alemán nacionalizado estadounidense que trabajó en los campos del álgebra abstracta, teoría de grupos y análisis numérico.

0.5. Tipos de Implicaciones

Sean α y β dos **sentencias** o **afirmaciones**. Entre ellas se puede establecer dos tipos simples de **implicaciones**, **relaciones** o **condiciones**:

- Condición Suficiente
- Condición Necesaria y Suficiente

0.5.1. Condición Suficiente (\implies)

La implicación simple $\alpha \implies \beta$ se puede leer de diversas formas: " α implica β ", "si α , entonces β ", " α es suficiente para β ", " α es una condición suficiente para β " y " α solo si β ".

- Una **condición suficiente** $\alpha \implies \beta$ significa que el cumplimiento de α implica directamente el cumplimiento de β .
- Además implica obligatoriamente que " β sea una **condición necesaria** para α ", es decir que si no se cumple β tampoco se puede cumplir α . Esto se representa como $\neg\beta \implies \neg\alpha$, donde \neg es el símbolo de *negación*.

Ejemplo 0.7. Condición Suficiente

Sean a y b dos números, entonces si: $a, b > 0 \implies ab > 0$

- Notar que el producto ab puede ser positivo siendo los dos negativos, por tanto que a y b sean positivos solo es una *condición suficiente* pero **no necesaria** para que $ab > 0$.
- Por otra parte que $ab > 0$ es una *condición necesaria* para que $a, b > 0$ ya que si no se cumple (su producto es negativo) obligatoriamente los dos no pueden ser positivos.

0.5.2. Condición Necesaria y Suficiente (\iff)

La implicación doble $\alpha \iff \beta$ se lee " α implica β y β implica α " o " α si y solo si β ", donde se suele utilizar el acrónimo **sii**²¹.

En ella α es una **condición necesaria y suficiente** para que se produzca β y a la vez β también es una **condición necesaria y suficiente** para que se verifique α .

Ejemplo 0.8. Condición Necesaria y Suficiente

$$a \geq 0 \iff 2a \geq 0$$

- $a > 0$ es *necesario y suficiente* para que $2a > 0$.
- A su vez $2a > 0$ también es *necesario y suficiente* para que $a > 0$.

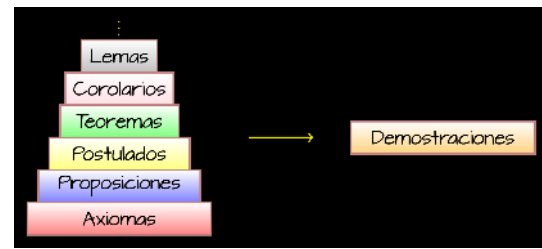
²¹En inglés denotado como *iff*, (if and only if).

0.6. Demostraciones

Hemos visto²² como el mundo de las matemáticas se **construye** a partir de una serie de *axiomas, proposiciones, postulados, teoremas*, etc. **iniciales**.

Éstos a su vez permiten la creación de **nuevos teoremas, lemas y corolarios**.

Para ello es necesario poder **demostrar** la validez de cualquier tipo de *proposición matemática*²³.



Definición 0.6. Demostración Matemática

Una **demostración** es la prueba de una verdad por medio del *razonamiento*, partiendo para ello de principios evidentes o ya demostrados.

El proceso básico de una demostración matemática es el siguiente:

- Las *suposiciones iniciales* se denominan **hipótesis**, y las *afirmaciones no evidentes a demostrar* se denominan **tesis**.
- La **demostración** consiste en el conjunto de *razonamientos lógicos* utilizados para pasar de las **hipótesis** a las **tesis**.



Las demostraciones son una actividad básica en matemáticas. Sin embargo, generalmente son operaciones complejas, que no tienen un patrón de actuación determinado para su aplicación.

Hay distintos caminos para realizar una demostración²⁴ que dependen de la naturaleza de las hipótesis y de las tesis. Por ello es necesario conocer diferentes *técnicas de demostración* y tener una cierta práctica para saber cual es el mejor camino en cada caso.

Vamos a ver los principales procedimientos matemáticos básicos para la demostración de una proposición matemática.

- Método Directo²⁵
- Métodos Indirectos²⁶
 - Método por Contraposición²⁷
 - Método por Contraejemplo²⁸
 - Método de Reducción al Absurdo²⁹
 - Método de Inducción Matemática³⁰

²²Ver la Sección 0.4, página 6.

²³Ver la Definición 0.5, página 6.

²⁴Algunas demostraciones son más sencillas, otras más elegantes o cortas, etc.

²⁵Ver la Sección 0.6.1, página 10.

²⁶Ver la Sección 0.6.2, página 10.

²⁷Ver la Sección 0.6.3, página 11.

²⁸Ver la Sección 0.6.4, página 13.

²⁹Ver la Sección 0.6.5, página 13.

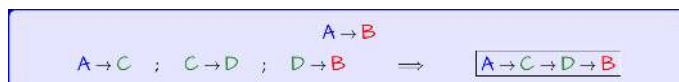
³⁰Ver la Sección 0.6.6, página 14.

0.6.1. Método Directo

El método de demostración **directo** consiste en partir de las hipótesis iniciales y mediante teoremas conocidos y razonamientos matemáticos lógicos, obtener las conclusiones deseadas.

Nota 0.1. El método directo se basa en la *regla de inferencia clásica o esquema argumentativo válido* llamado también *Modus Ponens*, $[P \wedge (P \rightarrow Q)] \rightarrow Q$, que significa: si la hipótesis P es verdadera y además P implica la conclusión Q entonces la conclusión Q es verdadera.

Desde un punto de vista práctico, este método consiste en partir de las hipótesis iniciales A y tratar de avanzar hacia la tesis propuesta B en diferentes pasos y mediante distintas técnicas que varían según cada caso particular.



Ejercicio 0.1. Demostrar que el cuadrado de un número impar también es impar.

Afirmación a demostrar: $m \text{ impar} \Rightarrow m^2 \text{ impar}$

Aplicamos un método directo en su demostración:

- Sea $m = 2k + 1$ con $k \in \mathbb{Z}$ un número impar cualquiera.
- $m^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \underbrace{(2k^2 + 2k)}_t + 1 = 2t + 1$ con $t \in \mathbb{Z}$.
- Por tanto m^2 es un número impar también.

Nota 0.2. Notar que en realidad la afirmación anterior es una *condición necesaria y suficiente*: $m \text{ impar} \Leftrightarrow m^2 \text{ impar}$. Sin embargo el enunciado del ejercicio solo nos pide demostrar que es una *condición suficiente*. Si el enunciado hubiera sido: "demostrar que el cuadrado de un número es impar **si y solo si** ese número es impar", además de la demostración anterior también se tendría que haber demostrado que se cumple la implicación contraria: $m^2 \text{ impar} \Rightarrow m \text{ impar}$. Ver esto en el [Ejercicio 0.2, página 11](#).

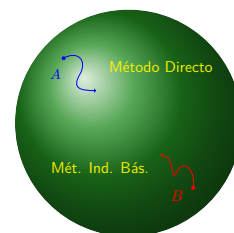
El *método directo* suele ser el más sencillo de todos y normalmente el primero que se prueba en una demostración. A pesar de la *sencillez* de su planteamiento, suele ser *complicado* en la práctica y por tanto solo útil en los casos más sencillos.

0.6.2. Métodos Indirectos

Los **métodos indirectos**, a diferencia de los directos que empiezan con las hipótesis hasta demostrar la tesis, siguen diferentes caminos y estrategias, a veces no triviales, para conseguir la demostración. Se suelen utilizar en demostraciones más complicadas donde no es fácil utilizar el método directo.

Hay varios tipos de métodos indirectos entre los que destacan el de *contraposición*, el de *reducción al absurdo*, el de *contraejemplo* y el de *inducción*, que veremos en las siguientes secciones.

Aquí vamos a ver un *método indirecto básico*, que es similar al *directo* pero partiendo de la tesis final B y avanzar hacia la hipótesis inicial A , pasando por diferentes estados C, D , etc.



Ejercicio 0.2. Demostrar que si $x > 0$ entonces se cumple: $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Vamos a utilizar un método indirecto básico, empezando por la sentencia a demostrar:

$$1) \quad x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \implies \quad x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0 \quad (C)$$

$$2) \quad x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0 \quad \implies \quad \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \geq 0 \quad (D)$$

$$3) \quad \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \quad \implies \quad \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0 \quad \implies \quad \boxed{x > 0} \quad (A)$$

Las ventajas e inconvenientes de este *método indirecto básico* son análogos a los del *método directo*, es decir, suele ser difícil de realizar de forma general y solo útil en los casos más sencillos.

0.6.3. Método por Contraposición

El **método por contraposición** es un *método indirecto* de demostración que se basa en lo siguiente:

Como hemos comentado³¹ en toda implicación simple $\alpha \implies \beta$ se cumple $\neg\beta \implies \neg\alpha$, resultando en algunos casos más sencillo demostrar esta segunda implicación en lugar de la primera.

$$A \rightarrow B \quad \iff \quad \boxed{\text{no } B \rightarrow \text{no } A}$$

- En este método en lugar de demostrar una proposición "si **A** entonces **B**", se demuestra una proposición distinta pero equivalente, que es: "si no **B** entonces no **A**".
- Es decir, consiste en partir de lo contrario de la tesis final **B**, y llegar a demostrar que se cumple lo contrario de la hipótesis inicial **A**.

Ejemplo 0.9. Equivalencia de Proposiciones

Sea la proposición: "Si vivo en Madrid, entonces vivo en la Tierra".

- Aquí la hipótesis **A** es "vivo en Madrid" y la tesis **B** es "vivo en la Tierra".
- Esta proposición es equivalente a esta otra: "Si **no** vivo en la Tierra, entonces **no** vivo en Madrid".
- Ahora lo contrario de la tesis pasa a ser la hipótesis y lo contrario de la hipótesis la tesis.

Nota 0.3. Se podría pensar que otra proposición equivalente a $A \rightarrow B$ es $\neg A \rightarrow \neg B$. Pero esto no siempre es cierto, como por ejemplo en el caso anterior: "si **no** vivo en Madrid, entonces **no** vivo en la Tierra", es claramente falsa, ya que se podría vivir en otra ciudad distinta de la Tierra. Por tanto, la única proposición siempre equivalente a "si **A** entonces **B**" solo es "si **no B** entonces **no A**".

El *método de contraposición* es interesante utilizarlo siempre que sea más fácil de demostrar la segunda proposición, que como hemos visto, es equivalente a la original.

³¹Ver la Sección 0.5.1, página 8.

Ejercicio 0.3. Demostrar que el cuadrado de un número es impar si y solo si ese número es impar.

En este caso se trata de una doble implicación:

$$m \text{ impar} \iff m^2 \text{ impar}$$

Lo cual conlleva hacer dos demostraciones, una en cada sentido. La demostración hacia la derecha ha sido realizada en el anterior [Ejercicio 0.1, página 10](#). Vamos a realizar aquí la otra demostración hacia la izquierda.

Afirmación a demostrar: $m^2 \text{ impar} \implies m \text{ impar}$

Vamos a utilizar el *método de contraposición*, por ello partimos de que m **no** es impar (es decir par) y tenemos que llegar a demostrar que entonces m^2 es **no** impar (par).

$$m \text{ par} \implies m^2 \text{ par}$$

- Sea $m = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$ un número par cualquiera.
- $m^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \underbrace{(2k^2)}_t = 2t$ con $t \in \mathbb{Z}$.
- Por tanto m^2 es un número par.

Con ello se demuestra que $m \text{ -impar} \implies m^2 \text{ -impar}$ lo que implica que $m^2 \text{ impar} \implies m \text{ impar}$ como queríamos demostrar³².

Ejercicio 0.4. Demostrar que si n^2 es par entonces n también es par.

$$1) \left. \begin{array}{l} A = n^2 \text{ par} \\ B = n \text{ par} \end{array} \right\} \implies \begin{array}{c} \boxed{\text{no B}} \\ n \text{ impar} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \boxed{\text{no A}} \\ n^2 \text{ impar} \end{array}$$

2) Si n es impar entonces n^2 también es impar \implies ¡Ya demostrada! en [Ejercicio 0.1, página 10](#)

3) Como hemos demostrado una proposición equivalente a la original, esta última queda demostrada.

Ejercicio 0.5. Demostrar que si c es un número impar, entonces la ecuación:

$$n^2 + n - c = 0$$

no tiene ninguna solución entera.

1) Vamos a utilizar el método de contraposición, transformándose la proposición a demostrar en:
no $B \rightarrow$ no $A \implies n^2 + n - c = 0$ tiene soluciones enteras implica que c es par

2) $n = x$ (sol. entera) $\implies x$ puede ser par o impar $\implies c = n^2 + n = x^2 + x$ par o impar?

$$\begin{cases} \text{si } x \text{ par} & : x = 2s & \rightarrow c = x^2 + x = 4s^2 + 2s & \rightarrow \text{par} \\ \text{si } x \text{ impar} & : x = 2s + 1 & \rightarrow c = x^2 + x = (4s^2 + 4s + 1) + (2s + 1) & \rightarrow \text{par} \end{cases}$$

3) Queda demostrada la implicación por contraposición y, por tanto, se demuestra la implicación original.

³²La frase "como queríamos demostrar" se suele representar como **c.q.d.**

0.6.4. Método por Contraejemplo

El **método de demostración por contraejemplo** es útil para demostrar que una determinada proposición $A \rightarrow B$ es **falsa**, es decir, que se puede cumplir en algunos casos pero no en todos. Para ello se basa en encontrar un *contraejemplo*, es decir, un determinado caso en el que **no** se cumpla la proposición y, por tanto, claramente no puede ser cierta en todo el conjunto.

$$A \rightarrow B \text{ (Falso)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Contraejemplo !}}$$

Veamos un par de ejemplos, el primero trivial³³.

Ejercicio 0.6. Demostrar la falsedad de la proposición: *Todos los números son pares.*

Usando el método de demostración *por contraejemplo*, basta encontrar un número que no sea par, por ejemplo el 3, lo que desmiente la afirmación y asegura que es **falsa**.

Ejercicio 0.7. Analizar la veracidad de la siguiente proposición:

No existen números enteros consecutivos x , y y z que cumplan: $x^2 + y^2 = z^2$

Probando diferentes números enteros consecutivos, podemos encontrar un caso en el que sí se cumple la ecuación, por **ejemplo**: $x = 3$, $y = 4$ y $z = 5$, donde:

$$3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$$

Este *contraejemplo* sirve para demostrar la **falsedad** de la proposición.

0.6.5. Método de Reducción al Absurdo

En algunos casos es más difícil demostrar la veracidad de una afirmación, que demostrar que lo contrario de lo que se quiere demostrar es imposible.

El método de demostración por **reducción al absurdo**³⁴ consiste en suponer cierto que cumpliéndose las hipótesis de la afirmación original, se verifica lo contrario de la conclusión. Si con esta nueva afirmación de partida y siguiendo un proceso lógico se llega a una *contradicción*³⁵, esto implica la veracidad de la afirmación original³⁶.

$$A \rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad A \rightarrow \text{no } B \quad \boxed{\text{Contradicción !}}$$

Ejemplo 0.10. Equivalencia de Proposiciones

Sea la proposición del **Ejemplo 0.9, página 11** : "Si vivo en Madrid, entonces vivo en la Tierra".

- Aquí la hipótesis A es "vivo en Madrid" y la tesis B es "vivo en la Tierra".
- El método de *reducción al absurdo* consiste en intentar demostrar la proposición: "si vivo en Madrid **no** vivo en la Tierra", y llegar a una *contradicción* (ya que Madrid está en la Tierra) lo cual demuestra la veracidad de la afirmación original.

³³En matemática, el término *trivial* se usa frecuentemente para referirse a algo que tiene una estructura muy simple y suele referirse a una opción, caso o posibilidad poco interesante pero ilustrativa.

³⁴Este método se atribuye al filósofo griego Zenón de Elea, alrededor del siglo V a.C.

³⁵Es decir, algo imposible o absurdo.

³⁶Si es falso que algo sea falso, es porque es verdadero.

Nota 0.4. Solo se pueden demostrar de esta forma problemas que tengan únicamente dos estados, tipo *on/off*. Por ejemplo, no se puede demostrar que una cosa es roja, demostrando que no es verde, pero sí se puede demostrar que un número no nulo es par, demostrando que no es impar.

Ejercicio 0.8. Demostrar que si $n \in (0, 1)$ entonces $n^2 < n$.

Vamos a demostrarlo usando el método de *reducción al absurdo*. Para ello suponemos que para todo número real $n \in (0, 1)$, se verifica lo contrario de lo que se quiere demostrar, es decir que $n^2 \geq n$. Entonces:

- $n \cdot n \geq n$
- Como $n \in (0, 1)$ y por tanto $n > 0$ se tiene que³⁷ $n \geq 1$.
- Pero esto es una **contradicción** ya que $n \in (0, 1)$.
- Por tanto, queda demostrado que si $n \in (0, 1)$ entonces $n^2 < n$.

0.6.6. Método de Inducción Matemática

El **método de inducción matemática**³⁸ es fundamental en las matemáticas y aunque existen diversas versiones, aquí nos centraremos en la más sencilla y utilizada.

El **método de inducción matemática** se utiliza para demostrar afirmaciones o fórmulas que son función o dependen de un número entero n , y que se verifica para números mayores o iguales que un determinado valor inicial³⁹ $n_0 \in \mathbb{Z}$.

El *método de inducción matemática* está basado en el siguiente *principio*⁴⁰.

Teorema 0.1. Principio de Inducción Matemática

Una determinada proposición $P(n)$ es cierta para un conjunto de números enteros n a partir de un dado n_0 si se verifican las dos siguientes condiciones:

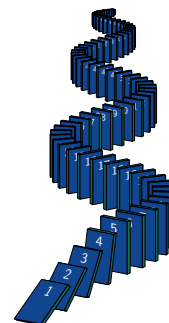
1. $P(n_0)$ sea cierta.
2. Suponiendo cierta $P(n)$ poder demostrar que también es cierta⁴¹ $P(n + 1)$.

Si se demuestran estos dos puntos se puede asegurar que $P(n)$ es válida para todo entero $n \geq n_0$.

El *principio de inducción matemática* se puede interpretar mentalmente como una reacción en cadena, imaginando por ejemplo que cada una de las expresiones $P(n)$ corresponden con las fichas de un dominó ordenadas en una fila infinita, y que su demostración corresponde con la caída de todas fichas.

Para que caigan las infinitas fichas, es decir la demostración completa, es necesario comprobar que cae la primera, siendo este el primer paso del principio de inducción, y comprobar posteriormente que suponiendo que cae una ficha cualquiera podamos verificar que esta tira a la siguiente, correspondiendo esto con el segundo paso del principio.

Ambos pasos garantizan la caída continua de las fichas y, por tanto, la demostración completa de todos los casos posibles $P(n)$.



³⁷Dividiendo ambas partes de la desigualdad anterior entre n . Ver la [Sección 1.3.1, página 36](#).

³⁸Por simplicidad muchas veces se denomina simplemente *inducción*.

³⁹En muchos casos $n_0 = 1$ aunque no siempre.

⁴⁰Un *principio* en matemáticas es una propiedad demostrable (proposición, teorema, etc.) que puede ser aplicada como técnica de resolución de problemas diversos.

⁴¹En algunos casos es preferible suponer cierto para $n = k - 1$ y demostrar que es cierto para $n = k$.

Ejercicio 0.9. Demostrar que la suma de los n primeros números naturales viene dada por la expresión⁴²:

$$S(n) = \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Como se trata de demostrar una fórmula que depende de un n natural, vamos a aplicar el *método de inducción matemática*. Para ello tenemos que comprobar que se cumplen los dos puntos del principio⁴³ aplicados a este caso:

1. Comprobamos que la fórmula es válida para $n = 1$, para ello comprobamos que el resultado obtenido por la suma directa de los términos (en este caso solo uno) coincide con el valor obtenido por la fórmula a demostrar:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{La suma del primer número natural es 1} \\ S(1) = \sum_{i=1}^1 i = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{Cierto}}$$

2. Suponemos cierta la fórmula a demostrar para $n = k$:

$$S(k) = \sum_{i=1}^k i = 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Utilizándola, vamos a demostrar que también es cierta la fórmula para $n = k + 1$. Hacemos igual que en el paso anterior, comparamos el resultado de la suma directa de los $k + 1$ primeros números naturales (usando para ello la fórmula que hemos supuesto como cierta), con el resultado obtenido por la fórmula a demostrar para $n = k + 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} S(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} i = \underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + k}_{S(k)} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k^2 + 3k + 2}{2} \\ S(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{k^2 + 3k + 2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{Cierto}}$$

Al cumplirse los dos puntos del *principio de inducción matemática* hemos demostrado la validez de la fórmula para todos los números naturales.

Ejercicio 0.10. Demostrar que la suma de los n primeros números impares es n^2 .

Nos piden demostrar la siguiente fórmula:

$$S_i(n) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Utilizamos el *método de inducción matemática*:

1. Comprobamos que se cumple la fórmula para el primer número $n = 1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{La suma del primer número impar es 1} \\ S_i(1) = 1^2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{Cierto}}$$

⁴²Ver la definición de *sumatorio* \sum en la [Sección 9.2, página 227](#).

⁴³Ver el [Teorema 0.1, página 14](#).

2. Suponiendo cierta la fórmula para $n = k$, $S_i(k) = \sum_{i=1}^k (2i - 1)/2 = k^2$, vamos a demostrar que también es cierta para $n = k + 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_i(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} (2i - 1) = \underbrace{1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)}_{S_i(k)} + [2(k+1) - 1] = k^2 + 2k + 1 \\ S_i(k+1) = (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{Cierto}}$$

Como se cumplen los dos puntos del *principio de inducción* podemos asegurar que la fórmula es válida para todo n natural.

Ejercicio 0.11. Demostrar que el número $10^n - 1$ es un múltiplo de 9 $\forall n \in \mathbb{N}$.

Tenemos que demostrar una afirmación que depende de un n natural, por tanto utilizamos el *principio de inducción matemática*.

1. Comprobamos que se cumple la fórmula para el primer número $n = 1$.

$$10^1 - 1 = 9 = 9 \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Cierto}}$$

2. Suponemos cierta la afirmación para $n = k$:

$$10^k - 1 = 9\alpha$$

siendo α un determinado número natural. Teniendo esto en cuenta, verificamos la afirmación para $n = k + 1$. Podemos empezar probando:

$$10^{k+1} - 1 = 10 \cdot 10^k - 1 \quad \rightsquigarrow \quad \text{por aquí no vamos a ningún lado !!}$$

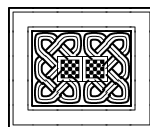
Es preferible en estos casos partir de la suposición cierta y transformarla buscando la expresión a demostrar, $10^{k+1} - 1$, en este caso:

$$10^k - 1 = 9\alpha \quad ; \quad 10(10^k - 1) = 10(9\alpha) \quad ; \quad 10^{k+1} - 10 = 90\alpha \quad ; \quad 10^{k+1} - 1 = 90\alpha + 9$$

$$10^{k+1} - 1 = 9(10\alpha + 1) = 9\beta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Cierto}}$$

siendo β un determinado número natural.

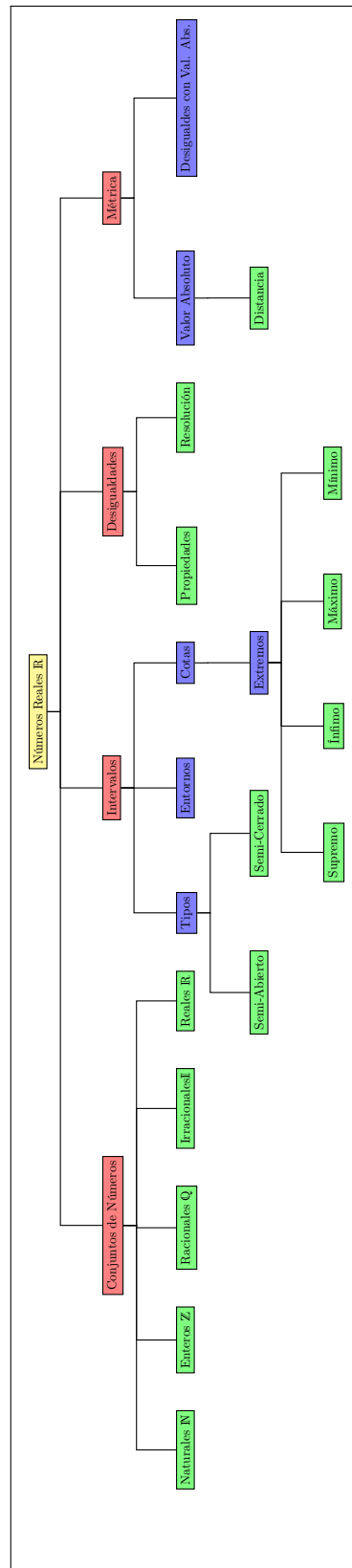
Como se cumplen los dos puntos del *principio de inducción* podemos asegurar que la afirmación es cierta para todo n natural.



Números Reales \mathbb{R}

Contenido

1.1	Los Números y sus Tipos	19
1.1.1	Conjunto de los Números Naturales \mathbb{N}	19
1.1.2	Conjunto de los Números Enteros \mathbb{Z}	21
1.1.3	El Conjunto de los Números Racionales \mathbb{Q}	23
1.1.4	El Conjunto de los Números Irracionales \mathbb{I}	28
1.1.5	El Conjunto de los Números Reales \mathbb{R}	29
1.2	Intervalos	30
1.2.1	Tipos de Intervalos	31
1.2.2	Entornos	34
1.2.3	Cotas y Extremos	35
1.3	Desigualdades	36
1.3.1	Propiedades de las Desigualdades	36
1.3.2	Resolución de Desigualdades	37
1.4	Métrica en \mathbb{R}	40
1.4.1	Valor Absoluto, $ x $	40
1.4.2	Distancia en \mathbb{R}	41
1.4.3	Desigualdades con Valores Absolutos	42



1.1. Los Números y sus Tipos

Definición 1.1. Número

Un **número** es una entidad abstracta que se usa para describir una cantidad.

Hay diferentes tipos de números que se clasifican en función de sus peculiaridades, características, aplicaciones, etc. (ver figura de la derecha).

En este curso se estudiarán únicamente los **números reales**, que es un conjunto grande de números que engloba a su vez otros diferentes conjuntos de números (ver figura inferior). En las siguientes secciones se describirán estos tipos de números y sus propiedades, si bien no nos ocuparemos gran cosa en saber como se definen desde un punto de vista puramente matemático.



1.1.1. Conjunto de los Números Naturales \mathbb{N}

Definición 1.2. Número Natural

Un **número natural** es cualquiera de los números que se usan para contar los elementos de un conjunto¹ finito, es decir los números 1, 2, 3, etc.

Los *números naturales* fueron los primeros que utilizó el hombre y surgen de forma *natural*² ante la necesidad de los seres humanos de contar cosas. De forma más o menos generalizada el número **cero** no se incluye entre los números naturales³, ya que el concepto de número *cero* no existía en muchas culturas antiguas⁴, donde los números se utilizaban para describir *cantidades* de cosas, y por tanto no tenía sentido un número que significara *nada o ninguno*.

Definición 1.3. Conjunto de los Números Naturales

El **conjunto de los números naturales** es el más sencillo de todos, se representa mediante el símbolo⁵ \mathbb{N} y se puede definir como:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

¹Ver en el **Apéndice A.1, página 298** una introducción a los conjuntos.

²De ahí su nombre.

³Existen distintas disciplinas matemáticas, como la teoría de conjuntos, en las cuales el 0 si se considera un número natural.

⁴El número cero aparece desde el año 2000 a.C. en antiguas civilizaciones como las del Antiguo Egipto, Babilonia, Antigua Grecia y la civilización Maya, en diversas formas y usos, pero fue la civilización India sobre el año 500 la que empezó a usar el número cero de una forma similar a como lo conocemos hoy en día.

⁵Corresponde a la *letra ene mayúscula* con una doble barra.

Características de \mathbb{N}

- No incluye al **número cero**, (0)
- Es un conjunto **infinito**⁶
- Es un conjunto **numerable**⁷
- Es un conjunto **ordenado**⁸, de tipo **orden total** con el operador menor o igual⁹ (\leq)

Nota 1.1. Como veremos posteriormente en el estudio de otros conjuntos de números, estas sencillas propiedades no siempre se verifican en esos conjuntos.

La propiedad más importante de \mathbb{N} es el *Principio de Inducción Matemática*¹⁰.

Operaciones Internas en \mathbb{N}

En \mathbb{N} se pueden definir dos *operaciones internas*¹¹: $\left\{ \begin{array}{ll} \text{suma o adición} & (+) \\ \text{producto o multiplicación} & (\cdot) \end{array} \right.$

Propiedades de $(\mathbb{N}; +, \cdot)$

- **Conmutativa** $(+, \cdot)$ $\left\{ \begin{array}{l} a + b = b + a \\ a \cdot b = b \cdot a \end{array} \right.$
 - **Asociativa** $(+, \cdot)$ $\left\{ \begin{array}{l} (a + b) + c = a + (b + c) \\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \end{array} \right.$
 - **Distributiva**¹² $(+, \cdot)$ $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
 - **Elemento Neutro**¹³ (\cdot) : $\exists 1 \in \mathbb{N} : a \cdot 1 = a$
- $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$

Conclusión sobre \mathbb{N}

- El conjunto \mathbb{N} no es *cerrado*¹⁴ respecto a la operación resta¹⁵.
- Esto imposibilita el utilizar el conjunto de los números naturales como un entorno apropiado para trabajar exclusivamente en él.
- Por tanto, es necesario encontrar un conjunto de números apropiado en el que se puedan plantear y resolver un amplio conjunto de problemas tanto con carácter teórico (matemáticas) como práctico (física, ingeniería, etc.).

⁶Ver la [Definición A.2, página 298](#).

⁷Se dice que un conjunto es *numerable* si se puede asociar a cada elemento del conjunto un número natural: a un elemento le asociamos el 1, a otro el 2, etc. Ver la [Definición A.3, página 298](#).

⁸Es decir, entre los elementos del conjunto se puede establecer una *relación de orden*, ver la [Definición A.11, página 300](#).

⁹Esto significa que cualquier par de números naturales se pueden comparar y determinar cual de ellos es menor o igual que el otro.

¹⁰Ver el [Teorema 0.1, página 14](#).

¹¹Ver la [Definición A.4, página 298](#).

¹²Propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

¹³En la suma no existe el elemento neutro puesto que $0 \notin \mathbb{N}$.

¹⁴Ver la [Definición A.5, página 298](#).

¹⁵Por ejemplo: $2 - 3 \notin \mathbb{N}$. Por supuesto tampoco es cerrado respecto a otras operaciones como la división o cociente.

1.1.2. Conjunto de los Números Enteros \mathbb{Z}

Definición 1.4. Conjunto de los Números Enteros

El **conjunto de los números enteros** se representa mediante¹⁶ \mathbb{Z} y es una ampliación del conjunto de los números naturales \mathbb{N} , añadiendo la *resta* como *operación interna*¹⁷. Está formado por todos los números **enteros positivos**, **enteros negativos**, y el número cero.

$$\mathbb{Z} = \{ \underbrace{\dots, -3, -2, -1}_{\text{Enteros Negativos}}, 0, \underbrace{+1, +2, +3, \dots}_{\text{Enteros Positivos}} \}$$

El conjunto de los números enteros \mathbb{Z} tiene tres partes:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

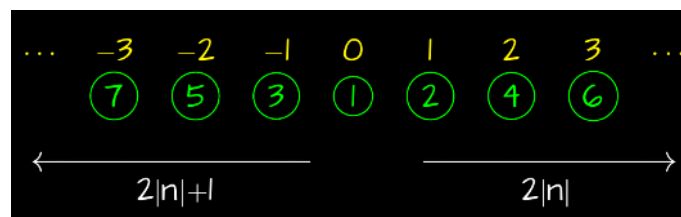
- **Conjunto de Enteros Positivos, \mathbb{Z}^+** : corresponde con el conjunto de los números naturales \mathbb{N} . Para diferenciarlos se les suele anteponer el signo *positivo* o *más* (+).
- El número cero (0): número *par*¹⁸ de valor nulo.
- **Conjunto Enteros Negativos, \mathbb{Z}^-** : corresponde con el conjunto **opuesto**¹⁹ de los números naturales \mathbb{N} . Corresponden con los números naturales precedidos del signo *negativo* o *menos*.

Características de \mathbb{Z}

- Es un conjunto **infinito**.
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
- Es un conjunto²⁰ **numerable** y **ordenado**, (**orden total** con \leq).

Ejercicio 1.1. Establecer un determinado orden total en \mathbb{Z} .

Para comprobar que \mathbb{Z} es numerable, es decir que a cada elemento podemos asociarle un número natural, podemos hacer lo siguiente: al **cero** le asignamos el 1, al **uno** el 2, **al -1** el 3, **al 2** el 4, **al -2** el 5, **al 3** el 6, **al -3** el 7, etc. En la siguiente gráfica se muestran en amarillo los elementos de \mathbb{Z} y en verde el orden establecido a cada uno de ellos.



De esta forma a los enteros positivos les podemos asignar los números naturales pares, y al número cero y los enteros negativos les asignamos los números naturales impares, teniendo de esta forma todos los números enteros asignado un número natural.

¹⁶Este símbolo corresponde a la letra zeta mayúscula con una doble barra y proviene de la palabra *Zahl* que significa número en alemán.

¹⁷Ver la [Sección 1.1.1, página 20](#).

¹⁸Ya que $0 \cdot 2 = 0$.

¹⁹El *opuesto* de un número es aquel que tiene el mismo *valor absoluto* (ver la [Definición 1.24, página 40](#)) pero signo contrario.

²⁰Ver la [Sección 1.1.1, página 20](#).

Número de Elementos de \mathbb{Z}

Hay una cierta *paradoja*²¹ sobre el número de elementos (*cardinal*²²) del conjunto \mathbb{Z} .

1. Por la definición²³ de \mathbb{Z} y como $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ parece que en principio su *cardinal* es: $|\mathbb{Z}| = 2|\mathbb{N}| + 1$
2. Sin embargo, como \mathbb{Z} es *numerable*²⁴, existe una relación *directa uno a uno* entre \mathbb{N} y \mathbb{Z} y por tanto su *cardinal* debe ser igual que el de \mathbb{N} : $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$

La explicación a esto es que ambos conjuntos son *infinitos* y por tanto en ellos no funcionan las reglas aritméticas de los números, cumpliéndose²⁵:

$$2\infty + 1 = \infty$$

Operaciones en \mathbb{Z}

Definición 1.5. Opuesto

Dado un número $a \in \mathbb{Z}$ se define el **opuesto** de a como $(-a)$. Es decir si a es positivo su *opuesto* es negativo y viceversa, donde el *opuesto* de 0 es el propio 0.

- La operación **resta** o **diferencia** se puede definir a través de la operación **suma** de la siguiente forma:

$$a - b = a + (-b) \quad , \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

es decir, **restar** a menos b es lo mismo que **sumar** a más el *opuesto* de b .

La **resta** no se considera una operación nueva, sino una suma particular.

- El producto (\cdot) entre números enteros sigue la conocida regla de los signos:

$$\begin{array}{l} (+) \cdot (+) = (+) \\ (+) \cdot (-) = (-) \\ (-) \cdot (+) = (-) \\ (-) \cdot (-) = (+) \end{array}$$

donde $(+)$ representa cualquier entero positivo y $(-)$ cualquier entero negativo.

Propiedades de $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$

El conjunto \mathbb{Z} junto con las operaciones de suma $+$ y producto *cdot* cumplen las mismas propiedades que²⁶ $(\mathbb{N}; +, \cdot)$, añadiendo el **elemento neutro** y **opuesto de la suma** y el **elemento absorbente del producto**.

²¹La palabra *paradoja* proviene del griego y es una figura retórica que consiste en la utilización de expresiones que envuelven una contradicción. Esto quiere decir que, más allá de las condiciones contradictorias, los factores presentados resultan válidos, reales o verosímiles.

²²Ver la **Definición A.2**, página 298.

²³Ver la **Definición 1.3**, página 19.

²⁴Ver la **Sección 1.1.2**, página 21.

²⁵Ver la **Sección 8.10.1**, página 204.

²⁶Ver la **Sección 1.1.1**, página 20.

<ul style="list-style-type: none"> • Conmutativa $(+, \cdot)$ • Asociativa $(+, \cdot)$ • Distributiva $(+, \cdot)$ • Elemento Neutro (\cdot) 	} Prop. Conjunto \mathbb{N}
<ul style="list-style-type: none"> • Elemento Neutro $(+)$ $\exists 0 \in \mathbb{Z} : a + 0 = a$ • Elemento Opuesto $(+)$ $\forall a \in \mathbb{Z} \exists (-a) : a + (-a) = 0$ • Elemento Absorbente (\cdot) $\exists 0 \in \mathbb{Z} : a \cdot 0 = 0$ 	

Conclusión sobre \mathbb{Z}

- El conjunto \mathbb{Z} tiene mejores propiedades operacionales que \mathbb{N} ya que es cerrado respecto la suma/resta y al producto.
- Sin embargo **no** es cerrado respecto a la operación división o cociente²⁷.
- Por tanto es necesario ampliar \mathbb{Z} para encontrar un conjunto de números apropiado a todas las operaciones de interés entre números.

1.1.3. El Conjunto de los Números Racionales \mathbb{Q}

Definición 1.6. Conjunto de los Números Racionales

El **conjunto de los números racionales** se representa mediante²⁸ \mathbb{Q} y es una ampliación del conjunto de los números enteros \mathbb{Z} , añadiendo la *división* como *operación interna*²⁹. Se puede definir como el conjunto de números formados por el cociente entre un número entero a llamado **numerador** y un número natural³⁰ b llamado **denominador**. Al cociente de ambos se le denomina **fracción**.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\} \quad \begin{cases} a : \text{numerador} \\ b : \text{denominador} \end{cases}$$

Operaciones en \mathbb{Q}

- La **suma** y **producto** de números racionales se definen de la siguiente forma. Sean $a, b \in \mathbb{Q}$:

$$\begin{cases} a = \frac{p}{q} \\ b = \frac{r}{s} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{suma } (+) & a + b = \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{p \cdot s + r \cdot q}{q \cdot s} \in \mathbb{Q} \\ \text{producto } (\cdot) & a \cdot b = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p \cdot r}{q \cdot s} \in \mathbb{Q} \end{cases} ; \forall p, r \in \mathbb{Z}, q, s \in \mathbb{N}$$

- Como hemos visto³¹ la **resta** no representa una nueva operación ya que se puede definir como una suma particular a través del *opuesto*³² de b .

$$a - b = a + (-b), \quad \forall a, b \in \mathbb{Q}$$

²⁷ Así por ejemplo la ecuación $2x = 1$ no tiene solución en \mathbb{Z} .

²⁸ Este símbolo corresponde a la letra *cu* mayúscula con una doble barra y proviene de la palabra *Quotient* que significa cociente en inglés. Dentro de los racionales, se denominan números *fraccionarios* a los racionales no enteros.

²⁹ Ver la **Definición A.4, página 298**.

³⁰ Notar que el denominador b nunca puede ser cero, al ser un número natural.

³¹ Ver la **Sección 1.1.2, página 22**.

³² La definición de *opuesto* de un número entero vista en **Definición 1.5, página 22** se extiende fácilmente a los *números racionales*, de forma que el *opuesto* de un número racional p/q es $(-p)/q$. Notar que al ser $q \in \mathbb{N}$ no tiene opuesto.

- Para definir la *división* o *cociente* de números racionales, es necesario definir previamente el *inverso* de un número racional de la siguiente forma:

Definición 1.7. Inverso

Dado un número $a \in \mathbb{Z}$ con $a = \frac{p}{q} \neq 0$, se define el **inverso** de a como³³:

$$a^{-1} = \frac{1}{a} = \frac{q}{p} \quad \Rightarrow \quad a \cdot a^{-1} = \frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = 1$$

La operación división se define entonces de la siguiente forma:

Definición 1.8. División

La operación **división** o **cociente** se puede definir a través de la operación **producto** de la siguiente forma:

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1} \quad , \quad \forall a, b \in \mathbb{Q} \text{ con } b \neq 0$$

es decir, **dividir** a entre b es lo mismo que **multiplicar** a por el *inverso* de b .

La **división** **no** se considera una operación nueva, sino una **multiplicación** particular.

Propiedades de $(\mathbb{Q}; +, \cdot)$

El conjunto \mathbb{Q} junto con las operaciones suma y producto cumplen las mismas propiedades que³⁴ $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$, añadiendo el **elemento inverso del producto**:

- | | | |
|---|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • Conmutativa $(+, \cdot)$ • Asociativa $(+, \cdot)$ • Distributiva $(+, \cdot)$ • Elemento Neutro $(+, \cdot)$ • Elemento Opuesto $(+)$ • Elemento Absorbente (\cdot) • Elemento Inverso $(\cdot) \quad \forall a \neq 0 \quad \exists(a^{-1}) \quad : \quad a \cdot a^{-1} = 1$ | } | <p>Prop. Conjunto \mathbb{Z}</p> <p>$a \in \mathbb{Q}$</p> |
|---|---|--|

Como consecuencia de estas propiedades:

\mathbb{Q} es un **cuerpo**³⁵ **ordenado**³⁶ y **denso**³⁷ con respecto al **orden total**³⁸ (\leq) .

³³No existe el inverso del número cero.

³⁴Ver la **Sección 1.1.2**, página 22.

³⁵Ver la **Definición A.6**, página 299.

³⁶Ver la **Definición A.7**, página 299.

³⁷Ver la **Definición A.8**, página 299.

³⁸Ver la **Definición A.11**, página 300.

Ejercicio 1.2. Encontrar 1000 números racionales entre $\frac{1}{1000}$ y $\frac{1}{999}$.

Ya que \mathbb{Q} es un conjunto *denso*, siempre existen infinitos números racionales entre dos racionales distintos.

En este caso vamos a buscar por ejemplo 1000 números equiespaciados entre $\frac{1}{1000}$ y $\frac{1}{999}$.

$$\left. \begin{array}{l} n_0 = \frac{1}{1000} \\ n_{1001} = \frac{1}{999} \end{array} \right\} \Rightarrow n_i = n_0 + i * d \quad ; \quad d = \frac{n_{1001} - n_0}{1001} = \frac{\frac{1}{999} - \frac{1}{1000}}{1001} = \frac{1}{999999000}$$

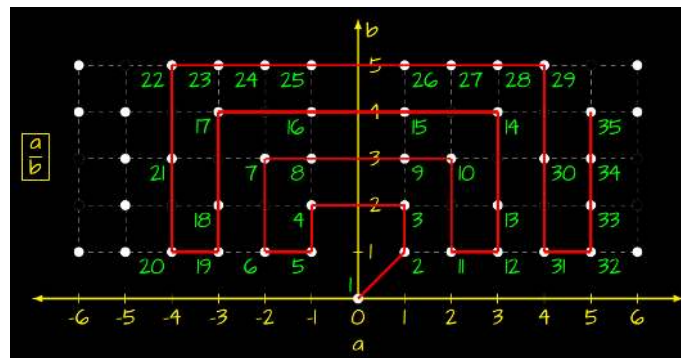
donde d es la distancia entre los números buscados. Por tanto los 1000 números racionales pedidos pueden ser por ejemplo:

$$\begin{array}{l} n_1 = \frac{1}{1000} + \frac{1}{999999000} = \frac{1000000}{999999000} \\ n_2 = \frac{1}{1000} + \frac{2}{999999000} = \frac{1000001}{999999000} \\ \vdots \\ n_{1000} = \frac{1}{1000} + \frac{1000}{999999000} = \frac{1000999}{999999000} \end{array}$$

Numerabilidad de \mathbb{Q}

Para que un conjunto pueda ser *numerable*³⁹ es necesario poder colocar sus elementos en una disposición geométrica que permita asignar de forma ordenada a cada uno de ellos un número natural.

En el caso de \mathbb{Q} podemos dibujar unos ejes cartesianos (en amarillo en la gráfica), que van a hacer referencia al numerador y denominador de cada una de las **fracciones** $\frac{a}{b}$.



El numerador a vendrá dado por el eje x , con su parte positiva y negativa ya que es un número entero, y el denominador b por la parte positiva del eje y , ya que es un número natural.

Así podemos construir un **mallado** infinito, de forma que cada uno de los puntos del mismo representa un número racional (puntos blancos en la gráfica). Notar que el número cero está en el cruce de ambos ejes y por ejemplo, el punto $(2, 3)$ representa a la fracción $2/3$.

Con esta disposición hay *fracciones equivalentes* que representan a un mismo número racional, por ejemplo $1/1$ es equivalente a $2/2, 3/3$, etc. Por tanto es necesario **eliminar** todas las *fracciones equivalentes* y dejar solo un representante de cada número, (notar que en la gráfica aparecen huecos en determinadas coordenadas donde no aparecen puntos blancos, por la eliminación de las fracciones equivalentes).

Vamos ahora a asignar un número natural (en color verde) a cada racional. Al cero le asignamos el 1, al $1/1$ el 2, al $1/2$ el 3, al $-1/2$ el 4, al $-1/1$ el 5, al $-2/1$ el 6, ... y así sucesivamente vamos asignando naturales a los números racionales de forma que vayamos cubriendo todos los números, en capas que se extienden por la izquierda y por la derecha y de abajo a arriba (línea roja en la gráfica).

³⁹Ver la **Definición A.3**, página 298.

De esta forma gráfica podemos entender que la estructura interna de \mathbb{Q} permite, a pesar de ser *denso*, ser un conjunto **numerable**.

Nota 1.2. A pesar de que \mathbb{Q} es un conjunto *numerable*, no existe el número anterior ni posterior a uno dado con el orden \leq , (ya que de otra forma no sería *denso*). Es *numerable*, pero con un orden distinto del de *menor a mayor*.

Número de Elementos de \mathbb{Q}

En la determinación del número de elementos (cardinal) de \mathbb{Q} vuelve a darse una paradoja similar al caso de⁴⁰ \mathbb{Z} .

Como \mathbb{Q} es *denso* y \mathbb{N} *discreto*⁴¹, parece como si $|\mathbb{Q}| > |\mathbb{N}|$, sin embargo, al ser \mathbb{Q} *numerable*, obligatoriamente $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$.

Tipos de Números en \mathbb{Q}

Mediante la forma de un cociente (fracción), el conjunto de los números racionales puede representar diferentes tipos de números, además de *naturales*⁴² y *enteros*⁴³. En concreto se pueden expresar números con parte decimal de dos tipos:

- Número finito de dígitos en la parte decimal.

Estos números se puede ver fácilmente que son racionales multiplicando y dividiendo por 10^n , donde n es el número de dígitos en su parte decimal. De esta forma se obtienen cocientes sin parte decimal.

Ejercicio 1.3. Comprobar que el número 317,231216 es un número racional.

Es necesario expresar dicho número en forma de fracción (cociente de un entero entre un natural). Para ello basta multiplicar y dividir este número por 10^6 , y simplificar:

$$317,231216 \times \frac{10^6}{10^6} = \frac{317231216}{1000000} = \frac{158615608}{50000}$$

- Número infinito de dígitos en la parte decimal pero repetidos de forma **periódica**⁴⁴.

Este tipo de números está formado por tres partes: entera, decimal y fraccionaria y siempre pueden expresarse en forma de fracción con la siguiente fórmula:

$$e.dp \left\{ \begin{array}{l} e : \text{Parte entera} \\ d : \text{Parte decimal} \\ p : \text{Parte periódica} \end{array} \right\} \quad e.dp = \frac{edp - ed}{\underbrace{9\dots\dots 9}_{\text{cifras de } p} \underbrace{0\dots\dots 0}_{\text{cifras de } d}}$$

El numerador de la fórmula es el resultado de restar dos números enteros, formados por los dígitos de las partes entera, decimal y periódica el primero y de la parte entera y decimal el segundo.

El denominador es un único número entero formado, al comienzo por tantos números 9 como cifras tiene la parte periódica y terminado con tantos ceros como cifras tiene la parte decimal.

Ejercicio 1.4. Expresar en forma racional los siguientes números con parte decimal periódica.

a) $13,542\overline{41}$

b) $0,\overline{141542}$

⁴⁰Ver la Sección 1.1.2, página 22.

⁴¹Entre dos números cualesquiera siempre existe un número **finito** de elementos.

⁴²Cuando el numerador es positivo y el denominador la unidad.

⁴³Cuando el denominador es la unidad.

⁴⁴Es decir, se repite con una determinada regularidad denominada *período*.

$$\begin{aligned} \text{a) } 13.\overline{54241} &= \frac{edp - ed}{99..00..} = \frac{1354241 - 13542}{99000} = \frac{1340699}{99000} \\ \text{b) } 0.\overline{141542} &= \frac{edp - ed}{99..00..} = \frac{141542 - 0}{999999} = \frac{141542}{999999} \end{aligned}$$

Nota 1.3. En la mayoría de los casos es difícil determinar si un número tiene parte decimal periódica, ya que el periodo de una fracción a/b tiene a lo sumo $b - 1$ cifras. Así por ejemplo:

- $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ (parte periódica con 6 dígitos)
- $\frac{1}{97} = 0.01030\dots$ (parte periódica con 96 dígitos)
- $\frac{1}{17389} = 0.0000057\dots$ (parte periódica con 17388 dígitos!)

Carácter incompleto de \mathbb{Q}

Como hemos visto hay una gran cantidad de números que pueden expresarse de forma racional, sin embargo también hay una cantidad infinita de números que no pueden expresarse de esta forma. Veamos un caso a través del siguiente ejercicio.

Ejercicio 1.5. Demostrar que el número $\sqrt{2} = 1,4142413\dots$ **no** es un número racional.

Vamos a demostrarlo usando el *método de reducción al absurdo*⁴⁵, para ello vamos a partir suponiendo que si es un número racional y si llegamos a una contradicción es que no lo es.

$$1) \sqrt{2} \text{ racional} \iff \sqrt{2} = \frac{p}{q} \text{ (irreducible)} \implies 2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$2) \left\{ \begin{array}{l} p^2 = 2q^2 \\ p = 2r \end{array} \right. \rightarrow 4r^2 = 2q^2 \rightarrow q^2 = 2r^2 \implies \left. \begin{array}{l} p \text{ par} \\ q \text{ par} \end{array} \right\} \text{Contradicción!}$$

3) Esta contradicción demuestra que la tesis inicial era falsa y por tanto el número $\sqrt{2}$ no es racional⁴⁶.

Nota 1.4. Los 100 primeros dígitos decimales de $\sqrt{2}$ son:

$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379907324784621070388503875343276415727\dots$

Conclusión sobre \mathbb{Q}

- Las características de \mathbb{Q} mejoran notablemente a \mathbb{Z} al ser un cuerpo ordenado y denso.
- Como hemos visto los números racionales son aquellos que o bien poseen un número finito de decimales o bien un número infinito de decimales pero periódicos.
- Sin embargo, existen números que poseen infinitos números decimales que no son periódicos, como por ejemplo: $\sqrt{2}$, π , e , $\log 5$, $\text{sen } 3$, entre muchos otros⁴⁷.
- Por tanto es necesario utilizar a efectos prácticos un conjunto más grande de números que incluya a todos los anteriores.

⁴⁵Ver la Sección 0.6.5, página 13.

⁴⁶Notar que esta demostración se intuye que en el proceso de intentar expresar $\sqrt{2}$ como una fracción siempre nos quedaría cociente de números pares que tendríamos que simplificar de forma reiterada infinitas veces intentando llegar a una fracción irreducible que es imposible obtener.

⁴⁷En realidad, como se verá en la siguiente sección hay un número infinito de ellos.

1.1.4. El Conjunto de los Números Irracionales \mathbb{I}

Definición 1.9. Conjunto de los Números Irracionales

El **conjunto de los números irracionales** se representa mediante⁴⁸ \mathbb{I} y está formado por todos aquellos números que poseen un número infinito de cifras decimales **no periódicas**.

$$\mathbb{I} = \{e.d : e \in \mathbb{Z}, d \text{ parte decimal con } \infty \text{ dígitos } \underline{\text{no}} \text{ periódicos.}\}$$

Ejemplo 1.1. Números Irracionales

- Entre los números irracionales más conocidos se encuentran el número π , el número e y la *razón áurea*⁴⁹ φ :

$$\pi = 3,141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286\dots$$

$$e = 2,718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724076630353\dots$$

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618033988749894848204586834365638117720309179805762862135448622705\dots$$

- El siguiente número está formado por una cantidad creciente de ceros intercalados en su parte decimal:

$$0.101001000100001000001\dots$$

es un número irracional ya que carece de *periodo*.

- El número $0.4\bar{9} = 0.49999\dots$ es un número racional, ya que⁵⁰: $0.4\bar{9} = \frac{49 - 4}{90} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}$

Características de \mathbb{I}

- Las *raíces, logaritmos y funciones trigonométricas* suelen dar como resultado *números irracionales*.
- Entre dos *racionales* distintos existen infinitos *irracionales* y entre dos *irracionales* distintos existen infinitos *racionales*. Por tanto \mathbb{I} es *denso*, aunque no es *numerable*⁵¹.
- Todas las operaciones entre números *racionales* e *irracionales* generan como solución números *irracionales*:

$$\forall a \in \mathbb{I}, b \in \mathbb{Q} (b \neq 0) \implies a \pm b \in \mathbb{I}, a \cdot b \in \mathbb{I}, a/b \in \mathbb{I}, b/a \in \mathbb{I}$$

- Las operaciones entre *irracionales* pueden generar tanto números *racionales* como *irracionales*.

$$(\sqrt{2})(\sqrt{3}) = \sqrt{6} \in \mathbb{I}, \quad \sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{I}, \quad \frac{-1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{2}-1} = 2 \in \mathbb{Q}, \quad (\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{4}) = 2 \in \mathbb{Q}$$

⁴⁸Este símbolo corresponde a la letra *i* latina mayúscula con una doble barra. El término *irracional* proviene de Pitágoras, que al intentar determinar de forma exacta el valor del número π , consideró que no era "racional" que tuviera infinitos decimales. Dentro de los irracionales están los números *algebraicos*, que son solución de alguna ecuación polinómica con coeficientes racionales, y los números *transcendentes* que no son solución de ninguna ecuación polinómica.

⁴⁹El *número áureo*, también llamado *número de oro*, *razón áurea* y *divina proporción* entre otros, está asociado a numerosas relaciones geométricas en la naturaleza.

⁵⁰Ver la [Sección 1.1.3, página 26](#).

⁵¹La naturaleza de los números *irracionales* es muy diversa (raíces, logaritmos, etc.) y esto hace que no haya un patrón de distribución dado de estos números, lo que implica que no se puedan ordenar de ninguna forma para ser numerados.

Conclusión sobre \mathbb{I}

- El conjunto de los números *irracionales* \mathbb{I} **no** es un *cuerpo*⁵².
- Por tanto, por sí solo no es un conjunto útil de un punto de vista práctico y por tanto se necesita un conjunto de números más grande que lo contenga, así como al resto de conjuntos de números vistos anteriormente.

1.1.5. El Conjunto de los Números Reales \mathbb{R}

Definición 1.10. Conjunto de los Números Reales

El **conjunto de los números reales** se representa mediante⁵³ \mathbb{R} y se define como el conjunto de números resultado de la unión entre el conjunto de los números *racionales* y el conjunto de los números *irracionales*⁵⁴.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Las características de \mathbb{R} son una combinación de las propiedades de ambos conjuntos.

Características de \mathbb{R}

- $(\mathbb{R}; +, \cdot)$ es un **cuerpo ordenado**.
- \mathbb{Q} es *denso* en $\mathbb{R} \implies \forall a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b \exists$ infinitos $\delta \in \mathbb{Q} : a < \delta < b$.
- \mathbb{I} es *denso* en $\mathbb{R} \implies \forall a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b \exists$ infinitos $\delta \in \mathbb{I} : a < \delta < b$.
- \mathbb{R} es un conjunto no numerable⁵⁵.

Ejercicio 1.6. Demostrar que \mathbb{R} no es un conjunto numerable.

Vamos a realizar la demostración por el *método de reducción al absurdo*⁵⁶ a una parte de \mathbb{R} , en concreto al conjunto $A = \{a \in \mathbb{R} : 0 \leq a \leq 1\}$. Suponemos que A es un conjunto *numerable*⁵⁷ y por tanto podemos ordenar **todos**⁵⁸ sus elementos en forma decimal siguiendo una determinada secuencia:

$$\begin{array}{rcccccccc} a_1 & = & 0. & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\ a_2 & = & 0. & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & \cdots \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_k & = & 0. & a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kn} & \cdots \\ \vdots & & & & & & & & \end{array}$$

donde $a_{ij} \in \{0, 1, \dots, 9\}$ y donde cada elemento a_k contiene un número infinito de cifras⁵⁹. Sea entonces el siguiente número real $b \in A$ expresado en forma decimal:

$$b = 0. b_1 b_2 b_3 \cdots b_n \cdots$$

donde los dígitos $b_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ los elegimos de forma que $b_k \neq a_{kk}$. Entonces se tiene que $b \neq a_1$ pues $b_1 \neq a_{11}$, $b \neq a_2$ pues $b_2 \neq a_{22}$; etc. Es decir $b \neq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$, por lo que $b \notin A$, lo cual es una contradicción ya que partimos de la base de que todos los números de A están en la ordenación dada por a_n .

En base al método de reducción al absurdo concluimos que:

$$A \text{ es no numerable} \implies \mathbb{R} \text{ no es numerable}$$

⁵²Ver la **Definición A.6**, página 299.

⁵³Este símbolo corresponde a la letra *erre* mayúscula con una doble barra.

⁵⁴Por tanto: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$.

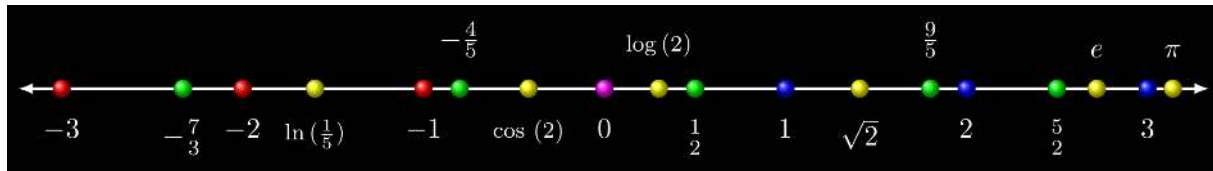
⁵⁵Esto es consecuencia de incluir a la números *irracionales* que **no** son numerables.

La Recta Real

Definición 1.11. La Recta Real

La **recta real** es una representación geométrica del conjunto de los números reales \mathbb{R} .

Esta forma consiste en suponer que cada uno de los infinitos número reales corresponde con un *punto* de una **recta infinita**, que es la *recta real*, como muestra la siguiente figura⁶⁰.



Estableciendo una distancia arbitraria, se pueden posicionar en determinados puntos de la recta los infinitos números de los que está formado \mathbb{R} . En la figura se muestra el número **cero**⁶¹ en color violeta, los números **naturales** en color azul, los **enteros** negativos en color rojo, los **racionales** en color verde y los **irracionales** en color amarillo. En la figura se representan algunos casos particulares.

La *recta real* se utilizará en las siguiente secciones como una herramienta sencilla e intuitiva de entender diferentes conceptos de la asignatura y como medio visual de resolución de determinados problemas.

1.2. Intervalos

Definición 1.12. Intervalo

Un **intervalo** \mathcal{I} es un *conjunto* de números reales que corresponde a un *segmento* de la *recta real*⁶².



La principal propiedad de los *intervalos* establece que si dos números x e y pertenecen a un intervalo \mathcal{I} con $x \leq y$, entonces todo número z tal que $x \leq z \leq y$, también pertenece a \mathcal{I} .

$$\forall x, y \in \mathcal{I}, x \leq y : \forall z, x \leq z \leq y \implies z \in \mathcal{I}$$

Nota 1.5.

- Un *intervalo* puede ser *vacío*⁶³, contener un único número o bien más de uno.
- En el caso de contenga más de un número entonces, por la propiedad anterior, obligatoriamente contiene infinitos.

⁶⁰Ver la [Sección 0.6.5, página 13](#).

⁶¹Ver la [Definición A.3, página 298](#).

⁶²Esta será el punto clave de la demostración.

⁶³Notar que por ejemplo $0.\bar{0} = 0$, $0.4\bar{9} = 0.5$ y $0.\bar{9} = 1$, teniendo en cuenta la fórmula vista en [Sección 1.1.3, página 26](#).

⁶⁰Los puntos de una recta realmente no tienen dimensión, pero en la figura vamos a interpretarlos como esferas visibles coloreadas, en función de su tipo, para entender visualmente el concepto de recta real. La continuidad de los puntos en una recta representa gráficamente la propiedad de densidad de \mathbb{R} .

⁶¹Para posicionar este número se puede coger cualquier punto de la recta, y todos los demás números están distribuidos a su izquierda (negativos) o derecha (positivos) y a distancias correspondientes a su valor.

⁶²La longitud de un intervalo puede ser nula o no.

⁶³Es decir sin ningún elemento.

1.2.1. Tipos de Intervalos

Los *intervalos* se representan utilizando corchetes cuadrados [] y/o paréntesis () en función su tipo, como vamos a ver a continuación. Hay diferentes tipos:

- Intervalos abiertos y cerrados.
- Intervalos mixtos semi-abiertos y semi-cerrados.
- Intervalos infinitos.

Vamos a ver de forma más detallada cada uno de estos tipos de intervalos.

Definición 1.13. Intervalos Abiertos y Cerrados

Sean dos números $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$ denominados *extremos* o *puntos frontera*⁶⁴ de los siguientes intervalos:

- **Intervalo Cerrado**⁶⁵: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

Gráficamente los *intervalos cerrados* se pueden representar sobre la recta real de dos posibles formas:

- o bien con **corchetes** cuadrados como en su definición.
- o bien **mediante** dos círculos rellenos

Indicando, de cualquiera de las formas, que los extremos a y b pertenecen al intervalo.

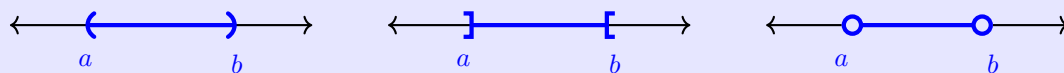


- **Intervalo Abierto**⁶⁶: $(a, b) =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

De forma gráfica, los intervalos abiertos se pueden representar en la recta real de tres formas:

- o bien mediante **paréntesis**
- o bien mediante **corchetes** cuadrados invertidos
- o también mediante **círculos** huecos

Indicando, de cualquiera de las formas, que los extremos a y b **no** pertenecen al intervalo.



⁶⁴Un punto x se dice que es *frontera* de un conjunto A si todo *entorno* (ver la [Definición 1.17](#), página 34) que contenga a x , contiene puntos de A y puntos que no pertenecen a A .

⁶⁵Si a y b son iguales, el intervalo contiene un único número que coincide con los extremos; si por el contrario a y b son distintos, siempre con $a < b$, el intervalo contiene infinitos números comprendidos entre a y b .

⁶⁶En este caso los extremos a y b **no** pertenecen al intervalo. Si a y b son iguales, el intervalo es un conjunto vacío que no contiene ningún elemento.

Definición 1.14. Intervalos Semi-abiertos y Semi-cerrados

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$ los *extremos* de los siguientes intervalos:

- **Intervalo Semi-cerrado:** $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

Gráficamente se representa en la recta real, o bien con **corchete** cuadrado y paréntesis, o **bien** con un círculo relleno y otro hueco en los correspondientes extremos, indicando que uno, el a pertenece al intervalo y el otro b no.



- **Intervalo Semi-abierto:** $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

Gráficamente se pueden representar sobre la recta real con un **paréntesis** a la izquierda y un corchete cuadrado a la derecha, o **bien** con un punto hueco a la izquierda y un punto macizo a la derecha indicando la inclusión o no de cada uno de los extremos.



Definición 1.15. Símbolo Infinito

El símbolo⁶⁷ ∞ , hace referencia a una cantidad más grande que cualquier número *finito*. Así⁶⁸:

- $\infty > a \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- $-\infty < a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Definición 1.16. Intervalos Infinitos

Dado un número $a \in \mathbb{R}$ se definen los siguientes **intervalos infinitos**⁶⁹:

- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$
- $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
- $(-\infty, \infty) \equiv \mathbb{R}$

⁶⁷Ver la Sección 0.2, página 4.

⁶⁸En determinados casos al signo infinito ∞ se le añade el signo $+$ para dejar clara su diferencia con $-\infty$.

Operaciones Básicas con Intervalos

Hay cuatro operaciones básicas con *intervalos*⁷⁰:

- **Unión** (\cup) : Se define la *unión* de dos intervalos al conjunto formado por el conjunto de todos los elementos que *pertenecen al menos a uno* de los dos intervalos.
- **Intersección** (\cap) : Se define la *intersección* de dos intervalos al conjunto de todos los elementos que *son comunes* a los dos intervalos.
- **Diferencia** ($-$) : Se define la *diferencia* de dos intervalos al conjunto de todos los elementos que *pertenecen al primer intervalo y no al segundo*.
- **Complementario** (\bar{A}) : Se define el *complementario* de un intervalo al conjunto de todos los elementos que *no pertenecen al intervalo*.

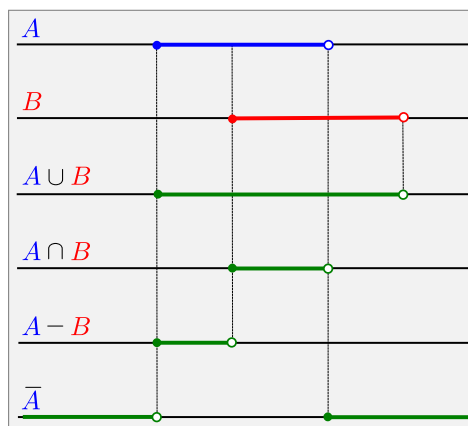


Figura 1.1: Representación gráfica del resultado de las operaciones básicas entre dos intervalos A y B .

Ejercicio 1.7. Dados los intervalos $A = (-\infty, 7)$, $B = [0, \infty)$, $C = (-5, 0]$ y $D = [-1, 7]$. Determinar:

- a) $A \cap B$ b) $C \cap B$ c) $A \cup B$ d) $D - C$ e) $D - A$
 f) $A - C$ g) $\bar{A} \cup B$ h) $\bar{B} - \bar{C}$ i) $\bar{B} - A$ j) $A - ((B \cup C) \cap D)$

a) $A \cap B = [0, 7)$

b) $C \cap B = \{0\}$

c) $A \cup B = \mathbb{R}$

d) $D - C = (0, 7)$

e) $D - A = \{7\}$

f) $A - C = (-\infty, -5] \cup (0, 7)$

g) $\bar{A} \cup B = B$

h) $\bar{B} - \bar{C} = (-5, 0)$

i) $\bar{B} - A = \emptyset$

j) $A - ((B \cup C) \cap D) = (-\infty, -1)$

⁶⁹Siempre que en algún extremo de un intervalo aparece el símbolo infinito (positivo o negativo) se utiliza intervalo abierto ($()$).

⁷⁰Estas operaciones son propias de los conjuntos.

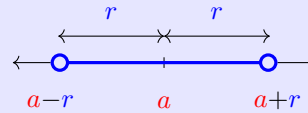
1.2.2. Entornos

Para las siguientes definiciones, sean $a, r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$.

Definición 1.17. Entornos

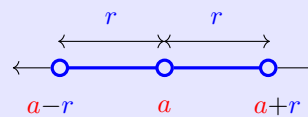
- Se denomina **entorno** de **centro** a y **radio** r y se representa por $E(a, r)$ al *intervalo abierto*:

$$E(a, r) = (a - r, a + r)$$



- Se denomina **entorno reducido** de **centro** a y **radio** r y se representa por $E^*(a, r)$ al entorno $E(a, r)$ menos el propio centro a .

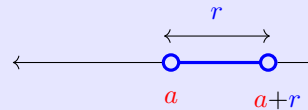
$$E^*(a, r) = (a - r, a + r) - \{a\}$$



Definición 1.18. Semi-Entornos Reducidos

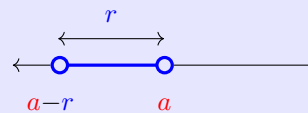
- Se denomina **semi-entorno reducido por la derecha** de **centro** a y **radio** r y se representa por $E^+(a, r)$ a la mitad derecha del *entorno reducido* $E^*(a, r)$.

$$E^+(a, r) = (a, a + r)$$



- Se denomina **semi-entorno reducido por la izquierda** de **centro** a y **radio** r y se representa por $E^-(a, r)$, a la mitad izquierda del *entorno reducido*⁷¹ $E^*(a, r)$.

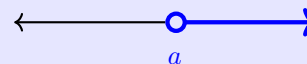
$$E^-(a, r) = (a - r, a)$$



Definición 1.19. Entornos Reducidos en $\pm\infty$

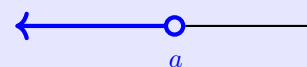
- Se denomina **entorno reducido en $+\infty$** al *intervalo infinito*⁷² $(a, +\infty)$.

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$



- Se denomina **entorno reducido en $-\infty$** al *intervalo infinito* $(-\infty, a)$.

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$



⁷¹Ver la [Definición 1.17](#), página 34.

⁷²Ver la [Definición 1.16](#), página 32.

1.2.3. Cotas y Extremos

Definición 1.20. Cotas

Sea A un subconjunto de \mathbb{R} , $A \subset \mathbb{R}$ y $s \in \mathbb{R}$. Se dice que:

- s es una **cota superior** de A si: $a \leq s \quad \forall a \in A$
- s es una **cota inferior** de A si: $a \geq s \quad \forall a \in A$



Si existe una *cota superior* de un conjunto existen infinitas *cotas superiores* y de igual forma si existe una *cota inferior* del conjunto también existen infinitas.

Definición 1.21. Conjuntos Acotados

- Si un conjunto A tiene *cotas superiores* se dice que es **acotado superiormente**.
- Si un conjunto A tiene *cotas inferiores* se dice que es **acotado inferiormente**.
- Se dice que un **conjunto es acotado** si es *acotado superiormente e inferiormente*.
- A los conjuntos *cerrados* y *acotados* se les denomina **compactos**.

Definición 1.22. Extremos

Sea A un subconjunto de \mathbb{R} , $A \subset \mathbb{R}$. Se denomina:

- **Supremo** de A : a la *menor* de sus *cotas superiores* $\sup(A)$
- **Ínfimo** de A : a la *mayor* de sus *cotas inferiores* $\inf(A)$
- **Máximo** de A : al *mayor* de los *elementos* de A $\max(A)$
- **Mínimo** de A : al *menor* de los *elementos* de A $\min(A)$

- El $\sup(A)$ e $\inf(A)$ puede ser cualquier número \mathbb{R} , pertenezca o no al conjunto A .
- El $\max(A)$ y $\min(A)$ tienen que ser número pertenecientes al conjunto A .
- Si existe $\max(A)$ / $\min(A)$ coincide con $\sup(A)$ / $\inf(A)$ respectivamente.

Ejercicio 1.8. Determinar, en caso de existir, las cotas superiores e inferiores, el supremo, ínfimo, máximo y mínimo de los siguientes conjuntos de números reales:

- a) $A = [2, 3)$ b) $B = (2, 3)$ c) $C = (2, \infty)$ d) $D = (-\infty, 3) \cup (5, 6]$

$$a) \quad A = [2, 3) \begin{cases} \text{C.S. :} & 3, \frac{10}{3}, 100, \dots \\ \text{C.I. :} & 2, 1, -100, \dots \\ \text{Sup}(A): & 3 \\ \text{Inf}(A): & 2 \\ \text{Max}(A): & \nexists \\ \text{Min}(A): & 2 \end{cases}$$

$$b) \quad B = (2, 3) \begin{cases} \text{C.S. :} & 3, \frac{10}{3}, 100, \dots \\ \text{C.I. :} & 2, 1, -100, \dots \\ \text{Sup}(A): & 3 \\ \text{Inf}(A): & 2 \\ \text{Max}(A): & \nexists \\ \text{Min}(A): & \nexists \end{cases}$$

$$c) \quad C = (2, \infty) \begin{cases} \text{C.S. :} & \nexists \\ \text{C.I. :} & 2, 1, -100, \dots \\ \text{Sup}(A): & \nexists \\ \text{Inf}(A): & 2 \\ \text{Max}(A): & \nexists \\ \text{Min}(A): & \nexists \end{cases}$$

$$d) \quad D = (-\infty, 3) \cup (5, 6] \begin{cases} \text{C.S. :} & 6, 7, 10, \dots \\ \text{C.I. :} & \nexists \\ \text{Sup}(A): & 6 \\ \text{Inf}(A): & \nexists \\ \text{Max}(A): & 6 \\ \text{Min}(A): & \nexists \end{cases}$$

1.3. Desigualdades

Definición 1.23. Desigualdad

Una **desigualdad** es una expresión que involucra alguna de las siguientes *relaciones de orden*⁷³:

Relaciones de Orden: $>$, $<$, \geq , \leq

Ejemplo 1.2. Desigualdades

- $6 \geq 2$
- $2x - 1 \leq x^2 + x$
- $\sqrt{x-1} < \text{sen}(x+1)$

- Hay diferentes tipos de *desigualdades*. Aquellas que contienen variables o incógnitas se denominan específicamente **inecuaciones**.
- **Resolver** una *desigualdad* (*inecuación*) consiste en encontrar los valores que satisfacen sus variables.
- La *resolución* de una *desigualdad* se realiza haciendo uso de las **propiedades de las desigualdades**.

1.3.1. Propiedades de las Desigualdades

Las siguientes propiedades son aplicables a cualquiera de las cuatro *relaciones de orden* a las que hace referencia la **Definición 1.23**.

1. Si a los dos miembros de una *desigualdad* se les suma o resta un mismo número se obtiene otra desigualdad del mismo tipo. Por ejemplo⁷⁴:

$$a < b \quad \implies \quad a + c < b + c$$

Como consecuencia de esta propiedad, los términos de una *desigualdad* pueden transponerse de un lado a otro de la *desigualdad* de igual forma que ocurre con los términos de una ecuación, es decir, los que están sumando pasan restando y viceversa.

2. Si los dos miembros de una *desigualdad* se multiplican o dividen por un **número positivo** se obtiene otra *desigualdad* equivalente a la primera. Por ejemplo:

$$a \geq b \quad , \quad c > 0 \quad \implies \quad \begin{cases} ac \geq bc \\ \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c} \end{cases}$$

Como consecuencia de esta propiedad, los términos **positivos** de una desigualdad que están multiplicando o dividiendo **a la totalidad** de uno de los lados de la desigualdad puede transponerse al otro lado de igual forma que ocurre con los términos de una ecuación, es decir los que están multiplicando pasan dividiendo y viceversa.

3. Si los dos miembros de una *desigualdad* se multiplican o dividen por un **número negativo** se obtiene otra *desigualdad* donde cambia el sentido de la desigualdad⁷⁵. Por ejemplo:

$$a \leq b \quad , \quad c < 0 \quad \implies \quad \begin{cases} ac \geq bc \\ \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c} \end{cases}$$

$>$	\implies	$<$
$<$	\implies	$>$
\geq	\implies	\leq
\leq	\implies	\geq

⁷³Ver la **Sección A.2**, página 299.

⁷⁴Notar que si $c < 0$ se obtiene la resta.

⁷⁵Es decir: $>$ pasa a $<$, $<$ pasa a $>$, \leq pasa a \geq y \geq pasa a \leq .

Notar que este comportamiento es propio de las *desigualdades* y no se produce en las *ecuaciones*, donde solo hay un tipo de igualdad.

1.3.2. Resolución de Desigualdades

Vamos a centrarnos en la resolución de desigualdades con una única incógnita de los siguientes tipos:

- Desigualdades lineales
- Desigualdades no lineales
- Desigualdades racionales

Desigualdades Lineales

Tratamos la resolución de *desigualdades simples* del tipo:

$$\boxed{f_1(x) \text{ RO } f_2(x)} \quad \text{RO : Relación de Orden } (>, <, \leq, \geq)$$

donde $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son funciones **lineales**⁷⁶ en la variable o incógnita x .

Este tipo de *desigualdades* se resuelven fácilmente organizando todas las variables a una parte de la desigualdad y todos los números a otra y despejando los posibles coeficientes de la variable x hasta obtener una expresión del siguiente tipo, que dará lugar al intervalo I **solución** de la *desigualdad*:

$$x \text{ RO } c \implies x \in I \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

Si la *desigualdad lineal* está **compuesta** por varias relaciones de orden encadenadas, se puede partir dicha desigualdad en tantas desigualdades **simples** como relaciones de orden haya y resolver cada una de ellas siguiendo el procedimiento descrito anteriormente hasta encontrar el *intervalo solución* de cada uno de ellos. Finalmente, el *intervalo solución* del problema inicial será la **intersección**⁷⁷ de cada uno de los intervalos obtenidos.

$$\boxed{f_1(x) \text{ RO}_1 f_2(x) \text{ RO}_2 f_3(x) \text{ RO}_3 \cdots \text{RO}_n f_{n+1}(x)} \implies \begin{cases} f_1(x) \text{ RO}_1 f_2(x) \implies I_1 \\ f_2(x) \text{ RO}_2 f_3(x) \implies I_2 \\ \vdots \\ f_n(x) \text{ RO}_n f_{n+1}(x) \implies I_n \end{cases}$$

$$I = I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_n$$

Ejercicio 1.9. Resolver las siguientes desigualdades lineales:

a) $1 + x < 7x + 5$

b) $6x - 4 \leq 3x + 2 > 1 + x$

a) $1 + x < 7x + 5 \quad ; \quad 7x - x > 1 - 5 \quad ; \quad 6x > -4 \quad ; \quad x > -\frac{2}{3} \implies x \in \left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$

b) $6x - 4 \leq 3x + 2 > 1 + x \implies \begin{cases} 6x - 4 \leq 3x + 2 \quad ; \quad 3x \leq 6 \quad ; \quad x \leq 2 \\ 3x + 2 > 1 + x \quad ; \quad 2x > -1 \quad ; \quad x > -1/2 \end{cases} \implies x \in \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$

⁷⁶Una función lineal es una función polinómica de primer grado, (ver la **Definición A.13**, página 302).

⁷⁷Ver la **Sección 1.2.1**, página 33.

Desigualdades No Lineales

Tratamos la resolución de desigualdades **simples** del tipo:

$$f_1(x) \text{ RO } f_2(x)$$

RO : Relación de Orden ($>$, $<$, \leq , \geq)

donde $f_1(x)$ y/o $f_2(x)$ son funciones **no lineales**⁷⁸ en la variable o incógnita x .

Los pasos para resolver este tipo de *desigualdades* son:

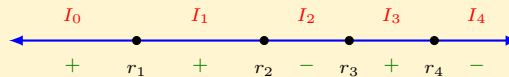
1. Pasar todos los términos a uno de los miembros (para que en el otro quede cero) y simplificar.

$$F(x) \text{ RO } 0 \quad (1.1)$$

2. Calcular las **raíces**⁷⁹ reales de la función resultante.

$$F(x) = 0 \quad \implies \quad \text{sol. real} = \{r_1, r_2, \dots\}$$

3. Posicionar las *raíces* r_n en la recta real y estudiar el **signo** de la función⁸⁰ $F(x)$ en cada uno de los **intervalos** I_n en los que queda dividida la recta real mediante las *raíces*.



4. Los intervalos solución serán aquellos que cumplan la relación de orden **RO** dada por la *desigualdad* (1.1).
5. Los extremos de los intervalos solución I_n correspondientes a las *raíces* r_n solo entrarán dentro de los *intervalos solución* si la *relación de orden RO* contiene un signo igual⁸¹.

Si la *desigualdad* no lineal está **compuesta** por varias *relaciones de orden* encadenadas, se procede a la partición de dicha *desigualdad* en tantas *desigualdades simples* como relaciones de orden haya, y a resolver cada una de ellas siguiendo el procedimiento visto anteriormente, hasta encontrar el *intervalo solución* de cada uno de ellos. El *intervalo solución* del problema inicial será la **intersección** de cada uno de los intervalos obtenidos, de la misma forma que se explicó en la **Sección 1.3.2, página 37** sobre las *desigualdades lineales*.

Ejercicio 1.10. Resolver la siguiente desigualdad no lineal: $x^2 + 6 \leq 5x$

$$x^2 + 6 \leq 5x \quad ; \quad x^2 - 5x + 6 \leq 0 \quad \implies \quad x^2 - 5x + 6 = 0 \quad ; \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \{2, 3\}$$



Notar que el intervalo solución es en este caso $[2, 3]$ al ser en este tramo la función $x^2 - 5x + 6$ negativa, y siendo la relación de orden de la desigualdad ≤ 0 .

⁷⁸Una función no lineal es cualquier función que no sea del tipo polinómica de primer grado.

⁷⁹Las raíces de la función $f(x)$ son las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$, pudiéndose ser reales y/o complejas.

⁸⁰Para estudiar el signo de una función en cada uno de estos intervalos, basta con determinar el signo de la función en un punto cualquiera del mismo.

⁸¹Mayor o igual que (\geq) o menor o igual que (\leq).

Desigualdades Racionales

Tratamos la resolución de desigualdades **simple** de funciones racionales⁸² del tipo⁸³:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \text{ RO } 0$$

RO : Relación de Orden ($>$, $<$, \leq , \geq)

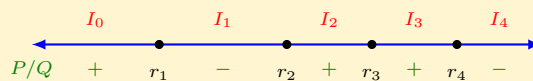
donde $P(x)$ y $Q(x)$ son *polinomios* en la variable x .

Los pasos para resolver este tipo de desigualdades son:

1. Calcular las *raíces reales* de cada uno de los *polinomios* y ordenarlos de forma conjunta.

$$\left\{ \begin{array}{l} P(x) = 0 \\ Q(x) = 0 \end{array} \right\} \implies \text{sol. reales de ambos} = \{r_1, r_2, \dots\}$$

2. Posicionar todas las *raíces* r_n en la recta real y estudiar el **signo** del cociente P/Q en cada uno de los **intervalos** I_n en los que queda dividida la recta real mediante las *raíces*.



3. Los *intervalos solución* serán aquellos que cumplan la relación de orden **RO** dada por la función racional $P(x)/Q(x)$.
4. Los *extremos* de los *intervalos solución* I_n correspondientes a las *raíces* r_n solo del numerador $P(x)$, entrarán dentro de los intervalos solución si la relación de orden **RO** contiene un signo igual.

Si la *desigualdad* está **compuesta** por varias relaciones de orden simples encadenadas, se procede a particionarla y estudiar cada parte, como se ha explicado en las secciones anteriores para *desigualdades* lineales y no lineales.

Ejercicio 1.11. Resolver las siguientes desigualdades:

a) $\frac{2x-8}{3x+9} \geq 0$

b) $\frac{x-1}{x+1} < \frac{x+1}{x-1}$

- a) Como la desigualdad ya está en la forma deseada, buscamos las raíces reales del numerador y denominador:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x-8=0 ; x=4 \\ 3x+9=0 ; x=-3 \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} (-\infty, -3) \quad (-3, 4) \quad [4, \infty) \\ \leftarrow \text{P/Q} \quad + \quad - \quad + \quad \rightarrow \end{array} \quad \boxed{x \in (-\infty, -3) \cup [4, \infty)}$$

- b) Operamos previamente la desigualdad inicial:

$$\frac{x-1}{x+1} < \frac{x+1}{x-1} ; \frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} < 0 ; \frac{(x-1)^2 - (x+1)^2}{x^2-1} > 0 ; \frac{-4x}{x^2-1} < 0$$

Buscamos las raíces reales del numerador y denominador:

$$\left\{ \begin{array}{l} -4x=0 ; x=0 \\ x^2-1=0 ; x=\pm 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} (-\infty, -1) \quad (-1, 0) \quad (0, 1) \quad (1, \infty) \\ \leftarrow \text{P/Q} \quad + \quad - \quad + \quad - \quad \rightarrow \end{array}$$

$$\boxed{x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)}$$

Notar que como la relación de orden no tiene igual (es solo $<$) la raíz 0 de numerador no entra a formar parte de la solución.

⁸²Aquí se tratará únicamente el caso de cociente de polinomios, pero de forma general puede tratarse de un cociente de cualquier tipo de funciones.

⁸³La desigualdad a considerar contiene un cero en uno de los términos de la desigualdad. Si tuviera otra forma, se operaría teniendo en cuenta las propiedades de las desigualdades hasta que tenga esta forma.

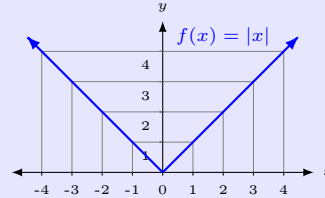
1.4. Métrica en \mathbb{R}

1.4.1. Valor Absoluto, $|x|$

Definición 1.24. Valor Absoluto

Se denomina **valor absoluto** de un número $x \in \mathbb{R}$ y se representa por $|x|$, al número real dado por alguna de estas dos definiciones equivalentes:

$$|x| = \underbrace{\sqrt{x^2}}_{\text{def 1}} = \underbrace{\begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}}_{\text{def 2}}$$



Cada una de las dos definiciones equivalentes del *valor absoluto* se puede utilizar según convenga.

Propiedades de $|x|$

Sean $x, y \in \mathbb{R}$.

1. $|x| > 0$, $\forall x \neq 0$; $|0| = 0$
2. $-|x| \leq x \leq |x|$
3. $\left\{ \begin{array}{l} |xy| = |x| |y| \\ |x^{-1}| = |x|^{-1} , \forall x \neq 0 \end{array} \right\} \implies \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} , y \neq 0$
4. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Desigualdad Triangular)
5. $|x - y| \geq |x| - |y|$

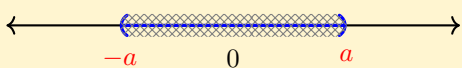
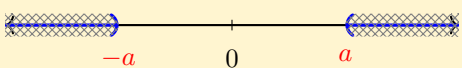
Demostración 1.0.

1. Trivial a través de la definición de valor absoluto
2. Trivial a través de la definición de valor absoluto
3. $|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2 y^2} = \sqrt{x^2} \sqrt{y^2} = |x| \cdot |y|$
 $y \cdot y^{-1} = 1 \implies |y \cdot y^{-1}| = 1 \implies |y| \cdot |y^{-1}| = 1 \implies |y^{-1}| = \frac{1}{|y|} = |y|^{-1}$
 $\left| \frac{x}{y} \right| = \left| x \cdot \frac{1}{y} \right| = |x| \cdot |y^{-1}| = |x| \cdot \frac{1}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}$
4. $|x + y|^2 = \sqrt{(x + y)^4} = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$.
 Tomando raíces cuadradas en ambos lados de la desigualdad: $|x + y| \leq |x| + |y|$
5. Como: $x = y + (x - y) \forall x, y \in \mathbb{R}$. Tomando valor absoluto en ambos lados, se tiene:
 $|x| = |y + (x - y)| \leq |y| + |x - y| \implies |x - y| \geq |x| - |y|$

Valor Absoluto e Intervalos

Vamos a ver ahora la relación que existe entre el *valor absoluto* y los *intervalos* que hemos analizado en las secciones anteriores⁸⁴.

Sea $a \in \mathbb{R}$; $a > 0$.

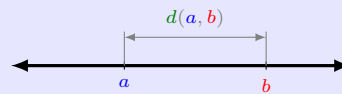
- $|x| < a \iff -a < x < a \iff x \in (-a, a)$

- $|x| > a \iff x < -a \text{ ó } x > a \iff x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$


1.4.2. Distancia en \mathbb{R}

Definición 1.25. Distancia

La **distancia**⁸⁵ entre dos números reales $a, b \in \mathbb{R}$ se define como:

$$d(a, b) = |a - b|$$



Propiedades de la Distancia

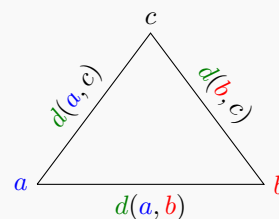
Sean $a, b \in \mathbb{R}$.

- $d(a, b) > 0$, $\forall a \neq b \implies d(a, b) = 0$ sii $a = b$
- $d(a, b) = d(b, a)$
- $d(a, b) \leq d(a, c) + d(b, c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (Desigualdad Triangular)

Demostración 1.0.

- Trivial a través de la definición de distancia (valor absoluto)
- Trivial a través de la definición de distancia (valor absoluto)

$$\begin{aligned}
 3. \quad d(a, b) &= |a - b| = |a - c + c - b| = \\
 &= |(a - c) + (c - b)| \leq |a - c| + |c - b| = \\
 &= d(a, c) + d(c, b)
 \end{aligned}$$



⁸⁴Ver la Sección 1.2, página 30.

⁸⁵Ver una generalización de la distancia para espacios \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 en el Sección A.6, página 307.

1.4.3. Desigualdades con Valores Absolutos

Vamos a analizar ahora cómo podemos resolver problemas con *desigualdades* en las que aparecen valores absolutos. Estudiaremos estudiar dos casos:

- Desigualdades simples con valores absolutos
- Desigualdades más generales con valores absolutos

Desigualdades Simples con Valores Absolutos

Empezamos resolviendo los problemas más sencillos que nos podemos encontrar, donde aparece simplemente $|x|$ y una determinada *relación de orden* con algún número real a .

• $ x = a \implies$	$\begin{cases} a > 0 \rightarrow x = \pm a \\ a = 0 \rightarrow \\ a < 0 \rightarrow \text{no existe solución} \end{cases}$	$\iff \begin{cases} x \in \{-a, a\} \\ x = 0 \\ x \in \emptyset \end{cases}$	
• $ x < a \implies$	$\begin{cases} a > 0 \rightarrow -a < x < a \\ a \leq 0 \rightarrow \text{no existe solución} \end{cases}$	$\iff \begin{cases} x \in (-a, a) \\ x \in \emptyset \end{cases}$	
• $ x > a \implies$	$\begin{cases} a \geq 0 \rightarrow x < -a \text{ ó } x > a \\ a < 0 \rightarrow \end{cases}$	$\iff \begin{cases} x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$	

Ejercicio 1.12. Resolver las siguientes desigualdades:

a) $|x| = -3$

b) $|x| \leq 2$

c) $1 \leq |x| < 3$

a) $|x| = -3 \implies$ No existe solución

b) $|x| \leq 2 \implies -2 \leq x \leq 2 \implies$ $x \in [-2, 2]$

c)

$$1 \leq |x| < 3 \implies \left\{ \begin{array}{l} |x| \geq 1 \implies x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \\ |x| < 3 \implies x \in (-3, 3) \end{array} \right\} \implies \text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> $x \in (-3, -1] \cup [1, 3)$$$

Vamos ahora a ver un par de métodos para resolver problemas más complicados de *desigualdades* con *valores absolutos*.

Desigualdades con Valores Absolutos (Caso I)

Estudiamos un primer caso en que la *desigualdad* está formada por: el *valor absoluto* de una determinada función $f_1(x)$, una determinada *relación de orden* (RO) y una función cualquiera $f_2(x)$ que **no** contiene el *valor absoluto* en su expresión.

$$\boxed{|f_1(x)| \text{ } RO \text{ } f_2(x)}$$

La forma más sencilla de resolver este problema es **transformarlo** en otros equivalentes, que no contengan el *valor absoluto*, y entonces aplicar los métodos vistos sobre *desigualdades sin valores absolutos*.

Para eliminar el *valor absoluto* que aparece en la función $f_1(x)$, se encuentran las **raíces reales** de esta función, es decir, soluciones reales de la ecuación:

$$f_1(x) = 0$$

Esta función puede tener ninguna, una o varias raíces reales que denominaremos r_1, r_2 , etc.

Disponiendo las n raíces en la recta real, se obtienen $n + 1$ intervalos de estudio, donde la función $f_1(x)$ tendrá un signo determinado (positivo o negativo). En base a él y aplicando la definición de *valor absoluto*, se puede eliminar éste, dando lugar a $n + 1$ *desigualdades sin valor absoluto*. De esta forma el problema aumenta en tamaño, pero disminuye en complejidad.

Resolviendo estas *desigualdades* y teniendo en cuenta su correspondiente *intervalo* de validez, se puede obtener la **solución** del problema inicial como la **unión** de todas ellas.

A continuación se muestra un esquema del proceso, en el que se ha supuesto que la función $f_1(x)$ tiene dos raíces, dando lugar a tres intervalos de estudio y en cada uno de ellos se ha supuesto un signo determinado de $f_1(x)$.

CASO 1: $\boxed{|f_1(x)| \text{ } RO \text{ } f_2(x)}$ (RO : rel. orden)

Eliminación Val. Abs. $\implies f_1(x) = 0 \rightarrow$ raíces = $\{r_1, r_2\}$

$\begin{array}{ccccccc} & f_1(x) < 0 & & f_1(x) > 0 & & f_1(x) < 0 & \\ \leftarrow & & & & & & & \rightarrow \\ & \mathcal{I}_1 & r_1 & \mathcal{I}_2 & r_2 & \mathcal{I}_3 & x \end{array}$

$\forall x \in \mathcal{I} \begin{cases} \text{si } f_1(x) \geq 0 \rightarrow |f_1(x)| = f_1(x) \\ \text{si } f_1(x) < 0 \rightarrow |f_1(x)| = -f_1(x) \end{cases}$

$\boxed{|f_1(x)| \text{ } RO \text{ } f_2(x)} \implies \left\{ \begin{array}{l} \text{si } x \in \mathcal{I}_1 \rightarrow -f_1(x) \text{ } RO \text{ } f_2(x) \rightarrow \boxed{x \in S_1} \\ \text{si } x \in \mathcal{I}_2 \rightarrow f_1(x) \text{ } RO \text{ } f_2(x) \rightarrow \boxed{x \in S_2} \\ \text{si } x \in \mathcal{I}_3 \rightarrow -f_1(x) \text{ } RO \text{ } f_2(x) \rightarrow \boxed{x \in S_3} \end{array} \right\} \implies \boxed{x \in S_1 \cup S_2 \cup S_3}$

Ejercicio 1.13. Encontrar los intervalos solución de los siguientes problemas de números reales:

a) $|x - 5| = 1$

b) $|x - 5| < -3$

c) $|x - 5| < 3$

d) $|x - 5| \geq 1$

a) $|x - 5| = 1 \quad ; \quad x - 5 = \pm 1 \quad ; \quad x = 5 \pm 1 \implies \boxed{x \in \{4, 6\}}$

b) $|x - 5| < -3 \implies$ No tiene solución $\implies \boxed{x \in \emptyset}$

c) $|x - 5| < 3 \quad ; \quad -3 < x - 5 < 3 \quad ; \quad 2 < x < 8 \implies \boxed{x \in (2, 8)}$

d) $|x - 5| \geq 1 \quad ; \quad x - 5 = 0 \quad ; \quad x = 5 \implies \begin{cases} \text{si } x \geq 5 \implies |x - 5| = x - 5 \\ \text{si } x < 5 \implies |x - 5| = -(x - 5) \end{cases}$

$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 5 : x - 5 \geq 1 \quad ; \quad x \geq 6 \implies x \geq 6 \\ x < 5 : -x + 5 \geq 1 \quad ; \quad x \leq 4 \implies x \leq 4 \end{array} \right\} \implies \boxed{x \in (-\infty, 4] \cup [6, \infty)}$

Ejercicio 1.14. Resolver la siguiente desigualdad:

$$|x - 5| < 3 + x$$

$$x - 5 = 0 \implies x = 5$$

$$\begin{array}{c} \xleftarrow{(x-5) < 0} \quad | \quad \xrightarrow{(x-5) > 0} \\ 5 \end{array}$$

$$|x-5| = \begin{cases} -(x-5) = -x+5 & \text{si } x < 5 \\ x-5 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

$$\boxed{|x-5| < 3+x} \implies \begin{cases} \boxed{-x+5 < 3+x} & \text{si } x < 5 \quad (A) \\ \boxed{x-5 < 3+x} & \text{si } x \geq 5 \quad (B) \end{cases}$$

$$(A) \quad 2x > 2 \quad ; \quad x > 1$$

$$\xrightarrow{x < 5}$$

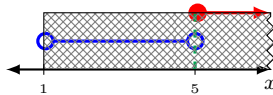
$$\boxed{x \in (1, 5)}$$

$$(B) \quad -5 < 3 \quad (\text{siempre cierto!})$$

$$\xrightarrow{x \geq 5}$$

$$\boxed{x \in [5, \infty)}$$

$$\implies x \in (1, 5) \cup [5, \infty)$$



$$\boxed{x \in (1, \infty)}$$

Desigualdades con Valores Absolutos (Caso II)

Vamos a estudiar un segundo caso más complicado en que la *desigualdad* está formada por el *valor absoluto* de dos funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$, relacionadas a través de una determinada *relación de orden* (RO).

$$\boxed{|f_1(x)| \text{ RO } |f_2(x)|}$$

Al igual que antes, este problema se **transforma** en otros equivalentes, que no contengan el *valor absoluto*. Para ello se buscan las *raíces*⁸⁶ de ambas funciones, $\{r_1, r_2, \dots\}$ y $\{s_1, s_2, \dots\}$, y se disponen en la recta real obteniéndose un conjunto de *intervalos* de estudio, donde las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ tendrán unos signos determinados. En base a ellos y a través de la definición de *valor absoluto*, se pueden eliminar dando lugar a un conjunto de desigualdades **sin** *valor absoluto*, válidas en cada uno de los *intervalos*.

De igual forma que antes, resolviendo estas *desigualdades* y teniendo en cuenta su correspondiente *intervalo* de validez, se puede obtener la **solución** del problema inicial como la **unión** de todas ellas.

A continuación se muestra un esquema del proceso, en el que se ha supuesto que la función $f_1(x)$ tiene una única raíz r_1 y la función $f_2(x)$ tiene otra única raíz $s_1 \neq r_1$, lo cual da lugar a tres intervalos de estudio y en cada uno de ellos se ha supuesto unos signos determinados para $f_1(x)$ y $f_2(x)$.

⁸⁶Ver la Sección 1.4.3, página 43.

CASO 2: $|f_1(x)| \text{ RO } |f_2(x)|$ (RO: rel. orden)

Eliminación Val. Abs. $\implies \begin{cases} f_1(x) = 0 \rightarrow \text{raíces} = \{r_1, r_2, \dots\} \\ f_2(x) = 0 \rightarrow \text{raíces} = \{s_1, s_2, \dots\} \end{cases}$

$f_2(x) > 0$ $f_2(x) > 0$ $f_2(x) < 0$
 $f_1(x) < 0$ $f_1(x) > 0$ $f_1(x) < 0$

$\forall x \in \mathcal{I} \left\{ \begin{array}{l} \text{si } f_1(x) \geq 0 \rightarrow |f_1(x)| = f_1(x) \\ \text{si } f_1(x) < 0 \rightarrow |f_1(x)| = -f_1(x) \\ \text{si } f_2(x) \geq 0 \rightarrow |f_2(x)| = f_2(x) \\ \text{si } f_2(x) < 0 \rightarrow |f_2(x)| = -f_2(x) \end{array} \right.$

$|f_1(x)| \text{ RO } |f_2(x)| \implies \left\{ \begin{array}{l} \text{si } x \in \mathcal{I}_1 \rightarrow -f_1(x) \text{ RO } f_2(x) \rightarrow x \in S_1 \\ \text{si } x \in \mathcal{I}_2 \rightarrow f_1(x) \text{ RO } f_2(x) \rightarrow x \in S_2 \\ \text{si } x \in \mathcal{I}_3 \rightarrow f_1(x) \text{ RO } f_2(x) \rightarrow x \in S_2 \end{array} \right. \implies x \in S_1 \cup S_2 \cup S_2$

Ejercicio 1.15. Resolver la siguiente desigualdad:

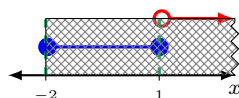
$$|x + 5| \geq |x - 1|$$

$$|x + 5| \geq |x - 1| \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 5 = 0 \implies x = -5 \\ x - 1 = 0 \implies x = 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} (x-1) < 0 \quad (x-1) < 0 \quad (x-1) > 0 \\ (x+5) < 0 \quad (x+5) > 0 \quad (x+5) > 0 \\ \leftarrow \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \rightarrow \\ -5 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 1 \end{array}$$

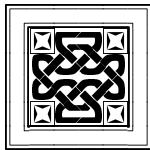
$$|x + 5| = \begin{cases} -x - 5 & \text{si } x < -5 \\ x + 5 & \text{si } x \geq -5 \end{cases} \quad |x - 1| = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$|x + 5| \geq |x - 1| \implies \left\{ \begin{array}{l} -x - 5 \geq -x + 1 \quad \text{si } x < -5 \quad \text{(A)} \\ x + 5 \geq -x + 1 \quad \text{si } -5 \leq x < 1 \quad \text{(B)} \\ x + 5 \geq x - 1 \quad \text{si } x \geq 1 \quad \text{(C)} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{(A)} \quad -5 \geq 1 \quad \text{(siempre falso!)} \\ \text{(B)} \quad 2x \geq -4 \quad ; \quad x \geq -2 \\ \text{(C)} \quad 5 \geq -1 \quad \text{(siempre cierto!)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \\ -5 \leq x \leq 1 \\ \xrightarrow{x > 1} \end{array} \left. \begin{array}{l} x \in \emptyset \\ x \in [-2, 1] \\ x \in (1, \infty) \end{array} \right\}$$



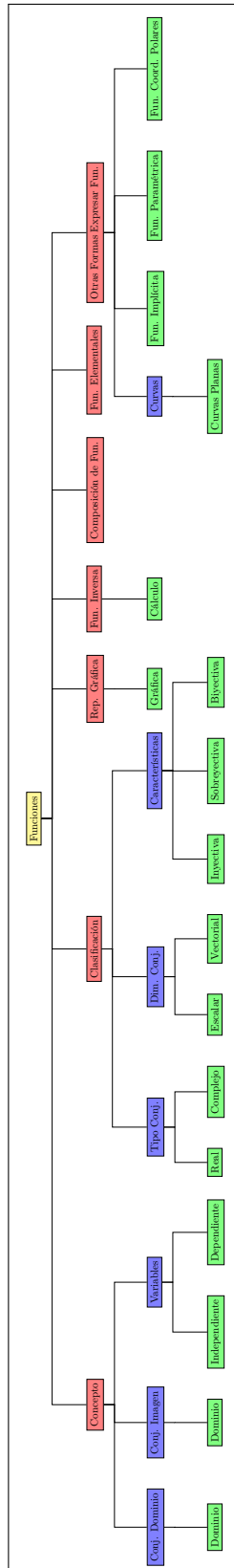
$$x \in [-2, \infty)$$



Funciones Reales de Variable Real

Contenido

2.1	Función o Aplicación	49
2.2	Clasificación de las Funciones	50
2.2.1	Tipo de Conjuntos: Funciones Reales y Complejas	51
2.2.2	Funciones Escalares y Vectoriales	51
2.3	Representación Gráfica de Funciones Reales	52
2.4	Funciones Inyectivas, Sobreyectivas y Biyectivas	52
2.4.1	Determinación de la Inyectividad y Sobreyectividad	54
2.5	Función Par, Impar, Periódica y Monótona	55
2.6	Función Inversa $f^{-1}(x)$	55
2.6.1	Determinación de la Función Inversa	56
2.7	Composición de Funciones	57
2.8	Funciones Elementales	58
2.8.1	Funciones Polinómicas	58
2.8.2	Funciones Racionales	59
2.8.3	Funciones Irracionales o Radicales	60
2.8.4	Funciones Potenciales	61
2.8.5	Funciones Exponenciales	62
2.8.6	Funciones Logarítmicas	63
2.8.7	Funciones Trigonométricas	64
2.8.8	Funciones Hiperbólicas	65
2.9	Otras Formas de Expresar Funciones	66
2.9.1	Curva Plana	66
2.9.2	Forma Implícita	67
2.9.3	Forma Paramétrica	67
2.9.4	Curvas Polares	69



2.1. Función o Aplicación

Definición 2.1. Función o Aplicación

Dados dos conjuntos X e Y , se denomina **función** o **aplicación** a toda regla que hace corresponder a cada elemento x del conjunto inicial X (denominado **conjunto dominio**¹), un único elemento y del conjunto final Y (denominado **conjunto imagen**²). Se representa por:

$$f : X \mapsto Y \quad ; \quad x \xrightarrow{f} y$$

Definición 2.2. Dominio e Imagen de una Función

Dada una función $f : X \mapsto Y$, se denomina:

- **Dominio** de f : al conjunto $D \subseteq X$ donde f está definida. Se denota mediante $\text{Dom}(f)$.
- **Imagen** de f : conjunto $f(x) \subseteq Y \quad \forall x \in D$. Se denota mediante $\text{Im}(f)$.

No confundir el **dominio** D con el **conjunto dominio** X , ni la **imagen** $f(x)$ con el **conjunto imagen** Y .

- El **dominio** D de una función es la parte del **conjunto dominio** X donde está definida la función, $D \subseteq X$. En algunas funciones el **dominio** coincide con el **conjunto dominio**, pero no de forma general.
- La **imagen** $f(x)$ es la parte del **conjunto imagen** Y que está definida para todos los valores del **dominio** D de la función, $f(x) \subseteq Y \quad \forall x \in D$. En algunas funciones la **imagen** coincide con el **conjunto imagen**, pero no de forma general.

Definición 2.3. Variable Independiente y Dependiente

Dada una función $f : D \subseteq X \mapsto I \subseteq Y$, tal que:

$$y = f(x) \quad \begin{cases} x \in D & \text{Dominio} \\ y \in I & \text{Imagen} \end{cases}$$

Se denomina:

- **Variable Independiente**: $\forall x \in D$.
- **Variable Dependiente**: $\forall y \in I$.

- Para determinar el *dominio* de una función hay que analizar los valores para los que está definida dicha función.
- Para determinar la *imagen* de una función hay que encontrar el conjunto de valores devuelto por el *dominio* de la función.

Como normalmente las funciones complicadas están formadas por operaciones entre *funciones elementales*, nos basamos en las propiedades conocidas de éstas³ para el estudio de su *dominio* e *imagen*.

¹También denominado *conjunto de definición* o *conjunto de partida*.

²También denominado *codominio*, *contradominio*, *conjunto final* o *conjunto de llegada*.

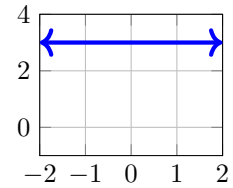
³Ver la [Sección 2.8](#), página 58.

Ejemplo 2.1. Dominio e Imagen de Funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

-

$$f(x) = 3$$

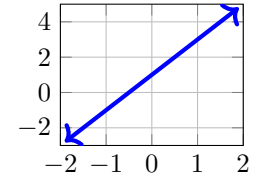
Esta función es una recta horizontal, por tanto su dominio es \mathbb{R} y su imagen $\{3\}$.



-

$$y = 2x + 1$$

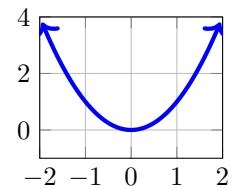
Esta función es una recta con pendiente 2, por tanto su dominio es \mathbb{R} y su imagen \mathbb{R} .



-

$$y = x^2$$

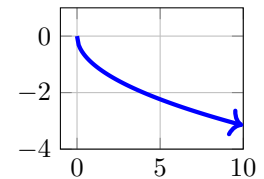
Esta función es una parábola con vértice en el origen y con valores no negativos, por tanto su dominio es \mathbb{R} y su imagen $[0, \infty)$.



-

$$y = -\sqrt{x}$$

Esta función solo está definida para valores no negativos de x y devolviendo valores no positivos, por tanto su dominio es $[0, \infty)$ y su imagen $(-\infty, 0]$.



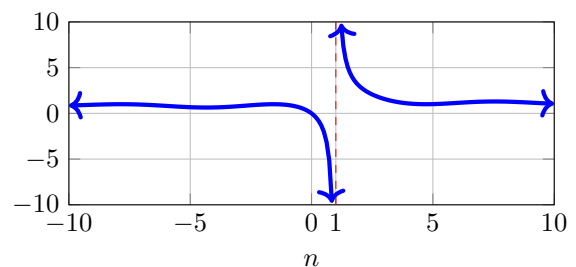
- La función:

$$f(x) = \frac{x + \text{sen } x}{x - 1}$$

Es un cociente de dos funciones. El numerador está formado por un polinomio y una función seno estando las dos definidas para todo \mathbb{R} . El denominador también es un polinomio, que se anula en $x = 1$, valor en el que no está definida la función. Por tanto:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\} \quad ; \quad \text{Im}(f) = \mathbb{R}$$

En la siguiente figura se ha representado gráficamente la función $f(x)$, pudiendo apreciar el comportamiento de la función.



2.2. Clasificación de las Funciones

El conjunto de funciones es muy grande y variado, de forma que para su estudio se clasifican atendiendo a diferentes características.

1. En base al **tipo** de los conjuntos **dominio** X e **imagen** Y .
2. En base a la **dimensión** del **conjunto dominio** X y del **conjunto imagen** Y .
3. En base al **comportamiento** o **propiedades** de la función.

2.2.1. Tipo de Conjuntos: Funciones Reales y Complejas

En base al tipo de conjuntos que relacionan, las funciones se distinguen los siguientes tipos:

- Si $X \subseteq \mathbb{R}$ se habla de **variable real**.
- Si $X \subseteq \mathbb{C}$ se habla de **variable compleja**.
- Si $Y \subseteq \mathbb{R}$ se habla de **funciones reales**.
- Si $Y \subseteq \mathbb{C}$ se habla de **funciones complejas**.

$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$	Función Real de Variable Real .	Ej: $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$
$f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$	Función Real de Variable Compleja .	Ej: $f(z) = \text{Re}(z)$, $z \in \mathbb{C}$
$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$	Función Compleja de Variable Real .	Ej: $f(x) = ix$, $x \in \mathbb{R}$
$f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$	Función Compleja de Variable Compleja .	Ej: $f(z) = z^2$, $z \in \mathbb{C}$

Nota 2.1.

- El número complejo i hace referencia a la *unidad imaginaria* cuyo valor es $i = \sqrt{-1}$.
- La función $\text{Re}(z)$ corresponde a la *parte real* del número complejo $z = x + iy$, donde $\text{Re}(z) = x$.

- En la asignatura de *Cálculo I* se estudian únicamente las funciones **reales de variable real**.
- En las asignaturas de *Ampliación de Matemáticas* y *Cálculo III* se estudian las funciones **complejas de variable compleja**.

2.2.2. Funciones Escalares y Vectoriales

Las funciones reales de variable real⁴:

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

se clasifican en base a la *dimensión*⁵ n y m de los conjuntos dominio e imagen respectivamente, de la siguiente forma:

- Si $\begin{cases} n = 1 & \text{Función de una variable} \\ n > 1 & \text{Función de varias variables.} \end{cases}$
- Si $\begin{cases} m = 1 & \text{Función Escalar} \\ m > 1 & \text{Función Vectorial.} \end{cases}$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = [f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

Ejemplo 2.2. Ejemplos de Funciones Reales.

F	$: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$	$F(x, y) = [x, \text{sen}(x, y)]$	Función vectorial de varias variables
g	$: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$	$g(x, y, z) = x + yz$	Función escalar de varias variables
H	$: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$	$H(x) = [x, x^2, x^3]$	Función vectorial de una variable
f	$: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$	$f(x) = x^2 + \text{sen } x$	Función escalar de una variable

Principalmente en la asignatura de *Cálculo II* y en la parte de *transformaciones lineales* de la asignatura *Álgebra Lineal* se estudian las funciones **vectoriales de varias variables**.

⁴En este texto se designarán a las *funciones escalares* con letras minúsculas y a las *funciones vectoriales* con letras mayúsculas.

⁵La dimensión 1 corresponde con la recta real, la dimensión 2 con el plano euclídeo bidimensional (2D), la dimensión 3 con el espacio euclídeo tridimensional (3D), etc.

2.3. Representación Gráfica de Funciones Reales

Existen dos formas muy utilizadas de representar gráficamente las funciones (escalares) reales de variable real.

$$y = f(x) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ A través de diagramas de Venn} \\ \bullet \text{ En un sistema de coordenadas cartesianas} \end{array} \right.$$

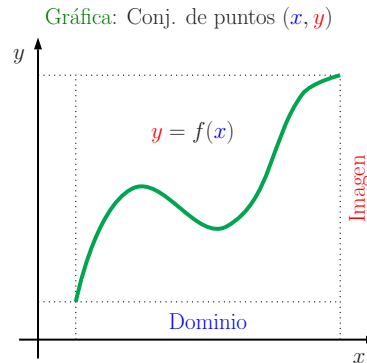
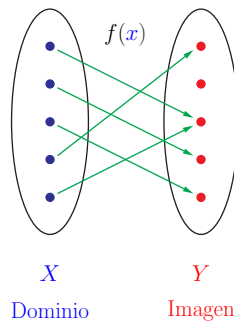


Figura 2.1: A la derecha representación gráfica de una función mediante un *diagrama de Venn*. A la izquierda representación gráfica de una función mediante un *sistema de coordenadas cartesianas*.

Definición 2.4. Gráfica de una Función

Se denomina **gráfica** de una función $y = f(x)$ al conjunto de puntos del espacio \mathbb{R}^2 dado por $(x, f(x))$, con $x \in D$ siendo D el *dominio* de la función.

2.4. Funciones Inyectivas, Sobreyectivas y Biyectivas

Definición 2.5. Función Inyectiva, Sobreyectiva y Biyectiva

Las funciones se pueden clasificar en base a su *comportamiento* de la siguiente forma:

- **Función Inyectiva:** si elementos distintos del *dominio* le corresponden *imágenes* distintas.

$$f : X \mapsto Y \text{ es inyectiva} \iff x_1 \neq x_2 \longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

- **Función Sobreyectiva**⁶: si todo elemento del *conjunto imagen* es *imagen* de algún elemento del *dominio*.

$$f : X \mapsto Y \text{ es sobreyectiva} \iff \forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$$

- **Función Biyectiva:** si es *inyectiva* y *sobreyectiva* a la vez.

Estas propiedades se entienden muy bien a través de diagramas de Venn, (ver la [Figura 2.2, página 53](#)):

- **Inyectiva:** De cada elemento del *conjunto dominio* sale una flecha y a ningún elemento en el *conjunto imagen* le puede llegar más de una flecha.
- **Sobreyectiva:** Todo elemento del *conjunto imagen* le debe llegar al menos una flecha.
- **Biyectiva:** Relación uno a uno, es decir, hay el mismo número de elementos en los dos conjuntos y están unidos formando pares por una única flecha.

⁶También denominada *epiyectiva*, *suprayectiva*, *suryectiva*, *exhaustiva* o *subyectiva*.

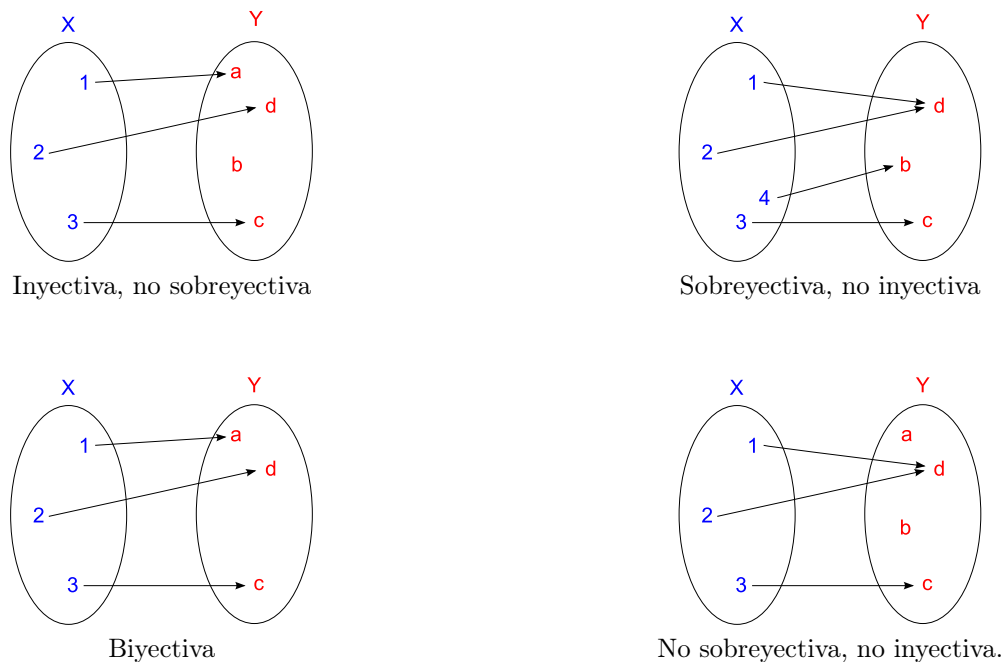
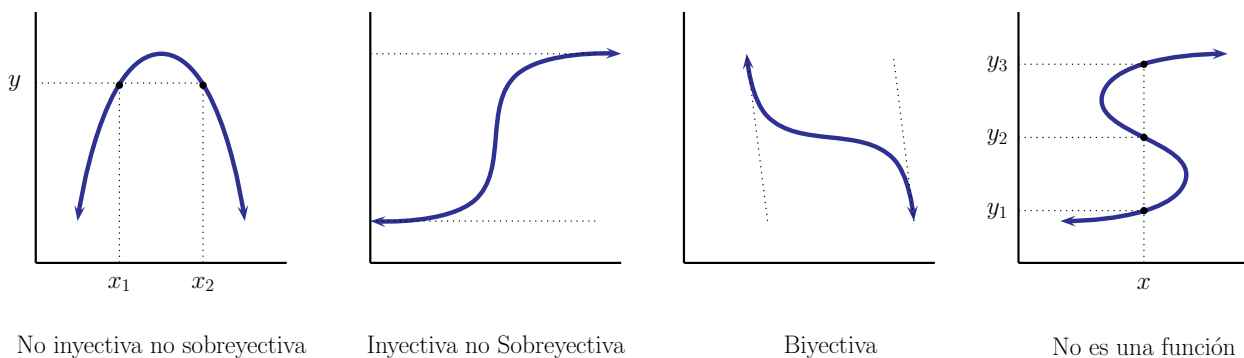


Figura 2.2: Tipos de funciones: inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.

También podemos interpretar estos tipos de funciones en gráficas de funciones en sistemas coordenados, como se muestra en la figura inferior.



- **Inyectiva:** Toda recta horizontal corta a la gráfica en un único punto.
- **Sobreyectiva:** La gráfica tiene que tener puntos correspondientes a todo el eje vertical.
- **Biyectiva:** Inyectiva + Sobreyectiva
- **Función:** Para que cumpla la definición de *función*⁷, toda recta vertical debe cortar a la gráfica en un único punto.

⁷Ver la definición de *función* en la [Definición 2.1, página 49](#) y la definición general de *curva* en la [Definición 2.17, página 66](#).

2.4.1. Determinación de la Inyectividad y Sobreyectividad

- Para determinar si una función es *inyectiva* o no hay que aplicar la definición, verificando que a elementos distintos del dominio le corresponden siempre imágenes distintas. Para ello se siguen los siguientes pasos:

1. Construimos la ecuación: $f(a) = f(b)$
2. Despejamos a como función de b : $a = g(b)$.
3. Si este resultado es⁸ $a = b$ la función es inyectiva y de otra forma no lo es.

Ejercicio 2.1. Determinar si las siguientes funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son inyectivas:

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = x^2$

a) $\left. \begin{array}{l} f(a) = 2a + 1 \\ f(b) = 2b + 1 \end{array} \right\} 2a + 1 = 2b + 1 \implies a = b \implies \boxed{f(x) \text{ es inyectiva}}$

b) $\left. \begin{array}{l} f(a) = a^2 \\ f(b) = b^2 \end{array} \right\} a^2 = b^2 \implies a = \sqrt{b^2} = |b| \implies a = \pm b \implies \boxed{f(x) \text{ no es inyectiva}}$

- Para que una función sea *sobreyectiva* su imagen debe ser \mathbb{R} .

Ejercicio 2.2. Determinar si las siguientes funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son sobreyectivas:

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = x^2$

- a) Como la imagen de esta función es \mathbb{R} (ver el [Ejemplo 2.1, página 50](#)),

$$\boxed{f(x) \text{ es sobreyectiva}}$$

Además por ser *inyectiva*, también es *biyectiva*.

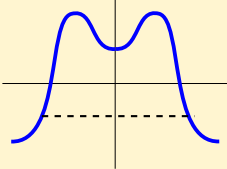
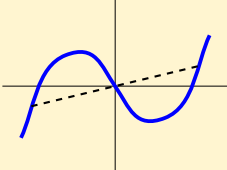
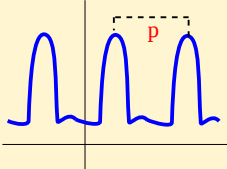
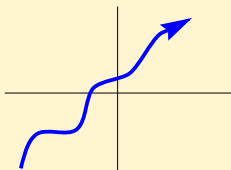
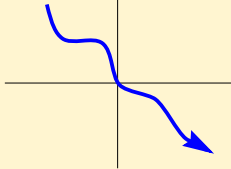
- b) Como la imagen de esta función es $[0, \infty)$ (ver el [Ejemplo 2.1, página 50](#)),

$$\boxed{f(x) \text{ no es sobreyectiva}}$$

⁸Lo que indica que la única forma que dos imágenes sean iguales es que correspondan a un único valor.

2.5. Función Par, Impar, Periódica y Monótona

Veamos algunos tipos interesantes de funciones.

<ul style="list-style-type: none"> • Función Par: $f(-x) = f(x)$ 		<p>Simétrica con respecto al eje y</p>
<ul style="list-style-type: none"> • Función Impar: $f(-x) = -f(x)$ 		<p>Simétrica con respecto al origen $(0, 0)$.</p>
<ul style="list-style-type: none"> • Función Periódica: $f(x) = f(x + np)$ 		<p>$n \in \mathbb{Z}$ $p \rightarrow$ periodo</p>
<ul style="list-style-type: none"> • Funciones Monótonas: aquellas que o bien siempre crecen o bien siempre decrecen. 		
<ul style="list-style-type: none"> – Monótona Creciente: si $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$ 		
<ul style="list-style-type: none"> – Monótona Decreciente: si $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$ 		

2.6. Función Inversa $f^{-1}(x)$

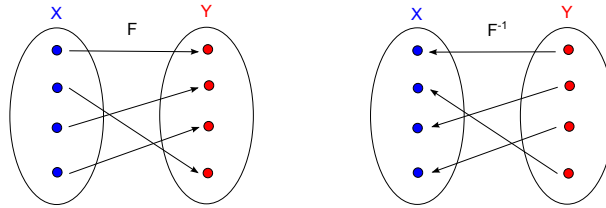
Definición 2.6. Función Inversa

Dada una función *biyectiva*⁹ $f : X \rightarrow Y$, se define la **función inversa** (o **recíproca**) de f como:

$$f^{-1} : Y \rightarrow X$$

⁹La condición necesaria y suficiente para que una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sea *invertible* en todo \mathbb{R} es que sea *biyectiva*, (ver la [Definición 2.5, página 52](#)). Si una función solo es *biyectiva* en un dominio $I \subseteq \mathbb{R}$, su función inversa solo estará definida en la imagen de f correspondiente al dominio I .

En caso de que exista, la función inversa $f^{-1}(x)$ de una función dada $f(x)$ es aquella que tiene por conjunto dominio el conjunto imagen de $f(x)$ y por conjunto imagen el conjunto dominio de $f(x)$.



La representación gráfica de $f^{-1}(x)$ es una *reflexión*¹⁰ de la gráfica de $f(x)$ con respecto a la recta $y = x$. La **Figura 2.3** muestra gráficamente dos casos sencillos de la función inversa, en relación a la función original.

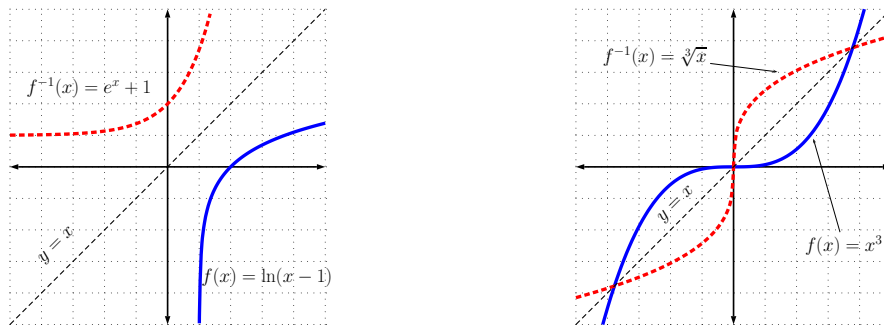


Figura 2.3: Dos ejemplos de representación gráfica de una función $f(x)$ junto a su correspondiente función inversa $f^{-1}(x)$. Puede apreciarse como ambas son una *reflexión* respecto de de la recta $y = x$.

La **función inversa** $f^{-1}(x)$ es **distinta** que la **inversa de una función** $[f(x)]^{-1}$:

$$\underbrace{[f(x)]^{-1} = \frac{1}{f(x)}}_{\text{Inversa de la función}} \neq \underbrace{f^{-1}(x)}_{\text{Función inversa}}$$

2.6.1. Determinación de la Función Inversa

En el caso de que una función $f(x)$ sea *biyectiva* en un dominio I , podemos calcular su función inversa $f^{-1}(x)$, correspondiente a ese dominio, siguiendo los siguientes pasos:

1. Expresar la función de la forma $y = f(x)$.
2. Despejar x como función de y : $x = g(y)$. ← Solución única sii $f(x)$ inyectiva.
3. Intercambiar la x y la y ($x \longleftrightarrow y$) \implies $f^{-1}(x) = h(x)$.

Ejercicio 2.3. Calcular, en caso de que exista, la función inversa $f^{-1}(x)$ de $f(x) = 2x + 1$.

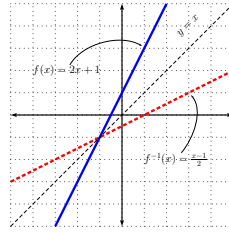
Esta función es claramente biyectiva al ser una recta inclinada \implies sí existe su función inversa. Para calcularla:

¹⁰Si $f(a) = b \implies f^{-1}(b) = a$, por tanto si (a, b) es un punto de la gráfica de f , el punto (b, a) tiene que pertenecer a la gráfica de f^{-1} , pues $f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a$. Por tanto, la gráfica de f^{-1} no es más que una reflexión de la gráfica de f según la recta $y = x$.

1. $y = 2x + 1$

2. $x = \frac{y - 1}{2}$

3. $f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}$



2.7. Composición de Funciones

Definición 2.7. Composición de Funciones

Dadas las funciones:

$$\begin{cases} g : X \mapsto Y \\ f : Y \mapsto Z \end{cases}$$

se define, la *composición de las funciones* g y f de la siguiente forma¹¹:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] \qquad x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f[g(x)]$$

$$(f \circ g) : X \mapsto Z$$

- Para poder realizar la composición $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ es necesario que el dominio de f coincida con la imagen de g .
- El dominio de la nueva función $(f \circ g)(x)$ es el dominio de $g(x)$ y su imagen es la imagen de $f(x)$.

Ejercicio 2.4. Dadas las siguientes funciones $f(x)$ y $g(x)$ determinar, en caso de ser posible, las composiciones $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

$$f(x) = \cos(x) \qquad ; \qquad g(x) = x^2 + 1$$

$$\left. \begin{matrix} f(x) = \cos(x) \\ g(x) = x^2 + 1 \end{matrix} \right\} \implies \begin{cases} (f \circ g)(x) = f[g(x)] = \cos(x^2 + 1) \\ (g \circ f)(x) = g[f(x)] = \cos^2(x) + 1 \end{cases}$$

La composición múltiple de funciones es *asociativa* pero no es *conmutativa*.

$$\left. \begin{matrix} [h \circ (g \circ f)](x) = h[(g \circ f)(x)] = h\{g[f(x)]\} \\ [(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)[f(x)] = h\{g[f(x)]\} \end{matrix} \right\} \text{ Iguales !! } \implies \text{ Es asociativa}$$

Sin embargo generalmente: $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$ como se comprueba en el anterior **Ejemplo 2.4**.

¹¹La expresión $f \circ g$ se lee “composición de f y g ”, o bien, “ g compuesta con f ”. Notar que no se nombra siguiendo el orden de escritura, sino siguiendo el orden en que se aplican en la composición: $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$. Primero se aplica la función g y posteriormente la función f .

2.8. Funciones Elementales

En esta sección vamos a repasar las propiedades más importantes de las siguientes funciones elementales:

- Funciones Polinómicas
- Funciones Racionales
- Funciones Irracionales
- Funciones Potenciales
- Funciones Exponenciales
- Funciones Logarítmicas
- Funciones Trigonométricas
- Funciones Hiperbólicas

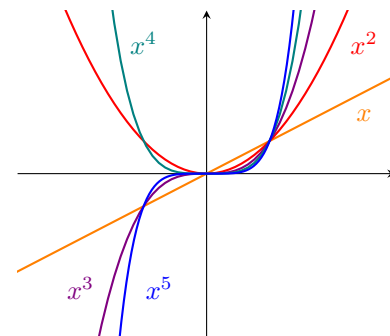
2.8.1. Funciones Polinómicas

Definición 2.8. Función Polinómica

Una **función polinómica** es aquella que está formada por la suma de *monomios* de distinto grado.

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad a_n \neq 0$$

- | | | |
|---|---------|--------------------------------------|
| { | n | : Grado del polinomio |
| | a_0 | : Término independiente |
| | a_n | : Coeficiente principal o director |
| | Monomio | : Cada uno de los términos $a_i x^i$ |



- El dominio de todo polinomio es \mathbb{R} mientras que su imagen depende de las potencias y coeficientes de sus *monomios*.
- Los *monomios* de potencia par son *funciones pares* y los *monomios* de potencia impar son *funciones impares*¹².
- Los polinomios de *grado* n pueden tener hasta $n - 1$ “dobleses” en su gráfica.
- Los polinomios de *grado* par tienen el mismo comportamiento en sus extremos, ambos crecen o decrecen de forma indefinida. Si el *coeficiente principal* es positivo en ambos crece y si es negativo en ambos decrece.
- Los polinomios de *grado* impar tienen distinto comportamiento en sus extremos, mientras que en uno de ellos crece de forma indefinida, el otro decrece. Si el *coeficiente principal* es positivo, en la parte positiva crece y en la negativa decrece, y si es negativo al contrario.
- La suma, resta, producto y composición de polinomios genera un nuevo polinomio.

¹²Ver la Sección 2.5, página 55.

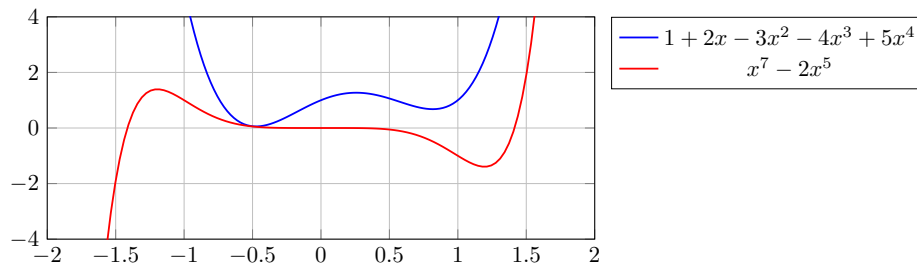


Figura 2.4: Representación gráfica de dos polinomios de diferentes grados.

2.8.2. Funciones Racionales

Definición 2.9. Función Racional

Las **funciones racionales** son aquellas que están formadas por cociente de dos *polinomios*:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

- La función *racional* no está definida en los *ceros* o *raíces* reales del polinomio¹³ del *denominador* $Q_m(x)$, en caso de tenerlos, por tanto el dominio de una función racional es todo \mathbb{R} excepto los *ceros* reales del denominador.
- El comportamiento de la función depende de los polinomios del numerador y denominador:
 - Si $n > m$ la función tiende a $\pm\infty$ en sus *extremos*.
 - Si $n < m$ la función tiende a 0 en sus *extremos*.
 - Si $n = m$ la función tiende en sus *extremos* al valor correspondiente al cociente de los coeficientes principales del *numerador* y *denominador*.

Ejemplos

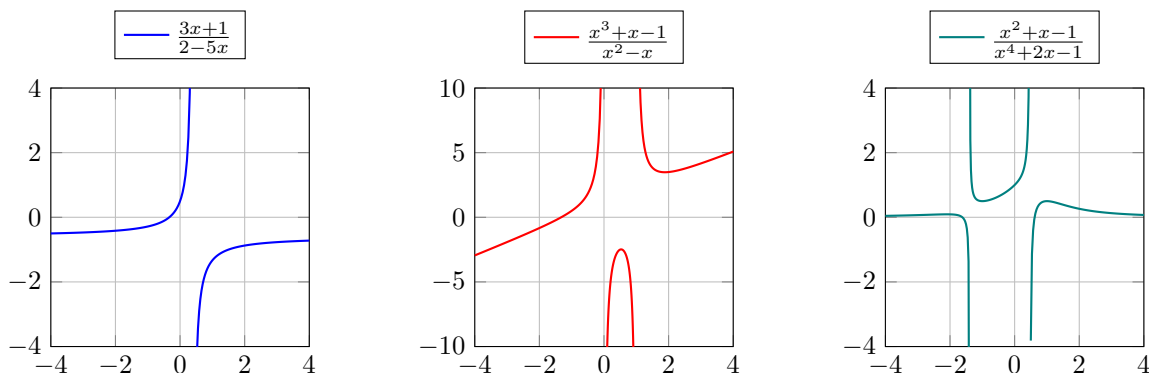


Figura 2.5: **Izquierda:** ambos polinomios son de igual grado, por tanto en los extremos tiende al valor del cociente de sus coeficientes principales ($-3/5$). La función no está definida en $x = 2/5$. **Centro:** como el grado del numerador es mayor que el del denominador, la función tiende en sus extremos a $\pm\infty$. El denominador tiene dos ceros en $\{0, 1\}$ donde la función no está definida. **Derecha:** como el grado del numerador es menor que el del denominador, la función tiende en sus extremos a 0. El denominador tiene cuatro ceros pero solo dos de ellos son reales, en donde la función no está definida.

¹³Ver la [Sección A.5](#), página 302.

2.8.3. Funciones Irracionales o Radicales

Las **funciones irracionales** o **radicales** son aquellas donde aparece un radical de la forma:

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)} = [g(x)]^{1/n} \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \quad , \quad n > 1$$

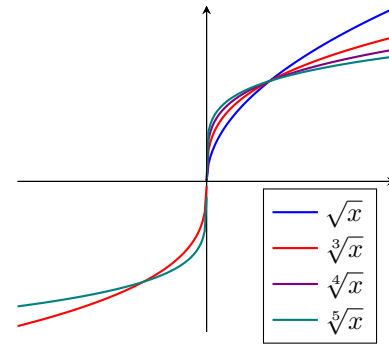
donde $g(x)$ es un *polinomio* o una *función racional*.

Radicales Simples

$$\sqrt[n]{x} \quad \begin{cases} n : \text{índice} \\ x : \text{radicando} \end{cases}$$

Recordamos que las raíces con n pares solo existen para valores $x \geq 0$, mientras que las raíces con n impar existen $\forall x \in \mathbb{R}$ dando lugar a *funciones impares*¹⁴.

Sus gráficas tienden a ∞ por la derecha en todos los casos y a $-\infty$ por la izquierda en los casos con n impar.



Convenio con el Signo Negativo

Por convenio, en las raíces de números reales no se suele representar el signo negativo dentro del radicando, pudiendo ser considerado indefinido o no permitido en algunos casos. Tomando este criterio, la solución a la ecuación:

$$x^3 = -8$$

debe representarse como $-\sqrt[3]{8}$ y no como $\sqrt[3]{-8}$. Escrito de esta manera, las raíces de números negativos si el índice de la raíz es un número impar se expresan como:

$$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} \quad ; \quad a > 0$$

Representar las raíces de esta manera evita ciertas incompatibilidades y contradicciones con algunas propiedades de las raíces que son válidas para radicandos positivos. Una muestra de ello puede ser:

$$-2 = \sqrt[3]{-8} \neq \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$$

La representación considerada indefinida tampoco funciona con la siguiente fórmula:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln a\right)$$

dado que el logaritmo de un número negativo no está definido.

Por otra parte las raíces de índice par de números negativos no pueden ser números reales, puesto que las potencias de exponente par de estos números nunca son negativas. Así, no existe un número real x , tal que:

$$x^2 = -1$$

por lo que no se puede hallar $x = \sqrt{-1}$ dentro de los números reales. La necesidad de raíces de números negativos permitió la introducción de los *números complejos*¹⁵.

¹⁴Ver la Sección 2.5, página 55.

¹⁵Ver el Apéndice B, página 321.

Ejemplos

Vamos a ver algunos ejemplos de *funciones radicales* de polinomios y de funciones racionales.

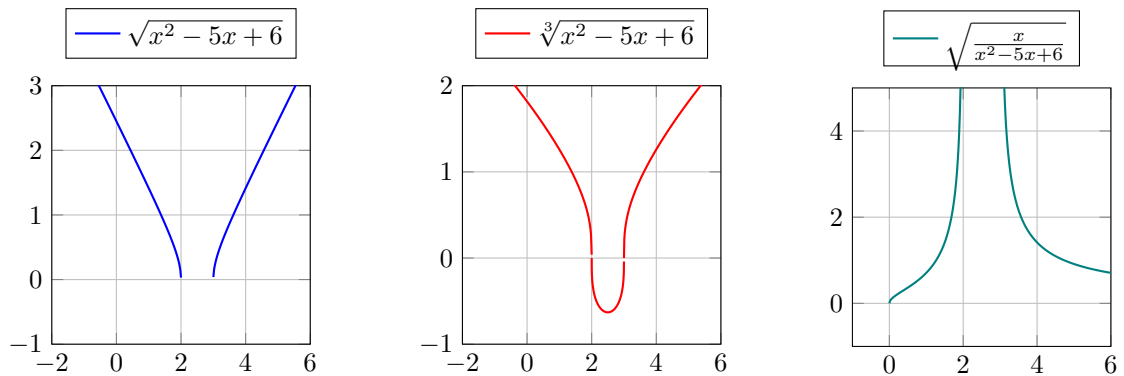


Figura 2.6: **Izquierda:** Al ser una raíz cuadrada, solo está definida para valores $x^2 - 3x + 1 \geq 0$. Los ceros del polinomio son $\{2, 3\}$ siendo negativo en el intervalo $(2, 3)$ donde la raíz no está definida. A izquierda y derecha la función tiende a ∞ . **Centro:** El polinomio es el mismo que el primer caso, pero ahora es una raíz cúbica que está definida para todo valor del argumento. **Derecha:** Este caso es una raíz cuadrada de una función racional, por tanto no está definida en los ceros del denominador $\{2, 3\}$ y cuando el argumento de la raíz es negativo, que tiene lugar en la región $(-\infty, 0) \cup (2, 3)$. La función se anula en $x = 0$ y tiende a cero por la derecha.

2.8.4. Funciones Potenciales

Definición 2.10. Potencia

Una **potencia** es una expresión matemática entre dos números $a, b \in \mathbb{R}$ de la forma:

$$a^b \begin{cases} a & : \text{ base} \\ b & : \text{ exponente} \end{cases}$$

La definición de potencia depende del tipo de números que sean la *base* y el *exponente*.

- Si $b = 0$: $a^0 = 1$
- Si $b \in \mathbb{N}$: $a^b = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_b$
- Si $b > 0$: $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$
- Si $b \in \mathbb{Q}$, $b = p/q$: $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$
- Si $a > 0$: $a^b = e^{b \ln a}$

Propiedades de las potencias

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $a^x + a^y = a^x(1 + a^{y-x})$
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
- $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
- $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

Definición 2.11. Función Potencial

Las **funciones potenciales** son aquellas que tienen la forma:

$$f(x) = x^a, \quad a \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} a > 1 : & \text{Potencial} \\ 0 < a < 1 : & \text{Radical} \\ a = 0 : & \text{Func. constante (1)} \\ a < 0 : & \text{Racional o Radical} \end{cases}$$

Ejemplos

Las *funciones potenciales* incluyen a los monomios y sus inversos y a las funciones radicales, de forma que presenta un comportamiento muy variado. En la siguiente figura se muestran algunos ejemplos básicos:

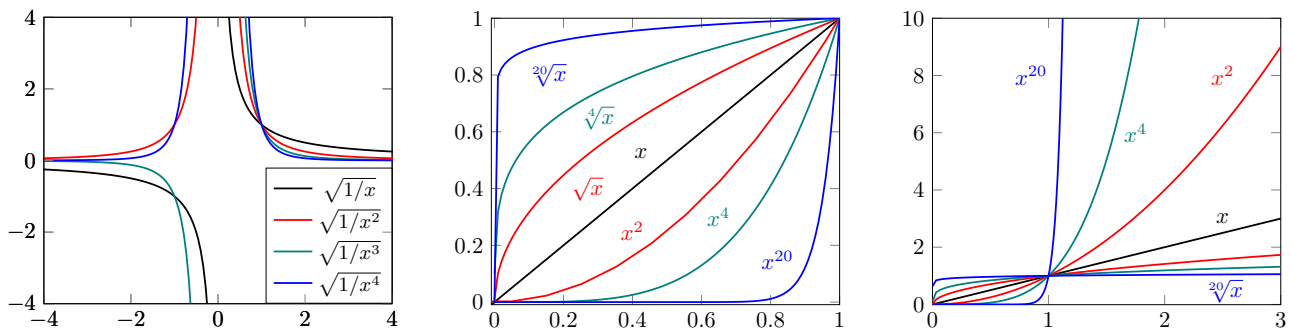


Figura 2.7: **Izquierda:** Se muestran los inversos de los monomios. Para potencias impares se obtienen funciones impares con imagen en todo \mathbb{R} , mientras que para potencias pares se obtienen funciones pares con imagen en $(0, \infty)$. **Centro:** Se comparan algunos monomios y funciones radicales en el intervalo $[0, 1]$, donde las funciones radicales alcanzan mayores valores que los monomios. Notar que todas las funciones coinciden en $x = 0$ con valor 0 y en $x = 1$ con valor 1. **Derecha:** Se vuelve a comparar los monomios y las funciones radicales, pero en un intervalo mayor. Para valores $x > 1$ los monomios siempre tienen un valor muy superior a las funciones radicales.

2.8.5. Funciones Exponenciales

Definición 2.12. Función Exponencial

Las **funciones exponenciales** son aquellas que tienen la forma:

$$f(x) = a^x \quad ; \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

Nota 2.2. Si $0 < a < 1$ de forma que $a = \frac{1}{A}$ con $A > 1$, se tiene:

$$a^x = \left(\frac{1}{A}\right)^x = (A^{-1})^x = A^{-x}$$

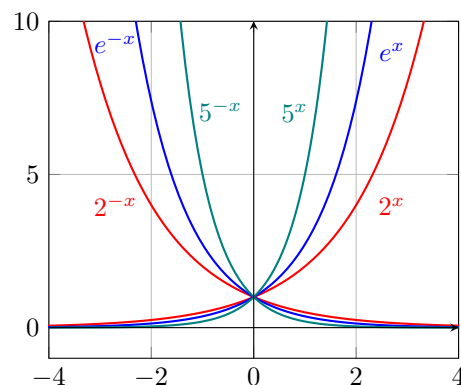
Cuando se particulariza, la **función exponencial** se refiere al caso $a = e$ (número¹⁶ e):

$$f(x) = e^x$$

¹⁶Ver la Sección 8.9, página 202.

Características de las funciones exponenciales:

- El dominio es \mathbb{R} y la imagen $(0, \infty)$.
- Como $a^0 = 1$ las funciones siempre pasan por el punto $(0, 1)$.
- Si $0 < a < 1$ la función es decreciente, tendiendo a cero por la derecha y a infinito por la izquierda.
- Si $a > 1$ la función es creciente, tendiendo a infinito por la derecha y a cero por la izquierda.



2.8.6. Funciones Logarítmicas

Definición 2.13. Logaritmo

Sean $b, x \in \mathbb{R}$ con $b, x > 0$ y $b \neq 1$. Se dice que el **logaritmo en base b** de x es un número $a \in \mathbb{R}$, correspondiente al exponente al que hay que elevar la base b para obtener x .

$$\log_b x = a \iff b^a = x$$

Propiedades de los logaritmos

- $\log_b(a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$
- $\log_b\left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$
- $\log_b(a^c) = c \cdot \log_b a$
- $\log_c a = (\log_c b) (\log_b a)$ (Cambio de Base)

Nota 2.3. Si $0 < b < 1$ de forma que $b = \frac{1}{B}$ con $B > 1$, se tiene (aplicando la fórmula de cambio de base de un logaritmo):

$$\log_B x = (\log_B b) (\log_b x)$$

Como:

$$\log_B b = \alpha \iff B^\alpha = b \implies \alpha = -1$$

De forma que:

$$\log_b x = -\log_B x$$

Definición 2.14. Logaritmo Neperiano o Natural

Se denomina **logaritmo neperiano** o **natural** al logaritmo cuya base es el número e .

$$\ln x = a \iff e^a = x$$

Definición 2.15. Logaritmo Decimal

Se denomina **logaritmo decimal** al logaritmo de base 10.

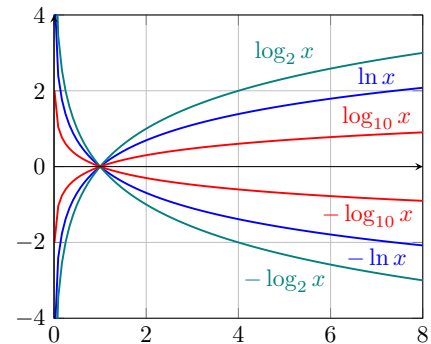
$$\log_{10} x = a \iff 10^a = x \quad ; \quad \log_{10} x = \log_{10} e \cdot \ln x$$

En este curso, si no se indica la base de un logaritmo por defecto se refiere al *logaritmo neperiano*, así:

$$\log x = \ln x$$

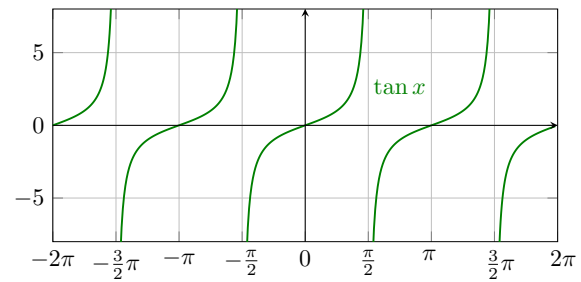
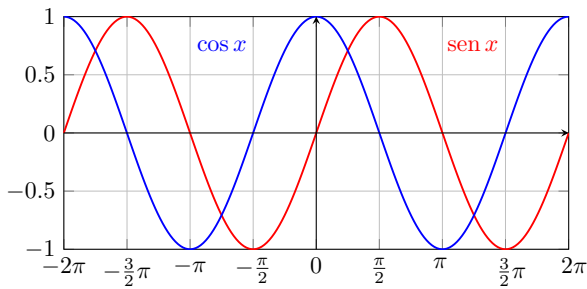
Características de las funciones logarítmicas:

- El dominio es $(0, \infty)$ y la imagen es \mathbb{R} .
- Como $b^0 = 1 \implies \log_b 1 = 0$ y por tanto todas las funciones siempre pasan por el punto $(1, 0)$.
- Si $0 < b < 1$ la función es *decreciente*, tendiendo a $-\infty$ por la derecha y a infinito por la izquierda. ($\log_b x = -\log_{1/b} x$)
- Si $b > 1$ la función es *creciente*, tendiendo a infinito por la derecha y a $-\infty$ por la izquierda.



2.8.7. Funciones Trigonómicas

- Las *funciones trigonométricas*¹⁷ directas $\sin x$ y $\cos x$ tienen su dominio¹⁸ en todo \mathbb{R} y su imagen en $[-1, 1]$, siendo *funciones periódicas* con periodo 2π , con un desplazamiento de $\pi/2$ entre ellas.
- La función $\tan x = \sin x / \cos x$ no está definida en los puntos donde se anula $\cos x$, siendo su imagen \mathbb{R} . También es una función periódica pero de periodo π .



Funciones Trigonómicas Inversas

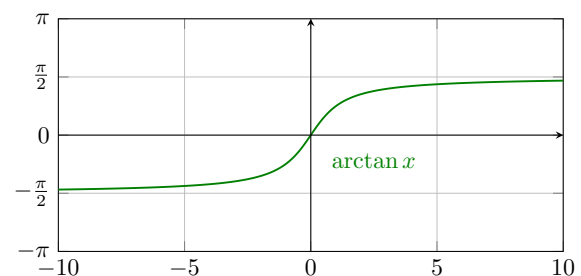
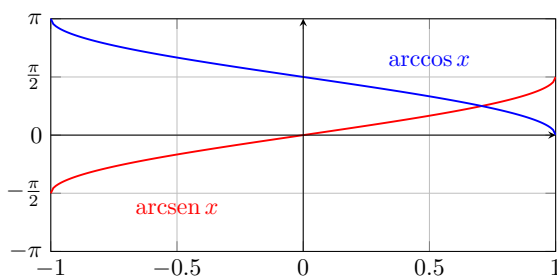
- Las *funciones trigonométricas inversas* $\arcsen x$, $\arccos x$ y $\arctan x$ verifican:

$$\arcsen x = y \iff \sin y = x$$

$$\arccos x = y \iff \cos y = x$$

$$\arctan x = y \iff \tan y = x$$

- El dominio de $\arcsen x$ es $[-1, 1]$ y su imagen $[-\pi/2, \pi/2]$.
- El dominio de $\arccos x$ es $[-1, 1]$ y su imagen $[0, \pi]$.
- El dominio de $\arctan x$ es \mathbb{R} y su imagen $[-\pi/2, \pi/2]$.



¹⁷Ver un repaso sobre *Trigonometría* en el [Apéndice A.7](#), página 308.

¹⁸Notar que aquí el argumento de todas las funciones trigonométricas siempre se expresa en *radianes*.

2.8.8. Funciones Hiperbólicas

Definición 2.16. Funciones Hiperbólicas

- Las **funciones hiperbólicas directas** se definen como:

$$\text{Seno hiperbólico} \\ \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{Coseno hiperbólico} \\ \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{Tangente hiperbólica} \\ \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

- Las **funciones hiperbólicas inversas** se definen como¹⁹:

$$\text{Arcoseno hiperbólico} \\ \operatorname{arcsenh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

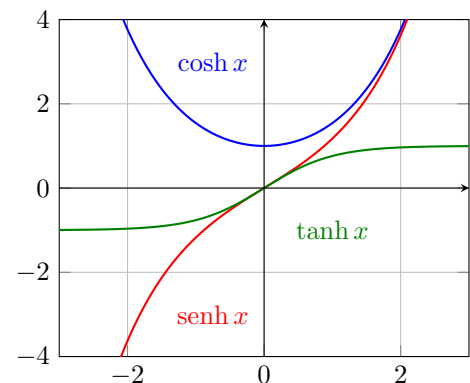
$$\text{Arcocoseno hiperbólico } (x \geq 1) \\ \operatorname{arccosh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

$$\text{Arcotan. hiperbólica } (|x| < 1) \\ \operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

Las *funciones hiperbólicas* están basadas en la función exponencial $f(x) = e^x$ a través de operaciones racionales y presentan unas propiedades análogas a las *funciones trigonométricas*.

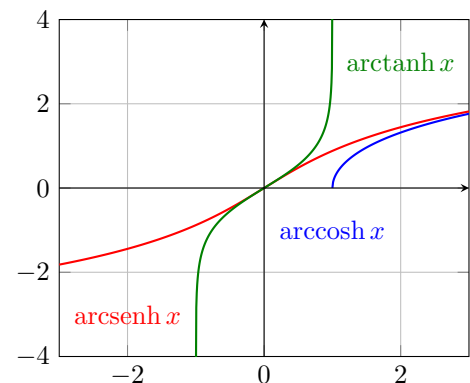
Características de las Funciones Hiperbólicas Directas

- El dominio e imagen de $\sinh x$ es \mathbb{R} , tendiendo a $-\infty$ por la izquierda y a ∞ por la derecha.
- El dominio de $\cosh x$ es \mathbb{R} y su imagen $[1, \infty)$, tendiendo a ∞ tanto por la izquierda como por la derecha.
- El dominio de $\tanh x$ es \mathbb{R} y su imagen $(-1, 1)$, tendiendo a -1 por la izquierda y a 1 por la derecha.



Características de las Funciones Hiperbólicas Inversas

- El dominio e imagen de $\operatorname{arcsenh} x$ es \mathbb{R} , tendiendo a $-\infty$ por la izquierda y a ∞ por la derecha.
- El dominio de $\operatorname{arccosh} x$ es $[1, \infty) \subset \mathbb{R}$ y su imagen $[0, \infty)$, tendiendo a ∞ tanto por la izquierda como por la derecha.
- El dominio de $\operatorname{arctanh} x$ es $(-1, 1)$ y su imagen \mathbb{R} , tendiendo a $-\infty$ y ∞ para $x \rightarrow -1$ y $x \rightarrow 1$ respectivamente.



En el [Apéndice A.8, página 318](#) se puede ver un resumen de las propiedades de las *funciones hiperbólicas* directas e inversas.

¹⁹Ver el [Ejercicio A.16, página 319](#).

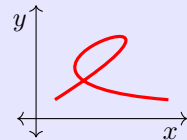
2.9. Otras Formas de Expresar Funciones

En esta sección vamos a ver formas alternativas de definir funciones reales de variable real. Para ello primeramente vamos a ver un concepto más general que el de *función*, como es el de *curva*.

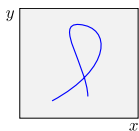
2.9.1. Curva Plana

Definición 2.17. Curva

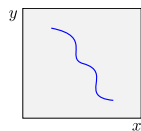
Una **curva** es una línea continua de una dimensión²⁰ que varía de dirección de forma paulatina²¹ y constante.



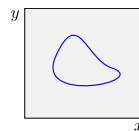
- Una *curva* es una aplicación entre elementos de dos conjuntos (dominio e imagen) que a cada elemento del conjunto dominio le hace corresponder **uno o más** elementos del conjunto imagen²².
- Hay diferentes tipos de *curvas*²³: planas, simples, cerradas, suaves, diferenciables, etc.
- Todas las funciones son *curvas*²⁴ pero no al contrario.



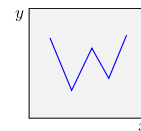
Curva



Curva Simple



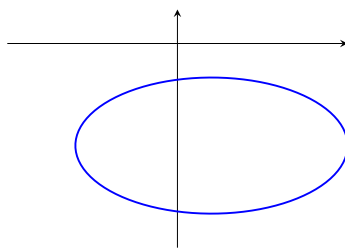
Curva Cerrada



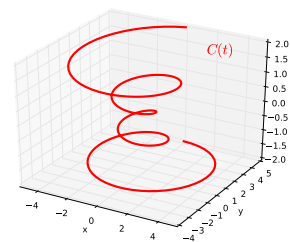
Curva No Diferenciable

Definición 2.18. Curva Plana

Una **curva plana** es aquella cuyos puntos se encuentran en un solo plano²⁵.



Curva Plana



Curva 3D

²⁰Las curvas son unidimensionales, las superficies bidimensionales y los sólidos tridimensionales.

²¹Lenta y gradual.

²²Comparar esta definición con la de *función* dada en la [Definición 2.1](#), página 49, donde a cada valor del dominio le corresponde uno y solo uno de los elementos de la imagen.

²³Ver por ejemplo "Clases de Cálculo II para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 367.

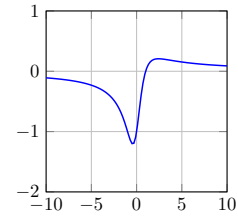
²⁴En concreto las funciones reales de variable real son curvas planas.

²⁵Las curvas planas pueden ser abiertas o cerradas.

Ejemplo 2.4. Función Paramétrica

La función $y = f(x)$ siguiente:

$$y = \frac{x-1}{x^2+1}$$



puede expresarse de forma paramétrica simplemente transformando la variable independiente x en el parámetro t :

$$f(x) = \begin{cases} x = t \\ y = \frac{t-1}{t^2+1} \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}$$

t	x	y
0	0	-1
1	1	0
-1	-1	-1
\vdots	\vdots	\vdots

También podría expresarse alternativamente de forma paramétrica por ejemplo haciendo el cambio de variable $t = x - 1$ y por tanto $x = t + 1$, de forma que se tiene:

$$f(x) = \begin{cases} x = t + 1 \\ y = \frac{t}{(t+1)^2+1} = \frac{t}{t^2+2t+2} \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}$$

t	x	y
0	1	0
1	2	1/5
-1	0	-1
\vdots	\vdots	\vdots

Vemos que para los mismos valores del parámetro t se obtienen puntos distintos en cada una de las formas paramétricas, pero que corresponden todos al conjunto de puntos de la misma función $f(x)$.

Nota 2.6. Hay infinitas formas de expresar una determinada función en *forma paramétrica*, siendo algunas de ellas más convenientes que otras para determinadas aplicaciones.

Ejemplo 2.5. Curva Paramétrica

Las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 + 4 \cos t \\ y = -3 + 2 \sin t \end{cases} ; \quad t \in [0, 2\pi]$$

definen una *elipse* de centro $(1, -3)$ y de semiejes 4 y 2 como muestra la siguiente gráfica³¹.

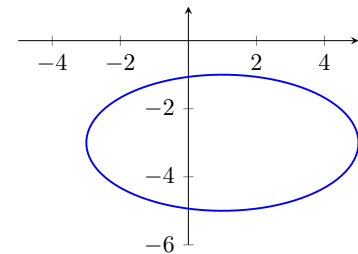
Como $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, despejando se tiene:

$$\begin{cases} \cos t = (x-1)/4 \\ \sin t = (y+3)/2 \end{cases} \implies \frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$$

Simplificando se puede obtener una ecuación implícita que es equivalente a la forma paramétrica anterior:

$$4y^2 + 24y + x^2 - 2x + 21 = 0$$

Notar que esta curva plana **no** es una función ya que para determinados valores x de su dominio les corresponden dos valores y en su imagen.



Nota 2.7. En determinados casos se puede despejar el parámetro t de las dos ecuaciones paramétricas e igualarlas, desapareciendo la dependencia de t y obteniéndose la forma implícita o explícita de la función.

³¹Para representar una curva definida en *forma paramétrica* se puede emplear por ejemplo el programa *GeoGebra*, ver el [Ejemplo C.9, página 354](#).

2.9.4. Curvas Polares

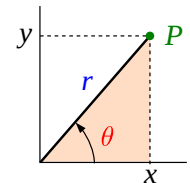
Las **curvas polares** se basan en un sistema coordenado distinto conocido como **coordenadas polares**.

Coordenadas Polares

- Las **coordenadas cartesianas** definen un punto cualquiera del plano a través de dos componentes: una distancia horizontal (x) y otra vertical (y).
- Las **coordenadas polares** cambian estas dos componentes por otras dos: un **ángulo**³² θ y una **distancia** llamada **radio** r .

Cualquier punto del plano $P(x, y)$ se puede representar en *coordenadas polares* por un determinado par ordenado³³ $P(r; \theta)$, donde:

- $r \geq 0$ es la **distancia**³⁴ del punto P al origen de coordenadas.
- $\theta \in (-\pi, \pi]$ es el **ángulo**³⁵ que forma con el eje X la recta que une P con el origen.

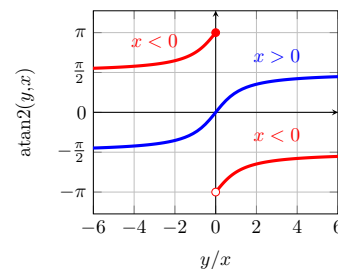


Las relaciones de conversión entre los dos sistemas de coordenadas (cartesianas y polares) son las siguientes:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \operatorname{atan2}(y, x) \end{cases} \quad (2.1)$$

donde la función $\operatorname{atan2}(y, x)$ corresponde con la función *arcotangente* definida para los cuatro cuadrantes³⁶ y puede expresarse matemáticamente como³⁷:

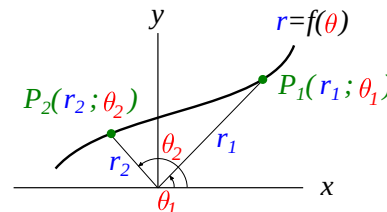
$$\operatorname{atan2}(y, x) = \begin{cases} \operatorname{arctan} \frac{y}{x} & \text{si } x > 0 \\ \operatorname{sign}(y) \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0, y \neq 0 \\ \operatorname{sign}(y)\pi - \operatorname{arctan} \frac{y}{|x|} & \text{si } x < 0 \\ \text{indefinido} & \text{si } x = 0, y = 0 \end{cases}$$



Curvas en Coordenadas Polares

Una *curva plana* puede definirse a través de las *coordenadas polares* expresando el valor del radio r (variable dependiente) como una función del ángulo θ (variable independiente) de la siguiente forma:

$$r = f(\theta)$$



³²Es también habitual denominar al ángulo con la letra t .

³³En este texto vamos a utilizar punto y coma (;) para identificar más claramente las coordenadas polares.

³⁴A pesar de que r es una distancia y por tanto físicamente siempre es un valor mayor o igual que cero, en la práctica pueden aparecer valores negativos de r , lo cual indica que la distancia se toma en la misma dirección pero en sentido contrario, es decir con el mismo valor de r pero con un ángulo $\theta + \pi$.

³⁵Se considera positivo en el sentido antihorario y negativo en el sentido horario.

³⁶Notar que la función $\operatorname{arctan}(x) \in (-\pi/2, \pi/2)$, (ver la **Sección 2.8.7, página 64**), y solo devuelve valores (ángulos) que están en el primero y en el cuatro cuadrante del plano cartesiano. La función $\operatorname{atan2}(y, x)$ suele estar definida en todos los lenguajes de programación.

³⁷La función $\operatorname{sign}()$ es la *función signo* y está definida en la **Sección 8.10.5, página 208**. Hay otras posibles definiciones alternativas de la función $\operatorname{atan2}()$, ver por ejemplo <https://en.wikipedia.org/wiki/Atan2>.

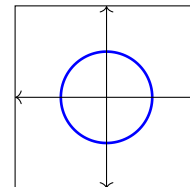
Nota 2.8.

- Los puntos del plano en coordenadas cartesianas $P(x, y)$ se expresan indicando en primera posición la variable independiente (x) y en segunda posición la variable dependiente (y).
- Los puntos del plano en coordenadas polares $P(r; \theta)$ se expresan indicando en primera posición la variable dependiente (r) y en segunda posición la variable independiente (θ).

Ejemplo 2.6. Curvas y Funciones en Coordenadas Polares

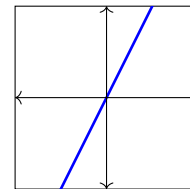
- Circunferencia de centro origen y radio a .

$$r = a$$



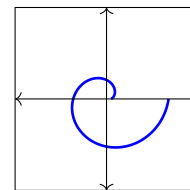
- Recta que pasa por el origen y pendiente $m = \tan \theta$.

$$\theta = a$$



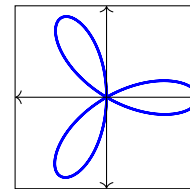
- Espiral de Arquímedes

$$r = a + b\theta$$



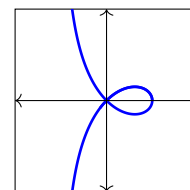
- Rosa Polar

$$r = a \cos(b\theta + c)$$



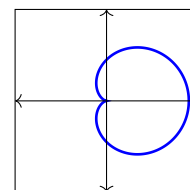
- Estrofoide

$$r = a \frac{\cos(2\theta)}{\cos \theta}$$



- Cardiode

$$r = a(1 + \cos \theta)$$



Relación entre Coordenadas Polares y Paramétricas

Realmente las coordenadas polares son un tipo particular de *ecuaciones paramétricas*³⁸, de forma que dada una función en coordenadas polares $r = f(t)$ y teniendo en cuenta la relación entre coordenadas cartesianas y polares (Ecuación 2.1, página 69) se tiene:

$$r = f(t) \implies \begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases} \implies \begin{cases} x = f(t) \cos t \\ y = f(t) \sin t \end{cases}$$

Ejemplo 2.7. Relación Función Polar y Paramétrica

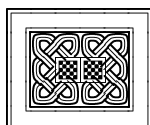
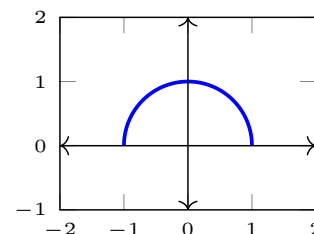
La función en coordenadas polares $r = 3[2 + \sin(5t)]$ se puede poner en coordenadas paramétricas como:

$$\begin{cases} x = 3[2 + \sin(5t)] \cos t \\ y = 3[2 + \sin(5t)] \sin t \end{cases}$$

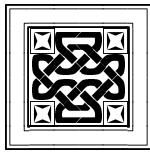
Ejemplo 2.8. Funciones en distintas formas

En determinadas ocasiones una misma función se puede definir de distintas formas (coordenadas cartesianas, forma implícita, paramétrica y polares), por ejemplo la semicircunferencia unidad superior centrada en el origen la podemos expresar de las siguientes formas:

Tipo	Expresión	Dominio
Fun. Coordenadas Cartesianas	$y = \sqrt{1 - x^2}$	$x \in [-1, 1]$
Fun. Implícita	$x^2 + y^2 = 1$	$y \geq 0$
Fun. Paramétrica	$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$	$t \in [0, \pi]$
Fun. Coordenadas Polares	$r = 1$	$\theta \in [0, \pi]$



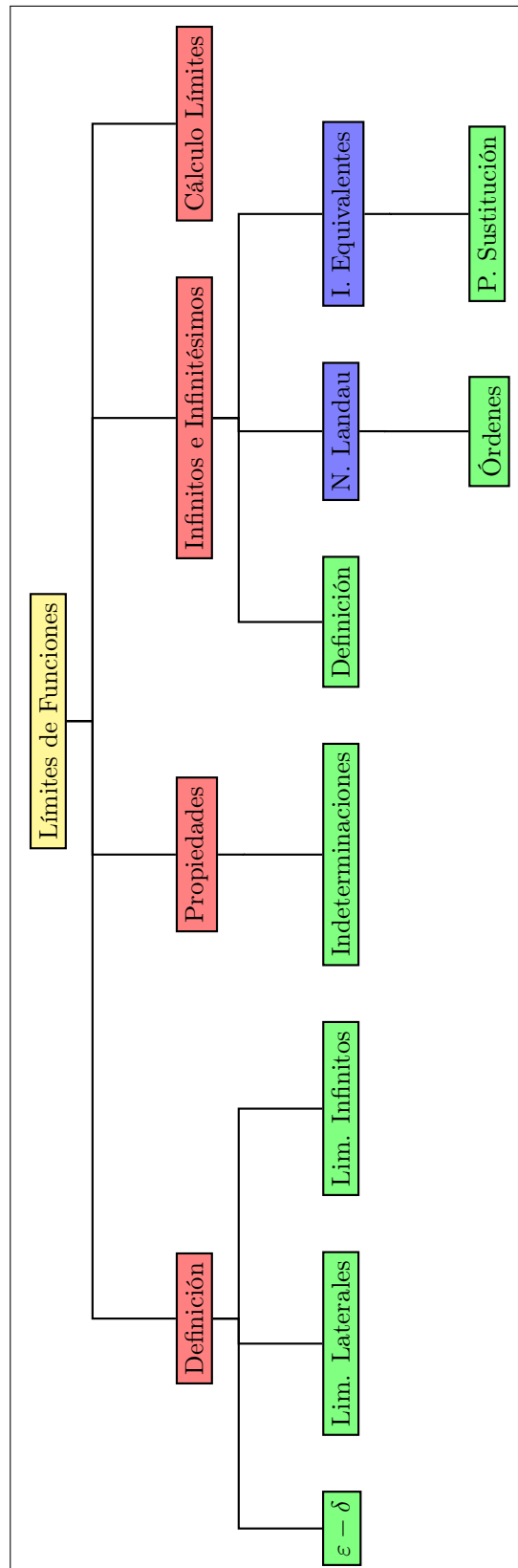
³⁸Ver la Sección 2.9.3, página 67.



Límites de Funciones

Contenido

3.1	Límite de una Función	75
3.1.1	Límites Laterales	77
3.1.2	Límites Infinitos	79
3.1.3	Límites en el Infinito	80
3.2	Propiedades de los Límites	81
3.3	Indeterminaciones	81
3.4	Infinitésimos e Infinitos	85
3.4.1	Propiedades de los Infinitos e Infinitésimos	85
3.4.2	Notación de Landau	86
3.4.3	Órdenes de los Infinitésimos e Infinitos	90
3.4.4	Infinitésimos Equivalentes	92
3.4.5	Principio de Sustitución	92
3.5	Cálculo de Límites de Funciones	93



3.1. Límite de una Función

Definición 3.1. Límite de una Función

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donde D es algún *entorno reducido*¹ de $x_0 \in \mathbb{R}$.

Se dice que el **límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0** es un determinado número real ℓ y se representa por $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, si para todo número real positivo ε existe un número positivo δ dependiente de ε , tal que, para todos los valores de x distintos de x_0 que cumplen la condición $|x - x_0| < \delta$, se cumple que $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

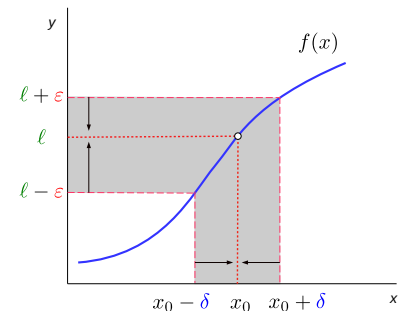
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

 \iff

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

La definición anterior, conocida con el nombre de **definición $\varepsilon - \delta$ del límite**, nos dice que existe el límite $\ell \in \mathbb{R}$ de una función cuando la variable independiente x tiende a un determinado valor x_0 , que no necesariamente tiene que pertenecer al dominio de la función, si podemos obtener valores de $f(x)$ tan cercanos a ℓ como queramos (distancia ε) correspondientes a puntos x cercanos a x_0 (distancia δ).

Hay que tener muy en cuenta que el límite de una función estudia lo que ocurre en las *cercanías* de un punto del dominio, sin importar si la función está definida o no en ese punto.



La definición $\varepsilon - \delta$ del límite de una función sirve para determinar si un valor es o no el límite de una función, pero **no** para determinar dicho valor.

Ejercicio 3.1. Usando la definición $\varepsilon - \delta$ del límite de una función, comprobar la validez de los siguientes resultados:

a) $\lim_{x \rightarrow a} c = c$

b) $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$

d) $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5) = 7$

e) $\lim_{x \rightarrow a} |x| = |a|$

f) $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$

El objetivo es encontrar una relación entre δ y ε , y a pesar de que cada ejercicio tiene su estrategia, de forma general el proceso es el siguiente:

- Partiendo de la expresión $|f(x) - \ell|$ y teniendo en cuenta que $|x - a| < \delta$ encontrar una expresión del tipo $|f(x) - \ell| < g(\delta)$.
- Entonces como $|f(x) - \ell| < \varepsilon \implies g(\delta) \leq \varepsilon \implies \boxed{\delta(\varepsilon)}$

La relación $\delta(\varepsilon)$ puede ser del tipo $\delta = h(\varepsilon)$, $\delta < h(\varepsilon)$, etc.

a) Nos piden comprobar que el límite de una función constante $f(x) = c$, con $c \in \mathbb{R}$, cuando x tiende a cualquier valor $a \in \mathbb{R}$ es siempre c .

Para aplicar la definición $\varepsilon - \delta$ hay que encontrar el valor δ que depende del ε elegido, es decir $\delta(\varepsilon)$, que verifica las condiciones de la definición. Así:

$$|f(x) - \ell| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

En este caso, esta relación se cumple $\forall \varepsilon > 0$, dado cualquier valor $\varepsilon > 0$, se puede tomar cualquier valor $\delta > 0$ tal que para cualquier valor x que verifica $0 < |x - a| < \delta$ se cumpla que $|c - c| < \varepsilon$.

¹Ver la Definición 1.17, página 34.

- b) Nos piden comprobar que el límite de la función $f(x) = x$ cuando x tiende a cualquier valor $a \in \mathbb{R}$ es el propio a . Vamos a encontrar el $\delta(\varepsilon)$.

$$|f(x) - \ell| = |x - a| < \varepsilon$$

Como $|x - a| < \delta \implies \boxed{\delta = \varepsilon}$. Basta en este caso tomar $\delta = \varepsilon$ para que $\forall x$ que verifica $0 < |x - a| < \delta$ se cumpla que $|x - a| < \varepsilon$.

- c) Nos piden comprobar $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$. Vamos a encontrar el $\delta(\varepsilon)$ para este caso.

$$|f(x) - \ell| = |\sqrt{x} - 2| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |x - 4| < \delta$$

Como:

$$|x - 4| = |(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)| > 2|\sqrt{x} - 2| \implies 2|\sqrt{x} - 2| < |x - 4| < \delta \implies |\sqrt{x} - 2| < \delta/2$$

Por tanto basta con tomar

$$\varepsilon \leq \frac{\delta}{2} \implies \boxed{\delta = 2\varepsilon}$$

- d) $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5) = 7$

$$|f(x) - \ell| = |4x - 5 - 7| = |4x - 12| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |x - 3| < \delta$$

Como:

$$|4x - 12| = |4(x - 3)| = 4|x - 3| < 4\delta \implies \boxed{\delta = \frac{\varepsilon}{4}}$$

- e) $\lim_{x \rightarrow a} |x| = |a|$

$$|f(x) - \ell| = ||x| - |a|| \leq |x - a| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |x - a| < \delta \implies \boxed{\delta = \varepsilon}$$

- f) $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$.

$$|f(x) - \ell| = |x^2 - a^2| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |x - a| < \delta$$

Como:

$$|x^2 - a^2| = |(x - a)(x + a)| = |x - a| |x + a| < \delta |x + a|$$

Vamos a ver la relación entre $|x + a|$ y δ .

$$|x - a| < \delta \iff a - \delta < x < a + \delta \implies 2a - \delta < x + a < 2a + \delta \xrightarrow{a \geq 0} |x + a| < \delta + 2a$$

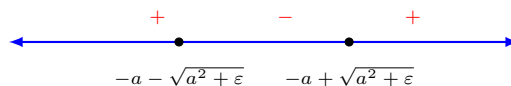
Por tanto:

$$|x^2 - a^2| = |x - a| |x + a| < \delta |x + a| < \boxed{\delta(\delta + 2a) < \varepsilon} \implies \delta^2 + 2a\delta - \varepsilon < 0$$

Para resolver esta desigualdad, resolvemos primero la ecuación cuadrática:

$$g(\delta) = \delta^2 + 2a\delta - \varepsilon = 0 \implies \delta = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 + 4\varepsilon}}{2} = -a \pm \sqrt{a^2 + \varepsilon}$$

Como para $\delta = 0 \implies g(0) = -\varepsilon < 0$ (ya que $\varepsilon > 0$) se tiene:



Por tanto, basta tomar un δ que cumpla:

$$\delta \in \left(-a - \sqrt{a^2 + \varepsilon}, -a + \sqrt{a^2 + \varepsilon}\right)$$

Como δ debe ser positivo, por ejemplo se puede tomar:

$$\delta = -a + \sqrt{a^2 + \varepsilon}$$

la cual verificará que para todo x tal que $0 < |x - a| < \delta$ se cumpla que $|x^2 - a^2| < \varepsilon$.

Como la función $f(x) = x^2$ es simétrica respecto al eje y (función par) el comportamiento es el mismo para $a < 0$.

3.1.1. Límites Laterales

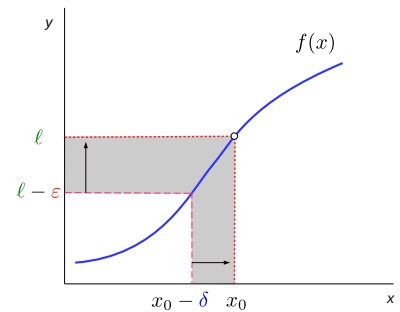
Definición 3.2. Límite Lateral por la Izquierda

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in D$, donde D es algún *semi-entorno reducido por la izquierda*² de x_0 .

Se dice que el **límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 por la izquierda** es un determinado número real ℓ y se representa por $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$, si y solo sí para todo número real positivo ε , existe un número positivo δ dependiente de ε , tal que, para todos los valores de x que cumplen la condición $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, se cumple que $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

La definición anterior nos dice que existe el límite $\ell \in \mathbb{R}$ de una función cuando la variable independiente x tiende por la izquierda a un determinado valor x_0 (del dominio o no), si podemos obtener valores de $f(x)$ tan cercanos a ℓ como queramos (distancia ε) correspondientes a puntos x cercanos por la izquierda a x_0 (distancia δ).



Definición 3.3. Límite Lateral por la Derecha

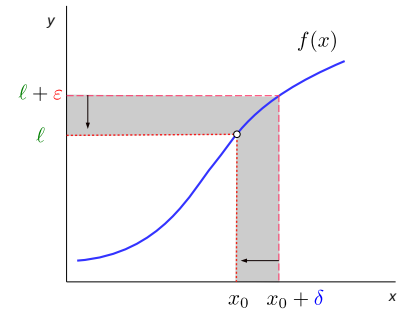
Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in D$, donde D es algún *semi-entorno reducido por la derecha*² de x_0 .

Se dice que el **límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 por la derecha** es un determinado número real ℓ y se representa por $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$, si y solo sí para todo número real positivo ε , existe un número positivo δ dependiente de ε , tal que, para todos los valores de x que cumplen la condición $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, se cumple que $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

²Ver la Definición 1.18, página 34.

La definición anterior nos dice que existe el límite $\ell \in \mathbb{R}$ de una función cuando la variable independiente x tiende por la derecha a un determinado valor x_0 (del dominio o no), si podemos obtener valores de $f(x)$ tan cercanos a ℓ como queramos (distancia ε) correspondientes a puntos x cercanos por la derecha a x_0 (distancia δ).



Teorema 3.1. Límites Laterales

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida en al menos un *entorno reducido*³ de un punto $x = x_0$.

El *límite* de $f(x)$ en un punto existe si y solo si existen los límites por la izquierda y por la *derecha* de ese punto, y ambos son iguales.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$$

Consecuencias del límite:

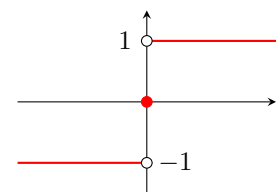
- Si $f(x)$ tiene *límite* ℓ en $x = x_0$, ese *límite* es **único**.
- Si $f(x)$ tiene *límite* en $x = x_0$, la función está **acotada** en las cercanías de x_0 .

Ejemplo 3.1. Límites Laterales

- $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sign}(x)$

La función signo, $\text{sign}(x)$, se define como⁴:

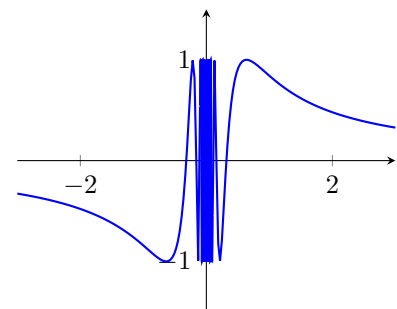
$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sign}(x) = -1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sign}(x) = 1 \implies \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \text{sign}(x)$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nexists \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \\ \nexists \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \end{array} \right. \implies \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$



³Ver la [Definición 1.17](#), página 34.

⁴Ver también la [Sección 8.10.5](#), página 208

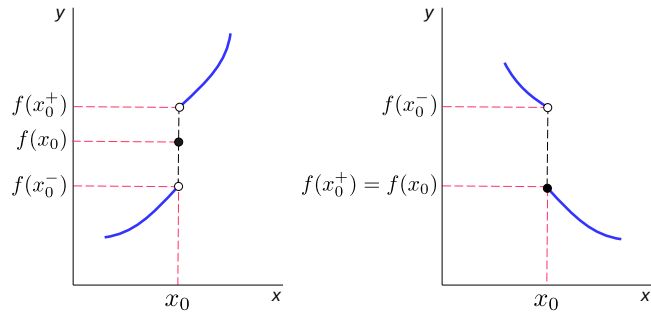
Teorema 3.2. Límites de Funciones Monótonas

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función *monótona*⁵ (creciente o decreciente) definida en al menos un *entorno reducido*⁶ de un punto $x = x_0$, entonces existen los *límites laterales* de f en $x = x_0$,

$$f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad ; \quad f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

y además⁷: $x_1 < x_0 < x_2$ $\begin{cases} f(x_1) \leq f(x_0^-) \leq f(x_0^+) \leq f(x_2) & \text{si } f \text{ es creciente} \\ f(x_1) \geq f(x_0^-) \geq f(x_0^+) \geq f(x_2) & \text{si } f \text{ es decreciente} \end{cases}$

La función puede o no estar definida en x_0 y alguno o los dos límites laterales $f(x_0^+)$ y $f(x_0^-)$ pueden o no coincidir con el valor de $f(x_0)$.



3.1.2. Límites Infinitos

Definición 3.4. Límites Infinitos de una Función

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in D$, donde D es algún *entorno reducido* de x_0 .

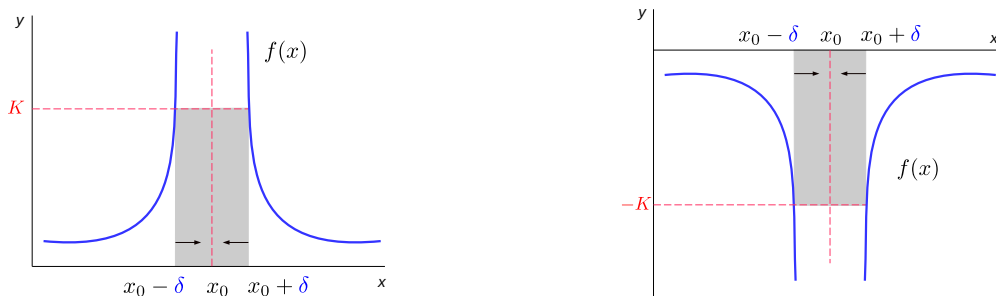
- Se dice que el **límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es ∞** si:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \iff \forall K > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad f(x) > K$$

- Se dice que el **límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es $-\infty$** si:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \iff \forall K > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad f(x) < -K$$

En las siguientes figuras se representa de forma gráfica la definición de los *límites infinitos*.



⁵Ver la [Sección 2.5](#), página 55.

⁶Ver la [Definición 1.17](#), página 34.

⁷Ver más sobre funciones crecientes y decrecientes en la [Sección 5.4.1](#), página 129.

3.1.3. Límites en el Infinito

Definición 3.5. Límites de una Función en el Infinito

Sea $f : D_i \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donde D_i es un *entorno reducido*⁸ de $\pm\infty$, es decir o bien $D_+ = (\alpha, \infty)$, o bien $D_- = (-\infty, \alpha)$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$.

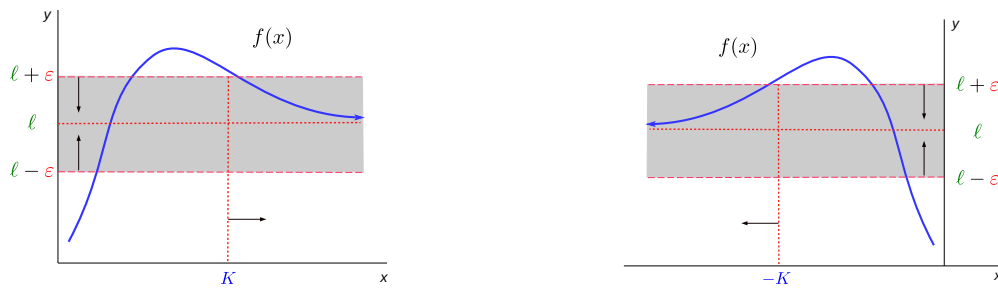
- Se dice que el **límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$** es $\ell \in \mathbb{R}$ si:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists K > 0 : \forall x \in D_+ \quad x > K \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

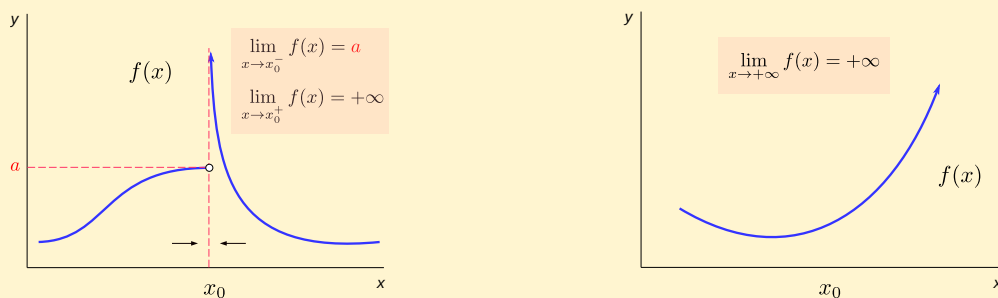
- Se dice que el **límite de $f(x)$ cuando x tiende a $-\infty$** es $\ell \in \mathbb{R}$ si:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists K > 0 : \forall x \in D_- \quad x < -K \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

En las siguientes figuras se representa de forma gráfica la definición de los dos *límites en el infinito*.



Notar que un *límite lateral*⁹ puede ser *infinito* y también un *límite infinito*¹⁰ puede tener como valor *infinito*.



⁸Ver la Definición 1.19, página 34.

⁹Ver la Sección 3.1.1, página 77.

¹⁰Ver la Definición 3.4, página 79.

3.2. Propiedades de los Límites

La *definición*¹¹ $\epsilon - \delta$ del límite de una función no es útil para calcular el valor del límite de una función. Para esta misión resulta más útiles las diferentes propiedades de los límites y el conocimiento del comportamiento de las *funciones elementales*¹².

Sean f y g dos funciones definidas al menos en un *entorno reducido* de $x = x_0$ siendo $a \in \mathbb{R}$ o bien $a = \pm\infty$, con:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \quad , \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad \text{o bien} \quad a, b = \pm\infty$$

Entonces, siempre y cuando el resultado tenga sentido¹³, se cumple:

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} (f \pm g) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f \right) \pm \left(\lim_{x \rightarrow x_0} g \right) = a \pm b$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} (cf) = c \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f \right) = ca$$

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} (fg) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f \right) \left(\lim_{x \rightarrow x_0} g \right) = ab$$

$$4. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f}{\lim_{x \rightarrow x_0} g} = \frac{a}{b}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow x_0} \log_c(f) = \log_c \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f \right) = \log_c(a)$$

$$6. \lim_{x \rightarrow x_0} c^f = c^{\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f \right)} = c^a$$

$$7. \lim_{x \rightarrow x_0} f^g = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f \right)^{\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g \right)} = a^b$$

3.3. Indeterminaciones

Existen ocasiones en las que operando algebraicamente con funciones que tienen límite en un determinado punto, **no** es posible determinar el límite de la función resultante, conociendo únicamente el valor de los límites de las funciones de partida, si no que es necesario también conocer **cómo** estas funciones tienden a sus límites.

Estos casos se denominan **límites indeterminados** o **indeterminaciones** y son siete¹⁴:

$$\infty - \infty$$

$$0 \cdot \infty$$

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$1^\infty$$

$$0^0$$

$$\infty^0$$

¹¹Ver la **Definición 3.1**, página 75.

¹²Ver la **Sección 2.8**, página 58.

¹³Por ejemplo, en (1) a y b no pueden ser ambos ∞ de signo contrario al producirse la indeterminación $\infty - \infty$, en (3) no pueden ser a y b los valores 0 e ∞ al producirse la indeterminación 0∞ , en (4) no pueden ser a y b ambos 0 ó ambos $\pm\infty$ al producirse las indeterminaciones $0/0$ e ∞/∞ , en (5) $a, c > 0$ y $c \neq 1$ para que esté definido el logaritmo, en (6) $c > 0$ para que esté definida la potencia y en (7) $a \neq 1$ y $b \neq \pm\infty$ para evitar la indeterminación 1^∞ , ni $a \neq \pm\infty$ y $b = 0$ para evitar la indeterminación ∞^0 .

¹⁴Estas *indeterminaciones* coinciden con las vistas en el tema de sucesiones, ver la **Sección 8.10.2**, página 206. Las tres *indeterminaciones* que están enmarcadas son equivalentes.

Ejercicio 3.2. Calcular el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 7}{x^3 + 8x - 7}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & x \neq 0 \\ 27 & x = 0 \end{cases}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $f(x) = \begin{cases} x - 5 & x > 2 \\ |x|^3 - 11 & x \leq 2 \end{cases}$

f) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, $f(x) = \begin{cases} x - 5 & x > 2 \\ |x|^3 - 11 & x \leq 2 \end{cases}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2 & x \leq 0 \\ \frac{x}{(x-1)^2} & x > 0 \end{cases}$

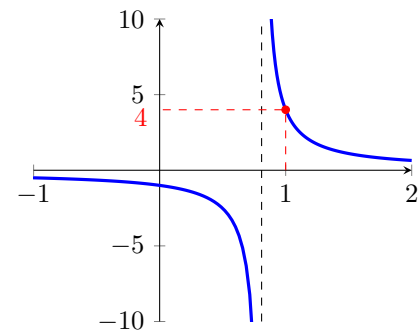
h) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2 & x \leq 0 \\ \frac{x}{(x-1)^2} & x > 0 \end{cases}$

a) Aplicando las propiedades de los límites se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 7}{x^3 + 8x - 7} = \frac{8}{2} = \boxed{4}$$

Notar que en este caso simple no es necesario calcular los límites laterales por la izquierda y por la derecha de 1, ya que se obtiene el mismo valor que el obtenido aquí.

Si representamos gráficamente esta función vemos que hay un punto en el cual no está definida, que corresponde con el único cero del polinomio del denominador (a pesar de ser de grado 3 las otras dos raíces son imaginarias). El valor de esta raíz es aproximadamente 0,809. Vemos que la función está bien definida en $x = 1$ y el valor del límite corresponde con el valor de la función en dicho punto, $f(1) = 4$.



b) En este caso aplicando las propiedades de los límites se tiene:

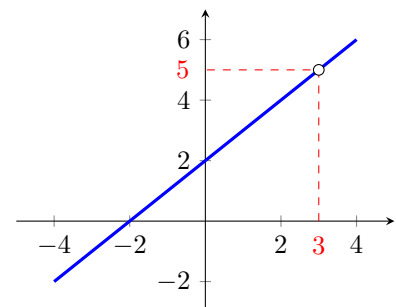
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \frac{0}{0} ?$$

que es una *indeterminación* y por tanto no podemos conocer de esta forma el valor del límite, en caso de que exista. En este caso sencillo podemos factorizar el polinomio del numerador, encontrado sus dos raíces $\{-2, 3\}$ y simplificar de la siguiente forma:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x + 2)(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 2) = \boxed{5}$$

Notar que $f(x)$ es una función distinta que la recta $x + 2$, ya que $f(x)$ no está definida en $x = 3$. La representación gráfica de ambas coincide excepto en $x = 3$ donde $f(x)$ no tiene imagen al no estar definida en dicho punto.

Recordamos que el valor del límite de una función en un punto es independiente del valor de la función en dicho punto, pudiendo existir o no, o ser igual al límite o distinto.



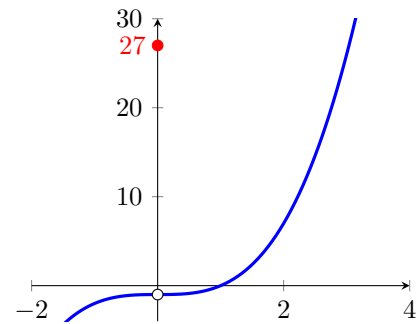
- c) En este caso es una función definida a trozos y nos piden calcular el valor del límite justo en el punto de corte de la definición de la función $x = 0$. Por tanto tendremos que calcular los límites laterales de la función cuando se tiende a cero por la izquierda y por la derecha.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & x \neq 0 \\ 27 & x = 0 \end{cases} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 - 1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 - 1) = -1 \end{array} \right\} = \boxed{-1}$$

Como ambos límites existen y son iguales, el valor obtenido de -1 corresponde con el valor del límite de la función

Notar que la gráfica de $f(x)$ es igual que la de $x^3 - 1$ excepto que se ha cambiado la definición de la función en el punto $x = 0$ que pasa de ser -1 a 27 .

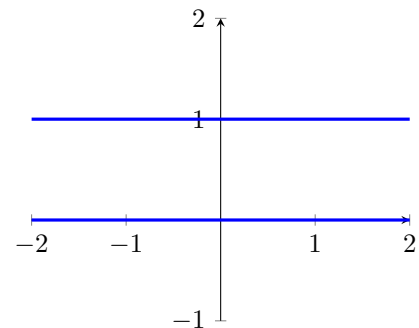
El valor que se obtiene del límite de $f(x)$ cuando $x \rightarrow 0$ es -1 que corresponde con el valor de $x^3 - 1$ en $x = 0$.



- d) Esta función vale 1 para los números racionales y 0 para los irracionales (no racionales). Como hay infinitos números irracionales en cualquier entorno de un número racional y también hay infinitos racionales en cualquier entorno de un número irracional, no existe el límite de esta función en ningún punto, ya que al acercarnos tanto por la izquierda como por la derecha a cualquier valor, la función toma de forma infinita los valores de 1 y 0.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad , \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \boxed{\nexists}$$

El comportamiento de la gráfica de esta función no puede apreciarse en la figura, ya que hay infinitos puntos separados con valores 1 y 0, infinitamente cercanos, *pareciendo* que son dos rectas paralelas (en azul).

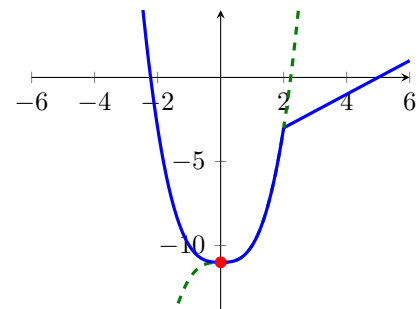


- e) En este caso es una función definida a trozos y nos piden calcular el valor del límite en $x = 0$, que es un punto distinto del punto de corte ($x = 2$) de la definición de la función. Por tanto tendremos que tomar la rama definida para $x \leq 2$:

$$f(x) = \begin{cases} x - 5 & x > 2 \\ |x|^3 - 11 & x \leq 2 \end{cases} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (|x|^3 - 11) = \boxed{-11}$$

En la gráfica se muestra la función, donde para valores $x > 2$ la función es la recta $x - 5$ y para $x \leq 2$ corresponde a la función $|x|^3 - 11$. En la gráfica en color verde y con línea discontinua se ha representado la función $x^3 - 11$ sin valor absoluto.

La función $f(x)$ no tiene ningún problema con el límite en ningún punto $x \neq 2$, tomando la rama apropiada.



- f) Esta función es la misma del caso anterior pero nos piden calcular el límite en el punto de corte $x = 2$. Para ello tenemos que calcular los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} (|x|^3 - 11) = -3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 5) = -3 \end{array} \right\} = \boxed{-3}$$

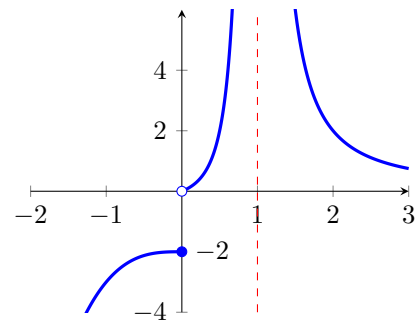
Como ambos existen y son iguales, el límite existe y vale -3 , como podemos apreciar gráficamente en la figura anterior.

- g) Esta es una función definida a trozos con punto de corte en $x = 0$, no estando definida en $x = 1$. Para calcular el límite tenemos que determinar los dos límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) , \quad f(x) = \begin{cases} x^3 - 2 & x \leq 0 \\ \frac{x}{(x-1)^2} & x > 0 \end{cases} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} x^3 - 2 = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{0}{1} = 0 \end{array} \right\} = \boxed{\nexists}$$

Como los dos límites laterales existen pero son distintos, el límite cuando $x \rightarrow 0$ no existe.

Como se aprecia en la figura, no existe el límite $x = 0$, ya que la función tiende a -2 cuando $x \rightarrow 0^-$ y a 0 cuando $x \rightarrow 0^+$.



- h) Esta función es la misma del caso anterior pero nos piden calcular el límite en el punto $x = 1$ donde la función no está definida. Recordar que el valor del límite es independiente del valor de la función y puede existir el límite en un punto o no, estando la función definida en él o no. En este caso, a través de la figura anterior claramente se aprecia que no existe el límite, pero lo vamos a calcular determinando los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{(0^-)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{(0^+)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{array} \right\} = \boxed{+\infty}$$

En el primer límite el denominador tiende a 1 pero por la izquierda, es decir con valores menores que 1 y por tanto la diferencia tiende a valores pequeños pero negativos. Al estar elevado al cuadrado el denominador tiende a valores pequeños positivos y por tanto el cociente tiende a $+\infty$. En el segundo límite el denominador tiende a cero por la derecha, es decir con valores pequeños pero positivos y al estar elevado al cuadrado también, por tanto el cociente tiende a ∞ .

Como los dos límites existen y son iguales, el límite de la función es ∞ .

3.4. Infinitésimos e Infinitos

Vamos a ver ahora el concepto de *infinitésimos* e *infinitos*, similar al estudiado en el tema de las *sucesiones*¹⁵ pero aplicado en este caso a las funciones.

Definición 3.6. Infinitésimo e Infinito

Sea f una función definida en al menos un *entorno reducido*¹⁶ de $x = x_0$ con $x_0 \in \mathbb{R}$ o bien $x_0 = \pm\infty$, es decir $-\infty \leq x_0 \leq \infty$. Entonces:

- Se dice que f es un **infinitésimo** cuando $x \rightarrow x_0$ si: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$
- Se dice que f es un **infinito** cuando $x \rightarrow x_0$ si: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$

Ejemplo 3.2. Infinitésimos e Infinitos

- $f(x) = x$ es un *infinitésimo* cuando $x \rightarrow 0$ y un *infinito* cuando $x \rightarrow \pm\infty$
- $f(x) = \frac{1}{x^2}$ es un *infinitésimo* cuando $x \rightarrow \infty$ y un *infinito* cuando $x \rightarrow 0$
- $f(x) = (x-1)(x+2)$ es un *infinitésimo* cuando $x \rightarrow \{-2, 1\}$ y un *infinito* cuando $x \rightarrow \pm\infty$
- $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ es un *infinitésimo* cuando $x \rightarrow \pm\infty$ y un *infinito* cuando $x \rightarrow \pm 1$
- $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$ es un *infinitésimo* cuando $x \rightarrow -1$ y un *infinito* cuando $x \rightarrow -1/2$

3.4.1. Propiedades de los Infinitos e Infinitésimos

Sean f y g funciones definidas en al menos un entorno reducido de $-\infty \leq x_0 \leq \infty$.

- Si f es un *infinitésimo* en $x = x_0$ y g está acotada en un entorno de a , entonces fg es un infinitésimo en $x = a$.
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f = +\infty$ y g está *acotada inferiormente* en un entorno de x_0 , entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} (f+g) = +\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f = -\infty$ y g está *acotada superiormente* en un entorno de x_0 , entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} (f+g) = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f = +\infty$ si y solo si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f} = 0^+$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f = -\infty$ si y solo si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f} = 0^-$.

¹⁵Ver la Sección 8.11, página 216.

¹⁶Ver la definición de *entorno reducido* sobre un número real en la Definición 1.17, página 34 y la de *entorno reducido* sobre $\pm\infty$ en la Definición 1.19, página 34.

3.4.2. Notación de Landau

A continuación vamos a ver una notación muy usada para referirse a órdenes de crecimiento y decrecimiento de funciones denominada **notación de Landau**¹⁷, que utiliza las letras *o mayúscula* (O) y *o minúscula* (o) de la siguiente forma:

- $f = O(g)$ se lee " f es de orden *o grande* de g ".
- $f = o(g)$ se lee " f es de orden *o pequeña* de g ".

Vamos a ver sus definiciones.

Definición 3.7. Notación de Landau

Sean f y g funciones definidas en un entorno reducido de $-\infty \leq x_0 \leq \infty$, y sea $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = \ell$

Entonces cuando $x \rightarrow x_0$ se dice que¹⁸:

- Si $\ell \neq \text{constante}$ \implies f y g **no** son comparables
- Si $\ell \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ \implies f y g son comparables o del mismo orden $\implies f = O(g)$
- Si $\ell = \infty$ \implies f crece mucho más rápido que g $\implies g = o(f)$ $f \gg g$
- Si $\ell = 0$ \implies f crece mucho más lento que g $\implies f = o(g)$ $f \ll g$
- Si $\ell = 1$ \implies f y g son equivalentes $\implies f \sim g$

Una definición más general de la **notación de Landau**, pero no tan útil a nivel operacional como la definición anterior, es la siguiente:

Definición 3.8. Notación Alternativa de Landau

Sean f y g funciones definidas en un entorno reducido D de $-\infty \leq x_0 \leq \infty$, entonces:

- $f = O(g)$ cuando $x \rightarrow x_0$ si y solo si existe un $\varepsilon > 0$ tal que:

$$|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)| \quad \forall x \in D$$

- $f = o(g)$ cuando $x \rightarrow x_0$ si y solo si existe un $\varepsilon > 0$ tal que:

$$|f(x)| < \varepsilon |g(x)| \quad \forall x \in D$$

¹⁷También se denomina notación de **Bachmann-Landau** o **notación asintótica**.

¹⁸El uso del signo igual en expresiones como $f = O(g)$ y $f = o(g)$ para referirse a una función que es de orden o grande u o pequeña de otra, es realmente un abuso de lenguaje que puede dar lugar a errores en determinados casos. Lo correcto sería $f \in O(g)$ y $f \in o(g)$, aunque esta forma de denotarlo es menos usual que la primera.

Ejemplo 3.3. Notación de Landau

- $1 + 3x + 10x^2 = o(x^3)$ ($x \rightarrow \infty$) ya que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 3x + 10x^2}{x^3} = 0$
- $x^3 = o(x^2)$ ($x \rightarrow 0$) ya que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = 0$

Propiedades y Operaciones con la Notación de Landau

- $f = O(1)$ cuando $x \rightarrow x_0$ si y solo si f es acotada en una vecindad de x_0 .
- $f = o(1)$ cuando $x \rightarrow x_0$ si y solo si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.
- Si $f = o(g)$ cuando $x \rightarrow x_0$ entonces también $f = O(g)$ cuando $x \rightarrow x_0$, pero no al contrario¹⁹.
- Operaciones:
 - $O(f) + O(g) = O(\max(f, g))$
 - $O(f) + O(f) = O(f)$
 - $kO(f) = O(|k|f) = O(f)$, $k \in \mathbb{R}$ ($k \neq 0$)
 - $O(f)O(g) = O(fg)$
 - $fO(g) = O(fg)$
 - $O(O(f)) = O(f)$
 - $O(o(f)) = o(O(f)) = o(f)$
 - $o(f) + o(g) = o(\max(f, g))$
 - $o(f) + o(f) = o(f)$
 - $ko(f) = o(|k|f) = o(f)$, $k \in \mathbb{R}$ ($k \neq 0$)
 - $o(f)o(g) = o(fg)$
 - $fo(g) = o(fg)$
 - $o(o(f)) = o(f)$
 - $O(f)o(g) = o(fg)O(g)$

Ejercicio 3.3. Demostrar las siguientes propiedades:

- | | |
|---|---------------------------|
| a) $o(f) + o(g) = o(\max(f, g))$ | b) $O(f) + O(f) = O(f)$ |
| c) $ko(f) = o(k f) = o(f)$, $k \in \mathbb{R}$ ($k \neq 0$) | d) $O(f)O(g) = O(fg)$ |
| e) $o(o(f)) = o(f)$ | f) $fO(g) = O(fg)$ |
| g) $O(o(f)) = o(O(f)) = o(f)$ | h) $O(f)o(g) = o(fg)O(g)$ |

a) Sean:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x) = o(g_1) \ (x \rightarrow x_0) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1}{g_1} = 0 \\ f_2(x) = o(g_2) \ (x \rightarrow x_0) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2}{g_2} = 0 \end{array} \right\} \text{ con } g_1 \geq g_2 \text{ cuando } x \rightarrow x_0$$

Tenemos que demostrar que $f_1 + f_2 = o(g_1)$ ($x \rightarrow x_0$) $\implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1 + f_2}{g_1} = 0$.

Entonces como:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1 + f_2}{g_1} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1}{g_1} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2}{g_1} = 0 + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2}{g_2} \cdot \frac{g_2}{g_1} = 0 \implies \boxed{f_1 + f_2 = o(g_1)}$$

¹⁹Por ejemplo con $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$ cuando $x \rightarrow 0$.

b) Sean:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x) = O(g) (x \rightarrow x_0) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1}{g} = k_1 \\ f_2(x) = O(g) (x \rightarrow x_0) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2}{g} = k_2 \end{array} \right\}$$

Tenemos que demostrar que $f_1 + f_2 = O(g) (x \rightarrow x_0) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1 + f_2}{g} = k$.

Entonces como:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1 + f_2}{g} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1}{g} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2}{g} = k_1 + k_2 = k \implies \boxed{f_1 + f_2 = O(g)}$$

c) Sea: $f(x) = o(g) (x \rightarrow x_0) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = 0$.

Tenemos que demostrar: $kf(x) = o(|k|g) = o(g) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|k|f}{g} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = 0$

Entonces como:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|k|f}{g} = |k| \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = |k| \cdot 0 = 0 \implies \boxed{kf(x) = o(|k|g) = o(g)}$$

d) Sean:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x) = O(g) (x \rightarrow x_0) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1}{g} = k_1 \\ f_2(x) = O(g) (x \rightarrow x_0) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2}{g} = k_2 \end{array} \right\}$$

Tenemos que demostrar que $f_1 f_2 = O(g_1 g_2) (x \rightarrow x_0) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1 f_2}{g_1 g_2} = k$.

Entonces como:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1 f_2}{g_1 g_2} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1}{g_1} \right) \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2}{g_2} \right) = k_1 k_2 = k \implies \boxed{f_1 f_2 = O(g_1 g_2)}$$

e) Sean:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = o(g) (x \rightarrow x_0) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = 0 \\ g(x) = o(h) (x \rightarrow x_0) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g}{h} = 0 \end{array} \right\}$$

Tenemos que demostrar que $f = o(g) = o(o(h)) = o(h) (x \rightarrow x_0) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{h} = 0$.

Entonces como:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{fg}{hg} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} \right) \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g}{h} \right) = 0 \cdot 0 = 0 \implies \boxed{f = o(h)}$$

f) Sea: $h(x) = O(g) (x \rightarrow x_0) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h}{g} = k.$

Tenemos que demostrar: $fh(x) = fO(g) = O(fg) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{fh}{fg} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h}{g} = k$

Como queríamos demostrar.

g) Empecemos con la primera: $O(o(f)) = o(f)$. Sean:

$$\begin{cases} g(x) = O(h) (x \rightarrow x_0) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g}{h} = k \\ h(x) = o(f) (x \rightarrow x_0) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h}{f} = 0 \end{cases}$$

Tenemos que demostrar que $g = O(h) = O(o(f)) = o(f) (x \rightarrow x_0) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g}{f} = 0.$

Entonces como:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g}{f} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{gh}{fh} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g}{h} \right) \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h}{f} \right) = k \cdot 0 = 0 \implies \boxed{g = o(f)}$$

Vamos ahora con la segunda: $o(O(f)) = o(f)$. Sean:

$$\begin{cases} g(x) = o(h) (x \rightarrow x_0) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g}{h} = 0 \\ h(x) = O(f) (x \rightarrow x_0) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h}{f} = k \end{cases}$$

Tenemos que demostrar que $g = o(h) = o(O(f)) = o(f) (x \rightarrow x_0) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g}{f} = 0.$

Entonces como:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g}{f} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{gh}{fh} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g}{h} \right) \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h}{f} \right) = 0 \cdot k = 0 \implies \boxed{g = o(f)}$$

h) Sean:

$$\begin{cases} F(x) = O(f) (x \rightarrow x_0) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F}{f} = k \\ G(x) = o(g) (x \rightarrow x_0) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{G}{g} = 0 \end{cases}$$

Tenemos que demostrar que $FG = O(f)o(g) = o(fg)O(g) (x \rightarrow x_0).$

Entonces, por las propiedades vistas anteriormente:

$$FG = O(f)o(g) = O(f) \underbrace{o(g)o(g)}_{o(g)} = \left(\underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F}{f}}_k \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{G}{g}}_0 \right) \underbrace{o(g)}_{O(g)} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{FG}{fg} \right) O(g) = \boxed{o(fg)O(g)}$$

3.4.3. Órdenes de los Infinitésimos e Infinitos

Definición 3.9. Órdenes de los Infinitésimos

Sean f y g dos *infinitésimos*²⁰ en $-\infty \leq x_0 \leq \infty$, cumpliéndose

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = \ell$$

Entonces cuando $x \rightarrow x_0$ se dice que:

- Si $\ell \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ \implies f y g son infinitésimos del mismo orden $\implies f = O(g)$
- Si $\ell = 0$ \implies f es un infinitésimo de mayor orden que g $\implies f = o(g)$ $f \ll g$
- Si $\ell = \pm\infty$ \implies f es un infinitésimo de menor orden que g $\implies g = o(f)$ $f \gg g$
- Si $\ell = 1$ \implies f y g son infinitésimos equivalentes $\implies f \sim g$

Definición 3.10. Órdenes de los Infinitos

Sean f y g dos *infinitos* en $-\infty \leq x_0 \leq \infty$, cumpliéndose

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = \ell$$

Entonces cuando $x \rightarrow x_0$ se dice que:

- Si $\ell \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ \implies f y g son infinitos del mismo orden $\implies f = O(g)$
- Si $\ell = \pm\infty$ \implies f es un infinito de mayor orden que g $\implies g = o(f)$ $f \gg g$
- Si $\ell = 0$ \implies f es un infinito de menor orden que g $\implies f = o(g)$ $f \ll g$
- Si $\ell = 1$ \implies f y g son infinitos equivalentes $\implies f \sim g$

- Que un **infinitésimo** f sea de **mayor orden** que otro g cuando $x \rightarrow x_0$ significa que en las *cercanías* de x_0 la función f tiende a **cero** más rápidamente que g .
- Que un **infinito** f sea de **mayor orden** que otro g cuando $x \rightarrow x_0$ significa que en las *cercanías* de x_0 la función f tiende a **infinito** más rápidamente que g .

²⁰Ver la Definición 3.6, página 85.

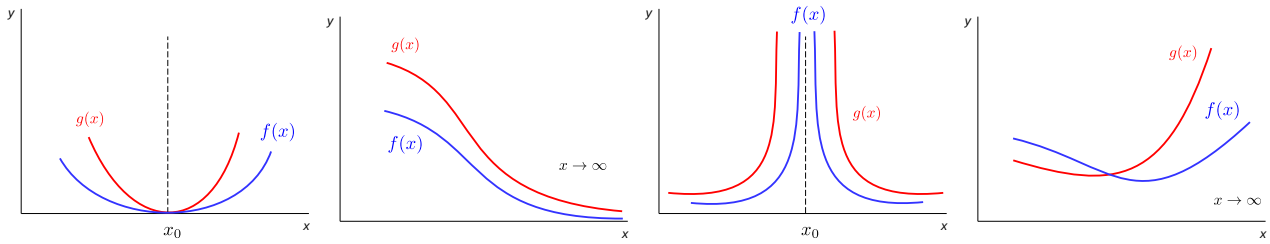


Figura 3.1: Representación gráfica de *infinitésimos* (los dos de la izquierda) e *infinitos* (los dos de la derecha) de distinto orden, cuando $x \rightarrow x_0$ con x_0 finito e infinito. En todos los casos $f = o(g)$, cuando $x \rightarrow x_0$.

Órdenes de Infinitos e Infinitésimos Simples

En las siguientes tablas se muestran una relación de los órdenes de *infinitos* e *infinitésimos* simples cuando $x \rightarrow \infty$.

Infinitos
cuando $x \rightarrow \infty$

$$x^x \gg a^x \gg x^p \gg x \gg x^p \gg \log_b^p(x)$$

$a > 1$ $p > 1$ $(0 < p < 1)$ $p > 0$

Infinitésimos
cuando $x \rightarrow \infty$

$$x^{-x} \ll a^{-x} \ll x^{-p} \ll x^{-1} \ll x^{-p} \ll \log_b^{-p}(x)$$

$a > 1$ $p > 1$ $(0 < p < 1)$ $p > 0$

Infinitésimos
cuando $x \rightarrow 0^+$

$$x^p \ll x \ll x^p \ll -\log_b^{-p}(x)$$

$p > 1$ $(0 < p < 1)$ $p > 0$

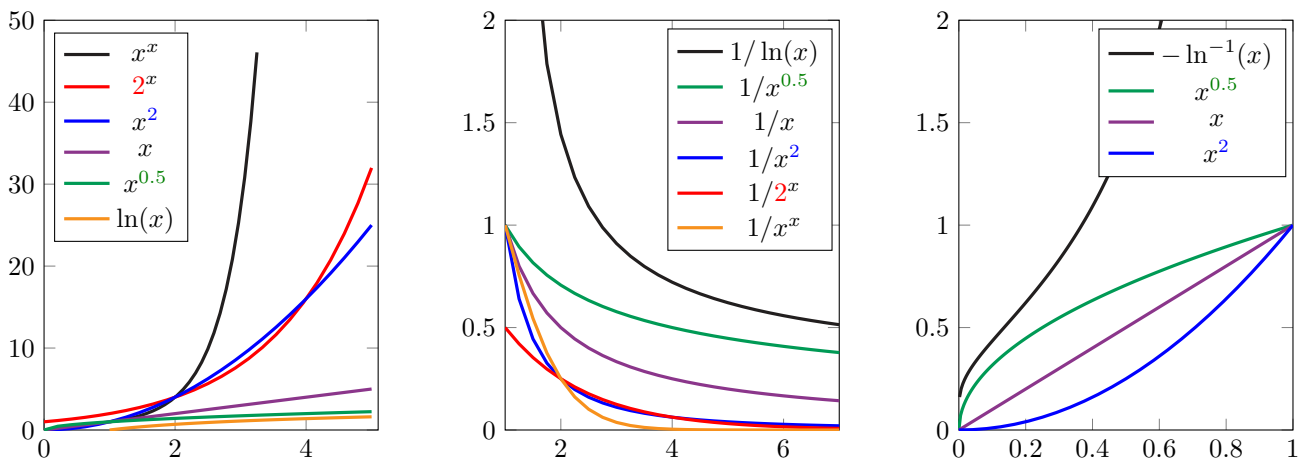


Figura 3.2: En la siguiente figura se muestra una representación gráfica de la velocidad de crecimiento de los *infinitos* (izquierda) e *infinitésimos* (centro y derecha) anteriores.

Notar que si $f(x)$ es un *infinito*, entonces $1/f(x)$ es un *infinitésimo* y viceversa, manteniéndose los correspondientes órdenes.

3.4.4. Infinitésimos Equivalentes

Sea $\varepsilon(x)$ un *infinitésimo*²¹ cuando $x \rightarrow x_0$, es decir:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

y sea

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a(x) = 1$$

Entonces se verifican las siguientes relaciones²² entre *infinitésimos equivalentes*²³ cuando $x \rightarrow x_0$.

$$\begin{aligned} & \boxed{\text{sen } \varepsilon(x) \sim \tan \varepsilon(x) \sim \arcsen \varepsilon(x) \sim \arctan \varepsilon(x) \sim \varepsilon(x)} \\ & \boxed{\cos \varepsilon(x) \sim 1 - \frac{\varepsilon(x)^2}{2}} \iff \boxed{1 - \cos \varepsilon(x) \sim \frac{\varepsilon(x)^2}{2}} \iff \boxed{\sqrt{2(1 - \cos \varepsilon(x))} \sim \varepsilon(x)} \\ & \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\ln[1 + \varepsilon(x)] \sim \varepsilon(x)} \iff \boxed{e^{\varepsilon(x)} - 1 \sim \varepsilon(x)} \\ \boxed{\ln[a(x)] \sim a(x) - 1} \quad ; \quad \boxed{b^{\varepsilon(x)} - 1 \sim \varepsilon(x) \ln(b)} \quad (b > 0) \end{array} \right. \\ & \lim_{x \rightarrow x_0} a(x) = 1 \\ & (m, n \neq 0) \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{[1 + \varepsilon(x)]^m - 1 \sim m\varepsilon(x)} \iff \boxed{\sqrt[m]{1 + m\varepsilon(x)} \sim 1 + \varepsilon(x)} \\ \boxed{\sqrt[n]{1 + \varepsilon(x)} - 1 \sim \frac{\varepsilon(x)}{n}} \iff \boxed{\left[1 + \frac{\varepsilon(x)}{n}\right]^n \sim 1 + \varepsilon(x)} \end{array} \right. \end{aligned}$$

3.4.5. Principio de Sustitución

Vamos a ver un teorema importante que explica cómo utilizar las relaciones de equivalencia anteriores para resolver *indeterminaciones* en límites de funciones complicados, de una forma fácil y eficiente.

Teorema 3.3. Principio de Sustitución

Sea $f(x) \sim g(x)$ cuando $x \rightarrow x_0$ y sea $h(x)$ una función definida en un entorno reducido de x_0 . Entonces, siempre que existan los límites del segundo miembro se cumple:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) h(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{h(x)}$$

- En caso de que no existan los límites de los segundos términos, no podremos decir nada sobre los límites de los primeros términos, (si existen o no y en caso afirmativo cual es su valor).
- El *principio de sustitución* solo se cumple en operaciones de multiplicación y división sobre el total de la expresión²⁴ y no en otro tipo de operaciones como sumas o restas.

²¹Ver la [Definición 3.6](#), página 85.

²²Estas mismas relaciones fueron vistas en la [Sección 8.11.4](#), página 220 en el contexto de la sucesiones.

²³Ver la [Definición 3.9](#), página 90.

²⁴Es decir, la función a sustituir (*infinito* o *infinitésimo*) por otra *equivalente* debe estar multiplicando o dividiendo al total del resto de la expresión.

3.5. Cálculo de Límites de Funciones

Las técnicas para calcular límites de funciones están basadas en los métodos para la determinación de límites de sucesiones explicados en la [Sección 8.10, página 204](#).

Ejercicio 3.4. Determinar el valor de los siguientes límites de sucesiones:

- | | | | |
|---|---|---|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x}$ | b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{15} + 2x^7}{2^x}$ | c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$ | d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x+5}}{\sqrt{x}}$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1.0001}}{\ln x^{100}}$ | f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{x+1} \right)^{2x}$ | g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+10}{3x-1} \right)^{-x}$ | h) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$ |
| i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/x}$ | j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{0.001} \ln x^{100}$ | k) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ | l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \tan x}{1 - \cos x}$ |
| m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen x^2}{\ln(1-x^2)}$ | n) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{3/2} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ | o) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \operatorname{sen}(x-1)}{1 - \cos(x-1)}$ | p) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}^2 3x}{x \tan^3 2x}$ |
| q) $\lim_{x \rightarrow \infty} 4^x - 2^x$ | r) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x^5 - x^2$ | s) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2x}{2x} \right)^x$ | t) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2x}{x} \right)^x$ |
| u) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{1+3x} \right)^{5x}$ | v) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$ | w) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$ | x) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\tan x}$ |

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x} \stackrel{0/0}{\underset{\operatorname{sen} \epsilon \sim \epsilon}{\sim}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{15} + 2x^7}{2^x} \stackrel{\infty/\infty}{\underset{x^{15} + 2x^7 \sim x^{15}}{\sim}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{15}}{2^x} \stackrel{\infty/\infty}{\underset{2^x \gg x^{15}}{\sim}} = \boxed{0}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x \stackrel{0(-\infty)}{\sim} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\ln^{-1} x} \stackrel{0/0}{\underset{x^2 \gg \ln x}{\sim}} \boxed{0}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x+5}}{\sqrt{x}} \stackrel{\infty/\infty}{\underset{\sqrt{4x+5} \sim \sqrt{4x}}{\sim}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x}}{\sqrt{x}} = \boxed{2}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1.0001}}{\ln x^{100}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1.0001}}{100 \ln x} = \stackrel{\infty/\infty}{\underset{x^p \gg \ln x}{\sim}} = \boxed{\infty}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{x+1} \right)^{2x} = 2^\infty = \boxed{\infty}$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+10}{3x-1} \right)^{-x} = \left(\frac{2}{3} \right)^{-\infty} = \frac{1}{(2/3)^\infty} = \frac{1}{0^+} = \boxed{\infty}$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} \stackrel{\infty^0}{\sim} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} \stackrel{\infty/\infty}{\sim} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} \stackrel{\infty/\infty}{\underset{x \gg \ln x}{\sim}} = e^0 = \boxed{1}$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/x} = 0^\infty = e^{\infty \ln 0} = e^{\infty(-\infty)} = e^{-\infty} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$$

Notar que 0^∞ **no** es una indeterminación, (ver la [Sección 8.10.2, página 206](#)).

$$\text{j)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{0.001} \ln x^{100} = 100 \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{0.001} \ln x \stackrel{0(-\infty)}{\underset{x^p \gg \ln x}{=}} = 100 \cdot 0 = \boxed{0}$$

$$\text{k)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \stackrel{\infty \cdot A \cot}{=} = \boxed{\infty}$$

$$\text{l)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \tan x}{1 - \cos x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \tan x}{1 - \cos x} \stackrel{\operatorname{sen} \epsilon \sim \tan \epsilon \sim \epsilon}{\underset{1 - \cos \epsilon \sim \epsilon^2/2}{=}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{x^2/2} = \boxed{2}$$

$$\text{m)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen x^2}{\ln(1 - x^2)} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen x^2}{\ln(1 - x^2)} \stackrel{\arcsen \epsilon \sim \epsilon}{\underset{\ln(1+\epsilon) \sim \epsilon}{=}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{-x^2} = \boxed{-1}$$

$$\text{n)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{3/2} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \stackrel{\infty 0}{\underset{\operatorname{sen} \epsilon \sim \epsilon}{=}} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{3/2} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/2} = \boxed{\infty}$$

$$\text{o)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \operatorname{sen}(x-1)}{1 - \cos(x-1)} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \operatorname{sen}(x-1)}{1 - \cos(x-1)} \stackrel{\operatorname{sen} \epsilon \sim \epsilon}{\underset{1 - \cos \epsilon \sim \epsilon^2/2}{=}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2/2} = \boxed{2}$$

$$\text{p)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}^2 3x}{x \tan^3 2x} \stackrel{0/0}{\underset{\operatorname{sen} \epsilon \sim \tan \epsilon \sim \epsilon}{=}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (3x)^2}{x (2x)^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x^4}{8x^4} = \boxed{\frac{9}{8}}$$

$$\text{q)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} 4^x - 2^x \stackrel{\infty - \infty}{\underset{4^x \gg 2^x}{=}} \lim_{x \rightarrow \infty} 4^x = \boxed{\infty}$$

$$\text{r)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x^5 - x^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} 5 \ln x - x^2 \stackrel{\infty - \infty}{\underset{x^2 \gg \ln x}{=}} \lim_{x \rightarrow \infty} (-x^2) = \boxed{-\infty}$$

$$\text{s)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2x}{2x} \right)^x \stackrel{1^\infty}{=} = \exp \left[\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{1+2x}{2x} - 1 \right) \right] = \exp \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \right] = e^{1/2} = \boxed{\sqrt{e}}$$

$$\text{t)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2x}{x} \right)^x = 2^\infty = \boxed{\infty}$$

$$\text{u)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{1+3x} \right)^{5x} \stackrel{1^\infty}{=} = \exp \left[\lim_{x \rightarrow \infty} 5x \left(\frac{3x+2}{1+3x} - 1 \right) \right] = \exp \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{1+3x} \right] = \boxed{e^{5/3}}$$

$$\text{v)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\operatorname{sen} x} \stackrel{0^0}{=} \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x)(\ln x) \right] \stackrel{\operatorname{sen} \epsilon \sim \epsilon}{=} \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x \right] \stackrel{x \gg \ln x}{=} = e^0 = \boxed{1}$$

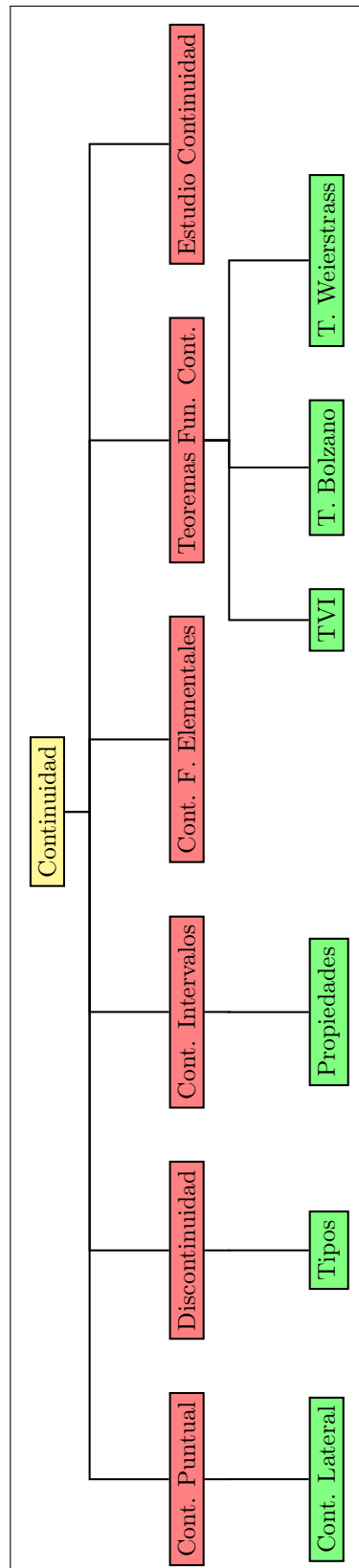
$$\text{w)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2} \stackrel{1^\infty}{=} \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} (\cos x - 1) \right] \stackrel{0/0}{\underset{1 - \cos \epsilon \sim \epsilon^2/2}{=}} \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2/2}{x^2} \right] = e^{-1/2} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{e}}}$$

$$\text{x)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\tan x} \stackrel{\infty^0}{=} \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} (\tan x) \ln \frac{1}{x} \right] = \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} (-\tan x) \ln x \right] \stackrel{0 \cdot \infty}{\underset{\tan x \sim x}{=}} \stackrel{0 \cdot \infty}{=} \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) \ln x \right] \stackrel{x \gg \ln x}{=} = e^0 = \boxed{1}$$

Continuidad

Contenido

4.1	Continuidad de una Función en un Punto	97
4.1.1	Primeras Propiedades de la Continuidad	98
4.1.2	Continuidad Lateral	98
4.2	Discontinuidad de una Función	99
4.2.1	Tipos de Discontinuidades	99
4.3	Continuidad en Intervalos	101
4.3.1	Propiedades de las Funciones Continuas	101
4.3.2	Composición de Funciones Continuas	101
4.4	Continuidad de las Funciones Elementales	102
4.5	Teoremas sobre Continuidad de Funciones	103
4.5.1	Teorema del Valor Intermedio	103
4.5.2	Teorema de Bolzano	103
4.5.3	Teorema de Weierstrass	105
4.6	Estudio de la Continuidad de una Función	105



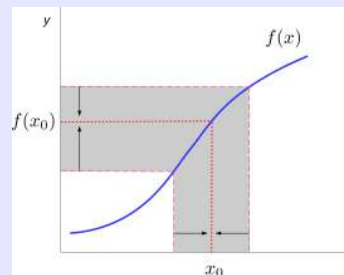
4.1. Continuidad de una Función en un Punto

Definición 4.1. Continuidad de una Función en un Punto

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in D$, donde D es algún *entorno* de $x_0 \in \mathbb{R}$.

Se dice que $f(x)$ es **continua** en x_0 si existe el *límite*¹ de la función en x_0 y dicho límite coincide con el valor de la función en x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \iff f(x) \text{ continua en } x = x_0$$



La *continuidad* de una función en un punto implica el cumplimiento de tres condiciones:

- Que exista $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- Que la función esté definida en $x = x_0$, es decir que exista $f(x_0)$
- Que los dos valores anteriores sean iguales

Ejercicio 4.1. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en $x = 0$ b) $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \neq -1 \\ 1 & x = -1 \end{cases}$ en $x = -1$ c) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ en $x = 0$

a) En este caso sí existe el límite de la función en el punto pedido.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Pero sin embargo la función no está definida en $x = 0$, por tanto **no** es continua en dicho punto.

b) En este caso la función sí está definida en el punto pedido, $f(-1) = 1$, sin embargo:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) = 0$$

Como ambos valores existen pero no son iguales la función **no** es continua en el punto pedido.

c) En este caso la función está definida en el punto pedido, $f(0) = -1$ y su límite vale:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x-1} = -1$$

Como ambos valores existen y son iguales, la función **sí** es continua en $x = 0$.

Vamos a ver una definición alternativa de la *continuidad* de una función en un punto, siguiendo la terminología $\varepsilon - \delta$ que vimos en la definición de límite de una función en un punto¹. Esta definición a pesar de carecer de interés práctico, resulta interesante desde un punto de vista matemático.

Definición 4.2. Continuidad

Definición $\varepsilon - \delta$ de **continuidad** de una función en un punto.

$$f(x) \text{ continua en } x_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

¹Ver la Definición 3.1, página 75

4.1.1. Primeras Propiedades de la Continuidad

Sea una función $f(x)$ definida en al menos un entorno de un punto x_0 . Si f es continua en x_0 entonces se verifica:

- f está *acotada*² en algún entorno de x_0
- Si $f(x_0) \neq 0$ entonces la función tiene el *mismo signo* en todos los puntos de algún entorno de x_0

4.1.2. Continuidad Lateral

Definición 4.3. Continuidad Lateral

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida en al menos un semi-entorno por la derecha (izquierda) de un punto x_0 .

Se dice que $f(x)$ es **continua por la derecha (izquierda)** en x_0 si existe el límite por la derecha (izquierda) de la función en x_0 y dicho límite coincide con el valor de la función en x_0 .

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \\ f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} f(x) \text{ continua por la derecha de } x_0 \text{ si } f(x_0) = f(x_0^+) \\ f(x) \text{ continua por la izquierda de } x_0 \text{ si } f(x_0) = f(x_0^-) \end{array} \right.$$

Ejercicio 4.2. Determinar el valor de α para que la siguiente función sea continua en \mathbb{R} :

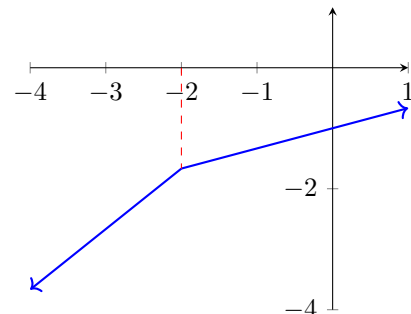
$$f(x) = \begin{cases} x + \alpha & x \leq -2 \\ \alpha x - 1 & x > -2 \end{cases}$$

Esta es una función definida a trozos donde cada rama es una determinada recta (polinomio de grado 1), que por separado son funciones continuas en todo punto para cualquier valor de α . Por tanto el único problema está en el punto de corte $x = -2$, donde hay que buscar un valor apropiado de α para que los dos límites laterales de la función en dicho punto coincidan.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x + \alpha) = -2 + \alpha \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (\alpha x - 1) = -2\alpha - 1 \end{array} \right\} \quad -2 + \alpha = -2\alpha - 1 \quad ; \quad 3\alpha = 1 \quad ; \quad \alpha = \frac{1}{3}$$

La función solución se muestra en la siguiente gráfica, comprobándose la continuidad de la misma.

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{3} & x \leq -2 \\ \frac{x}{3} - 1 & x > -2 \end{cases}$$



²Es decir, que existen unos determinados valores $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq f(x) \leq b$ para todo x perteneciente al entorno de x_0 . Esta definición corresponde con la dada para las *sucesiones acotadas*, (ver la [Definición 8.4](#), página 192).

4.2. Discontinuidad de una Función

Definición 4.4. Discontinuidad de una Función en un Punto

Se dice que $f(x)$ es **discontinua** en x_0 si **no** es *continua* en dicho punto.

Definición $\varepsilon - \delta$ de **discontinuidad** de una función en un punto.

$$f(x) \text{ discontinua en } x_0 \iff \exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 : \forall x \in D \quad |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$$

4.2.1. Tipos de Discontinuidades

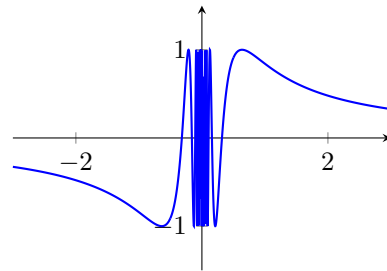
Una función puede ser discontinua en un punto $x = x_0$ por tres causas:

- La función no está definida en x_0 .
- No existe el límite cuando $x \rightarrow x_0$ o bien es infinito.
- El valor de la función y del límite no son iguales.

Ejemplo 4.1. Discontinuidades

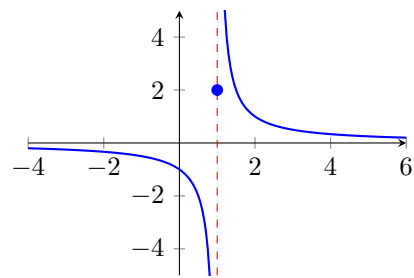
$$f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

Esta función no está definida en $x = 0$ por tanto es discontinua en este punto. En este caso además tampoco existe el límite cuando $x \rightarrow 0$.



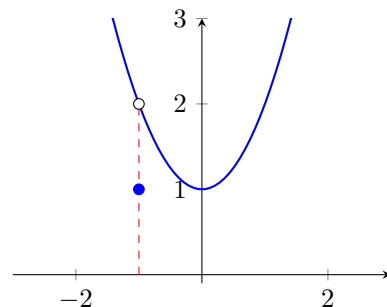
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

Esta función está definida en todo \mathbb{R} , pero no existe el límite cuando $x \rightarrow 1$ ya que los límites laterales existen pero tienen valores distintos (a $\pm\infty$).



$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \neq -1 \\ 1 & x = -1 \end{cases}$$

Esta función está definida en todo \mathbb{R} y también existe el límite de la función en todo punto de su dominio. Sin embargo, en $x = -1$ no coincide el valor de la función $f(-1) = 1$ con el valor del límite cuando $x \rightarrow -1$ que es 2, por tanto es discontinua en $x = -1$.

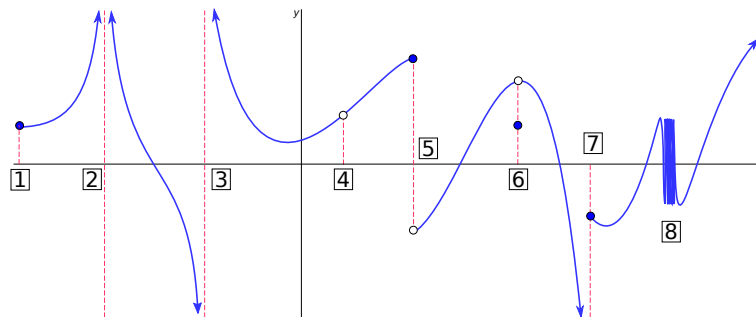


Definición 4.5. Clasificación de las Discontinuidades

Existen dos tipos principales de discontinuidad:

- **D. Evitable**³: si existe y es finito $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.
- **D. Esencial** o **No Evitable**: si no existe el límite o bien es $\pm\infty$. Hay dos tipos:
 1. **Primera Especie**: cuando los dos límites laterales existen pero son distintos. Hay tres casos:
 - **Salto**⁴ **Finito**: Los dos límites laterales son finitos pero distintos.
 - **Salto Infinito**: Uno de los límites laterales es finito y el otro $\pm\infty$.
 - **Discontinuidad asintótica**: Los dos límites laterales son $\pm\infty$.
 2. **Segunda Especie**: Si no existe uno o los dos límites laterales.

Ejemplo 4.2. Tipos de Puntos de Discontinuidades



1. La función está definida en ese punto (punto azul), pero la función no está definida en la parte izquierda del punto, por tanto solo existe el límite lateral por la derecha. Hay por tanto una **discontinuidad esencial de segunda especie** en este punto.
2. La función no está definida en ese punto mientras que el límite sí existe pero es $+\infty$, teniendo ese punto una **discontinuidad esencial de primera especie de tipo asintótico**.
3. La función no está definida y el límite no existe en ese punto (los límites laterales existen pero tienen valores distintos de $-\infty$ y $+\infty$). Se trata por tanto de una **discontinuidad esencial de primera especie de tipo asintótico**.
4. La función no está definida en el punto pero el límite sí existe y es finito (punto blanco). Se trata por tanto de una **discontinuidad evitable**.
5. La función está definida (punto azul) y existen y son finitos los dos límites laterales pero con valores distintos, por tanto el límite en ese punto no existe. Este punto tiene una **discontinuidad esencial de primera especie de salto finito**.
6. La función está definida (punto azul) y el límite existe y es finito (punto blanco), pero ambos valores son distintos. Por tanto la función tiene una **discontinuidad evitable** en ese punto.
7. La función está definida (punto azul) y existen los límites laterales en ese punto pero son distintos ($-\infty$ por la izquierda y finito por la derecha) y por tanto no existe el límite en ese punto. Se trata de una **discontinuidad esencial de primera especie de salto infinito**.
8. La función tiene unas oscilaciones infinitas en ese punto de forma que no está definida su valor en el punto ni tampoco existen ninguno de los dos límites laterales, por tanto se trata de una **discontinuidad esencial de segunda especie**.

³Se denomina *evitable* ya que basta redefinir la función de forma que coincida $f(x_0)$ con el valor del límite en dicho punto, para que la nueva función sea continua en $x = x_0$.

⁴Se denomina *salto* a la diferencia (finita o infinita) dada por $|f(x_0^+) - f(x_0^-)|$.

Teorema 4.1. Discontinuidad de las Funciones Monótonas

Si una función *monótona*⁵ es *discontinua* en algún punto de su dominio, se trata de una discontinuidad de *primera especie* o de *salto finito*.

4.3. Continuidad en Intervalos**Definición 4.6. Continuidad en Intervalos**

- Se dice que una función es **continua en un intervalo abierto** (a, b) con $-\infty \leq a < b \leq \infty$ si lo es en todos y cada uno de los puntos del intervalo. Si el intervalo es \mathbb{R} se dice simplemente que es **continua**.
- Se dice que una función es **continua en un intervalo cerrado** $[a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, si es continua en todos los puntos del intervalo abierto (a, b) y además es continua por la izquierda en a y por la derecha en b .

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

4.3.1. Propiedades de las Funciones Continuas**Operaciones Básicas con Funciones Continuas**

Sean f y g dos funciones continuas en un mismo intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ de sus dominios. Entonces también son continuas en I la siguientes funciones, siempre que estén definidas:

$$cf \quad (c \in \mathbb{R}) \quad , \quad f + g \quad , \quad fg \quad , \quad \frac{f}{g} \quad (g(x_0) \neq 0) \quad , \quad f^g$$

Nota 4.1. Es muy fácil demostrar estas propiedades a través de la definición de continuidad de una función. Por ejemplo:

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ continua en } x_0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \\ g \text{ continua en } x_0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow x_0} (f+g) = \lim_{x \rightarrow x_0} f + \lim_{x \rightarrow x_0} g = a+b \implies (f+g) \text{ continua en } x_0$$

4.3.2. Composición de Funciones Continuas

Sea f una función continua en $I \subseteq \mathbb{R}$ y sea g una función definida en todos los puntos $y = f(x)$, $\forall x \in I$. Entonces la función compuesta:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] \quad \text{es continua para todo } x \in I$$

⁵Ver la Sección 2.5, página 55.

4.4. Continuidad de las Funciones Elementales

- **Funciones Polinómicas:** $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ Continuas en \mathbb{R}

- **Funciones Racionales:** $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ Continuas en $\mathbb{R} - \{Q_m(x) = 0\}$

- **Funciones Radicales:** $f(x) = \sqrt[n]{x}$

$$\begin{cases} n \text{ impar} & \text{Continuas en } \mathbb{R} \\ n \text{ par} & \text{Continua en } x > 0 \end{cases}$$

Si n es par la función solo es continua por la derecha en $x = 0$.

- **Funciones Exponenciales:** $f(x) = a^x$

$$\begin{cases} a > 0 & \text{Continuas en } \mathbb{R} \\ a = 0 & \text{Continua en } \mathbb{R} - \{0\} \\ a < 0 & \text{Discontinuas en } \mathbb{R} \end{cases}$$

- **Funciones Logarítmicas:** $f(x) = \log_b x$ Continuas para $x > 0$

La base b debe ser mayor que 0 y distinta de 1.

- **Funciones Trigonométricas:**

$$\begin{cases} \text{sen } x, \text{ cos } x & \text{Continuas en } \mathbb{R} \\ \text{tan } x & \text{Continua en } \mathbb{R} - \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\} \end{cases}$$

- **Funciones Trigonométricas Inversas:**

$$\begin{cases} \text{arcsen } x, \text{ arccos } x & \text{Continuas en } (-1, 1) \\ \text{arctan } x & \text{Continua en } \mathbb{R} \end{cases}$$

Las funciones $\text{arcsen } x$ y $\text{arccos } x$ son continuas por la derecha en $x = -1$ y por la izquierda en $x = 1$.

- **Funciones Hiperbólicas:** $\text{senh } x, \text{ cosh } x, \text{ tanh } x$ Continuas en \mathbb{R}

- **Función:** $f(x) = x^x$ Continua para $x > 0$

4.5. Teoremas sobre Continuidad de Funciones

Vamos a ver tres teoremas relativos a la continuidad de funciones reales de variable real.

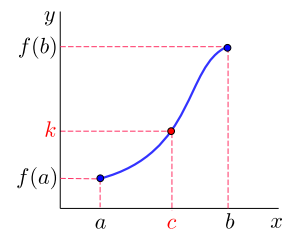
4.5.1. Teorema del Valor Intermedio

Teorema 4.2. Teorema del Valor Intermedio

Sea una función $f(x)$ **continua** en un intervalo cerrado $[a, b]$.
Entonces para todo valor $\min(f(a), f(b)) < k < \max(f(a), f(b))$ existe un valor $a < c < b$ tal que $f(c) = k$.

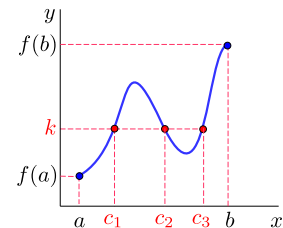
Vamos a ver una interpretación gráfica del teorema del valor intermedio (TVI).

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continua en } [a, b] \\ f(a) < k < f(b) \end{array} \right\} \implies \exists c \in (a, b) : f(c) = k$$



El **teorema del valor intermedio** (TVI) es una consecuencia directa de la idea intuitiva de *continuidad*, así cuando la variable independiente recorre un intervalo, la función pasa por todos los valores intermedios. Por tanto las funciones continuas son aquellas cuyas gráficas se pueden dibujar de un solo trazo, “sin levantar el lápiz del papel”.

El TVI asegura que al menos existe un $c \in (a, b)$, pero pueden existir más de uno, como muestra la siguiente gráfica.



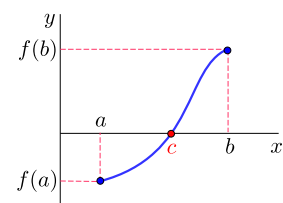
4.5.2. Teorema de Bolzano

Teorema 4.3. Teorema de Bolzano

Sea una función $f(x)$ **continua** en un intervalo cerrado $[a, b]$ con $f(a)$ y $f(b)$ de signo distinto. Entonces existe un valor $a < c < b$ tal que $f(c) = 0$.

Vamos a ver una interpretación gráfica de este teorema:

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continua en } [a, b] \\ f(a) \cdot f(b) < 0 \end{array} \right\} \implies \exists c \in (a, b) : f(c) = 0$$



El **teorema de Bolzano** es un caso particular del *teorema del valor intermedio* para $k = 0$, pero resulta de gran utilidad práctica, por ejemplo en la búsqueda de soluciones de ecuaciones.

Nota 4.2. Los valores c que verifican $f(c) = 0$ se denominan **ceros** o **raíces** de la función y gráficamente representan el punto de corte de la función con el eje OX .

Ejercicio 4.3. Demostrar que la siguiente ecuación tiene una solución en el intervalo $(0, 1)$.

$$x^3 + x^2 - 7x + 1 = 0$$

Las soluciones de la ecuación corresponden con los valores nulos (*ceros*) de la siguiente función:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 7x + 1$$

Esta función es de tipo polinómico de tercer grado, por tanto puede tener 3 ceros reales o solo 1 (en el caso de que dos de sus soluciones sean complejas conjugadas).

Para determinar si tiene al menos una solución en $(0, 1)$ se puede utilizar el teorema de Bolzano, calculando los valores de la función en sus extremos:

$$\begin{cases} f(0) = 1 > 0 \\ f(1) = -4 < 0 \end{cases}$$

Como la función es polinómica, es continua en todo \mathbb{R} y por tanto se cumplen las hipótesis del teorema de Bolzano, por lo que podemos asegurar que la ecuación tiene una raíz en el intervalo $(0, 1)$.

Ejercicio 4.4. Encontrar los ceros de la siguiente función:

$$f(x) = 4x^2 - 4x + 1$$

y explicar la aparente contradicción con el teorema de Bolzano en el intervalo $(0, 1)$.

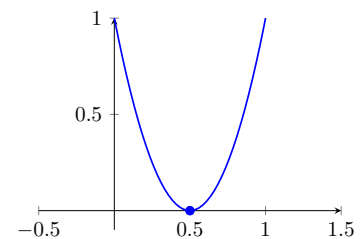
Al ser un polinomio cuadrático, las raíces pueden ser fácilmente calculadas:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{1}{2} \text{ (doble)}$$

Por otra parte la función es continua en $[0, 1]$ con $f(0) = f(1) = 1$, por tanto no cumple las condiciones del teorema de Bolzano, lo que no permite asegurar que exista una raíz en el intervalo $(0, 1)$.

El teorema de Bolzano da las condiciones *suficientes* para que se produzca una raíz en un intervalo cerrado, pero no son condiciones *necesarias*.

En este caso, la función tiene un cero en el punto $x = 0.5 \in [0, 1]$ sin que se cumplan las condiciones del teorema en ese intervalo.



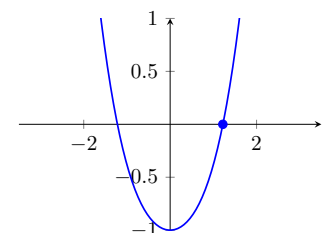
Ejercicio 4.5. Comprobar que la siguiente ecuación tiene al menos una raíz en el intervalo $[0, \pi]$.

$$x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$$

Consideramos la función:

$$f(x) = x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos x$$

Los ceros de esta función son las raíces de la ecuación del problema. Esta función es continua en \mathbb{R} al estar formada por sumas y productos de funciones continuas en \mathbb{R} . Como $f(0) = -1 < 0$ y $f(\pi) = \pi^2 + 1 > 0$ por el *teorema de Bolzano* podemos asegurar que existe al menos una raíz en dicho intervalo.



4.5.3. Teorema de Weierstrass

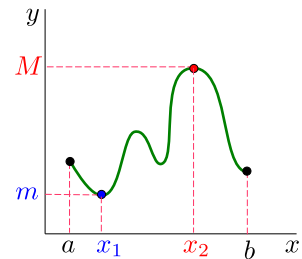
Teorema 4.4. Teorema de Weierstrass (o de los Valores Extremos)

Si una función f es continua en un intervalo *compacto*⁶ (cerrado y acotado) $[a, b]$ entonces hay al menos dos puntos $x_1, x_2 \in [a, b]$ donde f alcanza valores **extremos** (máximo y mínimo) **absolutos**⁷, es decir:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [a, b]$$

Notar que en el intervalo $[a, b]$ la función puede tener varios *extremos relativos*⁸ siendo el único **máximo absoluto** el mayor de los *máximos relativos* y el único **mínimo absoluto** el menor de los *mínimos relativos*.

Es necesario que los *puntos frontera* a y b del intervalo pertenezcan al dominio, ya que en ellos se pueden alcanzar algún extremo (relativo o absoluto).



4.6. Estudio de la Continuidad de una Función

Vamos a ver algunos ejercicios sobre el estudio de la continuidad de una función.

Ejercicio 4.6. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones.

- a) $f(x) = |x - 1|$ b) $f(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{x - 1}$ c) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \leq 3 \\ \log(x - 3) & x > 3 \end{cases}$

a) Utilizando la definición de *valor absoluto* podemos expresar esta función de la siguiente forma:

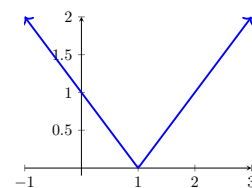
$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & x \geq 1 \\ -x + 1 & x < 1 \end{cases}$$

Como cada una de las ramas son polinomios, son funciones continuas por separado. La función será continua en el punto de corte $x = 1$ si los límites laterales en $x = 1$ existen y son iguales:

$$f(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x + 1) = 0 \quad ; \quad f(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0$$

Por tanto, como ambos valores existen, son iguales y finitos, la función es continua en todos los puntos de \mathbb{R} .

En la siguiente figura se muestra la gráfica de la función, donde se comprueba que es continua en \mathbb{R} con un pico en el punto $(1, 0)$.



b) Esta es una función racional, por tanto será continua en \mathbb{R} excepto en los puntos en que se anula el denominador. En este caso:

$$x - 1 = 0 \quad \implies \quad x = 1 \quad \implies \quad f(x) \text{ continua en } \mathbb{R} - \{1\}$$

Sin embargo, si encontramos las raíces del numerador se tiene:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{6} = \frac{1 \pm 5}{6} = \left\{ 1, -\frac{2}{3} \right\}$$

⁶Ver la Definición 1.21, página 35.

⁷Ver la Definición 5.13, página 130.

⁸Ver la Sección 5.4.2, página 130.

Por tanto, calculando el límite de la función en el punto de discontinuidad se tiene:

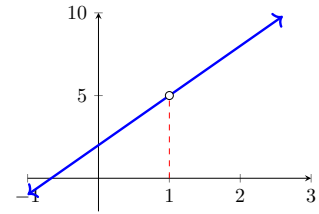
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x+2/3)}{x-1} = 3 \frac{5}{3} = 5$$

Por tanto se trata de una *discontinuidad evitable* y bastaría redefinir la función para que fuera continua en todo \mathbb{R} , de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - x - 2}{x - 1} & x \neq 1 \\ 5 & x = 1 \end{cases} = 3x + 2$$

Las dos formas son equivalentes pero por simplicidad es preferible la segunda.

En la siguiente figura se muestra una gráfica de la función.



c) Esta es una función definida a trozos y hay que analizar cada rama por separado, junto con los límites laterales en el punto de corte.

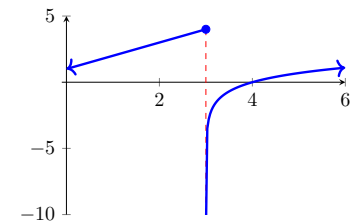
- La función de la parte izquierda del valor $x = 3$, $x + 1$ es continua en \mathbb{R} .
- La función $\log(x - 3)$ es continua para todo $x > 3$.
- Como:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x + 1) = 4 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \log(x - 3) = -\infty$$

Como son distintos, la función es discontinua en $x = 3$, teniendo en ese punto una discontinuidad esencial de primera especie de salto infinito.

$$f(x) \text{ es continua en } \mathbb{R} - \{3\}$$

En la siguiente figura se muestra una gráfica de la función.



Ejercicio 4.7. Encontrar los valores apropiados de a y b para que las siguientes funciones sean continuas.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + (a-1)x - a}{x-1} & x > 1 \\ \sqrt{1-x} & x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - ax - 6}{x-2} & x < 2 \\ x^2 + b & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \leq 0 \\ a \cos x + b & 0 < x \leq \pi \\ \sin x - ax & x > \pi \end{cases}$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} 4 \sin x & x \leq -\frac{3\pi}{2} \\ a \sin x + b & -\frac{3\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \\ 4 \cos x & x \geq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

a) Estudiamos las ramas de la función definida a trozos. La primera parte para $x > 1$ es continua excepto en $x = 1$, por tanto es continua en todo su tramo. La segunda función para $x \leq 1$ solo está definida y es continua para $x \leq 1$, por tanto también es continua en su tramo.

Determinamos los límites laterales en el punto de corte $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + (a-1)x - a}{x-1}$$

Para resolver este límite encontramos las raíces del numerador:

$$\begin{aligned} x^2 + (a-1)x - a = 0 &\implies x = \frac{(1-a) \pm \sqrt{(a-1)^2 + 4a}}{2} = \frac{(1-a) \pm \sqrt{a^2 + 2a + 1}}{2} = \\ &= \frac{(1-a) \pm \sqrt{(a+1)^2}}{2} = \frac{(1-a) \pm (a+1)}{2} = \{1, -a\} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + (a-1)x - a}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+a)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+a) = 1+a$$

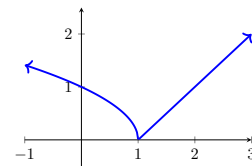
Por otra parte, con el segundo límite lateral se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} = 0$$

Por tanto para $f(x)$ sea continua en el punto de corte se tiene que cumplir:

$$f(1^+) = f(1^-) \implies 1+a = 0 \implies \boxed{a = -1}$$

En la siguiente figura se muestra una gráfica de la función resultado.



b) Estudiamos la continuidad de las dos ramas:

- La función para $x < 2$ es una función racional que no está definida en $x = 2$. Calculamos el límite lateral:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - ax - 6}{x-2} = \frac{-2-2a}{0}$$

La única forma para que este límite sea finito es que el numerador sea 0:

$$-2-2a = 0 \implies \boxed{a = -1}$$

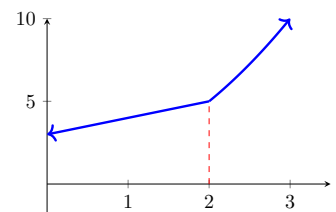
Encontrando las raíces del numerador para $a = -1$ se tiene $\{3, -2\}$, por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + x - 6}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-3)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x+3)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+3) = 5$$

- La segunda rama es un polinomio, que es continuo en \mathbb{R} . Para que $f(x)$ sea continua el límite lateral tiene que coincidir con el valor anterior 5, por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 + b = 4 + b = 5 \implies \boxed{b = 1}$$

En la siguiente figura se muestra una gráfica de la función resultado.



c) Cada uno de los tres tramos son funciones continuas en \mathbb{R} . Calculamos los límites laterales en cada uno de los dos puntos de corte de la función:

$$- \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-x} = e^0 = 1$$

– Calculamos los dos límites laterales para la segunda rama:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a \cos x + b) = a + b \\ \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} (a \cos x + b) = -a + b \end{cases}$$

– Y por último calculamos el correspondiente límite lateral en la tercera rama:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} (\sin x - ax) = -a\pi$$

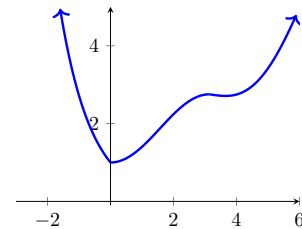
Para que sea continua se tiene entonces que cumplir las siguientes igualdades en cada uno de los dos puntos de corte:

$$\begin{cases} (x = 0) : & a + b = 1 \\ (x = \pi) : & -a + b = -a\pi \quad ; \quad a(\pi - 1) + b = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones lineales, por ejemplo por reducción, se tiene;

$$a = \frac{1}{2 - \pi} \quad ; \quad b = \frac{\pi - 1}{\pi - 2}$$

En la siguiente figura se muestra una gráfica de la función resultado.



d) Cada uno de los tres tramos son funciones continuas en \mathbb{R} . Calculamos los límites laterales en cada uno de los dos puntos de corte de la función:

$$- \lim_{x \rightarrow -3\pi/2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} 4 \sin x = 4$$

– Calculamos los dos límites laterales para la segunda rama:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -3\pi/2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} (a \sin x + b) = a + b \\ \lim_{x \rightarrow 3\pi/2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi/2^-} (a \sin x + b) = -a + b \end{cases}$$

– Y por último calculamos el correspondiente límite lateral en la tercera rama:

$$\lim_{x \rightarrow 3\pi/2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi/2^+} 4 \cos x = 0$$

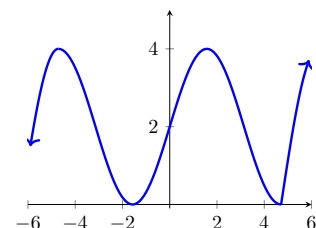
Para que sea continua se tiene entonces que cumplir las siguientes igualdades en cada uno de los dos puntos de corte:

$$\begin{cases} (x = -3\pi/2) : & a + b = 4 \\ (x = 3\pi/2) : & -a + b = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones lineales, por ejemplo por reducción, se tiene;

$$a = b = 2$$

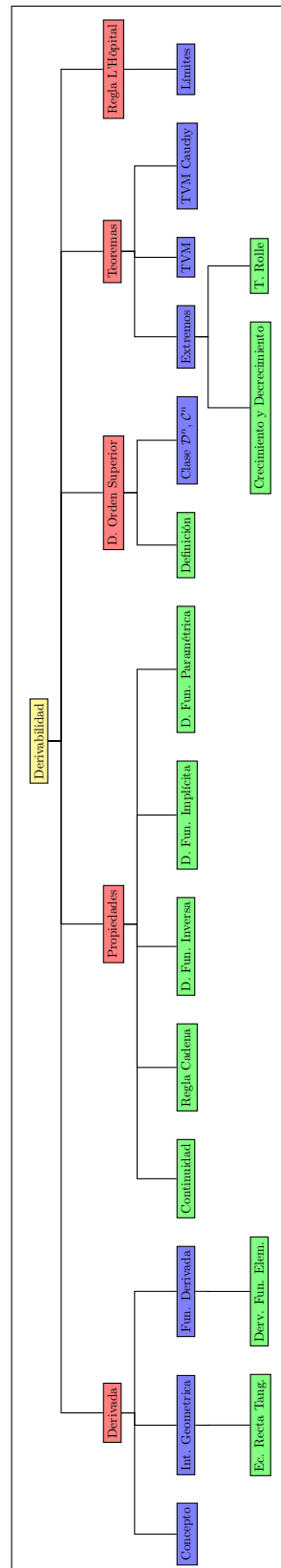
En la siguiente figura se muestra una gráfica de la función resultado.



Derivabilidad

Contenido

5.1	Concepto de Derivada	111
5.1.1	Derivada de una Función en un Punto	111
5.1.2	Interpretación Geométrica de la Derivada	112
5.1.3	Ecuación de la Recta Tangente	112
5.1.4	Derivada Lateral	114
5.1.5	Derivada Infinita	115
5.1.6	Derivada en un Intervalo	115
5.1.7	Función Derivada	116
5.1.8	Derivada de las Funciones Elementales	117
5.2	Propiedades de la Derivada	119
5.2.1	Operaciones Básicas con Funciones Derivables	119
5.2.2	Derivación y Continuidad	120
5.2.3	Derivada de la Función Compuesta. Regla de la Cadena	121
5.2.4	Derivada de la Función Potencial. Derivación Logarítmica	122
5.2.5	Derivada de la Función Inversa	123
5.2.6	Derivada de la Función Implícita	124
5.2.7	Derivada de la Función Paramétrica	124
5.2.8	Derivada de la Función en Coordenadas Polares	125
5.3	Derivadas de Orden Superior	126
5.3.1	Funciones de Clase \mathcal{D}^n y \mathcal{C}^n	128
5.3.2	Derivadas de Orden Superior de la Función Paramétrica	128
5.4	Extremos Relativos y Absolutos	129
5.4.1	Crecimiento y Decrecimiento de una Función	129
5.4.2	Extremos de una Función	130
5.5	Teoremas del Valor Medio	132
5.5.1	Teorema del Valor Medio (de Lagrange)	132
5.5.2	Teorema de Rolle	134
5.5.3	Teorema del Valor Medio de Cauchy	136
5.6	Regla de L'Hôpital	136
5.6.1	Aplicación de la Regla de L'Hôpital en otras Indeterminaciones	139



5.1. Concepto de Derivada

5.1.1. Derivada de una Función en un Punto

Definición 5.1. Derivada de una Función en un Punto

Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in I$, donde I es algún *entorno*¹ de $x_0 \in \mathbb{R}$.

Se dice que $f(x)$ es **derivable** en x_0 si existe y es finito el siguiente límite, cuyo valor se denomina **derivada** de $f(x)$ en x_0 .

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- La notación $f'(x_0)$ utiliza el signo gráfico denominado *prima* (') y se denomina **notación de Lagrange**. Suele ser muy utilizada por su simplicidad.
- La notación $\frac{df}{dx}(x_0)$ utiliza el cociente de los denominados **diferenciales** de f (df) y de x (dx), y se denomina **notación de Leibniz**. Suele ser también muy utilizada en el estudio de las propiedades de las derivadas, en derivadas de funciones compuestas², ecuaciones diferenciales, etc.
- Otra notación de la derivada de una función es mediante la utilización del **operador derivada**, $D[f(x)]$, pero no la usaremos en este texto.

Introduciendo dos nuevos términos³ Δx y h se obtienen dos definiciones alternativas de la derivada de una función en un punto, equivalentes a la anterior.

Definición 5.2. Definición Alternativa de Derivada

$$\text{Llamando } \Delta x = x - x_0 \implies f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\text{Llamando } h = x - x_0 \implies f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Nota 5.1.

- La definición que utiliza h suele ser la más práctica a la hora de calcular derivadas a través de su definición.
- La definición que utiliza Δx suele ser muy utilizada en aplicaciones físicas.

Para que exista la *derivada* de una función en un punto es necesario que se cumplan tres condiciones:

- Que la función esté definida en el punto.
- Que exista el límite que define la derivada.
- Que el límite de la derivada sea finito.

Cuando el límite que define la *derivada* exista pero sea *infinito*, la función **no** es *derivable* en ese punto, aunque se dice que tiene **derivada infinita** en él, (ver la [Sección 5.1.5, página 115](#)).

¹Ver la [Definición 1.17, página 34](#).

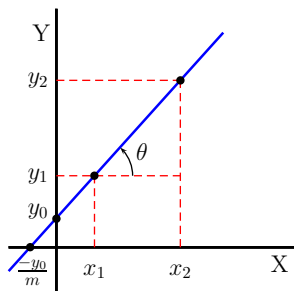
²Ver por ejemplo la derivada de la función paramétrica en la [Sección 5.2.7, página 124](#).

³La letra griega *delta mayúscula* Δ se suele utilizar en matemáticas para definir incrementos o diferencias finitas.

5.1.2. Interpretación Geométrica de la Derivada

Ecuaciones Básicas de la Recta

Vamos a recordar las ecuaciones más sencillas⁴ que hay para definir una recta en el plano euclídeo.



Ecuación de la recta que pasa por dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) :

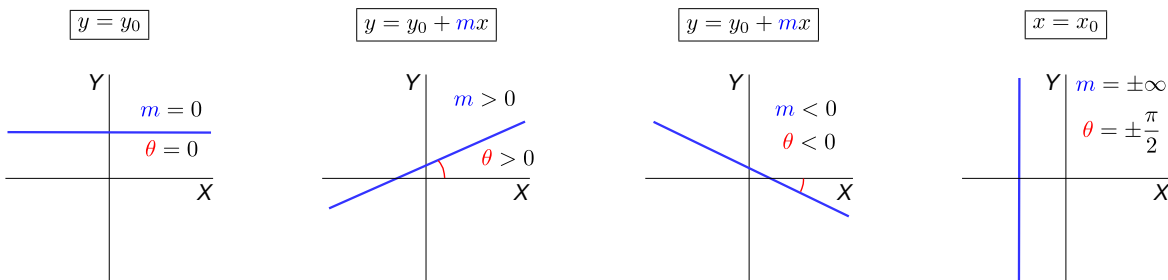
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \implies y = y_1 + \underbrace{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}_m (x - x_1)$$

El valor⁵ $m \in \mathbb{R}$ se denomina **pendiente** de la recta, donde⁶ $m = \tan \theta$.

$$y = y_1 + m(x - x_1) \implies y = y_0 + mx$$

La *pendiente* m de una recta indica la inclinación de la misma con respecto al eje X .

- Si $m > 0$ La recta es *creciente*⁷ y cuanto mayor es m mayor es su ángulo de inclinación hacia arriba.
- Si $m = 0$ La recta es *horizontal*.
- Si $m < 0$ La recta es *decreciente* y cuanto mayor es $|m|$ mayor es su ángulo de inclinación hacia abajo.
- Si $m = \pm\infty$ la recta es *vertical* con ecuación de la forma $x = c$.

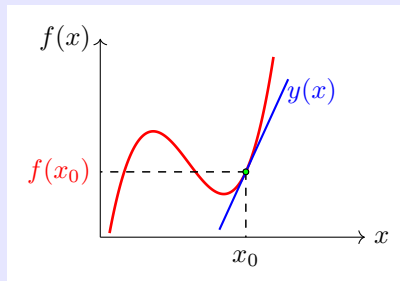


5.1.3. Ecuación de la Recta Tangente

Definición 5.3. Ecuación de la Recta Tangente

Sea una función $f(x)$ derivable en un punto x_0 de su dominio. Se denomina **recta tangente de $f(x)$ en x_0** a la ecuación:

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



⁴Para un estudio más detallado, ver por ejemplo "Clases de Álgebra Lineal para Ingeniería" en la bibliografía, pag. 367.
⁵La *pendiente* m también puede tomar el valor de $\pm\infty$ pero en esos casos la recta es vertical y su forma es del tipo $x = c$ con $c \in \mathbb{R}$.
⁶El *ángulo* de inclinación de la recta θ se puede obtener calculando $\arctan(m)$. El valor y_0 se denomina *ordenada en el origen* y corresponde con la ordenada del punto de corte de la recta con el eje Y .
⁷Ver la definición de función monótona creciente y decreciente en la **Sección 2.5, página 55**.

Teorema 5.1. Recta Tangente

La **ecuación de la recta tangente** que pasa por el punto x_0 es la recta que **mejor aproxima** a la función en un entorno de x_0 .

Demostración 5.1.

Si $f(x)$ es derivable en $x = x_0$ se tiene:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \boxed{f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}}{x - x_0} = 0$$

La parte enmarcada corresponde con la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = x_0$, $y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Como este límite tiende a cero, significa que la función $f(x)$ y la recta tangente $y(x)$ son muy parecidas en las cercanías de $x = x_0$.

La *derivada* de una función $f(x)$ en un punto $x = x_0$ de su dominio, corresponde con la *pendiente* de la *recta tangente* a la gráfica de la función en el punto $(x_0, f(x_0))$, y por tanto nos da una idea de la inclinación (crecimiento o decrecimiento) de la función en ese punto.

Ejercicio 5.1. Encontrar, en caso de existir, la ecuación de la recta tangente a la función:

$$f(x) = 3 + (x - 3)^3$$

en el punto $x = 5$.

La ecuación de la recta tangente a la función en $x = 5$ (siempre que sea derivable) viene dada por:

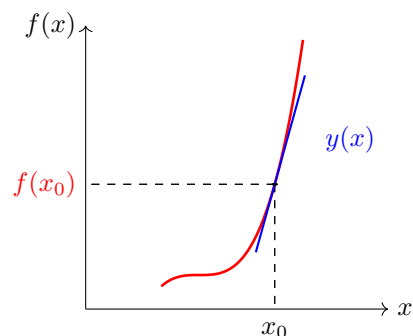
$$y = f(5) + f'(5)(x - 5)$$

Calculamos el valor de $f'(5)$ usando la definición de derivada⁸:

$$\begin{aligned} f'(5) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 + (5+h-3)^3 - 11}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-8 + (h^3 + 6h^2 + 12h + 8)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h^2 + 6h + 12)}{h} = 12 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$y = f(5) + f'(5)(x - 5) = 11 + 12(x - 5) = -49 + 12x$$



5.1.4. Derivada Lateral

Definición 5.4. Derivada Lateral

Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida en al menos un semi-entorno por la derecha o izquierda de un punto x_0 .

- Se define la **derivada por la izquierda** de f en x_0 si existe y es finito el siguiente límite:

$$f'(x_0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- Se define la **derivada por la derecha** de f en x_0 si existe y es finito el siguiente límite:

$$f'(x_0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Para que exista el valor de la *derivada* de una función en un punto $f'(x_0)$ es necesario que existan y sean iguales las dos *derivadas laterales* en ese punto $f'(x_0^-)$ y $f'(x_0^+)$.

Definición 5.5. Punto Anguloso

Se dice que una función *continua* en $x = x_0$ tiene un **punto anguloso** en x_0 si existen las dos *derivadas laterales* en ese punto pero son distintas.

Ejercicio 5.2. Utilizando la definición de derivada, calcular la derivada de las siguientes funciones en los puntos dados.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = 1$

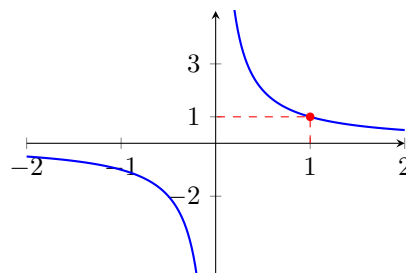
b) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & x < -1 \\ 2x + 2 & x \geq -1 \end{cases}$ en $x = -1$

a) Utilizando la definición de derivada con la variable h se tiene:

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h(1+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{1+h} = \boxed{-1}$$

Si representamos gráficamente la función vemos que está definida en todo \mathbb{R} excepto en $x = 0$, (en este punto naturalmente al no estar definida, no es continua ni derivable).

En $x = 1$, donde nos piden calcular la derivada, la función es continua.



b) Nos piden calcular la derivada de una función definida a trozos en el punto de corte, por tanto hay que calcular los dos límites laterales en el punto y ambos deben existir, ser finitos e iguales.

$$f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

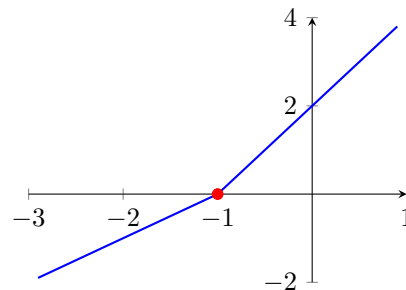
⁸Es más sencillo calcular la derivada usando las reglas de derivación que se verán en la [Sección 5.2, página 119](#).

$$\text{Límites laterales: } \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(-1+h) + 1 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} 1 = \boxed{1} \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2(-1+h) + 2 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 2 = \boxed{2} \end{cases}$$

El valor de los dos límites laterales existe y es finito pero son distintos y por tanto:

No existe el valor de $f'(-1)$ en esta función

Si representamos gráficamente la función vemos que es continua en todo \mathbb{R} pero en el punto $x = -1$ donde calculamos la derivada hay un **punto anguloso** (esquina), lo que hace que los límites laterales que definen la derivada sean distintos y por tanto no derivable en ese punto.

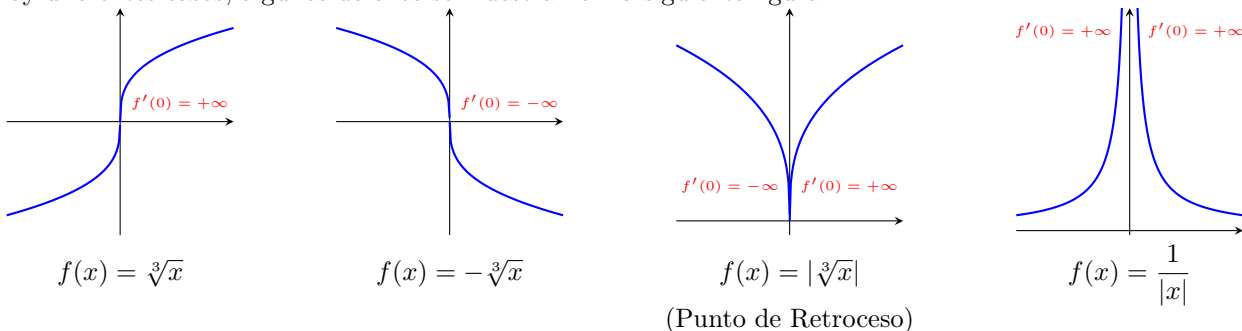


5.1.5. Derivada Infinita

Definición 5.6. Derivada Infinita en un Punto

Si $f'(x_0) = \pm\infty$ la función **no** es derivable en ese punto pero se dice que tiene **derivada infinita** en x_0 .

Hay diferentes casos, algunos de ellos se muestran en la siguiente figura.



Definición 5.7. Punto de Retroceso

Se dice que una función continua en $x = x_0$ tiene un **punto de retroceso** en x_0 si $f'(x_0^+) = +\infty$ y $f'(x_0^-) = -\infty$, o al contrario. Notar que al ser continua en x_0 , el valor de $f(x_0)$ es finito.

5.1.6. Derivada en un Intervalo

Definición 5.8. Derivada en un Intervalo

Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donde I es un intervalo abierto (a, b) o cerrado $[a, b]$.

- Se dice que f es **derivable en un intervalo abierto** (a, b) si es *derivable* en todo punto del intervalo.
- Se dice que f es **derivable en un intervalo cerrado** $[a, b]$ si es *derivable* en todo punto del intervalo (a, b) y además existen las derivas laterales $f'(a^+)$ y $f'(b^-)$.

5.1.7. Función Derivada

Definición 5.9. Función Derivada

Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en un intervalo I . Se denomina **función derivada** de $f(x)$ a la *aplicación*⁹:

$$f' : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que a cada punto x del intervalo se le asocia el valor de la *derivada* en ese punto $f'(x)$.

A la *función derivada* es común denominarla simplemente **derivada de la función**.

Ejercicio 5.3. Encontrar la función derivada de las siguientes funciones en su correspondiente dominio.

a) $f(x) = 2$ b) $f(x) = x$ c) $f(x) = x^2$ d) $f(x) = \frac{1}{x}$ e) $f(x) = \text{sen } x$

a) Aplicando la definición de derivada se tiene:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2-2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \boxed{0}$$

b) Aplicando la definición de derivada se tiene:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = \boxed{1}$$

c) Aplicando la definición de derivada se tiene:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + h^2 + 2hx - x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2x) = \boxed{2x} \end{aligned}$$

d) Esta función no está definida en $x = 0$, por tanto no será derivable en este punto. Para el resto de puntos $x \neq 0$ se tiene:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{xh(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \boxed{-\frac{1}{x^2}}$$

Por tanto:

$$f'(x) = \begin{cases} -x^{-2} & x \neq 0 \\ \nexists & x = 0 \end{cases}$$

e) Aplicando la definición de derivada se tiene:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x \cos h + \cos x \text{sen } h - \text{sen } x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[h \text{sen } x \frac{\cos x - 1}{h^2} + \cos x \frac{\text{sen } h}{h} \right] = \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} h \text{sen } x \frac{\cos x - 1}{h^2}}_{0(\cos x)(-\frac{1}{2})=0} + \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \cos x \frac{\text{sen } h}{h}}_{1 \cos x = \cos x} = \boxed{\cos x} \end{aligned}$$

⁹Ver la Definición 2.1, página 49.

5.1.8. Derivada de las Funciones Elementales

Utilizando la definición de derivada de una función se puede obtener la siguiente tabla de funciones derivada de las funciones elementales:

Función	Derivada
c (cte)	0
x^n	$n x^{n-1}$ ($n \in \mathbb{R}$)
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$ ($0 < a \neq 1$)
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Función	Derivada
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$ x $	$\frac{x}{ x } = \frac{ x }{x}$ ($x \neq 0$)
$\operatorname{arcsen} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arccos} x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctan} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{senh} x$	$\operatorname{cosh} x$
$\operatorname{cosh} x$	$\operatorname{senh} x$
$\operatorname{tanh} x$	$1 - \operatorname{tanh}^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$

La forma de determinar estas fórmulas es sencilla utilizando la definición de derivada como se ha hecho en el ejercicio [Ejercicio 5.3, página 116](#), y como se muestra en el siguiente ejercicio para un par de casos más complicados.

La forma de calcular las derivadas de las funciones inversas en general y en particular $\operatorname{arcsen} x$, $\operatorname{arccos} x$ y $\operatorname{arctan} x$ se explica en el [Sección 5.2.5, página 123](#).

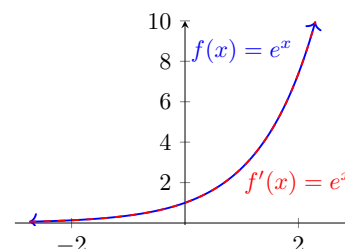
Ejercicio 5.4. Encontrar la función derivada de las siguientes funciones en su correspondiente dominio.

a) $f(x) = e^x$ b) $f(x) = \ln x$ c) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ d) $f(x) = |x|$

a) $f(x) = e^x$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \stackrel{e^\epsilon - 1 \sim \epsilon}{=} e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \boxed{e^x}$$

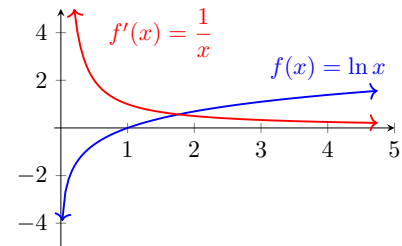
Notar que la exponencial e^x es la única función que coincide con su derivada.



b) $f(x) = \ln x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} \stackrel{C.V.}{\implies} \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{h}{x} \\ h \rightarrow 0 \implies t \rightarrow 0 \end{array} \right\} \implies \frac{1}{x} \ln \left[\underbrace{\lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t}_e \right] = \frac{1}{x} \ln e = \boxed{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

En la siguiente gráfica se muestran la función $\ln x$ y su función derivada, en su correspondiente dominio de definición $x > 0$.



c) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + \binom{n}{n-1}xh^{n-1} + \binom{n}{n}h^n - x^n}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right)}{h} = \\ &= nx^{n-1} + \lim_{h \rightarrow 0} h \left(\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} + \dots + nxh^{n-3} + h^{n-2} \right) = \boxed{nx^{n-1}} \end{aligned}$$

Este mismo resultado se puede extender a valores $n \in \mathbb{R}$.

d) $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$

$$x < 0 : f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-x-h+x}{h} = \boxed{-1}$$

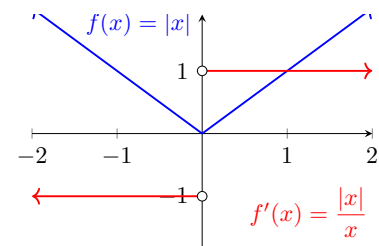
$$x = 0 : f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1 \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \end{array} \right\} \implies \nexists$$

$$x > 0 : f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \boxed{1}$$

Una forma de resumir el resultado es la siguiente:

$$\boxed{[|x|]' = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|}} \quad x \neq 0$$

En la siguiente gráfica se muestran la función $|x|$ y su función derivada en su correspondiente dominio de definición $x > 0$.



5.2. Propiedades de la Derivada

5.2.1. Operaciones Básicas con Funciones Derivables

Teorema 5.2. Operaciones Básicas con Funciones Derivables

Sean f y g dos funciones derivables en un mismo intervalo I de sus dominios. Entonces también son derivables en I : cf ($c \in \mathbb{R}$), $f + g$, fg , f/g ($g \neq 0$), siendo además sus funciones derivadas:

- $(cf)' = cf'$
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Demostración 5.2.

- $[cf(x)]' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{cf(x) - cf(x_0)}{x - x_0} = c \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \boxed{cf'(x_0)}$
- $[f(x) + g(x)]' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \boxed{f'(x_0) + g'(x_0)}$
- $[f(x)g(x)]' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \boxed{f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)}$
- $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{f(x)g(x_0) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0) - f(x)g(x)}{x - x_0} = \frac{1}{g(x_0)^2} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = \boxed{\frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}}$

Ejemplo 5.1. Operaciones con Derivadas

Se pueden fácilmente generalizar las operaciones con derivadas.

- $[f_1 + f_2 + \dots + f_n]' = f_1' + f_2' + \dots + f_n'$
- $[f_1 f_2 \dots f_n]' = f_1' f_2 \dots f_n + f_1 f_2' f_3 \dots f_n + \dots + f_1 f_2 \dots f_n'$
- $\left[\frac{fg + h/m}{n-p}\right]' = \frac{(fg + h/m)'(n-p) - (fg + h/m)(n-p)'}{(n-p)^2} = \frac{(f'g + fg' + \frac{h'm - hm'}{m^2})(n-p) - (fg + \frac{h}{m})(n-p)'}{(n-p)^2}$

Las reglas de derivación dadas en el Teorema 5.2, página 119 solo son válidas en los valores de x donde la expresión obtenida está definida. En aquellos puntos donde no esté definida no se puede decir nada sobre el valor de la derivada y es necesario calcular el límite que define la derivada¹⁰ en ese punto¹¹.

5.2.2. Derivación y Continuidad

Teorema 5.3. Derivación y Continuidad

Toda función derivable en un punto x_0 también es continua en dicho punto.

Nota 5.2. El recíproco es falso, ya que no toda función continua en un punto es derivable en el mismo.

Demostración 5.3.

Si una función es derivable entonces el siguiente límite existe y es finito: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
Para que $f(x)$ sea continua en x_0 tiene que cumplirse $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) = \underbrace{\left[\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right]}_{f'(x_0)} \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)}_0 = 0$$

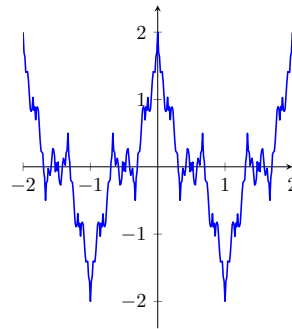
$$\implies \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \quad ; \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) = f(x_0)}$$

Ejemplo 5.2. Funciones continuas no derivables

Vamos a ver dos ejemplos típicos de funciones *patológicas* que son continuas en todo su dominio pero no son derivables en ninguno.

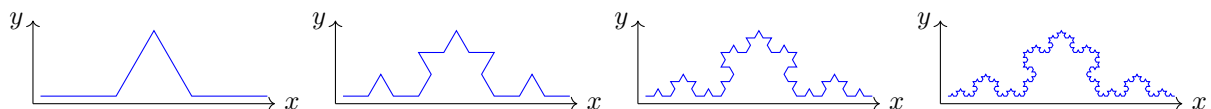
- Función de Weierstrass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(3^n x)$$



- Curva de Koch

Se construye partiendo de una base con un triángulo (primera gráfica) y cada uno de sus cuatro tramos rectos se añade una nuevas zonas triangulares similares a la original pero más pequeñas (segunda gráfica), repitiéndose este proceso sucesivamente de forma infinita.



¹⁰Ver la Sección 5.1.1, página 111.

¹¹Ver el Ejercicio 5.12, página 127 un ejemplo de este tipo de casos.

5.2.3. Derivada de la Función Compuesta. Regla de la Cadena

Teorema 5.4. Regla de la Cadena

Sean $\left\{ \begin{array}{l} f : A \rightarrow \mathbb{R} \\ g : B \rightarrow \mathbb{R} \end{array} \right\}$ tales que $g(B) \subseteq A$, con $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

Si g es derivable $\forall x \in B$ y f es derivable $\forall g(x) \in A$ entonces la función composición $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ también es derivable, siendo su **función derivada**¹²:

$$[(f \circ g)(x)]' = \{f[g(x)]\}' = f'[g(x)] g'(x) \quad (\text{Regla de la Cadena})$$

Demostración 5.4.

Sea $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$. Llamando $\Delta g = g(x+h) - g(x)$ con $\lim_{h \rightarrow 0} \Delta g = 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} [(f \circ g)(x)]' &= \{f[g(x)]\}' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[g(x+h)] - f[g(x)]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[g(x) + \Delta g] - f[g(x)]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[g(x) + \Delta g] - f[g(x)]}{\Delta g} \frac{\Delta g}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[g(x) + \Delta g] - f[g(x)]}{\Delta g} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \\ &= \underbrace{\left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[g(x) + \Delta g] - f[g(x)]}{\Delta g} \right]}_{f'[g(x)]} \underbrace{\left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]}_{g'(x)} = \boxed{f'[g(x)] g'(x)} \end{aligned}$$

La regla de la cadena se puede generalizar a composiciones de más de dos funciones. Por ejemplo:

$$[(h \circ f \circ g)(x)]' = h' \{f[g(x)]\}' f'[g(x)] g'(x)$$

Ejercicio 5.5. Calcular la función derivada de las siguientes funciones compuestas.

a) $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

b) $f(x) = \log \sqrt{\cos x}$

a) Aplicando la regla de la cadena, paso a paso, se tiene:

$$\left[\operatorname{sen} \frac{1}{x} \right]' = \left(\operatorname{sen}' \frac{1}{x} \right) \left(\frac{1}{x} \right)' = \cos \left(\frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \boxed{-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}}$$

a) En este caso es una composición de tres funciones, por tanto:

$$\left[\log \sqrt{\cos x} \right]' = \frac{1}{\sqrt{\cos x}} \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} (-\operatorname{sen} x) = -\frac{\operatorname{sen} x}{2 \cos x} = \boxed{-\frac{1}{2} \tan x}$$

¹²Ver la Definición 5.9, página 116.

5.2.4. Derivada de la Función Potencial. Derivación Logarítmica

Vamos a ver como calcular la derivada de *funciones potenciales*¹³ del tipo:

$$h(x) = f(x)^{g(x)}$$

Para ello se aplica la denominada **derivación logarítmica**, que consiste en tomar previamente logaritmos (neperianos) a ambas partes de la igualdad y aplicar la propiedad del logaritmo de una potencia¹⁴, posteriormente derivarlas, teniendo en cuenta la *regla de la cadena*¹⁵ y por último despejar la derivada de la función inicial.

$$h(x) = f(x)^{g(x)} \quad ; \quad \log h = \log f^g \quad ; \quad \log h = g \log f \quad \implies \quad (\log h)' = (g \log f)'$$

$$\frac{h'}{h} = g' \log f + g \frac{f'}{f} \quad \implies \quad h' = h \left(g' \log f + g \frac{f'}{f} \right)$$

Ejercicio 5.6. Calcular la derivada de la siguiente función.

$$f(x) = [\operatorname{sen} x]^{\log \frac{1}{x}} \quad ; \quad x \in (0, \pi)$$

Aplicamos la derivación logarítmica:

$$f = [\operatorname{sen} x]^{\log \frac{1}{x}} \quad ; \quad \log f = \log \frac{1}{x} \cdot \log(\operatorname{sen} x) \quad ; \quad [\log f]' = \left[\log \frac{1}{x} \cdot \log(\operatorname{sen} x) \right]'$$

$$\frac{1}{f} \cdot f' = x \cdot \log(\operatorname{sen} x) + \log \frac{1}{x} \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \quad ; \quad f' = f \cdot \left[x \log(\operatorname{sen} x) - \log(x) \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right]$$

$$f'(x) = [\operatorname{sen} x]^{\log \frac{1}{x}} \left[x \log(\operatorname{sen} x) - \log(x) \cotan(x) \right]$$

Ejercicio 5.7. Calcular la derivada de la siguiente función.

$$f(x) = \log_{\operatorname{sen} x} x \quad ; \quad x \in (0, \pi)$$

En este caso no es necesario aplicar la derivación logarítmica, basta con redefinir la función atendiendo al concepto de logaritmo:

$$\log_b x = y \iff b^y = x \implies f = \log_{\operatorname{sen} x} x \iff (\operatorname{sen} x)^f = x$$

Tomando logaritmos en esta última expresión y despejando se tiene una definición alternativa de la función dada:

$$f \log(\operatorname{sen} x) = \log x \implies f(x) = \frac{\log x}{\log(\operatorname{sen} x)}$$

Derivamos de forma tradicional la nueva definición de la función:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \log(\operatorname{sen} x) - \log(x) \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\log^2(\operatorname{sen} x)} \implies f'(x) = \frac{1}{\log^2(\operatorname{sen} x)} \left[\frac{\log(\operatorname{sen} x)}{x} - \log(x) \cotan(x) \right]$$

¹³Ver la [Definición 2.11](#), página 62.

¹⁴Ver la [Sección 2.8.6](#), página 63.

¹⁵Ver el [Teorema 5.4](#), página 121.

5.2.5. Derivada de la Función Inversa

Teorema 5.5. Derivada de la Función Inversa

Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función *biyectiva*¹⁶ con función inversa $f^{-1}(x)$. Si $f(x)$ es *derivable* en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ entonces su *función inversa*¹⁷ también es derivable, siendo su inversa:

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

Demostración 5.5.

Llamando $y = f^{-1}(x)$, se tiene:

$$y = f^{-1}(x) \implies f(y) = x$$

Derivando ambas partes de la igualdad se tiene:

$$[f(y)]' = (x)' \xrightarrow{\text{Regla Cadena}} f'(y)y' = 1 \quad ; \quad y' = \frac{1}{f'(y)}$$

Teniendo en cuenta que $y = f^{-1}(x)$ se tiene finalmente:

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

Ejercicio 5.8. Calcular la función derivada de la siguiente función.

$$f(x) = \arcsen x$$

Notar que la función $\arcsen(x)$ es la función inversa de $\sen(x)$. Aplicando la fórmula de la derivada de la función inversa se tiene:

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} \implies [\arcsen x]' = \frac{1}{\sen'[\arcsen x]} = \frac{1}{\cos[\arcsen x]}$$

Esta expresión se puede simplificar de la siguiente forma, teniendo en cuenta que $\cos x = \sqrt{1 - \sen^2 x}$,

$$\frac{1}{\cos(\arcsen x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sen^2(\arcsen x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

ya que $\sen(x)$ y $\arcsen(x)$ son funciones inversas una de la otra por tanto:

$$\sen(\arcsen x) = \arcsen(\sen x) = x$$

Para calcular la derivada de una función inversa, en lugar de memorizar la fórmula del **Teorema 5.5** suele ser mejor realizar el procedimiento utilizado en el la demostración de este teorema. Así para este caso se tendría:

$$y = \arcsen x \quad ; \quad \sen y = x \quad ; \quad (\sen y)' = (x)' \quad ; \quad (\cos y)y' = 1 \quad ; \quad y' = (\arcsen x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsen x)}$$

y posteriormente su simplificación como se ha hecho anteriormente.

¹⁶Ver la **Definición 2.5**, página 52.

¹⁷Ver la **Definición 2.6**, página 55.

5.2.6. Derivada de la Función Implícita

En la **Definición 2.19**, página 67 se explicó el concepto de *función implícita* definida a través de una ecuación del tipo:

$$F(x, y) = 0$$

Vamos a estudiar ahora la forma de determinar la derivada de este tipo de funciones.

La derivada de una función definida de forma implícita, se puede calcular derivando ambos miembros de la igualdad, siguiendo las reglas de derivación y teniendo en cuenta:

- La derivada de la variable independiente es la unidad: $x' = 1$
- Al derivar las funciones que dependen de la variable dependiente y hay que aplicar la regla de la cadena, teniendo en cuenta que de forma general $y' \neq 1$.
- Una vez derivado, se despeja y' que de forma general será una función que dependa tanto de la variable independiente x como de la variable dependiente y , $y' = f(x, y)$.

Ejercicio 5.9. Encontrar la derivada de la siguiente función $y = f(x)$ definida de forma implícita:

$$6x^2y + 5y^3 + 3x^2 = 12 - x^2y^2$$

Derivamos ambas partes de la igualdad:

$$(6x^2y + 5y^3 + 3x^2)' = (12 - x^2y^2)' ; \quad 12xy + 6x^2y' + 15y^2y' + 6x = -2xy^2 - 2x^2yy'$$

Despejando la derivada y' se tiene:

$$y' = \frac{-2xy^2 - 12xy - 6x}{6x^2 + 15y^2 + 2x^2y} = \frac{-2x(y^2 + 6y + 3)}{6x^2 + 15y^2 + 2x^2y} ; \quad \forall(x, y) : 6x^2 + 15y^2 + 2x^2y \neq 0$$

Esta función solo es derivable en los puntos (x, y) que no anulan el denominador de esta expresión. Para encontrar el valor de la derivada en un punto x_0 , primero hay que resolver la ecuación que define la función implícita para $x = x_0$ obteniendo el correspondiente valor y_0 y con ambos valores obtener la derivada en el punto (x_0, y_0) a través de la fórmula de la derivada $y' = f(x_0, y_0)$.

5.2.7. Derivada de la Función Paramétrica

En la **Definición 2.20**, página 67 se explicó el concepto de *función paramétrica* definida a través de una ecuación del tipo:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in I \quad , \quad I \subseteq \mathbb{R}$$

donde $x(t)$ e $y(t)$ son funciones dadas dependientes del *parámetro* t .

Vamos a estudiar ahora la forma de determinar la derivada de este tipo de funciones.

La derivada de una función definida de forma paramétrica se puede calcular utilizando la *notación de Leibniz*¹⁸, teniendo en cuenta la siguiente fórmula:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

donde y'_t y x'_t son las derivadas de cada una de las ecuaciones paramétricas con respecto al parámetro t .

¹⁸Ver la **Sección 5.1.1**, página 111.

Ejercicio 5.10. Calcular la derivada de la siguiente curva definida de forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = 1 + 4 \cos t \\ y = -3 + 2 \operatorname{sen} t \end{cases} ; \quad t \in [0, 2\pi)$$

Calculamos las derivas de cada una de las ecuaciones paramétricas con respecto al parámetro t :

$$\frac{dx}{dt} = -4 \operatorname{sen} t \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = 2 \cos t$$

Por tanto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2 \cos t}{-4 \operatorname{sen} t} = -\frac{1}{2 \tan t} \quad ; \quad t \in [0, 2\pi) - \{0, \pi\}$$

La derivada toma un valor infinito (no está definida) para los valores $t = \{0, \pi\}$.

Notar que la técnica utilizada aquí sirve para calcular la derivada de una función multi-compuesta de la forma:

$$y = f(x) \quad ; \quad x = g(t) \quad ; \quad t = h(m) \quad ; \quad m = k(p) \quad \implies \quad y = F(p)$$

donde se tiene inicialmente una variable y que depende de x y a su vez x depende de t y t depende de m y finalmente m depende de p , de forma que la variable inicial y depende (indirectamente) de la última variable p a través de una determinada función F más o menos complicada.

Entonces la derivada de y con respecto a la última variable p se puede obtener a través de la *regla de la cadena*¹⁹ de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dp} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} \frac{dt}{dm} \frac{dm}{dp}$$

5.2.8. Derivada de la Función en Coordenadas Polares

En la [Sección 2.9.4, página 69](#) se definió una *función en coordenadas polares* de la siguiente forma:

$$r = f(\theta) \quad ; \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \operatorname{atan2}(y, x) \end{cases}$$

Vamos a estudiar ahora la forma de determinar la derivada de este tipo de funciones. Teniendo en cuenta lo realizado en la sección anterior se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{y_\theta}{x_\theta}$$

Entonces teniendo en cuenta las relaciones entre las coordenadas cartesianas x e y y las coordenadas polares r y θ , se tiene:

$$\left. \begin{aligned} y_\theta &= \frac{dy}{d\theta} = \frac{d(r \operatorname{sen} \theta)}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \operatorname{sen} \theta + r \cos \theta = f'(\theta) \operatorname{sen} \theta + f(\theta) \cos \theta \\ x_\theta &= \frac{dx}{d\theta} = \frac{d(r \cos \theta)}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta = f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \operatorname{sen} \theta \end{aligned} \right\} \quad \text{donde} \quad f'(\theta) = \frac{df(\theta)}{d\theta}$$

Entonces la derivada buscada es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_\theta}{x_\theta} = \frac{f'(\theta) \operatorname{sen} \theta + f(\theta) \cos \theta}{f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \operatorname{sen} \theta}$$

¹⁹Ver el [Teorema 5.4, página 121](#).

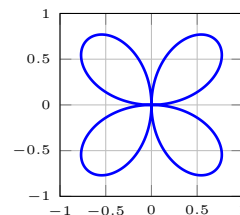
Dividiendo numerador y denominador por $\cos(\theta)$ se tiene finalmente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(\theta) + f'(\theta) \tan \theta}{f'(\theta) - f(\theta) \tan \theta} = \frac{r + r' \tan \theta}{r' - r \tan \theta}$$

Ejercicio 5.11. Calcular la derivada de la siguiente curva definida en coordenadas polares:

$$r = \text{sen}(2\theta)$$

La representación gráfica de esta función se muestra en la siguiente figura. Estamos interesados en determinar el valor de la derivada de la curva en cada uno de sus puntos.



Aplicando la fórmula anterior se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r + r' \tan \theta}{r' - r \tan \theta} = \frac{\text{sen}(2\theta) + 2 \cos(2\theta) \tan \theta}{2 \cos(2\theta) - \text{sen}(2\theta) \tan \theta}$$

A través de esta expresión podemos conocer la derivada de cualquier punto de la curva en función del ángulo θ . Notar que en determinados puntos el valor de la derivada se hace $\pm\infty$.

5.3. Derivadas de Orden Superior

Definición 5.10. Derivada de Orden Superior

Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en el intervalo²⁰ I .

- Se denomina **derivada primera** o de **primer orden** a la función: $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$.
- La derivada de f' , si existe, se denomina **derivada segunda** o de **segundo orden** y se representa por alguna de estas formas:

$$f''(x) \quad ; \quad f^{(2)}(x) \quad ; \quad D^2[f(x)] \quad ; \quad \frac{d^2 f}{dx^2}$$

- En general, si existen, se define la **derivada n-ésima** o de **orden n** como la derivada de la derivada de orden $n - 1$, y se representa como:

$$f^{(n)}(x) \quad ; \quad D^n[f(x)] \quad ; \quad \frac{d^n f}{dx^n}$$

La utilización de comillas en la notación de las derivadas solo se realiza para derivadas de orden bajo, usando *números romanos* a partir de la cuarta derivada, de la siguiente forma:

$$f' \quad ; \quad f'' \quad ; \quad f''' \quad ; \quad f^{iv} \quad ; \quad f^v \quad ; \quad f^{vi} \quad ; \quad \dots$$

Para órdenes altos se prefiere por simplicidad alguna de las otras formas.

²⁰Ver la Definición 5.8, página 115.

Se denomina **forma diferencial** a la notación de Leibniz²¹ de las derivadas de orden n :

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \dots, \quad \frac{d^ny}{dx^n}$$

Ejercicio 5.12. Encontrar la derivada de tercer orden de la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Aplicamos las reglas de derivación para encontrar el valor de la primera derivada de la función en todos los puntos $x \neq 0$:

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} + x^2 \cos \left(\frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \quad ; \quad x \neq 0$$

Para el punto $x = 0$ es necesario utilizar la definición de *derivada*²² para determinar si existe o no, y en caso afirmativo conocer su valor:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \operatorname{sen} \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \operatorname{sen} \frac{1}{h} = 0$$

Por tanto:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Calculamos ahora la segunda derivada, volviendo a derivar la primera derivada. Primeramente para valores $x \neq 0$:

$$f''(x) = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} + 2x \cos \left(\frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \boxed{2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x}} \quad ; \quad x \neq 0$$

Calculamos ahora la segunda derivada en $x = 0$ usando la definición y derivando $f'(x)$ dada en (5.1):

$$f''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h \operatorname{sen} \frac{1}{h} - \cos \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 \operatorname{sen} \frac{1}{h} - \frac{1}{h} \cos \frac{1}{h} = \nexists$$

Como este límite no existe, tampoco existe la segunda derivada de la función en $x = 0$. Encontramos la tercera derivada de la función en todos los puntos $x \neq 0$, derivando para ello la expresión de $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f'''(x) &= 2 \cos \left(\frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) + \frac{2}{x^2} \cos \frac{1}{x} + \frac{2}{x} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) + \frac{2}{x^3} \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \cos \left(\frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \\ &= \boxed{\frac{1}{x^4} \cos \frac{1}{x}} \quad ; \quad x \neq 0 \end{aligned}$$

Como no existe $f''(0)$ tampoco existe $f'''(0)$ ni ninguna otra derivada de orden superior en $x = 0$.

²¹Ver la Sección 5.1.1, página 111.

²²Ver la Definición 5.1, página 111.

5.3.1. Funciones de Clase \mathcal{D}^n y \mathcal{C}^n

Definición 5.11. Funciones de Clase \mathcal{D}^n y \mathcal{C}^n

Las funciones se pueden clasificar en base a su *derivabilidad* de la siguiente forma:

- **Clase $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$** : Conjunto de funciones reales n veces *derivables* en el intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$.
- **Clase $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$** : Conjunto de funciones reales n veces *derivables* en el intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, siendo además su derivada n -ésima *continua*.

De forma general se habla de funciones de **Clase $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$** al conjunto de funciones que son infinitamente *derivables* y todas sus derivadas son continuas.

- Las funciones polinómicas, exponencial, seno y coseno son de *clase \mathcal{C}^∞* en todo \mathbb{R} .
- Las funciones racionales (cociente de polinomios) son de *clase \mathcal{C}^∞* en todos los puntos donde no se anula su denominador.

5.3.2. Derivadas de Orden Superior de la Función Paramétrica

Dada una función en *forma paramétrica*, hemos visto²³ que su primera derivada puede obtenerse como:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

La forma más práctica de calcular las derivadas sucesivas de una función dada en *forma paramétrica* es la siguiente:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t} \implies y' = f(t)$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{f'(t)}{x'_t} \implies y'' = g(t)$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dy} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{g'(t)}{x'_t} \implies y''' = h(t)$$

Y así sucesivamente con las derivadas de orden mayor.

Podemos encontrar fórmulas para calcular las segundas derivadas pero resultan menos prácticas al tener que recordarlas para su uso. Sin embargo tienen bastante interés como aprendizaje del uso de los diferenciales (forma de Leibniz) en el cálculo de derivadas. Vamos a verlas:

- **Ecuación 1** de la segunda derivada de la función paramétrica

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} \right) = \left(\frac{d^2y}{dt^2} \frac{dt}{dx} \right) \frac{dt}{dx} + \frac{dy}{dt} \frac{d^2t}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 + \frac{dy}{dt} \frac{d^2t}{dx^2}$$

Importante notar que mientras se cumple la siguiente relación entre las primeras derivadas, no se verifica con las segundas derivadas:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \quad \text{pero} \quad \frac{d^2t}{dx^2} = \frac{1}{\frac{dx^2}{d^2t}} \neq \frac{1}{\frac{d^2x}{dt^2}}$$

- **Ecuación 2** de la segunda derivada de la función paramétrica

$$y''_{xx} = [y'_x]'_x = \left[\frac{y'_t}{x'_t} \right]'_x = \left[\frac{y'_t}{x'_t} \right]'_t t'_x = \frac{y''_{tt} x'_t - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^2} \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_{tt} x'_t - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3}$$

²³Ver la [Sección 5.2.7](#), página 124.

Ejercicio 5.13. Encontrar la derivada de segundo orden de la siguiente curva definida en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = t - \operatorname{sen} t \\ y = 1 - \operatorname{cos} t \end{cases}$$

Lo resolvemos primero de la forma sencilla:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\operatorname{sen} t}{1 - \operatorname{cos} t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{dy}{dx} = \left[\frac{dy}{dx} \right]'_t \frac{dt}{dx} = \frac{dt}{dx} = \frac{\operatorname{cos} t (1 - \operatorname{cos} t) - \operatorname{sen}^2 t}{(1 - \operatorname{cos} t)^2} \frac{1}{1 - \operatorname{cos} t} = \frac{\operatorname{cos} t - 1}{(1 - \operatorname{cos} t)^3} = \boxed{\frac{-1}{(1 - \operatorname{cos} t)^2}}$$

Utilizando la **ecuación 1**:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= \frac{1}{1 - \operatorname{cos} t} ; \quad \frac{d^2t}{dx^2} = \left[\frac{dt}{dx} \right]'_x = \left[\frac{dt}{dx} \right]'_t \frac{dt}{dx} = \frac{-\operatorname{sen} t}{(1 - \operatorname{cos} t)^2} \frac{1}{1 - \operatorname{cos} t} = \frac{-\operatorname{sen} t}{(1 - \operatorname{cos} t)^3} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d^2y}{dt^2} \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 + \frac{dy}{dt} \frac{d^2t}{dx^2} = (\operatorname{cos} t) \frac{1}{(1 - \operatorname{cos} t)^2} + \operatorname{sen} t \frac{-\operatorname{sen} t}{(1 - \operatorname{cos} t)^3} = \frac{\operatorname{cos} t - \operatorname{cos}^2 t - \operatorname{sen}^2 t}{(1 - \operatorname{cos} t)^3} = \\ &= \frac{\operatorname{cos} t - 1}{(1 - \operatorname{cos} t)^3} = \boxed{\frac{-1}{(1 - \operatorname{cos} t)^2}} \end{aligned}$$

Utilizando la **ecuación 2**:

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt} x'_t - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3} = \frac{(\operatorname{cos} t)(1 - \operatorname{cos} t) - (\operatorname{sen} t)(\operatorname{sen} t)}{(1 - \operatorname{cos} t)^3} = \frac{\operatorname{cos} t - 1}{(1 - \operatorname{cos} t)^3} = \boxed{\frac{-1}{(1 - \operatorname{cos} t)^2}}$$

5.4. Extremos Relativos y Absolutos

5.4.1. Crecimiento y Decrecimiento de una Función

Teorema 5.6.

Sea una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en un punto $x_0 \in I$. Entonces se verifica:

- Si $f'(x_0) > 0$ f es **creciente** en x_0 \iff si $a < x_0 < b$ \implies $f(a) < f(x_0) < f(b)$
- Si $f'(x_0) < 0$ f es **decreciente** en x_0 \iff si $a < x_0 < b$ \implies $f(a) > f(x_0) > f(b)$

Nota 5.3. Estas definiciones son en sentido **estricto**. Si usamos desigualdades \geq y \leq se dice que son en sentido **amplio**.

Demostración 5.6.

Veamos únicamente el caso creciente, siendo análogo para el caso decreciente. Si $f'(x_0) > 0$, se tiene:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

entonces:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \text{en un entorno de } x_0 \quad \implies \quad [f(x) - f(x_0)] \text{ y } (x - x_0) \text{ tienen el mismo signo.}$$

Por tanto:

$$\left. \begin{aligned} x > x_0 &\implies f(x) > f(x_0) \\ x < x_0 &\implies f(x_0) > f(x) \end{aligned} \right\} \implies f \text{ crece (en sentido estricto) en } x = x_0.$$

- Si $f'(x_0) > 0 \quad \forall x \in I$ f es **creciente** en el intervalo I .
- Si $f'(x_0) < 0 \quad \forall x \in I$ f es **decreciente** en el intervalo I .

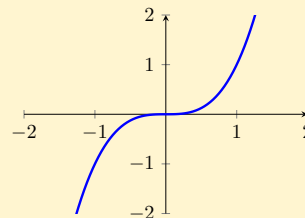
Si $f'(x_0) = 0$ no podemos asegurar si la función crece, decrece o tiene un extremo relativo en $x = x_0$.

Así por ejemplo:

$$\begin{cases} f(x) = x^3 \\ f'(x) = 3x^2 \end{cases} \implies f'(0) = 0$$

Sin embargo $f(x) = x^3$ no tiene un extremo relativo en $x = 0$ y como:

$$f(-\epsilon) < f(0) < f(\epsilon) \implies f(x) \text{ crece en } x = 0$$



5.4.2. Extremos de una Función

Definición 5.12. Extremos Relativos o Locales

Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $x_0 \in I$.

- Se dice que $f(x)$ tiene un **máximo relativo** o **local** en x_0 si existe un *entorno reducido*²⁴ E de x_0 tal que:

$$\forall x \in E \implies f(x_0) \geq f(x)$$

- Se dice que $f(x)$ tiene un **mínimo relativo** o **local** en x_0 si existe un *entorno reducido* E de x_0 tal que:

$$\forall x \in E \implies f(x_0) \leq f(x)$$



Máximos Relativos



Mínimos Relativos

Definición 5.13. Extremos Absolutos o Globales

Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $x_0 \in I$.

- Se dice que $f(x)$ tiene un **máximo absoluto** o **global** en x_0 si: $\forall x \in I \implies f(x_0) \geq f(x)$

- Se dice que $f(x)$ tiene un **mínimo absoluto** o **global** en x_0 si: $\forall x \in I \implies f(x_0) \leq f(x)$

Teorema 5.7. Extremos Relativos o de Fermat

Si una función $f(x)$ alcanza un **extremo relativo** en x_0 y la *derivada* $f'(x_0)$ existe, entonces $f'(x_0) = 0$.

El recíproco, si $f'(x_0) = 0$ existe un *extremo relativo* en x_0 , no siempre es cierto.

²⁴Ver la [Definición 1.17](#), página 34.

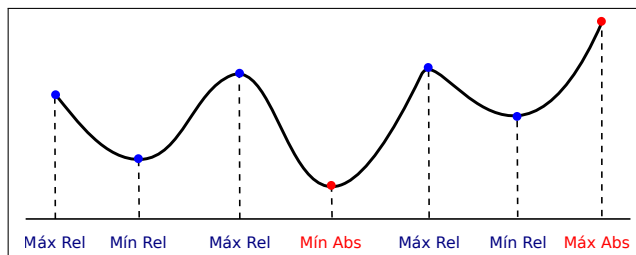


Figura 5.1: Ejemplo de representación gráfica de extremos relativos y absolutos.

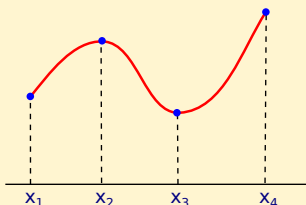
Demostración 5.7.

Supongamos que $f(x)$ tiene un *máximo relativo* en x_0 (con un *mínimo relativo* sería un razonamiento análogo), entonces por definición²⁵ $f(x_0) \geq f(x)$ en todos los puntos de un determinado entorno de x_0 . Por otra parte, si existe $f'(x_0)$ se cumple que²⁶ $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$. Entonces:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } x < x_0 \quad \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{< 0}} \geq 0 \implies f'(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \\ \text{si } x > x_0 \quad \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{> 0}} \leq 0 \implies f'(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \end{array} \right.$$

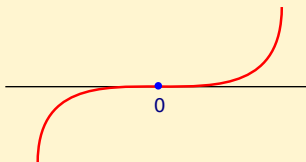
Como ambos valores deben ser iguales, la única posibilidad es que $f'(x_0) = 0$.

1. Si el intervalo I es *cerrado* y x_0 es uno de sus extremos, el teorema no tiene por qué cumplirse.



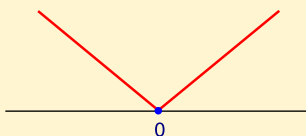
- x_1 es un mín relativo pero $f'(x_1) \neq 0$
- x_2 es un máx relativo donde $f'(x_2) \neq 0$ por ser punto interior
- x_3 es un mín relativo donde $f'(x_3) \neq 0$ por ser pto interior
- x_4 es un máx relativo pero $f'(x_4) \neq 0$

2. La condición $f'(x_0) = 0$ es *necesaria* pero no *suficiente*.



Por ejemplo $f(x) = x^3$ con $f'(x) = 3x^2$ se cumple $f'(0) = 0$ pero en $x = 0$ (punto interior) no tiene ningún extremo relativo al ser creciente.

3. Si la función no es *derivable* en un punto no podemos aplicar este teorema.



Por ejemplo la función $f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$ (punto interior) tiene un mínimo relativo, sin embargo la función no es derivable en ese punto.

²⁵Ver la [Definición 5.12](#), página 130.

²⁶Ver la [Sección 5.1.4](#), página 114.

5.5. Teoremas del Valor Medio

5.5.1. Teorema del Valor Medio (de Lagrange)

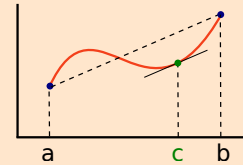
Teorema 5.8. Valor Medio de Lagrange (o de los Incrementos Finitos)

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con $[a, b]$ un *compacto*.

Si $f(x)$ es *continua* en $[a, b]$ y *derivable* en (a, b) entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Es decir, existe un punto en el interior del intervalo que tiene por *pendiente de su recta tangente*²⁷ la misma que tiene la recta que une los puntos $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$.



Demostración 5.8.

A partir de $f(x)$ construimos otra función $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\psi(x) = f(x) + mx$$

donde $m \in \mathbb{R}$ se toma de forma apropiada para que $\psi(a) = \psi(b)$, siendo:

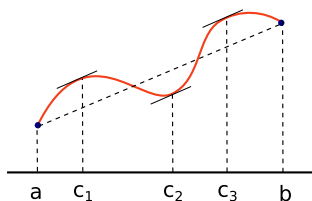
$$f(a) + ma = f(b) + mb \implies m = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Como $\psi(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) al definirse a través de $f(x)$, aplicando el *teorema de Rolle*²⁸ se tiene:

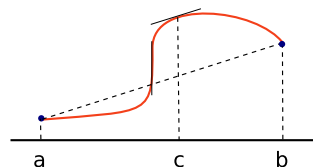
$$\exists c \in (a, b) : \psi'(c) = 0 \implies \phi'(c) = f'(c) + m = 0 \implies f'(c) = -m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

1. Pueden existir más de un punto c que verifique el *teorema del valor medio* (ver abajo figura A).
2. El teorema también se verifica si se consideran *derivadas infinitas*²⁹ (figura B).
3. Una forma alternativa de expresar el *Teorema del Valor Medio (TVM)* es la siguiente, utilizando una terminología similar a la definición de *derivada*³⁰ (ver figura C).

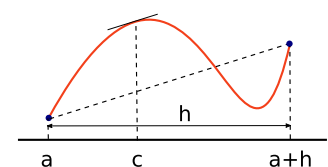
$$f'(c) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



A



B



C

²⁷Ver la [Definición 5.3](#), página 112.

²⁸Ver el [Teorema 5.10](#), página 134.

²⁹Ver la [Sección 5.1.5](#), página 115.

³⁰Ver la [Definición 5.1](#), página 111.

Ejercicio 5.14. Calcular el punto $x = c$ que satisface el teorema del valor medio para la siguiente función en el intervalo $[0, 1]$.

$$f(x) = x^2 + 2x + 1$$

Al ser una función polinómica es continua y derivable en \mathbb{R} , por tanto cumple las condiciones del TVM en cualquier intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Por tanto existe un $c \in [0, 1]$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{4 - 1}{1} = 3$$

Como:

$$f'(x) = 2x + 2 \implies 3 = 2c + 2 \quad ; \quad c = \frac{3 - 1}{2} \implies \boxed{c = \frac{1}{2}}$$

Ejercicio 5.15. Hallar los valores de a y b para que la siguiente función $f(x)$ cumpla las condiciones del teorema del valor medio en $[0, 2]$ y calcular el punto $x = c$ que satisface el teorema para ese intervalo.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + a & x < 1 \\ bx + 2 & x \geq 1 \end{cases}$$

Como $f(x)$ es una función definida a trozos donde cada una de sus partes está formada por polinomios, seguro que es una función continua y derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$. Para que cumpla las condiciones del teorema del valor medio, debe ser continua y derivable también en $x = 1$, por tanto vamos a determinar los valores de a y b necesarios para ello.

- Continuidad

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \implies \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 6x + a) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (bx + 2) \quad ; \quad 7 + a = b + 2 \implies \boxed{a = b - 5}$$

- Derivabilidad

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) \implies \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 6) = \lim_{x \rightarrow 1^+} b \quad ; \quad \boxed{b = 8} \implies \boxed{a = 8 - 5 = 3}$$

Por tanto la función debe ser: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 3 & x < 1 \\ 8x + 2 & x \geq 1 \end{cases}$

Buscamos el punto $x = c$ que verifica el TVM en $[0, 2]$: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{18 - 3}{2} = \frac{15}{2}$

$$\text{Entonces: } f'(x) = \begin{cases} 2x + 6 & x < 1 \\ 8 & x \geq 1 \end{cases} \implies \frac{15}{2} = 2c + 6 \quad ; \quad 2c = \frac{3}{2} \implies \boxed{c = \frac{3}{4}}$$

Aplicación del Teorema del Valor Medio (TVM)

Teorema 5.9.

Si una función $f(x)$ cumple las condiciones del TVM en un punto $x = c$ de su dominio, entonces:

$$\begin{cases} f'(c^+) = \lim_{x \rightarrow c^+} f'(x) \\ f'(c^-) = \lim_{x \rightarrow c^-} f'(x) \end{cases}$$

Este teorema asegura la *continuidad* de la derivada de una función $f'(x)$ en un punto $x = c$ de su dominio.

Demostración 5.9.

Vamos a demostrar el caso por la derecha (+) (la demostración por la izquierda es análoga). Como en el intervalo $[a, a+h]$ se puede aplicar el TVM, existe un $c \in (a, a+h)$ tal que:

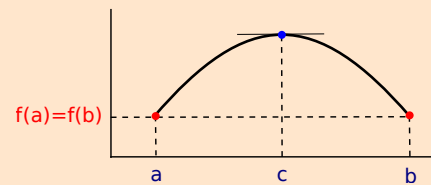
$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Cuando $h \rightarrow 0^+$ se cumple que $c \rightarrow a^+$ y por tanto: $f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{c \rightarrow a^+} f'(c)$

5.5.2. Teorema de Rolle**Teorema 5.10. Rolle**

Sea $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donde $[a, b]$ es un intervalo *cerrado y acotado (compacto)* y siendo $f(x)$ *continua* en $[a, b]$ y *derivable* en (a, b) , entonces:

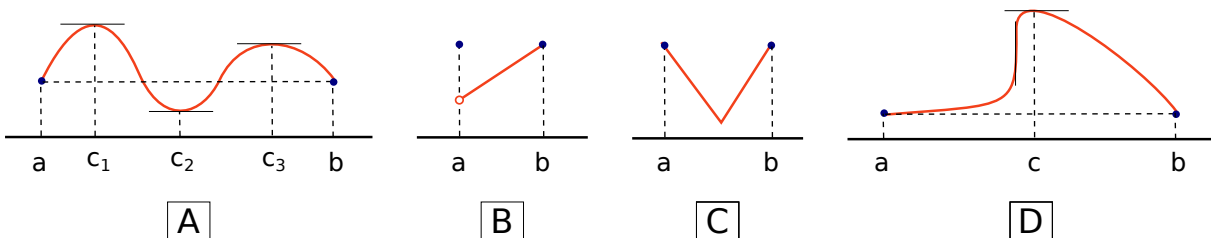
Si $f(a) = f(b)$ existe al menos un $c \in (a, b)$ donde $f'(c) = 0$.

**Demostración 5.10.**

Como $f(x)$ es continua en $[a, b]$ podemos aplicar el *teorema de Weierstrass*³¹ para asegurar que f alcanza su máximo y mínimo absoluto en $[a, b]$. Podemos diferenciar dos casos:

1. El máximo y mínimo absoluto se producen en ambos extremos $x = a$ y $x = b$ (uno en cada uno). Como $f(a) = f(b)$ la única posibilidad es que se trata de una recta horizontal y por tanto $f'(c) = 0 \quad \forall c \in (a, b)$, cumpliéndose el *teorema de Rolle*.
2. Al menos uno (máximo o mínimo) se da en un punto interior $c \in (a, b)$. En este caso c es un extremo relativo y como f es derivable en c , por el *teorema de Fermat*³² se tiene que $f'(c) = 0$, cumpliéndose también el teorema.

1. Pueden existir más de un punto c que verifique el *teorema de Rolle* (ver abajo figura A).
2. Si $f(x)$ **no** es *continua* en $[a, b]$ (figura B)) o **no** es *derivable* en (a, b) (figura C) no se cumple el teorema necesariamente.
3. El teorema también se verifica si la función es *continua* en (a, b) con algún punto interior **no derivable** pero con *derivada infinita*³³ (figura D).



³¹Ver el Teorema 4.4, página 105.

³²Ver el Teorema 5.7, página 130.

³³Ver la Sección 5.1.5, página 115.

Aplicación del Teorema de Rolle

Definición 5.14. Cero de una Función

Se dice que un punto x_0 del dominio de una función es un **cero** si $f(x_0) = 0$.

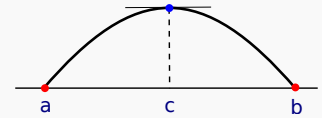
Los *ceros* de una función son las *raíces* o *soluciones reales* de la ecuación $f(x) = 0$.

Teorema 5.11.

Entre dos *ceros* de una función *derivable* en un intervalo existe al menos un *cero* de su *función derivada*.

Demostración 5.11.

Aplicación directa del *teorema de Rolle* en el caso de que $f(a) = f(b) = 0$



Ejercicio 5.16. Determinar el número de soluciones reales que tiene la siguiente ecuación en $(-1, 0)$.

$$2x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

Al ser una ecuación polinómica de grado 3, el *teorema fundamental del Álgebra*³⁴ nos dice que tiene exactamente 3 soluciones que pueden ser las tres reales o solamente una real y dos imaginarias.

Para estudiarlo consideramos la función:

$$f(x) = 2x^3 + x^2 + x + 1$$

que es continua y derivable en todo \mathbb{R} . Las soluciones de la ecuación del enunciado corresponden a los ceros de $f(x)$. Entonces como la función es continua y además:

$$f(0) = 1 > 0 \quad ; \quad f(-1) = -1 < 0$$

teniendo en cuenta el *teorema de Bolzano*³⁵, sabemos que en el intervalo $(-1, 0)$ existe al menos un cero (solución real) de la función $f(x)$. En el caso de que en este intervalo exista más de un cero real, la función debe *doblar* (cambiar de sentido) en algún punto de este intervalo, y por consiguiente por el **Teorema 5.11** debe existir al menos algún cero de la función derivada $f'(x)$. Calculamos la derivada:

$$f'(x) = 6x^2 + 2x + 1$$

y estudiamos su signo, encontrando primero para ello sus ceros:

$$6x^2 + 2x + 1 = 0 \quad ; \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 24}}{12}$$

Como no tiene soluciones reales, el signo de esta función no cambia (siempre es positiva o negativa) y por tanto no tiene ceros, lo que indica por el teorema anterior que la función solo tiene un cero en ese intervalo y por tanto la ecuación del enunciado solo tiene una raíz real en el intervalo $(-1, 0)$.

³⁴Ver el **Teorema A.2**, página 302.

³⁵Ver el **Teorema 4.3**, página 103.

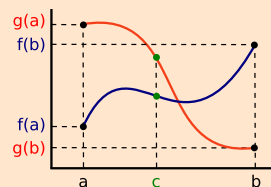
5.5.3. Teorema del Valor Medio de Cauchy

Teorema 5.12. Valor Medio de Cauchy

Sean dos funciones $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con $[a, b]$ un compacto y siendo f y g continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) . Entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que:

$$g'(c)[f(b) - f(a)] = f'(c)[g(b) - g(a)]$$

Si $\left\{ \begin{array}{l} g'(c) \neq 0 \\ g(a) \neq g(b) \end{array} \right\} \implies \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$



Nota 5.4. En este caso el punto $x = c$ del teorema no tiene ninguna relevancia geométrica.

Este teorema es una generalización del *teorema del valor medio de Lagrange*³⁶ (TVM) y se puede obtener a partir de éste tomando como función $g(x) = x$.

Demostración 5.12.

A partir de $f(x)$ y $g(x)$ construimos otra función $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que: $\psi(x) = hf(x) - kg(x)$ eligiendo h y k de forma apropiada para que $\psi(a) = \psi(b)$, y por tanto:

$$hf(a) - kg(a) = hf(b) - kg(b) \quad ; \quad h[f(b) - f(a)] = k[g(b) - g(a)] \implies \begin{cases} h = \frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)} \\ k = f(b) - f(a) \end{cases}$$

Como $\psi(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) al definirse a través de $f(x)$ y $g(x)$, aplicando el *teorema de Rolle*³⁷ se tiene:

$$\exists c \in (a, b) : \psi'(c) = 0 \implies kg'(c) = hf'(c) \implies g'(c)[f(b) - f(a)] = f'(c)[g(b) - g(a)]$$

5.6. Regla de L'Hôpital

Teorema 5.13. Regla de L'Hôpital

Sean dos funciones $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ donde I es un entorno reducido de $x = x_0$ con $x_0 \in \mathbb{R}$ o $x_0 = \pm\infty$. Si f y g son derivable en I con $g'(x) \neq 0 \forall x \in I$ entonces se verifica:

- Indeterminación $\frac{0}{0}$

Si $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \\ \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell, \ell \in \mathbb{R} \text{ ó } \ell = \pm\infty \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$

- Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

Si $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty \\ \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell, \ell \in \mathbb{R} \text{ ó } \ell = \pm\infty \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$

³⁶Ver el Teorema 5.8, página 132.

³⁷Ver el Teorema 5.10, página 134.

Demostración 5.13.1. Indeterminación $\frac{0}{0}$

- $x_0 \in \mathbb{R}$

Si $f(x)$ y $g(x)$ no están definidas en x_0 se definen como $f(x_0) = g(x_0) = 0$. De esta forma $f(x)$ y $g(x)$ son continuas $\forall x \in I$ y por tanto se puede aplicar el *TVM de Cauchy*³⁸ a f y g en el intervalo (x_0, x) si $x > x_0$ ó en el intervalo (x, x_0) si $x < x_0$:

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \quad \begin{matrix} f(x_0)=0 \\ g(x_0)=0 \end{matrix} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad \implies \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c \rightarrow x_0} \frac{f(c)}{g(c)} = \ell$$

- $x_0 = \pm\infty$

Suponemos que $x_0 = +\infty$ (con $-\infty$ es análogo). Llamando $t = 1/x$ se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)}$$

Aplicando el *TVM de Cauchy*:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{[f(1/t)]'}{[g(1/t)]'} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-t^2[f'(1/t)]}{-t^2[g'(1/t)]} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$$

2. Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

Definimos:

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{g(x)} \\ G(x) &= \frac{1}{f(x)} \end{aligned} \right\} \implies \text{se toma un intervalo } I \text{ donde } f \text{ y } g \text{ no se anulan}$$

Entonces:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/G(x)}{1/F(x)} = \frac{F(x)}{G(x)}$$

Aplicándose las demostraciones anteriores a $F(x)$ y $G(x)$.

1. Si no existe $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ no se puede decir nada sobre la existencia ni el valor de $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

2. La regla de L'Hôpital se puede utilizar de forma reiterada si se cumplen las siguientes tres condiciones:

- El nuevo límite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ es una indeterminación del tipo $0/0$ ó ∞/∞ .
- Las funciones derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ deben ser derivables en un entorno de x_0 .
- Debe existir el $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$.

3. En muchos casos al aplicar la *regla de L'Hôpital* se obtiene un límite más difícil de calcular que el límite de partida, debido a que las expresiones de las funciones derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ son más complicadas las originales $f(x)$ y $g(x)$. En estos casos la *regla de L'Hôpital* no es útil.

Ejercicio 5.17. Calcular, en caso de ser posible, los siguientes límites de funciones usando la *regla de L'Hôpital*.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(2x^2 - 1)}{\tan(x - 1)}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^3)}{x - \operatorname{sen} x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^{\operatorname{sen} x} - \log(1 + x^2)}{\tan x - \arctan x}$

a) Aplicando la *regla de L'Hôpital* se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(2x^2 - 1)}{\tan(x - 1)} \stackrel{0/0}{\underset{\hat{H}}{=}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{4x}{2x^2 - 1}}{\tan^2(x - 1) + 1} = \frac{4}{1} = \boxed{4}$$

b) Aplicamos la *regla de L'Hôpital* de forma reiterada a este caso:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^3)}{x - \operatorname{sen} x} &\stackrel{0/0}{\underset{\hat{H}}{=}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3x}{1+x^3}}{x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{\underbrace{(1+x^3)}_{\rightarrow 1}(1 - \cos x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{1 - \cos x} \stackrel{0/0}{\underset{\hat{H}}{=}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\operatorname{sen} x} \stackrel{0/0}{\underset{\hat{H}}{=}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{\cos x} = \boxed{6} \end{aligned}$$

c) Este límite se puede calcular fácilmente utilizando *infinitésimos equivalentes*³⁹ de la siguiente forma:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\operatorname{sen} x} \right) \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) = 1 \cdot 0 = \boxed{0}$$

Sin embargo aplicando la *regla de L'Hôpital* se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x} \stackrel{0/0}{\underset{\hat{H}}{=}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)}{\cos x} = \nexists$$

Notar que el **Teorema 5.13, página 136** establece que la regla de L'Hôpital solo puede aplicarse si el límite resultante al aplicar las derivadas, existe (pudiéndose ser su valor finito o infinito). Como en este caso el límite resultante no existe, no es posible la aplicación de la *regla de L'Hôpital* para resolver el límite.

c) Aplicando la *regla de L'Hôpital* se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^{\operatorname{sen} x} - \log(1 + x^2)}{\tan x - \arctan x} = \stackrel{0/0}{\underset{\hat{H}}{=}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x e^{\operatorname{sen} x} + x^2 e^{\operatorname{sen} x} \cos x - \frac{2x}{1+x^2}}{1 + \tan^2 x - \frac{1}{1+x^2}} \stackrel{0/0}{\underset{\hat{H}}{=}} \dots$$

Claramente el nuevo límite tiene la misma indeterminación pero es más complicado que el anterior. Además como las funciones derivadas obtenidas son más complicadas que la función inicial, es evidente que si volvemos a aplicar la *regla de L'Hôpital* a esta nueva expresión, el nuevo límite será todavía más complicado de calcular, y así sucesivamente. Por tanto la *regla de L'Hôpital* no es una técnica válida en la resolución de este límite.

En el **Ejercicio 6.8, página 156** se verá una forma efectiva de calcular este límite usando la técnica de los *desarrollos de Taylor*⁴⁰.

³⁸Ver el **Teorema 5.12, página 136**.

³⁹Ver la **Sección 3.4.4, página 92**.

⁴⁰Ver el **Teorema 6.1, página 147**.

5.6.1. Aplicación de la Regla de L'Hôpital en otras Indeterminaciones

Como hemos visto⁴¹ la *regla de L'Hôpital* solo es válida en las indeterminaciones del tipo $0/0$ e ∞/∞ . Otros tipos de indeterminaciones se pueden transformar en indeterminaciones de estos dos tipos de la siguiente forma:

- Indeterminación $0 \cdot \infty$

$$f(x)g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{1/g(x)} \rightarrow \frac{0}{0} \\ \frac{g(x)}{1/f(x)} \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \end{cases}$$

- Indeterminación $\infty - \infty$

$$f(x) - g(x) = \frac{1/g(x) - 1/f(x)}{1/[f(x)g(x)]} \rightarrow \frac{0}{0}$$

Otra forma alternativa:

$$f(x) - g(x) = f(x) \left[1 - \frac{g(x)}{f(x)} \right] = g(x) \left[\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right]$$

Entonces en estos nuevos límites;

$$\text{si } \begin{cases} \lim \frac{f(x)}{g(x)} \neq 1 & \implies \lim = \pm\infty \\ \lim \frac{f(x)}{g(x)} = 1 & \implies \text{Ind } 0\infty \implies \text{Se puede aplicar la técnica anterior} \end{cases}$$

- Indeterminaciones 0^0 , ∞^0 y 1^∞

$$\lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{g(x) \ln f(x)}$$

De esta forma la indeterminación se transforma en alguna del caso anterior. Notar que en el caso 1^∞ si $f(x) \rightarrow 1$ entonces $\ln f(x) \sim f(x) - 1$.

En muchos límites complicados la aplicación de estas técnicas generan límites más complicados todavía, por lo que no resulta útil la aplicación de la regla de L'Hôpital.

Ejercicio 5.18. Calcular, en caso de ser posible, los siguientes límites de funciones usando la regla de L'Hôpital.

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \log x$, $(n > 0)$

b) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sen x)^{\tan^2 x}$

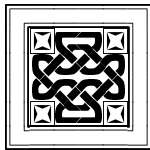
a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \log x \stackrel{0\infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{x^{-n}} \stackrel{\infty/\infty}{\underset{H}{=}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-nx^{-n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{nx^{-n}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^n}{n} = \boxed{0}$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sen x)^{\tan^2 x} &\stackrel{1^\infty}{=} \exp \left[\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\tan^2 x)(\log \sen x) \right] = \exp \left[\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\tan^2 x)(\sen x - 1) \right] = \\ &= \exp \left[\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sen x - 1}{\cos^2 x} \underbrace{\sen^2 x}_1 \right] = \exp \left[\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sen x - 1}{\cos^2 x} \right] \stackrel{0/0}{\underset{H}{=}} \exp \left[\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{-2 \cos x \sen x} \right] = \\ &= \exp \left[\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1}{-2 \sen x} \right] = \boxed{e^{-1/2}} \end{aligned}$$

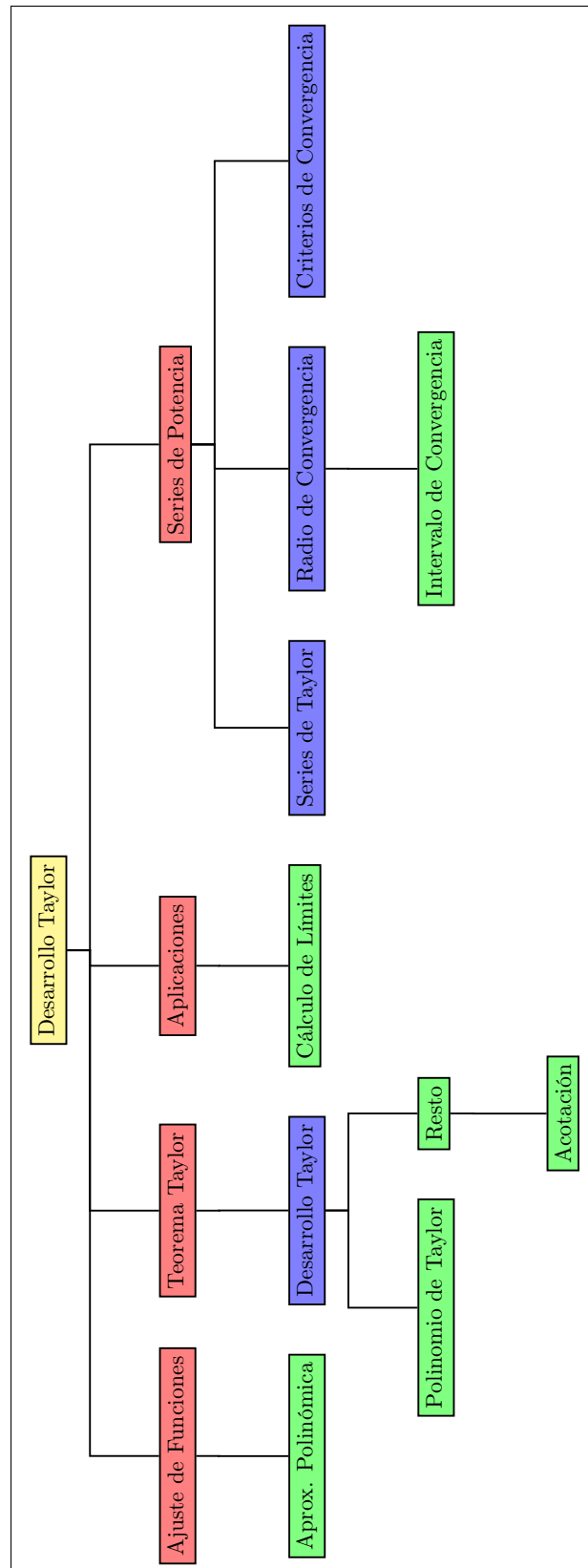
⁴¹Ver el Teorema 5.13, página 136.



Desarrollos de Taylor

Contenido

6.1	Introducción: Ajuste de Funciones por Polinomios	143
6.2	Aproximación Polinómica de Funciones	145
6.2.1	Recordatorio: Notación de Landau	145
6.2.2	Aproximación Polinómica de una Función	145
6.3	Teorema de Taylor	147
6.3.1	Resto del Polinomio de Taylor	148
6.3.2	Desarrollo de McLaurin	149
6.3.3	Desarrollo de Taylor de un Polinomio	149
6.3.4	Operaciones con Desarrollos de Taylor	150
6.4	Acotación del Resto	152
6.5	Aplicación de los Desarrollos de Taylor en el Cálculo de Límites de Funciones	156
6.5.1	Indeterminación $0/0$	156
6.5.2	Indeterminación ∞/∞	158
6.5.3	Indeterminación $0 \cdot \infty$	160
6.5.4	Indeterminación $\infty - \infty$	161
6.5.5	Indeterminación 1^∞	162
6.5.6	Indeterminaciones 0^0 e ∞^0	163



6.1. Introducción: Ajuste de Funciones por Polinomios

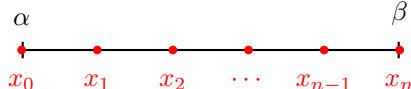
Un *polinomio*¹ de grado n es una función $P_n(x)$ de la forma:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad ; \quad a_i \in \mathbb{R}$$

con las siguientes características:

- Son funciones simples.
- Fácilmente derivables e integrables.
- Son de *clase*² \mathcal{C}^∞ , es decir, infinitamente derivables y todas sus funciones derivadas continuas.

Debido a las buenas propiedades de los polinomios, resulta interesante poder aproximar cualquier función $f(x)$, por complicada que sea, mediante polinomios de grado n en un determinado intervalo $[\alpha, \beta]$ del dominio de la función. Para encontrar este polinomio debemos conocer los coeficientes a_0, a_1 , etc. que lo define. Una forma sencilla de obtenerlos sería tomar $n + 1$ valores cualquiera $x_i \in [\alpha, \beta]$ de forma que se cumpla:



$$\left\{ \begin{array}{l} P_n(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n = f(x_0) \\ P_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_nx_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ P_n(x_n) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_nx_n^n = f(x_n) \end{array} \right.$$

Esto da lugar a un sistema lineal de $n + 1$ ecuaciones con $n + 1$ incógnitas a_i , que al resolverlo se obtiene el polinomio buscado.

Ejemplo 6.1. Aproximación polinómica de la función $f(x) = \text{sen } x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Vamos a calcular algunos polinomios de diferentes grados n que aproximen a $f(x)$ en el intervalo dado. Para cada uno de ellos tomamos $n + 1$ puntos sencillos del intervalo, de forma:

- $n = 0$: $P_0(x) = a_0$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = \pi : a_0 = f(\pi) = \text{sen}(\pi) = 0 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} a_0 = 0 \end{array} \right\} \implies \boxed{P_0(x) = 0}$$

En este caso corresponde con una recta horizontal que pasa por el punto elegido $(0, 0)$.

- $n = 1$: $P_1(x) = a_0 + a_1x$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = \frac{\pi}{2} : a_0 + a_1 \frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ x_1 = \frac{3\pi}{2} : a_0 + a_1 \frac{3\pi}{2} = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} a_0 = 2 \\ a_1 = -\frac{2}{\pi} \end{array} \right\} \implies \boxed{P_1(x) = 2 - \frac{2}{\pi}x}$$

El resultado corresponde con una recta de pendiente negativa que pasa por los dos puntos escogidos.

- $n = 2$: $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0 : a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 = f(0) = \text{sen}(0) = 0 \\ x_1 = \frac{\pi}{2} : a_0 + a_1 \frac{\pi}{2} + a_2 \frac{\pi^2}{4} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ x_2 = \pi : a_0 + a_1 \pi + a_2 \pi^2 = f(\pi) = \text{sen}(\pi) = 0 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_1 = 4/\pi \\ a_2 = -4/\pi^2 \end{array} \right.$$

$$\boxed{P_2(x) = \frac{4}{\pi}x - \frac{4}{\pi^2}x^2}$$

El resultado corresponde con una parábola que pasa por los tres puntos escogidos.

¹Ver la Sección ??, página ?? y la Sección 2.8.1, página 58.

²Ver la Definición 5.11, página 128.

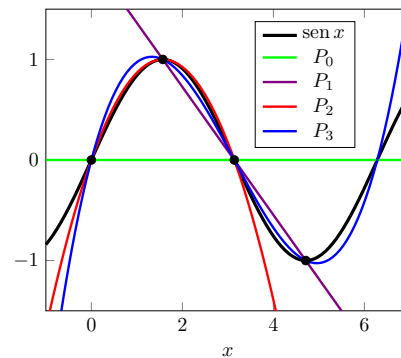
$$\bullet n = 3 : P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0 : a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = f(0) = \text{sen}(0) = 0 \\ x_1 = \frac{\pi}{2} : a_0 + a_1 \frac{\pi}{2} + a_2 \frac{\pi^2}{4} + a_3 \frac{\pi^3}{8} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ x_2 = \pi : a_0 + a_1 \pi + a_2 \pi^2 + a_3 \pi^3 = f(\pi) = \text{sen}(\pi) = 0 \\ x_3 = \frac{3\pi}{2} : a_0 + a_1 \frac{3\pi}{2} + a_2 \frac{9\pi^2}{4} + a_3 \frac{27\pi^3}{8} = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 16/(3\pi) \\ a_2 = -8/\pi^2 \\ a_3 = 8/(3\pi^3) \end{cases}$$

$$P_3(x) = \frac{16}{3\pi}x - \frac{8}{\pi^2}x^2 + \frac{8}{3\pi^3}x^3$$

El resultado corresponde con un polinomio cúbico que pasa por los cuatro puntos escogidos.

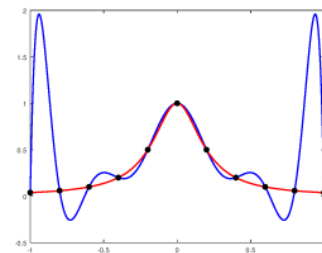
En esta gráfica se representa la función que queremos aproximar $f(x) = \text{sen } x$ (en negro) y los cuatro polinomios obtenidos a través de los ajustes realizados. Mediante círculos negros se indican los puntos utilizados en los distintos ajustes.



Como vemos, podemos obtener relativamente fácil³, resolviendo sistemas lineales de orden n , polinomios que aproximen, en principio, a cualquier función. Pero esto tiene varios problemas:

- Podemos elegir los puntos que queramos del dominio, pero las curvas resultantes ajustarán mejor o peor en función de la elección de estos puntos.
- Al aumentar el grado del polinomio aproximante, en principio, aumenta la precisión del ajuste. Sin embargo los polinomios de orden alto (aproximadamente a partir de 10) tienen oscilaciones de amplitud creciente⁴, de forma que para orden alto el polinomio aproximante puede no parecerse mucho a la función a aproximar.

En la siguiente figura se muestra el polinomio (azul) obtenido al aproximar una función (rojo) tomando diez puntos (negro) de la misma. Como vemos el polinomio presenta fuertes oscilaciones en los extremos que no ajustan bien a la función.



En este tema vamos a ver un método para determinar el *mejor polinomio* de cada grado que ajusta a una función en un entorno de un punto cualquiera del dominio de una función.

³Una forma alternativa de obtener un polinomio que aproxima a una determinada función es mediante la técnica de los *mínimos cuadrados*. En este caso el polinomio no necesariamente pasará exactamente por los puntos de la función, si no que se obtiene el polinomio de un grado determinado que mejor ajusta a los puntos dados. Ver por ejemplo "Clases de Álgebra Lineal para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 367.

⁴Conocido con el nombre de *fenómeno Runge*.

6.2. Aproximación Polinómica de Funciones

6.2.1. Recordatorio: Notación de Landau

Recordamos la **notación de Landau** que vimos en la [Sección 3.4.2, página 86](#) y que vamos a utilizar aquí. Se dice que una función $f(x)$ es de orden *o pequeña* y *O grande* de otra función $g(x)$ si:

- $f(x) = o[g(x)]$ cuando $x \rightarrow a \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \implies f(x) \ll g(x)$ cerca de $x = a$
- $f(x) = O[g(x)]$ cuando $x \rightarrow a \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in \mathbb{R} \implies f(x)$ y $g(x)$ mismo orden cerca de $x = a$

En este tema estamos sobre todo interesados en la operación *o pequeña*. Recordamos⁵ las operaciones con ellas, (cuando $x \rightarrow a$).

- $f = o(1) \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$
- $o(f) \pm o(f) = o(f)$
- $c \cdot o(f) = o(cf) = o(f)$
- $f \cdot o(g) = o(fg)$
- $o(f) \cdot o(g) = o(fg)$
- $\frac{o(f)}{o(g)} = o\left(\frac{f}{g}\right)$, $g \neq 0$
- $o(o(f)) = o(f)$

6.2.2. Aproximación Polinómica de una Función

Sea una función $f(x)$ suficientemente derivable en un entorno de un punto $x = a$. Estamos interesados en determinar el polinomio de grado n que mejor aproxima a la función en las cercanías de x_0 , es decir en un entorno $E(x_0)$.

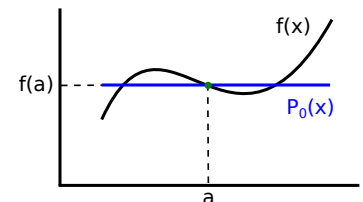
- **Aproximación Polinómica de Orden Cero**

Estamos interesados en encontrar el polinomio de grado cero $P_0(x) = c_0$, correspondiente a un valor constante c_0 , que mejor aproxima a la función en las cercanías de $x = a$.

$$f(x) \approx P_0(x) = c_0 \text{ cuando } x \rightarrow a$$

Un polinomio de grado cero $P_0(x) = c_0$ viene representado por una recta horizontal. Como el polinomio que buscamos debe tener el valor de $f(a)$ en el punto $x = a$, por tanto la mejor aproximación en este caso será:

$$P_0(x) = f(a)$$



El error cometido al aproximar la función $f(x)$ mediante este $P_0(x)$, es decir la diferencia entre uno y otro, la podemos expresar de la siguiente forma:

$$f(x) = f(a) + o[(x-a)^0] = f(a) + o(1) \implies \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = 0$$

Por tanto la aproximación de una función en un punto $x = a$ a través de un polinomio de grado cero tiene un error de orden cero, en las cercanías de dicho punto.

⁵Ver la [Sección 3.4.2, página 87](#).

• Aproximación Polinómica de Orden Uno

Queremos obtener ahora una mejor aproximación y por ello buscamos el polinomio de grado uno $P_1(x) = c_0 + c_1x$, (correspondiente a una recta), que mejor aproxime a la función en las cercanías del punto $x = a$. El valor c_0 fue determinado en el caso anterior $c_0 = f(a)$ y como el polinomio debe pasar por el punto $(a, f(a))$ dicho polinomio debe tener la forma:

$$P_1(x) = f(a) + c_1(x - a)$$

Vamos a buscar el valor del coeficiente c_1 de forma que la aproximación tenga orden uno, para ello se tiene que cumplir:

$$f(x) = f(a) + c_1(x - a) + o[(x - a)] \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - c_1(x - a)}{x - a} = 0$$

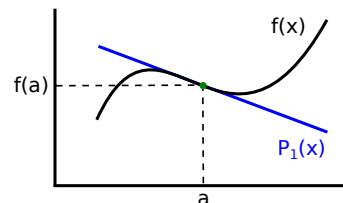
Simplificando y despejando el valor de c_1 se obtiene:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - c_1 = 0 \quad ; \quad c_1 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

comprobando que c_1 corresponde con la definición de *derivada*⁶ de $f(x)$ en el punto $x = a$. Y por tanto el polinomio buscado es:

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

En este caso el polinomio $P_1(x)$ además de pasar por el punto $(a, f(a))$ como en el caso anterior, vemos que la misma pendiente que la función en el punto $x = a$ y comprobamos por tanto que corresponde con la *ecuación de la recta tangente*⁷ a la función en dicho punto, es decir, la recta que mejor aproxima a la función en las cercanías de dicho punto.



• Aproximación Polinómica de Orden Dos

Buscamos ahora el polinomio de grado dos $P_2(x)$ que mejor aproxima a $f(x)$ en las cercanías de $x = a$, sabiendo que tiene que pasar por el punto $(a, f(a))$ y tener por primera derivada en $x = a$ el valor de $f'(a)$ y por tanto debe tener la forma:

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + c_2(x - a)^2$$

Al igual que antes, buscamos un coeficiente c_2 de forma que la aproximación entre el polinomio y la función en las cercanías de $x = a$ sea de orden dos, y por tanto:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + c_2(x - a)^2 + o[(x - a)^2]$$

De igual forma que antes, esto significa que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) - c_2(x - a)^2}{(x - a)^2} = 0 \quad ; \quad c_2 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{(x - a)^2}$$

Claramente este límite es una indeterminación del tipo $0/0$ y podemos aplicar la *regla de L'Hôpital*⁸ si f es dos veces *derivable*⁹:

$$c_2 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{(x - a)^2} \stackrel{0/0}{\underset{H}{=}} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{2(x - a)} = \frac{1}{2} f''(a)$$

comprobando que c_2 corresponde con la definición de derivada de la derivada de $f(x)$ en $x = a$, es decir de la derivada segunda $f''(a)$ dividida por 2. Y por tanto el polinomio buscado es:

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2} f''(a)(x - a)^2$$

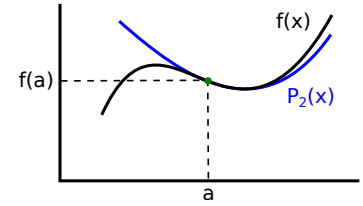
⁶Ver la [Definición 5.1](#), página 111.

⁷Ver la [Sección 5.1.3](#), página 112.

⁸Ver la [Sección 5.6](#), página 136.

⁹Es decir de clase $f \in C^2$, ver la [Definición 5.11](#), página 128.

En este caso el polinomio $P_2(x)$ además de pasar por el punto $(a, f(a))$ y tener la misma pendiente que la función en el punto $x = a$, tiene la misma *concavidad*¹⁰ que la función en dicho punto y por tanto corresponde con la parábola que mejor aproxima a la función en las cercanías de dicho punto.



• Aproximación Polinómica de Orden Tres

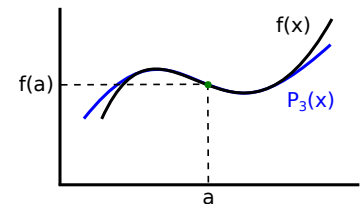
Si continuamos de forma análoga con este proceso, podemos encontrar que el polinomio de grado tres que mejor aproxima a $f(x)$ en las cercanías de $x = a$ es¹¹:

$$P_3(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3$$

con un error de orden tres, de forma que:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + o[(x - a)^3]$$

En este caso el polinomio $P_3(x)$ corresponde con la función cúbica que mejor aproxima a $f(x)$ en las cercanías del punto. Como podemos apreciar en la figura, en principio, a medida que aumenta el orden de la aproximación (y con él el grado del polinomio aproximante), el entorno de $x = a$ donde la función y el polinomio se parecen aumenta de tamaño.



El siguiente teorema generaliza los resultados aquí obtenidos a un polinomio de grado n .

6.3. Teorema de Taylor

Teorema 6.1. Desarrollo de Taylor

Sea una función $f(x)$ n veces derivable en $x = a$. Entonces f admite un **Desarrollo de Taylor** de orden n en torno a $x = a$ de la siguiente forma:

$$f(x) = \underbrace{P_{n,a}(x)}_{\text{Polinomio}} + \underbrace{R_{n,a}(x)}_{\text{Resto}} \quad ; \quad x \in E(a, r)$$

Desarrollo de Taylor

donde:

- $P_{n,a}(x)$: es un polinomio de orden n denominado **Polinomio de Taylor de orden n en torno a $x = a$** , y viene dado por:

$$P_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k$$

- $R_{n,a}(x) = o[(x - a)^n] = O[(x - a)^{n+1}]$: es el **Resto del desarrollo de Taylor**, verificando:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x - a)^n} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x - a)^{n+1}} = k \in \mathbb{R}$$

- $E(a, r)$: entorno de centro a y radio r (*radio de convergencia*¹²) donde se verifica el desarrollo de Taylor de $f(x)$, denominado **zona o región de convergencia**.

¹⁰Ver la **Definición 7.1**, página 168.

¹¹El coeficiente c_3 corresponde en este caso con la derivada de la segunda derivada, es decir la derivada tercera, de la función en $x = a$ dividida por $3! = 6$.

¹²Ver la **Sección 9.6.3**, página 245.

El *polinomio de Taylor de orden n* de una función en torno a un punto $x = a$ es el polinomio de grado n que mejor aproxima a la función en un determinado entorno de a , teniendo la aproximación un error de orden n .

Nota 6.1. La estrategia seguida para la determinación del *polinomio de Taylor* de una función, se basa en encontrar un polinomio que tenga las mismas características¹³ que la función en un punto (aproximación puntual), a diferencia de lo realizado en la **Sección 6.2.2, página 145** donde se intentaba que el polinomio resultante pasara por una serie de puntos de la función (aproximación local). Esta nueva forma de hacerlo evita los problemas que se describieron allí, entre ellas la elección de puntos y las altas oscilaciones. Por contra, el *polinomio de Taylor* solo aproxima a la función en un entorno de un punto, $E(a, r)$, pudiendo ser esa zona más o menos grande en base a las características de la función, (ver siguiente sección).

6.3.1. Resto del Polinomio de Taylor

Definición 6.1. Resto de Lagrange

El *resto* corresponde al *error* cometido al aproximar la función mediante su *polinomio de Taylor* en la *región de convergencia* $E(a, r)$. Hay varias formas de expresar el *resto*, la más útil es la conocida con el nombre de **resto de Lagrange**:

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad ; \quad \begin{cases} c \in (a, x) & \text{si } x > a \\ c \in (x, a) & \text{si } x < a \end{cases} \quad ; \quad x \in E(a, r)$$

donde c es un valor indeterminado comprendido entre el punto del desarrollo a y el valor x donde se evalúa la función¹⁴.

Ejercicio 6.1. Dada la función:

$$f(x) = \ln(1+x)$$

calcular su desarrollo de Taylor de orden 3 en torno al punto $x = 2$ y encontrar una expresión del error.

El desarrollo de Taylor de tercer orden en torno al punto $x = 2$ de una función viene dada por:

$$f(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + R_{3,2}(x)$$

Particularizamos esta expresión a nuestra función $f(x)$:

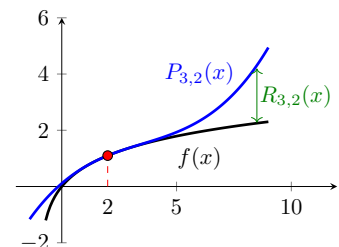
- $f(x) = \ln(1+x) \implies f(2) = \ln(1+2) = \ln 3$
- $f'(x) = \frac{1}{1+x} \implies f'(2) = \frac{1}{3}$
- $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \implies f''(2) = -\frac{1}{3^2}$
- $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \implies f'''(2) = \frac{2}{3^3}$

$$f^{iv}(x) = -\frac{2!}{(1+x)^4}$$

$$f(x) = P_{3,2}(x) + R_{3,2}(x) = \ln 3 + \frac{1}{3}(x-2) - \frac{1}{3 \cdot 2!}(x-2)^2 + \frac{2}{3 \cdot 3!}(x-2)^3 - \frac{2!}{(1+c)^4 4!}(x-2)^4 \quad \begin{cases} c \in (2, x) \\ c \in (x, 2) \end{cases}$$

En la siguiente gráfica se muestra la función $f(x)$ junto con el polinomio de Taylor $P_{3,2}(x)$ en torno al punto de desarrollo $x = 2$ y el resto correspondiente $R_{3,2}(x)$, que determina el error cometido al usar el polinomio en lugar de la función en un punto determinado x .

Notar que el valor $c \in (2, x)$ es desconocido¹⁵ y como mucho se puede estimar cual puede ser su valor máximo¹⁶.



¹³Valor de la función y de las derivadas n -ésimas en dicho punto.

¹⁴Tener en cuenta que el *polinomio de Taylor* siempre es exacto (error cero) en el punto de desarrollo $x = a$.

6.3.2. Desarrollo de McLaurin

Definición 6.2. Desarrollo de McLaurin

Al desarrollo de Taylor de una función en torno al punto $x = 0$ se le denomina **Desarrollo de McLaurin**.

Vamos a ver los *polinomios de McLaurin* de algunas funciones elementales¹⁷:

$$\bullet \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$$

$$\bullet e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad x \in \mathbb{R}$$

6.3.3. Desarrollo de Taylor de un Polinomio

El desarrollo de Taylor de orden mayor o igual que n de un polinomio de grado n corresponde con el mismo polinomio, reorganizado en potencias de $(x - a)$ donde a es el punto de desarrollo.

Ejercicio 6.2. Encontrar los polinomios de Taylor de orden 2 y 5 de la siguiente función en torno al punto $x = -1$.

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x - 5$$

La función $f(x)$ se trata de un polinomio de grado 4, por tanto sus desarrollos de Taylor de orden mayor o igual que 4 en torno a cualquier punto corresponden con el mismo polinomio pero reorganizado en potencias distintas. Vamos a calcular los polinomios de Taylor pedidos:

$$\begin{cases} P_{2,-1} = f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 \\ P_{5,-1} = f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + \frac{f^{iv}(-1)}{4!}(x+1)^4 + \frac{f^v(-1)}{5!}(x+1)^5 \end{cases}$$

Calculamos cada uno de estos valores:

- $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x - 5 \implies f(-1) = -4$
- $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 6x + 1 \implies f'(-1) = -3$
- $f''(x) = 12x^2 + 12x + 6 \implies f''(-1) = 6$
- $f'''(x) = 24x + 12 \implies f'''(-1) = -12$
- $f^{iv}(x) = 24 \implies f^{iv}(-1) = 24$
- $f^v(x) = 0 \implies f^v(-1) = 0$

¹⁵Cuando el polinomio de Taylor $P_{3,2}(x)$ se evalúe por ejemplo en $x = 5$ el valor estará comprendido en el intervalo $c \in (2, 5)$.

¹⁶Ver la Sección 6.4, página 152.

¹⁷Los polinomios de Taylor de orden infinito, como los que se muestran aquí, se denominan series de Taylor (McLaurin) y se verán en la Sección 9.6, página 242.

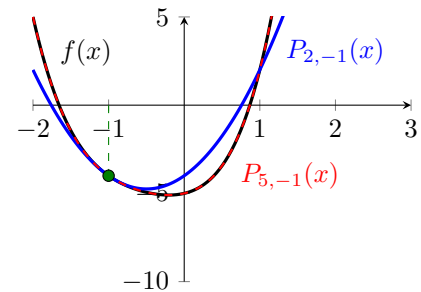
Notar que al ser un polinomio de grado 4, todas las derivadas de orden mayor que 4 va a ser siempre cero. El resultado pedido es:

$$\begin{cases} P_{2,-1}(x) = -4 - 3(x+1) + 3(x+1)^2 \\ P_{5,-1}(x) = -4 - 3(x+1) + 3(x+1)^2 - 2(x+1)^3 + (x+1)^4 \end{cases}$$

Notar que los tres primeros términos de ambos polinomios de Taylor coinciden. Además, todos los polinomios de orden mayor que 4 serán iguales al polinomio de Taylor de orden 4, siendo todos estos polinomios exactamente iguales a la función dada pero reordenada de forma distinta. Es decir que si desarrollamos las potencias del polinomio de Taylor de orden 5 obtenido se obtiene $f(x)$, como se comprueba a continuación:

$$\begin{aligned} P_{5,-1}(x) &= -4 - 3(x+1) + 3(x+1)^2 - 2(x+1)^3 + 2(x+1)^4 \\ &= -4 - 3(x+1) + 3(x^2 + 1 + 2x) - 2(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) \\ &= -5 + x + 3x^2 + 2x^3 + x^4 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

En la siguiente gráfica se muestra la función $f(x)$ junto con los polinomios de Taylor $P_{2,-1}(x)$ y $P_{5,-1}(x)$ en torno al punto de desarrollo $x = -1$ (punto verde). Podemos comprobar como el $P_{5,-1}(x)$ y $f(x)$ coinciden, al ser la misma función.



6.3.4. Operaciones con Desarrollos de Taylor

Para obtener el *desarrollo de Taylor* de una función $f(x)$ se puede hacer de dos formas:

- Obtener las correspondientes derivadas de la función, como hemos hecho en los casos anteriores.
- Conocidos los *desarrollos de Taylor* de las distintas funciones elementales de las que está formada $f(x)$, del orden y en punto apropiado, se puede operar con ellos para obtener el *desarrollo de Taylor* requerido.

Vamos a ver las propiedades para poder operar con los desarrollos de Taylor. Sea una función $F(x)$ de la cual queremos obtener su desarrollo de Taylor de orden n en torno a un punto $x = a$. Si $F(x)$ está formada por distintas operaciones de dos funciones más sencillas $f(x)$ y $g(x)$ cuyos desarrollos de Taylor de orden n en torno al punto $x = a$ son:

$$f(x) = p(x) + o[(x-a)^n] \quad ; \quad g(x) = q(x) + o[(x-a)^n]$$

Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

$$1. \alpha f + \beta g = \alpha p + \beta q + o[(x-a)^n] \quad , \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$2. f \cdot g = p \cdot q + o[(x-a)^n]$$

$$3. \frac{f}{g} = \frac{p}{q} + o[(x-a)^n]$$

$$4. f \circ g = p \circ q + o[(x-a)^n] \quad \text{Nota: en este caso se desarrolla } g(x) \text{ en } x = a \text{ y } f(y) \text{ en } y = g(a).$$

$$5. f' = p' + o[(x-a)^{n-1}]$$

$$6. \int f = \int p + o[(x-a)^{n+1}]$$

Ejercicio 6.3. Determinar el desarrollo de McLaurin de orden 5 de la siguiente función.

$$f(x) = \cos(x + x^2)$$

Teniendo en cuenta el desarrollo de McLaurin de la función coseno¹⁸:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

y recordando que el desarrollo de McLaurin de un polinomio corresponde con el mismo polinomio se tiene, por la propiedad 4 de las operaciones con desarrollos de Taylor¹⁹:

$$\begin{aligned} \cos(x+x^2) &= 1 - \frac{1}{2!}(x+x^2)^2 + \frac{1}{4!}(x+x^2)^4 + o(x^5) = 1 - \frac{1}{2}(x^2+2x^3+x^4) + \frac{1}{24}(x^4+4x^5+6x^6+4x^7+x^8) + o(x^5) = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{11}{24}x^4 + \frac{x^5}{6} + \underbrace{\frac{1}{24}(6x^6+4x^7+x^8)}_{o(x^5)} + o(x^5) = \boxed{1 - \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{11}{24}x^4 + \frac{x^5}{6} + o(x^5)} \end{aligned}$$

Podemos comprobar este resultado calculando su desarrollo de forma tradicional:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{iv}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^v(0)}{5!}x^5 + o(x^5)$$

- $f(x) = \cos(x + x^2) \implies \boxed{f(0) = 1}$
- $f'(x) = -(1 + 2x) \operatorname{sen}(x + x^2) \implies \boxed{f'(0) = 0}$
- $f''(x) = -2 \operatorname{sen}(x + x^2) - (1 + 2x)^2 \cos(x + x^2) \implies \boxed{f''(0) = -1}$
- $f'''(x) = -2(1 + 2x) \cos(x + x^2) - 4(1 + 2x) \cos(x + x^2) + (1 + 2x)^3 \operatorname{sen}(x + x^2) =$
 $= -6(1 + 2x) \cos(x + x^2) + (1 + 2x)^3 \operatorname{sen}(x + x^2) \implies \boxed{f'''(0) = -6}$
- $f^{iv}(x) = -12 \cos(x + x^2) + 6(1 + 2x)^2 \operatorname{sen}(x + x^2) + 6(1 + 2x)^2 \operatorname{sen}(x + x^2) + (1 + 2x)^4 \cos(x + x^2) =$
 $= -12 \cos(x + x^2) + 12(1 + 2x)^2 \operatorname{sen}(x + x^2) + (1 + 2x)^4 \cos(x + x^2) \implies \boxed{f^{iv}(0) = -11}$
- $f^v(x) = 12(1 + 2x) \operatorname{sen}(x + x^2) + 48(1 + 2x) \operatorname{sen}(x + x^2) + 12(1 + 2x)^3 \cos(x + x^2) +$
 $+ 8(1 + 2x)^3 \cos(x + x^2) - (1 + 2x)^5 \operatorname{sen}(x + x^2) =$
 $= 60(1 + 2x) \operatorname{sen}(x + x^2) + 20(1 + 2x) \cos(x + x^2) - (1 + 2x)^5 \operatorname{sen}(x + x^2) \implies \boxed{f^v(0) = 20}$

Por tanto:

$$\cos(x + x^2) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{6}{6}x^3 - \frac{11}{24}x^4 + \frac{20}{120}x^5 + o(x^5) = \boxed{1 - \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{11}{24}x^4 + \frac{x^5}{6} + o(x^5)}$$

Obteniendo el mismo resultado anterior. Notar que para esta función el trabajo necesario para el cálculo del desarrollo es significativamente menor, si conocemos los desarrollos de McLaurin de las funciones elementales correspondientes.

¹⁸Ver la Sección 6.3.2, página 149.

¹⁹Ver la Sección 6.3.4, página 150.

Ejercicio 6.4. Determinar el desarrollo de McLaurin de orden 3 de la siguiente función.

$$f(x) = f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x) \cos(x)}{e^x}$$

Teniendo en cuenta los desarrollos de McLaurin de las funciones seno, coseno y exponencial:

- $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$
- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

Se tiene:

$$\frac{\operatorname{sen}(x) \cos(x)}{e^x} = \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right)}{1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)} = \frac{x - \frac{x^3}{2!} - \frac{2}{3!}x^3 + o(x^3)}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

donde al operar nos hemos quedado con el resultado de los monomios hasta orden 3, despreciando el resto (ya que se encuentran representados en el término $o(x^3)$). Dividiendo estos dos polinomios se tiene:

$$\begin{array}{r} x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3) \quad o(x^4) \\ -x - x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4) \\ \hline -x^2 - \frac{7}{6}x^3 + o(x^3) \\ + x^2 + x^3 + o(x^4) \\ \hline -\frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\ + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \\ \hline + o(x^3) \\ - o(x^3) \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\ x - x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \end{array} \right.$$

Por tanto finalmente:

$$\frac{\operatorname{sen}(x) \cos(x)}{e^x} = x - x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

6.4. Acotación del Resto

Como hemos visto²⁰ el error que se comete al usar el *polinomio de Taylor* de una función en un punto $x = b$ (punto de evaluación) distinto del punto de desarrollo $x = a$, se puede *estimar* a través del *resto de Lagrange*²¹, donde aparece una valor $c \in (a, b)$ desconocido. Desde un punto de vista práctico lo que se hace para **acotar** el error cometido al usar el *polinomio de Taylor* es **maximizar**²² (en valor absoluto) el valor del *resto de Lagrange* en el intervalo (a, b) .

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{R_{n,x}(c)}$$

$$\text{Error}(x) = R_{n,x}(c) \quad \Rightarrow$$

$$\text{Error Max} = \left| \frac{f_{\max}^{(n+1)}}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \right|$$

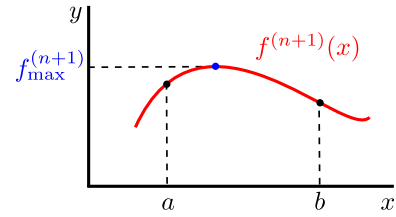
²⁰Ver la Sección 6.3.1, página 148.

²¹Ver la Definición 6.1, página 148.

²²La acotación se hace buscando un valor máximo del error e de forma que el valor real de la función sera $f \in (p-e, p+e)$ donde p es el valor de la aproximación por Taylor.

donde:

$$f_{\max}^{(n+1)} = \text{máx} \left[f^{(n+1)}(x) \right] \quad \forall x \in (a, b)$$



La acotación del resto además de maximizar el error cometido, permite determinar el número de términos que necesitamos de un *desarrollo de Taylor* (es decir el orden del desarrollo) para obtener una precisión dada en la aproximación.

Ejercicio 6.5. Dada la siguiente función:

$$f(x) = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

- Encontrar el polinomio de Taylor de $f(x)$ de orden 3 en torno al punto $x = 0$.
- Usando el resultado obtenido en a) aproximar el valor de $\ln(2)$.
- Usando el resto de Lagrange, acotar el error de la aproximación obtenida en b).
- Comprobar la validez del apartado c) determinando el error real cometido en el apartado b).

$$\text{a)} \quad P_{4,0} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

$$\bullet f(x) = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \implies f(0) = \ln(1) = 0$$

$$\bullet f'(x) = \frac{1-x}{1+x} \frac{1-x+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{1-x^2} \implies f'(0) = 2$$

$$\bullet f''(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2} \implies f''(0) = 0$$

$$\bullet f'''(x) = \frac{4(1-x^2)^2 + 16x^2(1-x^2)}{(1-x^2)^4} = \frac{4+12x^2}{(1-x^2)^3} \implies f'''(0) = 4$$

$$P_{3,0}(x) = 2x + \frac{4}{3!}x^3 = 2x + \frac{2}{3}x^3$$

- b) Primero determinamos el valor de x necesario para obtener $\ln(2)$ a través de $f(x)$.

$$\frac{1+x}{1-x} = 2 \quad ; \quad 1+x = 2-2x \quad ; \quad 3x = 1 \implies x = \frac{1}{3}$$

Por tanto:

$$\ln(2) \approx P_{3,0}(1/3) = 2 \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{1}{27} = \frac{56}{81} \approx 0.6913580$$

- c)

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{3,0}(x) = \frac{f^{iv}(c)}{4!}x^4 \quad , \quad c \in (0, 1/3) \\ f^{iv}(x) = \frac{24x(1-x^2)^3 - (4+12x^2)3(1-x^2)2(-2x)}{(1-x^2)^6} = \frac{48+48x^3}{(1-x^2)^4} \end{array} \right.$$

El error máximo de la aproximación será:

$$\text{Error max} = \left| \frac{f_{\max}^{iv}}{4!} \left(\frac{1}{3} \right)^3 \right|$$

Tenemos que encontrar el valor máximo de $f^{iv}(x)$ en el intervalo $(0, 3)$. Claramente esta función es creciente en $(0, 1)$ y por tanto:

$$f_{\max}^{iv} = f^{iv}(1/3) = \frac{48 + 48(1/3)^3}{(1 - (1/3)^2)^4} = \frac{3645}{128} \approx 28.5$$

Entonces:

$$\text{Error max} = \left| \frac{f_{\max}^{iv}}{4!} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \right| = \left| \frac{28.5}{24} \frac{1}{27} \right| \approx \boxed{0.04 = 4 \times 10^{-2}}$$

d) Con una calculadora hallamos el valor de $\ln(2)$ y con él determinamos el error real de la aproximación calculada en el apartado b):

$$\ln(2) = 0.693147... \implies \text{Error} = |0.6913580 - 0.693147...| = 0.001789... \approx 2 \times 10^{-3}$$

que como vemos es menor que el máximo error calculado en c) que era 4×10^{-2} .

Ejercicio 6.6. Encontrar el orden del polinomio de McLaurin de la función $\ln(1+x)$ que tenemos que usar para aproximar el valor de $\ln(2)$ con un error inferior a 10^{-6} .

Determinamos el polinomio de Taylor en torno a l origen de la función:

$$P_{n,0} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

- $f(x) = \ln(1+x) \implies f(0) = \ln(1) = 0$
- $f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \implies f'(0) = 1$
- $f''(x) = -(1+x)^{-2} \implies f''(0) = -1$
- $f'''(x) = 2(1+x)^{-3} \implies f'''(0) = 2$
- $f^{iv}(x) = -6(1+x)^{-4} \implies f^{iv}(0) = -6$
- \vdots
- $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n} \implies f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$

Sabemos que el error del polinomio viene dado por el resto:

$$R_{n,0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}(-1)^{n+2}(n!)(1+c)^{-n-1}x^n = \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)(1+c)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}}$$

Cuando evaluamos el polinomio en $x = 1$ (para obtener $\ln(2)$) entonces $c \in (0, 1)$. El valor máximo de este error en ese intervalo está claro que será para $c = 0$, por tanto:

$$\text{Error max} = \left| \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+0)^{n+1}} \right| = \frac{1}{n+1}$$

Entonces queremos encontrar el orden n que haga que el error máximo sea menor que 10^{-6} y por tanto:

$$\frac{1}{n+1} < 10^{-6} \quad ; \quad n+1 > \frac{1}{10^{-6}} = 10^6 \implies \boxed{n > 999999}$$

Por tanto al menos tenemos que tomar un millón de términos del desarrollo de esta función para aproximar con la precisión pedida el valor de $\ln(2)$.

Como conclusión, en este caso, podemos afirmar que no es práctico el usar esta función para estimar una valor adecuado de $\ln(2)$.

Ejercicio 6.7. Se quiere obtener un valor aproximado de la siguiente *integral definida*²³:

$$\int_0^{1/2} \cos(x^2) dx$$

a través de polinomios de Taylor.

- a) Usando el desarrollo de McLaurin de la función $\cos(x)$, calcular el desarrollo de McLaurin de $\cos(x^2)$.
- b) Determinar el desarrollo de McLaurin de la función: $f(x) = \int_0^x \cos(x^2) dx$
- c) Usando el resultado del apartado b) encontrar un valor aproximado de la integral definida con un error inferior a 10^{-6} .

- a) Sabemos²⁴ que el desarrollo de McLaurin de la función coseno es:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

y teniendo en cuenta las operaciones entre desarrollos de Taylor se tiene:

$$\cos(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + \dots$$

- b) Teniendo en cuenta las operaciones entre desarrollos de Taylor se tiene:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \cos(x^2) dx = \int_0^x \left(1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + \dots \right) dx = x - \frac{x^5}{5 \cdot 2!} + \frac{x^9}{9 \cdot 3!} - \frac{x^{13}}{13 \cdot 6!} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!} \end{aligned}$$

- c) Para encontrar el valor de la integral deseada, basta con evaluar el desarrollo obtenido en b) en el punto $x = 1/2$. Se trata de una serie infinita convergente para valores $x \in (0, 1)$, por tanto vamos a determinar los primeros valores hasta encontrar uno que sea menor que el error pedido 10^{-6} .

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1/2)^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{5 \times 10^{-1}} - \underbrace{\frac{1}{320}}_{3 \times 10^{-3}} + \underbrace{\frac{1}{110592}}_{9 \times 10^{-6}} - \underbrace{\frac{1}{76677120}}_{1 \times 10^{-8} < 10^{-6}}$$

$\frac{274757}{552960} \approx 0.496884$

Por tanto:

$$\int_0^{1/2} \cos(x^2) dx \approx 0.496884$$

²³Ver la [Definición 10.1](#), página 252.

²⁴Ver la [Sección 6.3.2](#), página 149.

6.5. Aplicación de los Desarrollos de Taylor en el Cálculo de Límites de Funciones

Los *desarrollos de Taylor* representan una herramienta de cálculo muy efectiva en la determinación del valor de algunos límites de funciones. Sin embargo debido al elevado número de operaciones que en general es necesario realizar, se suele utilizar como última opción, prefiriéndose siempre que sea posible otros métodos como *L'Hôpital* y/o *infinitésimos equivalentes*.

Los *desarrollos de Taylor* se pueden utilizar, en principio, para la resolución de límites con todo tipo de indeterminaciones.

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \left\{ \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0 \right\}$$

Para poder aplicar este método es necesario que²⁵ $a \in \mathbb{R}$. También algunos límites²⁶ donde $a = \pm\infty$ se pueden resolver a través de desarrollos de Taylor, pero en este caso será necesario hacer previamente un cambio de variable de la siguiente forma:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} F(x) = \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{1}{x} \\ x \rightarrow \pm\infty \implies t \rightarrow 0 \end{array} \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} F(1/t)$$

Vamos a ver cómo aplicar este método en algunas indeterminaciones.

6.5.1. Indeterminación 0/0

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x-a)^p + o[(x-a)^p]}{\beta(x-a)^q + o[(x-a)^q]} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} (x-a)^{p-q} = \begin{cases} p = q \implies \frac{\alpha}{\beta} \\ p > q \implies 0 \\ p < q \implies \text{sign}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \infty \end{cases}$$

Ejercicio 6.8. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}[\tan(x)] - \arctan(x^2 + x)}{e^{\text{sen}(x^2)} - \cos(x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^{\text{sen } x} - \log(1 + x^2)}{\tan x - \arctan x}$

a) Claramente este límite genera una indeterminación del tipo 0/0:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}[\tan(x)] - \arctan(x^2 + x)}{e^{\text{sen}(x^2)} - \cos(x)} = \frac{0}{0} = ?$$

En este caso no se puede utilizar *infinitésimos equivalentes*, ya que no se cumple el *principio de sustitución* (ver el **Teorema 8.5, página 221**), ya que los términos están restando y no multiplicando o dividiendo. Podemos intentar usar la *regla de L'Hôpital*, pero a primera vista no parece que sea útil en este caso. Lo probamos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}[\tan(x)] - \arctan(x^2 + x)}{e^{\text{sen}(x^2)} - \cos(x)} \stackrel{0/0}{\underset{H}{=}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos[\tan(x)][1 + \tan^2(x)] - \frac{2x+1}{1+(x^2+x)^2}}{2x \cos(x^2) e^{\text{sen}(x^2)} + \text{sen}(x)} = \frac{0}{0} = ?$$

Vuelve a dar la misma indeterminación con una expresión más complicada que la original y no tiene pinta que podamos simplificar las expresiones volviendo a derivar. Este es un ejemplo típico donde es necesario utilizar los desarrollos de Taylor para poder resolver el límite.

²⁵Notar que los desarrollos de Taylor de funciones solo se pueden realizar en torno a un punto finito.

²⁶Será necesario que las *series de Taylor* (ver la **Sección 9.6, página 242**) de las funciones involucradas *converjan* en todo \mathbb{R} .

Para ello tenemos que calcular los desarrollos de McLaurin (al ser un límite que tiende a cero) de las funciones del numerador y del denominador. Podemos hacerlo directamente (calculando sus derivadas) o mejor, a través de los desarrollos de McLaurin de las funciones elementales de las que están formados y posteriormente obteniendo con ellos los desarrollos de funciones más complicadas.

Por ejemplo los vamos a calcular hasta tercer orden, si no fuera suficiente pues los calcularíamos a cuarto orden, quinto, etc.

Notar que el orden necesario de los desarrollos será aquel que nos permita tener al menos un término no nulo tanto en el numerador como en el denominador. Como la indeterminación es del tipo $0/0$, eso es debido a que se van a anular, en los órdenes bajos, los primeros términos de los desarrollos del numerador y denominador y estamos interesados en el primer término de cada uno de ellos que no sea nulo.

Empezamos con los desarrollos (recordar que el polinomio de McLaurin de un polinomio es el propio polinomio):

- $\text{sen}(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$
- $\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$
- $\text{sen}[\tan(x)] = (x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)) - \frac{1}{6}[x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)]^3 = x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$
- $\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$
- $\arctan(x^2 + x) = (x^2 + x) - \frac{1}{3}(x^2 + x)^3 + o(x^3) = x + x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$
- $\text{sen}[\tan(x)] - \arctan(x^2 + x) = -x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$
- $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$
- $\text{sen}(x^2) = x^2 + o(x^3)$
- $e^{\text{sen}(x^2)} = 1 + x^2 + o(x^3)$
- $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$
- $e^{\text{sen}(x^2)} - \cos(x) = \frac{3}{2}x^2 + o(x^3)$

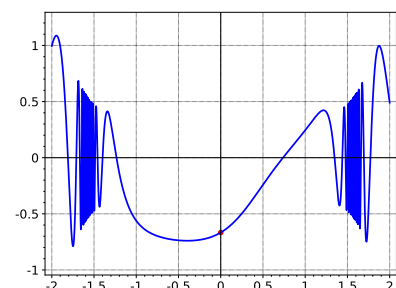
Por tanto, sustituyendo estos valores en el límite se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}[\tan(x)] - \arctan(x^2 + x)}{e^{\text{sen}(x^2)} - \cos(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - [x + x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)]}{\frac{3}{2}x^2 + o(x^3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + o(x^2)}{\frac{3}{2}x^2 + o(x^3)} = \boxed{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Notar que de esta forma hemos transformado un límite de funciones complicadas en un sencillo límite de cociente de polinomios (ver la [Sección 8.10.6, página 209](#)).

Notar también como el tercer orden en los desarrollos ha sido suficiente al tener un término en el numerador ($-x^2$) y otro en el denominador ($3/2x^2$).

Este valor se puede confirmar de forma gráfica, dibujando la función y observando el valor que toma para $x = 0$, teniendo en cuenta que $-2/3 \approx -0.66$.



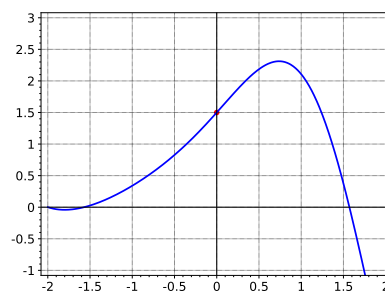
b) Como se ha visto en el [Ejercicio 5.17, página 138](#) este límite tiene una indeterminación del tipo $0/0$ y no puede resolverse utilizando la regla de L'Hôpital. Vamos a utilizar los siguientes desarrollos de McLaurin para su cálculo:

- $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$
- $\text{sen}(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$
- $e^{\text{sen}(x)} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$
- $\log(1 + x^2) = x^2 + o(x^3)$
- $\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$
- $\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

Por tanto, sustituyendo estos valores en el límite se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^{\text{sen } x} - \log(1 + x^2)}{\tan x - \arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2[1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)] - [x^2 + o(x^3)]}{[x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)] - [x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

Este valor también se puede confirmar de forma gráfica, dibujando la función y observando el valor que toma para $x = 0$, teniendo en cuenta que $3/2 = 1.5$.



6.5.2. Indeterminación ∞/∞

Hay dos formas de resolver este tipo de indeterminaciones:

- Desarrollar las funciones en potencias negativas²⁷.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x-a)^{-p} + o[(x-a)^{-p}]}{\beta(x-a)^{-q} + o[(x-a)^{-q}]} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} (x-a)^{q-p} = \begin{cases} p = q \implies \boxed{\frac{\alpha}{\beta}} \\ q > p \implies \boxed{0} \\ q < p \implies \boxed{\text{sign}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \infty} \end{cases}$$

- Transformar la indeterminación ∞/∞ en $0/0$ y aplicar entonces el método de la sección anterior.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x)}{m(x)} \implies \boxed{\text{Ind. } \frac{0}{0}}$$

²⁷Notar que estos desarrollos con potencias negativas no son *series de Taylor* y entran en una categoría más general denominadas *series de Laurent*. Ver por ejemplo "Clases de Ampliación de Matemáticas para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 367.

Ejercicio 6.9. Calcular el siguiente límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arctan x)^{-1} + \frac{1}{x}}{(\arcsen x)^{-1} + \cos x}$$

Como $\arcsen(0) = \arctan(0) = 0$ claramente este límite tiene una indeterminación del tipo ∞/∞ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arctan x)^{-1} + \frac{1}{x}}{(\arcsen x)^{-1} + \cos x} = \frac{\infty}{\infty} = ?$$

Vamos a resolverlo de las dos formas descritas.

- Desarrollo en potencias negativas.

Teniendo en cuenta los desarrollos de McLaurin de las funciones involucradas:

- $\cos(x) = 1 - x^2 + o(x^3)$
- $\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$
- $\arcsen(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

Calculamos los desarrollos de las inversas de las funciones arcotangente y arcoseno mediante división de polinomios:

$$\frac{\cancel{1} / -1 + 1/3 x^2 + o(x^2)}{1/3 x^2 + o(x^2)} \quad \frac{\cancel{x} - 1/3 x^3 + o(x^3)}{1/x + o(1/x)} \qquad \frac{\cancel{1} / -1 + 1/6 x^2 + o(x^2)}{1/6 x^2 + o(x^2)} \quad \frac{\cancel{x} + 1/6 x^3 + o(x^3)}{1/x + o(1/x)}$$

Notar que $o(1/x)$ indica que el resto de términos son de orden menor que el infinito $1/x$ cuando $x \rightarrow 0$. Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arctan x)^{-1} + \frac{1}{x}}{(\arcsen x)^{-1} + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} + o(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + o(\frac{1}{x}) + 1 - x^2 + o(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x} + o(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})} = \boxed{2}$$

- Desarrollo en potencias positivas.

Reordenando las funciones transformamos la indeterminación de ∞/∞ a $0/0$:

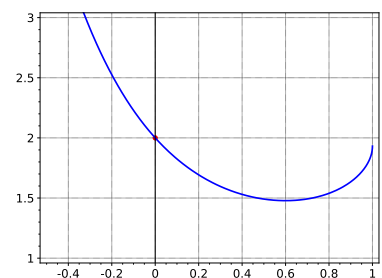
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arctan x)^{-1} + \frac{1}{x}}{(\arcsen x)^{-1} + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \arctan x) \arcsen x}{(1 + \cos(x) \arcsen(x)) x \arctan x} = \frac{0}{0} = ?$$

Teniendo en cuenta los desarrollos de McLaurin anteriores de estas funciones y sustituyendo se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \arctan x) \arcsen x}{(1 + \cos(x) \arcsen(x)) x \arctan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x + x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)][x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)]}{[1 + (1 - x^2 + o(x^3))(x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))]x[x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)]} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \boxed{2} \end{aligned}$$

Este valor se puede confirmar de forma gráfica, dibujando la función y observando el valor que toma para $x = 0$.

Notar que el dominio de esta función, debido a la función arcoseno es $[-1, 1]$.



6.5.3. Indeterminación $0 \cdot \infty$

Al igual que en el caso anterior hay dos formas de resolver este tipo de indeterminaciones:

- Desarrollar las funciones en potencias positivas y negativas.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow a} [\alpha(x-a)^p + o[(x-a)^p]][\beta(x-a)^{-q} + o[(x-a)^{-q}]] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \alpha\beta(x-a)^{p-q} + o[(x-a)^{p-q}] = \begin{cases} p = q \implies \boxed{\alpha\beta} \\ p > q \implies \boxed{0} \\ p < q \implies \boxed{\text{sign}(\alpha\beta)\infty} \end{cases}$$

- Transformar la indeterminación $0 \cdot \infty$ en $0/0$. y aplicar entonces el método de la sección anterior.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{h(x)} = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0 \end{array} \right\} \implies \boxed{\text{Ind. } \frac{0}{0}}$$

Ejercicio 6.10. Calcular el siguiente límite.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2} = 0 \cdot (\pm\infty) = ?$$

Vamos a utilizar desarrollos de Taylor para resolver este límite, para ello expresamos la tangente como cociente entre seno y coseno y encontramos los desarrollos de Taylor de ambos en torno a $x = 1$.

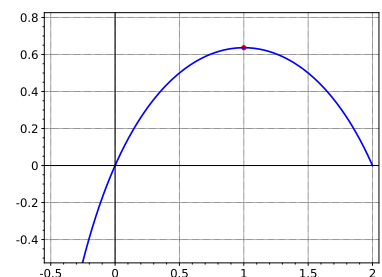
$$\tan \frac{\pi x}{2} = \frac{\text{sen } \frac{\pi x}{2}}{\text{cos } \frac{\pi x}{2}} \implies \begin{cases} \text{sen } \frac{\pi x}{2} = 1 - \frac{\pi^2}{8}(x-1)^2 + \frac{\pi^4}{384}(x-1)^4 + o[(x-1)^4] \\ \text{cos } \frac{\pi x}{2} = -\frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{\pi^3}{48}(x-1)^3 + o[(x-1)^3] \end{cases}$$

Dividiendo ambos resultados:

$$\frac{1 - \frac{\pi^2}{8}(x-1)^2 + o[(x-1)^2]}{-\frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{\pi^3}{48}(x-1)^3 + o[(x-1)^3]} \implies \tan \frac{\pi x}{2} = \frac{\text{sen } \frac{\pi x}{2}}{\text{cos } \frac{\pi x}{2}} = -\frac{2}{\pi}(x-1)^{-1} + o[(x-1)^{-1}]$$

$$\text{Por tanto: } \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2} = \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \left\{ -\frac{2}{\pi}(x-1)^{-1} + o[(x-1)^{-1}] \right\} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{\pi} + o(1) \right] = \boxed{\frac{2}{\pi}}$$

Este valor se puede confirmar de forma gráfica, dibujando la función y observando el valor que toma para $x = 1$. Notar que $2/\pi \approx 0.64$.



6.5.4. Indeterminación $\infty - \infty$

Al igual que en los casos anteriores hay dos formas de resolver este tipo de indeterminaciones:

- Desarrollar las funciones en potencias negativas.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \end{cases} = \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x-a)^p + o[(x-a)^p] = \begin{cases} p = 0 \implies \boxed{\alpha} \\ p > 0 \implies \boxed{0} \\ p < 0 \implies \boxed{\text{sign}(\alpha) \infty} \end{cases}$$

- Transformar la indeterminación $\infty - \infty$ en $0/0$, y aplicar entonces el método de la sección anterior.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1/g(x) - 1/f(x)}{1/[f(x)g(x)]} \implies \boxed{\text{Ind. } \frac{0}{0}}$$

Ejercicio 6.11. Calcular el siguiente límite.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1 - \sqrt{x}} - \frac{2}{1 - \sqrt[3]{x}} \right)$$

Vamos a utilizar desarrollos de Taylor para resolver este límite, para ello encontramos los desarrollos de Taylor de \sqrt{x} y $\sqrt[3]{x}$ en torno a $x = 1$.

$$\begin{aligned} \bullet \sqrt{x} &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + o[(x-1)^2] \implies 1 - \sqrt{x} = -\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2 + o[(x-1)^2] \\ \bullet \sqrt[3]{x} &= 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + o[(x-1)^2] \implies 1 - \sqrt[3]{x} = -\frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{9}(x-1)^2 + o[(x-1)^2] \end{aligned}$$

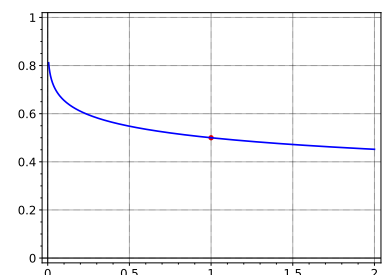
Calculamos los desarrollos de las inversas de estas funciones mediante división de polinomios:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + 1/4(x-1) + o[(x-1)^2]} &= \frac{-1/2(x-1) + 1/8(x-1)^2 + o[(x-1)^3]}{-2(x-1)^{-1} - 1/2 + o(1)} \\ \frac{1}{1 + 1/3(x-1) + o[(x-1)^2]} &= \frac{-1/3(x-1) + 1/9(x-1)^2 + o[(x-1)^3]}{-3(x-1)^{-1} - 1 + o(1)} \\ \frac{1/4(x-1) + o[(x-1)^2]}{-1/4(x-1) + 1/16(x-1)^2} &= \frac{1/3(x-1) + o[(x-1)^2]}{-1/3(x-1) + 1/9(x-1)^2} \\ \frac{1/16(x-1)^2 + o[(x-1)^2]}{1/9(x-1)^2 + o[(x-1)^2]} & \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1 - \sqrt{x}} - \frac{2}{1 - \sqrt[3]{x}} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[3 \left(-2(x-1)^{-1} - \frac{1}{2} + o(1) \right) - 2 \left(-3(x-1)^{-1} - 1 + o(1) \right) \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[-\frac{3}{2} + 2 + o(1) \right] = \boxed{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Este valor se puede confirmar de forma gráfica, dibujando la función y observando el valor que toma para $x = 1$.



6.5.5. Indeterminación 1^∞

Como sabemos²⁸ este tipo de indeterminaciones se resuelven de la siguiente forma:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln[f(x)]} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x)[1-f(x)]} \implies \boxed{\text{Ind. } \infty \cdot 0}$$

que se puede resolver utilizando desarrollos de Taylor como se ha visto en la [Sección 6.5.3, página 160](#).

Ejercicio 6.12. Calcular el siguiente límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 + \operatorname{sen}(x) \cos(\alpha x)}{1 + \operatorname{sen}(x) \cos(\beta x)} \right]^{\cotan^3 x}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 + \operatorname{sen}(x) \cos(\alpha x)}{1 + \operatorname{sen}(x) \cos(\beta x)} \right]^{\cotan^3 x} &\stackrel{1^\infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left[\cotan^3 x \left(\frac{1 + \operatorname{sen}(x) \cos(\alpha x)}{1 + \operatorname{sen}(x) \cos(\beta x)} - 1 \right) \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left[\frac{\operatorname{sen}(x)[\cos(\alpha x) - \cos(\beta x)]}{\tan^3(x)[1 + \operatorname{sen}(x) \cos(\beta x)]} \right] = e^{0/0} = ? \end{aligned}$$

Vamos a utilizar desarrollos de McLaurin para resolver la indeterminación $0/0$.

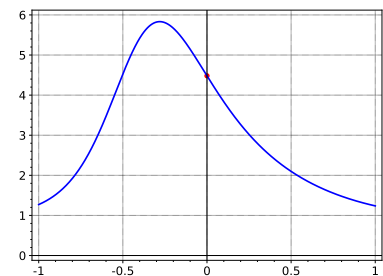
- $\operatorname{sen}(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$; $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$
- $\cos(\alpha x) = 1 - \frac{\alpha^2}{2}x^2 + o(x^3)$; $\cos(\beta x) = 1 - \frac{\beta^2}{2}x^2 + o(x^3)$
- $\tan^3(x) = [x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)]^3 = x^3 + o(x^3)$

Entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)[\cos(\alpha x) - \cos(\beta x)]}{\tan^3(x)[1 + \operatorname{sen}(x) \cos(\beta x)]} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)] \left[\cancel{1} - \frac{\alpha^2}{2}x^2 + o(x^3) - \cancel{1} + \frac{\beta^2}{2}x^2 + o(x^3) \right]}{[x^3 + o(x^3)] \left\{ 1 + [x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)] \left[1 - \frac{\beta^2}{2}x^2 + o(x^3) \right] \right\}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)] \frac{x^2}{2}(\beta^2 - \alpha^2)}{[x^3 + o(x^3)] \left[1 + x - \frac{x^3}{6} - \frac{\beta^2}{2}x^3 + o(x^3) \right]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\beta^2 - \alpha^2) \left[\frac{x^3}{2} + o(x^3) \right]}{x^3 + o(x^3)} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} \end{aligned}$$

Por tanto el resultado final del límite es: $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 + \operatorname{sen}(x) \cos(\alpha x)}{1 + \operatorname{sen}(x) \cos(\beta x)} \right]^{\cotan^3 x} = \boxed{e^{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}}}$

Este valor se puede confirmar de forma gráfica, representando la función y observando el valor que toma para $x = 0$. Por ejemplo para los valores $\alpha = 1$ y $\beta = 2$, con $e^{(2^2 - 1^2)/2} = e^{3/2} \approx 4.48$



²⁸Ver la [Sección 3.3, página 81](#).

6.5.6. Indeterminaciones 0^0 e ∞^0

Como sabemos²⁹ este tipo de indeterminaciones se resuelven expresándolos de forma exponencial:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln[f(x)]} \implies \boxed{\text{Ind. } \infty \cdot 0}$$

que se puede resolver en algunos casos utilizando *desarrollos de Taylor* como se ha visto en la [Sección 6.5.3](#), página 160.

Ejercicio 6.13. Calcular el siguiente límite.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + xe^x)^{\frac{1}{x \arctan x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + xe^x)^{\frac{1}{x \arctan x}} \stackrel{\infty^0}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left[\frac{\ln(1 + xe^x)}{x \arctan x} \right] = \frac{\infty}{\infty} = ?$$

Notar que es fácil determinar este límite teniendo en cuenta las siguientes relaciones cuando $x \rightarrow \infty$:

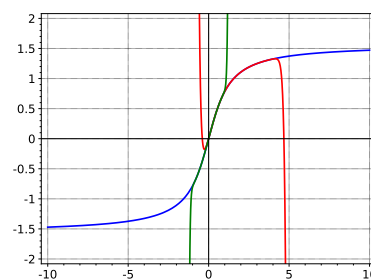
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1 + xe^x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(xe^x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x + x \ln e) = \lim_{x \rightarrow \infty} x$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x \arctan x = \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{\pi}{2}$

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + xe^x)^{\frac{1}{x \arctan x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left[\frac{\ln(1 + xe^x)}{x \arctan x} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left[\frac{x + o(x)}{\frac{\pi}{2}x + o(x)} \right] = \boxed{e^{2/\pi}}$$

Este límite **no** se puede resolver utilizando desarrollos de Taylor, ya que las series Taylor de la función $\arctan x$ en torno a cualquier punto real $x = a$ no convergen³⁰ con la función cuando $x \rightarrow \infty$.

En la siguiente figura se representa la función $\arctan(x)$ (en azul) y los desarrollos de Taylor de dicha función en torno al punto $x = 0$ (en verde) y en torno a $x = 2$ (en rojo), comprobando que ambas solo convergen en un determinado intervalo finito de sus respectivos puntos de desarrollo.



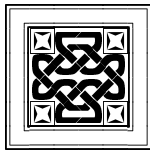
La función arcotangente tiende a $\pi/2 \approx 1.57$ cuando $x \rightarrow \infty$ mientras que el desarrollo en torno a $x = 0$ tiende a $+\infty$ y el desarrollo en torno a $x = 2$ tiende a $-\infty$. Además todo desarrollo de Taylor con respecto a cualquier punto $x \in \mathbb{R}$ tenderá a $\pm\infty$.

En la [Sección 9.6](#) se estudia la convergencia de las series de Taylor, aunque para realizar un estudio completo de este tema es necesario utilizar conceptos de *variable compleja*³¹.

²⁹Ver la [Sección 3.3](#), página 81.

³⁰En el [Ejercicio 9.10](#), página 246 se determina el intervalo de convergencia del desarrollo de McLaurin de la función arcotangente.

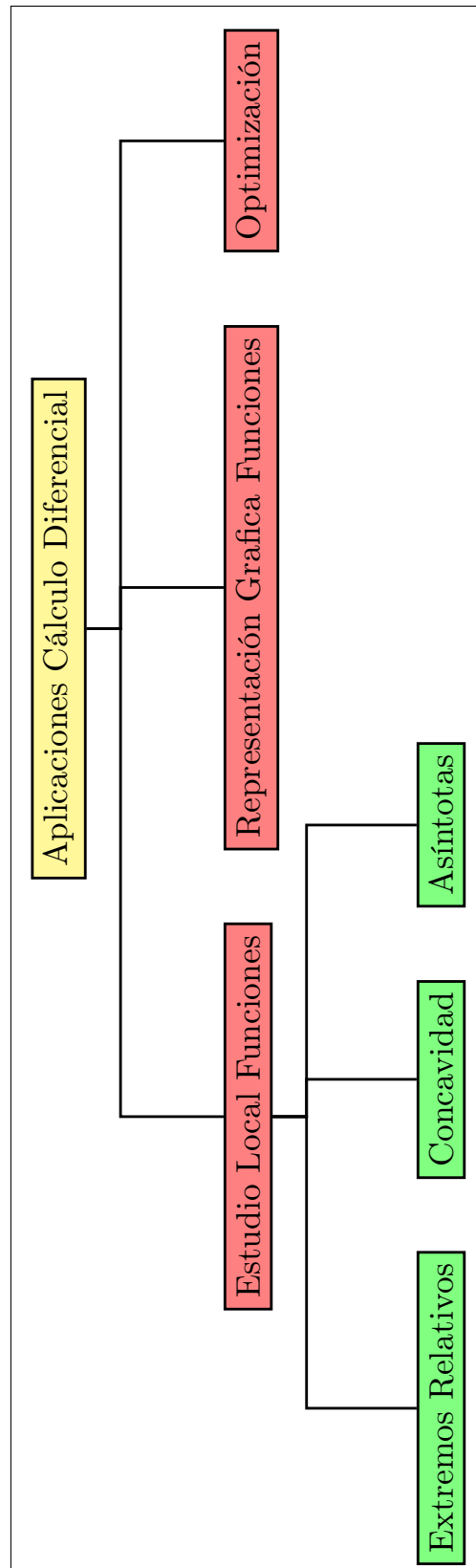
³¹Ver por ejemplo "Clases de Ampliación de Matemáticas para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 367.



Aplicaciones del Cálculo Diferencial

Contenido

7.1	Estudio Local de Funciones	167
7.1.1	Extremos Relativos	167
7.1.2	Concavidad y Convexidad	168
7.1.3	Asíntotas	170
7.2	Estudio Global de una Función	172
7.2.1	Representación Gráfica de Funciones	172
7.3	Optimización	177



7.1. Estudio Local de Funciones

7.1.1. Extremos Relativos

Ya hemos visto¹ que si una función es *derivable* en un punto x_0 de su dominio, se verifica:

- Si $f'(x_0) > 0$ entonces $f(x)$ es **creciente** en $x_0 \implies \begin{cases} f(x) > f(x_0) & \text{si } x > x_0 \\ f(x) < f(x_0) & \text{si } x < x_0 \end{cases}$
- Si $f'(x_0) < 0$ entonces $f(x)$ es **decreciente** en $x_0 \implies \begin{cases} f(x) < f(x_0) & \text{si } x > x_0 \\ f(x) > f(x_0) & \text{si } x < x_0 \end{cases}$
- Si $f(x)$ tiene un **extremo relativo (máximo o mínimo)** en $x = 0$ entonces $f'(x_0) = 0$.
 - x_0 máximo local o relativo si $f(x_0) > f(x) \forall x \in E(x_0)$.
 - x_0 mínimo local o relativo si $f(x_0) < f(x) \forall x \in E(x_0)$.
- Los puntos donde $f'(x_0) = 0$ pero **no** hay un *extremo relativo* se denominan **puntos de inflexión**².

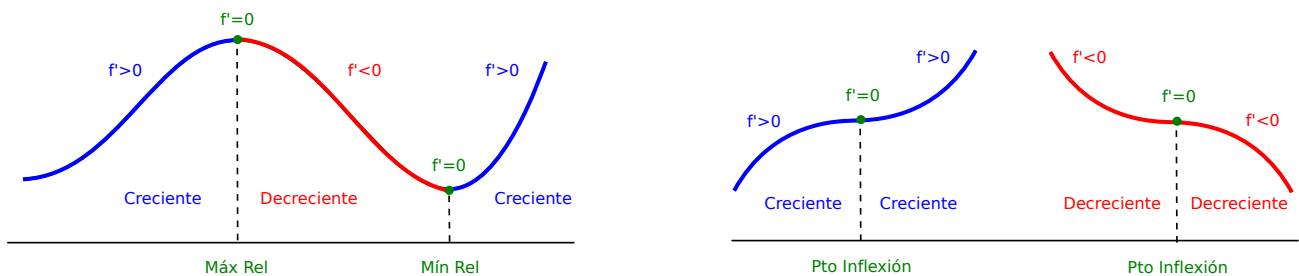


Figura 7.1: En la figura de la derecha se muestran gráficamente los conceptos de crecimiento, decrecimiento y extremos relativos (máximo y mínimo) y el correspondiente valor de la derivada de la función en ellos. En la figura de la izquierda se muestran los dos tipos básicos de puntos de inflexión.

Para determinar los extremos relativos en puntos derivables, necesitamos localizar primero aquellos en los que su primera derivada sea cero y posteriormente podemos estudiar el signo de $f'(x)$ en un entorno de dicho punto (crecimiento y decrecimiento) para poder determinar si se trata de un extremo relativo.

El siguiente teorema muestra que también es posible determinar los extremos relativos con solo conocer el valor de las derivadas sucesivas en dicho punto, sin necesidad de conocer el comportamiento en un entorno del mismo.

Teorema 7.1. Extremos Relativos

Sea $f(x)$ $n > 1$ veces *derivable* en x_0 , donde:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad , \quad f^{(n)} \neq 0 \quad ; \quad n = \{2, 3, \dots\}$$

Se verifica:

- Si n es **par**:
 - Si $f^{(n)} > 0$ entonces $f(x)$ tiene un **mínimo** en x_0
 - Si $f^{(n)} < 0$ entonces $f(x)$ tiene un **máximo** en x_0
- Si n es **impar**, en x_0 hay un **punto de inflexión** (horizontal).

¹Ver la [Sección 5.4, página 129](#).

²Hay más tipos de *puntos de inflexión* que se estudian en la [Sección 7.1.2, página 168](#).

Demostración 7.1.

Obteniendo el *desarrollo de Taylor*^a de $f(x)$ en torno a x_0 y teniendo en cuenta que las $n - 1$ primeras derivadas en ese punto son nulas se tiene:

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + f^{(n-1)}(x_0)(x - x_0)^{n-1}}_0 + \underbrace{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}_{\neq 0} + o[(x - x_0)^n]$$

$$f(x) - f(x_0) = f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o[(x - x_0)^n]$$

Entonces:

- Si n es **par** $\implies (x - x_0)^n > 0 \forall x \in E(x_0)$.
 - Si $f^{(n)}(x_0) > 0 \implies f(x) - f(x_0) > 0 \implies$ **mínimo** en x_0 .
 - Si $f^{(n)}(x_0) < 0 \implies f(x) - f(x_0) < 0 \implies$ **máximo** en x_0 .
- Si n es **impar**, entonces $(x - x_0)^n > 0$ si $x > x_0$ y $(x - x_0)^n < 0$ si $x < x_0$ por tanto independientemente del signo de $f^{(n)}(x_0)$ el término $f(x) - f(x_0)$ tiene signo distinto a la izquierda y derecha de x_0 y por tanto hay un **punto de inflexión** en x_0 .

^aVer el **Teorema 6.1**, página 147.

7.1.2. Concavidad y Convexidad**Definición 7.1. Concavidad y Convexidad**

Sea una función $f(x)$ derivable en un punto de su dominio x_0 . En función de la posición de $f(x)$ con respecto a la *recta tangente*³ de la función en x_0 se dice que⁴:

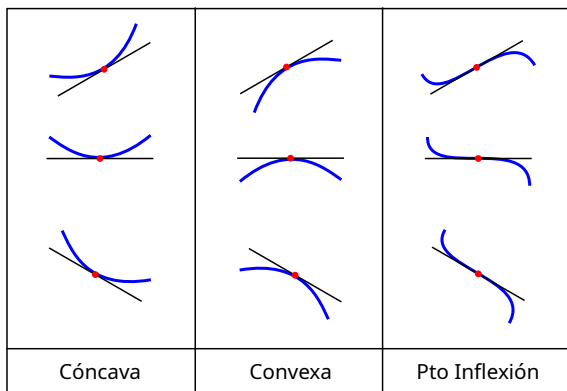
- $f(x)$ es **cóncava** en x_0 si $f(x)$ está por encima de la recta tangente a $f(x)$ en x_0 :

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) > 0 \quad , \quad \forall x \in E^*(x_0)$$

- $f(x)$ es **convexa** en x_0 si $f(x)$ está por debajo de la recta tangente a $f(x)$ en x_0 :

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) < 0 \quad , \quad \forall x \in E^*(x_0)$$

- Se dice que hay un **punto de inflexión** en un punto x_0 si es cóncava por un lado de x_0 y convexa por el otro.



En la siguiente gráfica se esquematiza el concepto de *concavidad* y *convexidad* de una función en un punto. En rojo se ha representado el punto x_0 , en azul la gráfica de la función $f(x)$ y en negro la recta tangente a $f(x)$ en x_0 .

Notar que esta definición generaliza el concepto de *punto de inflexión* visto en el **Teorema 7.1**, página 167, de forma que no es necesario que la derivada se anule en un punto para que se pueda producir en él un *punto de inflexión*.

³Ver la **Definición 5.3**, página 112.

⁴No hay un criterio unánime para definir los términos de *concavidad* y *convexidad*, ya que la forma que tiene depende del punto de vista, (desde dentro o desde fuera). El criterio que utilizaremos aquí es el más extendido.

El siguiente teorema muestra la forma de determinar la *concavidad* y *convexidad* de una función en un punto a través del valor de las derivadas sucesivas en dicho punto.

Teorema 7.2. Concavidad y Convexidad

Sea $f(x)$ una función suficientemente derivable en un punto x_0 y sea $n > 1$ el menor entero donde $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, entonces:

n	$f^{(n)}(x_0)$	Tipo	Si $f'(x_0) = 0$
par	> 0	cóncava	mínimo
par	< 0	convexa	máximo
impar	$+/-$	pto inflexión	pto inflexión (horizontal)

Demostración 7.2.

Esta demostración es del mismo estilo que el utilizado en el [Teorema 7.1, página 167](#), pero en este caso sin anular la primera derivada.

Obteniendo el *desarrollo de Taylor* de $f(x)$ en torno a x_0 y teniendo en cuenta que las derivadas en ese punto que son nulas se tiene:

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o[(x - x_0)^n]$$

Entonces:

- Si n es par $\implies (x - x_0)^n > 0 \quad \forall x \in E(x_0)$.
 - Si $f^{(n)}(x_0) > 0 \implies f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) > 0 \implies$ **cóncava** en x_0 .
 - Si $f^{(n)}(x_0) < 0 \implies f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) < 0 \implies$ **convexa** en x_0 .
- Si n es impar, entonces $(x - x_0)^n > 0$ si $x > x_0$ y $(x - x_0)^n < 0$ si $x < x_0$ por tanto independientemente del signo de $f^{(n)}(x_0)$ el término $f(x) - f(x_0)$ tiene signo distinto a la izquierda y derecha de x_0 y por tanto hay un **punto de inflexión** en x_0 .

Ejercicio 7.1. Estudiar las zonas de concavidad y convexidad de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

Encontramos las dos primeras derivadas de esta función:

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \quad ; \quad f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

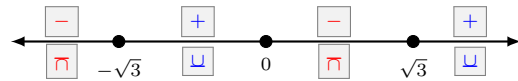
La primera derivada se anula en $x = \pm 1$ y como:

- $f''(1) = -\frac{1}{2} < 0 \implies$ máximo
- $f''(-1) = \frac{1}{2} > 0 \implies$ mínimo

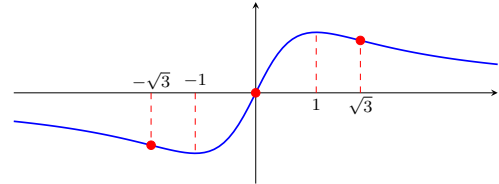
La segunda derivada se anula en $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{3}$, en los cuales se producen puntos de inflexión donde la función cambia de concavidad. Para determinar las zonas de concavidad y convexidad estudiamos el signo de la segunda derivada en los cuatro intervalos en los que queda dividido el dominio por estos tres puntos. Para ello basta determinar el signo de cualquier punto interior a esta zona:

⁵Notar que no depende del valor de la primera derivada en el punto.

- $f''(-2) = -\frac{4}{125} < 0 \implies$ convexa
- $f''(-1) = -\frac{1}{2} > 0 \implies$ cóncava
- $f''(1) = -\frac{1}{2} < 0 \implies$ convexa
- $f''(2) = \frac{4}{125} > 0 \implies$ cóncava



En esta figura se muestra la representación gráfica de $f(x)$ donde se muestran los extremos relativos y las zonas de concavidad y convexidad de la función.



7.1.3. Asíntotas

Definición 7.2. Recta Asíntota

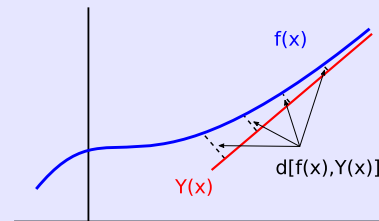
Sea una recta:

$$Y(x) = mx + n$$

y sea $d[f(x), Y(x)]$ la *distancia* entre una función $f(x)$ y la recta $Y(x)$ en un punto cualquiera x .

Se dice que la función $f(x)$ tiene por **asíntota** la recta $Y(x)$ en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ o bien $x = \pm \infty$ si:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} d[f(x), Y(x)] = 0$$



Hay tres tipos de asíntotas:

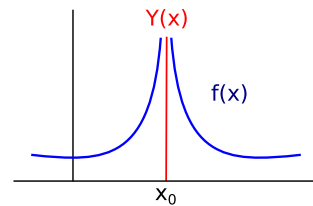
- **Asíntota Vertical** en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$

\implies

Ec. Asíntota

$$x = x_0$$



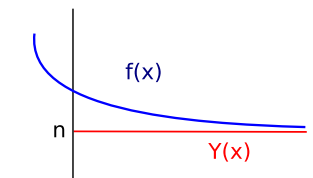
- **Asíntota Horizontal**

Si $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = n \in \mathbb{R}$

\implies

Ec. Asíntota

$$y = n$$



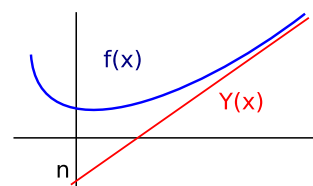
- **Asíntota Oblicua** $y = mx + n$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

$$m \neq \{0, \pm \infty\}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - mx] = n$$

$$n \neq \pm \infty$$



Las fórmulas relativas a la *asíntota oblicua* salen del siguiente desarrollo:

- Las asíntotas oblicuas siempre lo son en el infinito. Si una función $f(x)$ tiene una asíntota oblicua $y = mx + n$, donde m es su pendiente y n es su ordenada en el origen, ambas coincidirán en $\pm\infty$, de forma que:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{mx + n}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[m + \frac{n}{x} \right] = \boxed{m} \in \mathbb{R}$$

Notar que si $m = 0$ se tratará de una *asíntota horizontal*.

- Si se cumple la condición anterior y se obtiene un valor para la pendiente de la recta m , podremos calcular el valor de la ordenada en el origen n de la asíntota oblicua a través de la [Definición 7.2, página 170](#) de asíntota (la función y su asíntota oblicua coinciden en el infinito):

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx - n] = 0 \quad \implies \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \boxed{n} \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 7.2. Estudiar las posibles asíntotas de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{3x^3 - 1}{x(x - 2)}$$

- Asíntotas Horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3 - 1}{x^2 - 2x} = \pm\infty$$

Como el resultado no es un número real esta función no tiene asíntotas horizontales.

- Asíntotas Verticales

Si tiene asíntotas verticales, éstas se darán en los puntos de discontinuidad. Como $f(x)$ es de tipo racional, las discontinuidades se dan en los puntos donde se anula el denominador.

$$x(x - 2) = 0 \quad \implies \quad x = \{0, 2\}$$

Investigamos si existen asíntotas verticales en estos puntos:

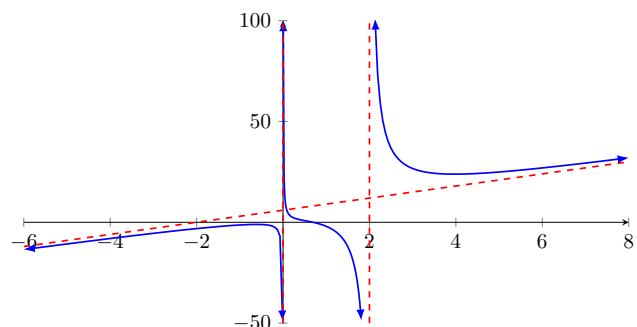
$$x = 0 \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^3 - 1}{x(x - 2)} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x^3 - 1}{x(x - 2)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \end{array} \right\} \boxed{\text{A.V. en } x = 0} ; \quad x = 2 \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^3 - 1}{x(x - 2)} = \frac{23}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^3 - 1}{x(x - 2)} = \frac{23}{0^-} = -\infty \end{array} \right\} \boxed{\text{A.V. en } x = 2}$$

- Asíntotas Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{3x^3 - 1}{x^3 - 2x^2} = 3 \quad ; \quad n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{3x^3 - 1}{x^2 - 2x} - 3x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x^2 - 1}{x^2 - 2x} = 6$$

Por tanto: $\boxed{\text{A.O. } y = 3x + 6 \text{ cuando } x \rightarrow \pm\infty}$

En la siguiente figura se muestra la gráfica de la función (en azul) con sus tres asíntotas (en rojo).



7.2. Estudio Global de una Función

7.2.1. Representación Gráfica de Funciones

Para poder representar gráficamente una función⁶ es necesario realizar un **estudio global** de la misma, analizando las siguientes partes:

1. Dominio

En base a las funciones elementales⁷ de las que está formada la función, y teniendo en cuenta sus propiedades, se determina su **dominio** a través de los **puntos donde no está definida**. Así por ejemplo:

- Las *funciones polinómicas*, e^x , $\operatorname{sen}(x)$, $\operatorname{cos}(x)$, $\operatorname{arctan}(x)$, $\operatorname{senh}(x)$, $\operatorname{cosh}(x)$ e irracionales $\sqrt[n]{x}$ con n impar, están definidas para todo $x \in \mathbb{R}$.
- Las *funciones racionales* (cociente de polinomios) no están definidas para los puntos que anulan el denominador.
- Las *funciones irracionales* $\sqrt[n]{x}$ con n par solo están definidas para $x \geq 0$.
- La función $\tan(x)$ no está definida en los puntos donde se anula $\operatorname{cos}(x)$, es decir en $x \in (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ con $n \in \mathbb{Z}$.
- La *función* $\log(x)$ solo está definida para $x > 0$.
- Las *funciones* $\operatorname{arcsen}(x)$ y $\operatorname{arccos}(x)$ solo están definidas para $x \in [-1, 1]$.

2. Simetrías

La determinación de posibles **simetrías** de la función, permitirá estudiar solo algunas partes del dominio ya que el resto quedará determinado por las características de cada simetría. Hay tres simetrías básicas en una función⁸:

- *Función Par*: $f(-x) = f(x)$
- *Función Impar*: $f(-x) = -f(x)$
- *Función Periódica*: $f(x) = f(x + T)$ (T periodo)

3. Continuidad

Además de los **puntos de discontinuidad** detectados en el estudio del dominio en el punto 1, hay que determinar aquellos donde la función sí está definida pero no cumple la definición de continuidad:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0) \implies x_0 \text{ Punto de discontinuidad}$$

4. Asíntotas

Las **rectas asíntotas** permiten un estudio del comportamiento de la función en el infinito. Recordamos que hay tres tipos:

- *A. Vertical*: $\lim_{x \rightarrow \pm d} f(x) = \pm\infty$ (d Pto de discontinuidad)
- *A. Horizontal*: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = n$ ($n \neq \infty$)
- *A. Oblicua*: $y = mx + n$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad (m \neq \{0, \pm\infty\}) \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = n \quad (n \neq \pm\infty) \end{array} \right.$$

⁶Ver la [Definición 2.4](#), página 52.

⁷Ver la [Sección 2.8](#), página 58.

⁸Ver la [Sección 2.5](#), página 55.

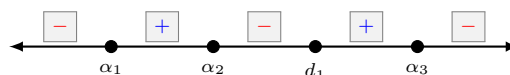
5. Ceros y signo de $f(x)$. Raíces

Determinamos las regiones en las que la función es *positiva* $f(x) > 0$ y *negativa* $f(x) < 0$. Para ello, encontramos los **ceros** o **raíces** de la función y a ellos le añadimos los **puntos de discontinuidad** encontrados.

$$f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Incluimos:} \quad \begin{cases} \text{Ceros: } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \\ \text{Ptos Discontinuidad: } x_0, d \end{cases}$$

Vamos a suponer que la función tiene tres ceros α_1 , α_2 y α_3 , y un punto de discontinuidad d_1 . Colocando esos tres puntos en la recta real se determina el signo de la función en las zonas en las que queda dividido el dominio de la función. Para ello basta determinar el signo de $f(x)$ en un punto cualquiera de cada zona.

En la siguiente figura se muestra un posible ejemplo, donde hemos supuesto que solo hay un punto de discontinuidad d_1 .



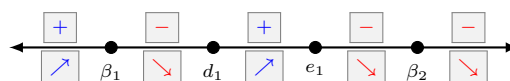
6. Ceros y signo de $f'(x)$. Crecimiento y Extremos Relativos

Determinamos las regiones de **crecimiento** $f'(x) > 0$ y **decrecimiento** $f'(x) < 0$. Para ello, encontramos los *ceros de la primera derivada* de la función (posibles *extremos relativos*) y a ellos le añadimos los *puntos de discontinuidad* encontrados anteriormente y los posibles puntos donde la función no es *derivable*⁹.

$$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Incluimos:} \quad \begin{cases} \text{Ceros: } \beta_1, \beta_2 \\ \text{Ptos Discontinuidad: } d_1 \\ \text{Ptos no derivable: } e_1 \end{cases}$$

Vamos a suponer que la función tiene dos ceros de $f'(x)$ que los denominaremos β_1 y β_2 , el punto de discontinuidad anterior d_1 y un punto donde la función no es derivable (pico) e_1 . Colocando esos cuatro puntos en la recta real se determina el *signo de la primera derivada* en las zonas en las que queda dividido el dominio de la función. Para ello basta determinar el signo de $f'(x)$ en un punto cualquiera de cada zona.

En la siguiente figura se muestra un posible ejemplo, donde se produce un *máximo relativo* en los puntos β_1 y e_1 y un *punto de inflexión horizontal*¹⁰ en β_2 . En el *punto de discontinuidad* d_1 no se puede producir ningún *extremo relativo* ni *punto de inflexión*.



7. Ceros y signo de $f''(x)$. Concavidad y Puntos de Inflexión

Determinamos las regiones de **concavidad** $f''(x) > 0$ y **convexidad** $f''(x) < 0$. Para ello, encontramos los *ceros de la segunda derivada* de la función (posibles *puntos de inflexión*¹¹) y a ellos le añadimos los *puntos de discontinuidad* y los puntos donde *no existe la primera derivada*, encontrados anteriormente, junto con los posibles puntos donde *no existe la segunda derivada*¹².

$$f''(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Incluimos:} \quad \begin{cases} \text{Ceros: } \delta_1, \delta_2 \\ \text{Ptos Discontinuidad: } d_1 \\ \text{Ptos no derivable 1ªDerv: } e_1 \\ \text{Ptos no derivable 2ªDerv: } h_1 \end{cases}$$

Vamos a suponer que la función tiene dos *ceros* de $f''(x)$ que los denominaremos δ_1 y δ_2 , el *punto de discontinuidad* anterior d_1 junto con el punto donde *no existe la primera derivada* (*punto anguloso*) e_1 , además de un nuevo punto donde *no existe la segunda derivada* h_1 . Colocando esos cinco puntos en la recta real se determina el *signo de la segunda derivada* en las zonas en las que queda dividido el dominio de la función. Para ello basta determinar el signo de $f''(x)$ en un punto cualquiera de cada zona.

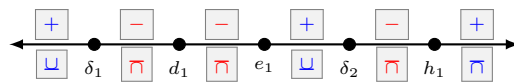
⁹Ver la [Definición 5.5, página 114](#).

¹⁰Los puntos de inflexión horizontales se detectan cuando en ambos lados de uno de los puntos característicos (derivada nula o punto no derivable) se produce el mismo comportamiento (crecimiento o decrecimiento).

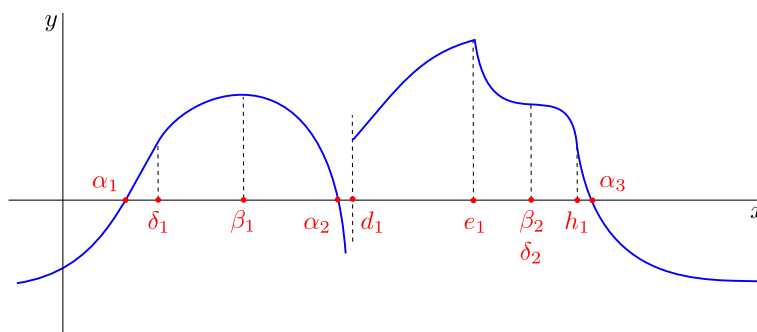
¹¹Dependerá si la primera derivada no nula a partir de la tercera es par o impar, ver la [Teorema 7.2, página 169](#).

¹²Si existe la primera derivada de una función en un punto, pero no la segunda derivada, en ese punto puede haber un cambio en la concavidad de la función. Sería como un *punto anguloso* de la concavidad.

En la siguiente figura se muestra un posible ejemplo, donde se produce un *máximo relativo* en los puntos β_1 y e_1 y un *mínimo relativo* en β_2 . En este caso no hay *puntos de inflexión horizontales*¹³. En el *punto de discontinuidad* d_1 no se puede producir ningún *extremo relativo* ni *punto de inflexión*.



En la siguiente gráfica se muestra una posible función con el comportamiento descrito en los puntos anteriores. Notar que los valores β_2 (cero de la primera derivada) y δ_2 (cero de la segunda derivada) coinciden en este caso.



Ejercicio 7.3. Representar gráficamente la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{27 - x^2} & x \geq 0 \\ \frac{x}{6} + \frac{3}{(x - 1)^2} & x < 0 \end{cases}$$

Seguimos los pasos vistos anteriormente:

1. Dominio

Se trata de una función definida a trozos. El primer trozo, válido para $x \geq 0$ está formado por una raíz cúbica y por tanto está definida para cualquier valor del argumento. El segundo trozo, válido para $x < 0$ está formado por una función racional cuyo denominador se anula solo para $x = 1$, valor que no entra en el dominio de este trozo. Por tanto el dominio de $f(x)$ es todo \mathbb{R} .

2. Simetrías

Como $f(x)$ está formada por dos trozos de características muy distintas, claramente no va a presentar ningún tipo de simetrías (par, impar o periódica).

3. Continuidad

Como hemos visto, por separado los dos trozos no presentan ningún problema. Estudiamos la continuidad del punto de corte $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{27 - x^2} = \sqrt[3]{27} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{6} + \frac{3}{(x - 1)^2} = 3 \end{array} \right\} = 3 = f(0)$$

Por tanto $f(x)$ es continua en todo \mathbb{R} .

¹³Los *puntos de inflexión horizontales* se detectan cuando en ambos lados de uno de los puntos característicos (derivada nula o punto no derivable) se produce el mismo comportamiento (crecimiento o decrecimiento).

4. Asíntotas

Como la función no tiene puntos de discontinuidad no puede tener asíntotas verticales. Determinamos si tiene asíntotas horizontales:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{27 - x^2} = -\infty \implies$ No tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow \infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{6} + \frac{3}{(x-1)^2} = -\infty \implies$ No tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$.

Buscamos asíntotas oblicuas:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{27 - x^2}}{x} = 0 \implies$ No tiene asíntota oblicua cuando $x \rightarrow \infty$.
- $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{6} + \frac{3}{(x-1)^2}}{x} = \frac{1}{6} = m \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{6} + \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{x}{6} = 0 \end{array} \right\} \implies$ A.O. cuando $x \rightarrow -\infty$: $y = \frac{x}{6}$

5. Ceros y signo de $f(x)$

Buscamos los ceros en ambos trozos de la función:

- $\sqrt[3]{27 - x^2} = 0$; $x = \pm\sqrt{27} \implies x_1 = +\sqrt{27} \approx 5.2$
- $\frac{x}{6} + \frac{3}{(x-1)^2} = 0$; $x(x-1)^2 = -18$; $x^3 - 2x^2 + x + 18 = 0$

Una solución claramente es $x = -2$. Descomponiendo por *Ruffini* (ver el [Apéndice A.5.1, página 304](#)) se tiene:

$$(x + 2)(x^2 - 4x + 9) = 0$$

Comprobándose que no tiene más raíces reales. Estudiamos el signo de la función.



6. Ceros y signo de $f'(x)$

Calculamos la derivada de la función.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(27-x^2)^2}} & x > 0, \quad x \neq \sqrt{27} \\ \frac{1}{6} - \frac{6}{(x-1)^3} & x < 0 \end{cases}$$

Notar que la función no es derivable en el punto $x = \sqrt{27}$ al anularse el denominador. En este punto la derivada se hace infinita. Tampoco es derivable en $x = 0$ ya que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(27-x^2)^2}} = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{6} - \frac{6}{(x-1)^3} = \frac{1}{6} + 6 = \frac{37}{6}$$

En $x = 0$ hay un punto anguloso.

Buscamos los ceros en ambos trozos de la función derivada:

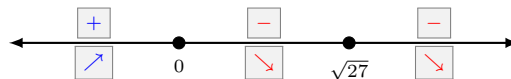
$$\bullet \frac{-2x}{\sqrt[3]{(27-x^2)^2}} = 0 \quad ; \quad x = 0$$

Como el cero de la derivada de este trozo cae fuera de su dominio ($x > 0$), no se tiene en cuenta.

$$\bullet \frac{1}{6} - \frac{6}{(x-1)^3} = 0 \quad ; \quad (x-1)^3 = 36 \quad ; \quad x = 1 + \sqrt[3]{36} \approx 4.3 > 0$$

El cero de la derivada de este trozo también cae fuera de su dominio y tampoco se tiene en cuenta.

Estudiamos el signo en las tres zonas en las que queda dividida la recta real por los puntos no derivables en $x = 0$ y en $x = \sqrt{27}$ y sus correspondientes zonas de crecimiento y decrecimiento.



7. Ceros y signo de $f''(x)$

Calculamos la segunda derivada de la función.

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3} \left[(27-x^2)^{-2/3} + \frac{4}{3}x^2(27-x^2)^{-5/3} \right] & x > 0, \quad x \neq \sqrt{27} \\ \frac{18}{(x-1)^4} & x < 0 \end{cases}$$

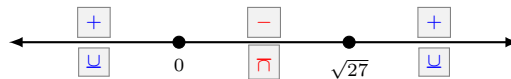
No existe la segunda derivada en $x = 0$ ni en $x = \sqrt{27}$ al no existir la primera derivada en estos puntos. Buscamos los ceros en ambos trozos de la función segunda derivada:

$$\bullet -\frac{2}{3} \left[(27-x^2)^{-2/3} + \frac{4}{3}x^2(27-x^2)^{-5/3} \right] = 0 \quad ; \quad 1 + \frac{4}{3}x^2(27-x^2)^{-1} = 0 \quad ; \quad 3(27-x^2) = -4x^2$$

$$x^2 + 81 = 0 \quad ; \quad x = \sqrt{-81} \quad \implies \quad \text{Sin solución real}$$

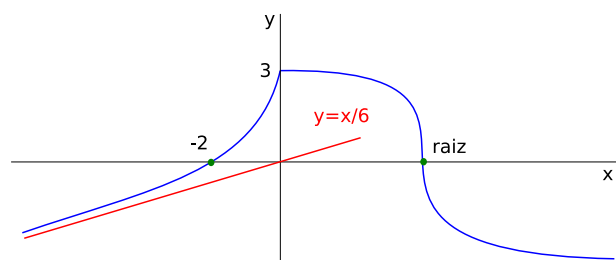
$$\bullet \frac{18}{(x-1)^4} = 0 \quad \implies \quad \text{Sin solución}$$

Estudiamos el signo en las tres zonas en las que queda dividida la recta real por los puntos no derivables en $x = 0$ y en $x = \sqrt{27}$ y sus correspondientes zonas de crecimiento y decrecimiento.



En $x = 0$ hay un cambio de concavidad debido al punto angular y en $x = \sqrt{27}$ hay un punto de inflexión vertical.

Con los resultados obtenidos podemos esbozar la gráfica de la función pedida.



7.3. Optimización

Definición 7.3. Optimización

La **optimización** es una rama de las matemáticas¹⁴ que trata de maximizar o minimizar una función.

La *optimización* tiene numerosas aplicaciones prácticas en ingeniería, por ejemplo en el cálculo de área/volumen óptimo (máximo o mínimo), minimización de costes o maximización de beneficios de diferentes procesos, determinación de la forma óptima de objetos, minimización de resistencias (eléctricas, de rozamiento, etc.).

El *cálculo diferencial* es la herramienta apropiada para la *optimización de funciones*. El proceso a seguir es el siguiente:

1. Es necesario conocer el campo en el que se enmarca el problema (fórmulas matemáticas, física del sistema, etc.)
2. Con los medios del punto anterior se obtiene una función o funciones matemáticas que modelizan el problema.
3. Será necesario realizar un estudio de las funciones involucradas (dominio, continuidad, derivabilidad, etc.)
4. Se deriva la función con las condiciones apropiadas y se obtienen los extremos relativos. De ellos se eligen los apropiados a la solución del problema.
5. Con los valores obtenidos se determinan el resto de valores pedidos con las relaciones matemáticas apropiadas.

Ejercicio 7.4. Encontrar el rectángulo de área máxima que se puede formar con un alambre de longitud L doblado de forma conveniente.

Un rectángulo tiene lados paralelos e iguales dos a dos. Sea x e y la longitud de ambos lados, de forma que:

$$L = 2x + 2y \implies A = xy$$

La función a maximizar es A pero como depende de dos variables x e y vamos a despejar una en función de la otra a través de su relación con L .

$$y = \frac{L - 2x}{2} \implies A(x) = xy = \frac{x(L - 2x)}{2} = \frac{xL - 2x^2}{2}$$

Esta función es de tipo racional y por tanto derivable en todo \mathbb{R} . Derivamos para obtener sus extremos relativos.

$$\frac{dA}{dx} = \frac{L - 4x}{2} = 0 \implies \boxed{x = \frac{L}{4}} \implies \boxed{y = \frac{L}{2}}$$

Notar que claramente este valor corresponde a un valor máximo, ya que el valor mínimo correspondería a tomar unos de los lados igual a cero y el otro $L/2$, cuyo área sería 0.

Por tanto el rectángulo de área máxima que se puede formar es un cuadrado de lado $L/4$ y siendo el valor del área:

$$\boxed{A_{max} = xy = \frac{L^2}{16}}$$

¹⁴Ver la Sección 0.1.1, página 3.

Ejercicio 7.5. Para la fabricación de un determinado producto, se necesita invertir dinero en contratar x empleados y en comprar y máquinas. Se estima que el número de productos fabricados al mes viene dada por la función:

$$P(x, y) = 50yx^2$$

Si se dispone de un capital mensual de 100000€, el coste mensual de cada empleado es de 1000€ y el alquiler mensual de cada máquina es de 5000€, determinar el número óptimo de empleados y máquinas que se deben elegir para que la producción sea máxima.

Como:

$$100000 = 1000x + 5000y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{100000 - 1000x}{5000}$$

Por tanto la función a optimizar es:

$$P(x) = 50yx^2 = 50x^2 \frac{100000 - 1000x}{5000} = 1000x^2 - 10x^3$$

Derivando y encontrando los extremos relativos se tiene:

$$\frac{dP}{dx} = 2000x - 30x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 10x(200 - 3x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 & \Rightarrow \text{Mínimo} \\ x = \frac{200}{3} \approx 66.7 & \Rightarrow \text{Máximo} \end{cases}$$

Por tanto el número óptimo de empleados y máquinas sería:

$$x = 66 \quad ; \quad y = \frac{100000 - 1000x}{5000} = 6.8 \quad \Rightarrow \quad y = 6$$

Con estos valores el gasto mensual sería:

$$G = 1000x + 5000y = 96000$$

Con lo que sobrarían 4000€ con los que se podría contratar 4 empleados más y por tanto el número óptimo de empleados y máquinas y el número máximo de productos fabricados al mes será:

$$x = 70 \text{ empleados} \quad ; \quad y = 6 \text{ máquinas} \quad \Rightarrow \quad P = 50x^2y = 1470000 \text{ productos/mes}$$

Ejercicio 7.6. Se quiere construir un barril cilíndrico cerrado de volumen fijo V de forma que la cantidad de material empleado en su elaboración sea mínima. Determinar las dimensiones de dicho barril.

El volumen y el área exterior de un cilindro de radio R y altura h vienen dadas por las siguientes ecuaciones:

$$V = \pi R^2 h \quad ; \quad A = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$$

Se quiere minimizar el área exterior, por tanto:

$$A(R) = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R^2 + 2\pi R \frac{V}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}$$

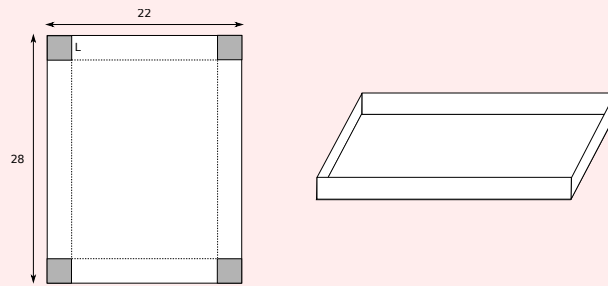
Derivamos la función para encontrar su máximo y encontramos el radio óptimo:

$$\frac{dA}{dR} = 4\pi R - \frac{2V}{R^2} = 0 \quad ; \quad 2\pi R^3 = V \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

Y la altura óptima vendrá dada por:

$$h = \frac{V}{\pi R^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

Ejercicio 7.7. Se quiere construir una caja sin tapa partiendo de una hoja din A4 (28cm de largo por 22cm de ancho). Para ello se corta un cuadradito de cada esquina y se dobla como muestra la figura. Encontrar el lado L óptimo del cuadradito para que el volumen de la caja sea máximo.



El volumen de la caja resultante será:

$$V = A_{base} * h = (28 - 2L)(22 - 2L)L = 4L^3 - 100L^2 + 616L$$

Derivamos esta función para encontrar el volumen máximo:

$$\frac{dV}{dL} = 12L^2 - 200L + 616 = 0 \implies 3L^2 - 50L + 154 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática se encuentran dos valores posibles:

$$L_1 = 12.59 \ ; \ L_2 = 4.08$$

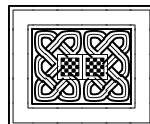
Para determinar cual de ellos es el que genera el volumen máximo podemos obtener la segunda derivada de la función objetivo y metemos estos valores:

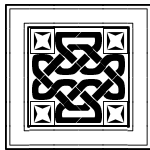
$$V'' = \frac{d^2V}{dL^2} = 24L - 200 \implies \begin{cases} V''(L_1) = 102.16 > 0 \implies \text{Mínimo} \\ V''(L_2) = -102.08 < 0 \implies \text{Máximo} \end{cases}$$

Por tanto el valor buscado es:

$$L = 4.08\text{cm}$$

Por otra parte notar que el valor $L_1 = 12.59\text{cm}$ no tiene sentido físico en este problema ya que el ancho del papel (22cm) no es suficiente para cortar dos cuadraditos de 12.59cm de lado cada uno.

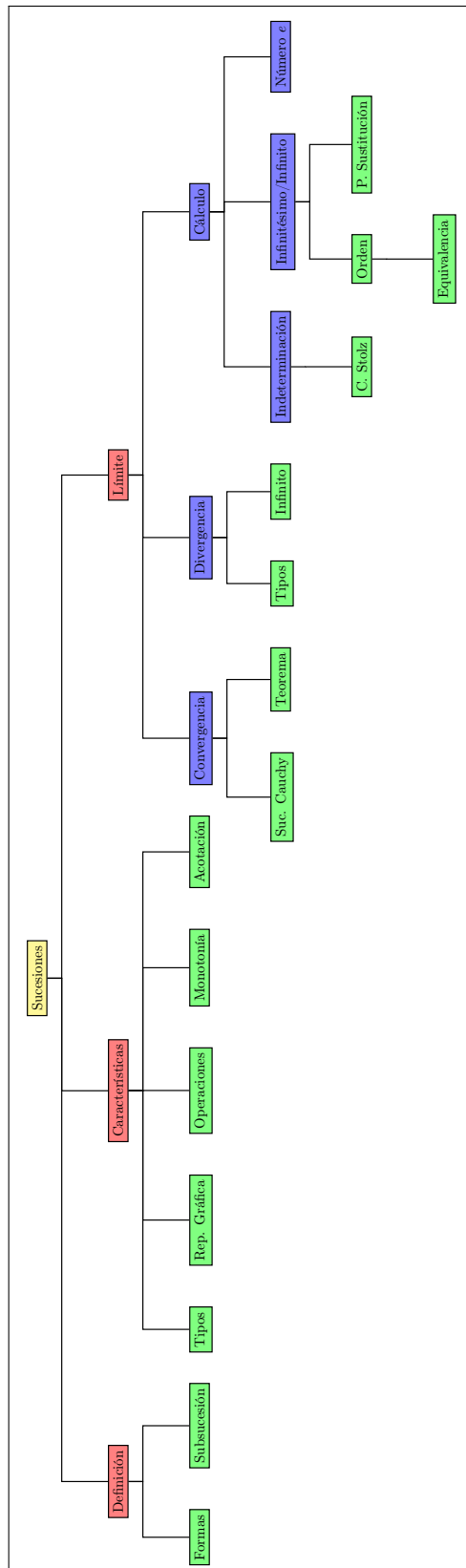




Sucesiones

Contenido

8.1	Sucesiones	183
8.1.1	Concepto de Sucesión	183
8.1.2	Formas de Expresar de Sucesión	183
8.1.3	Subsucesión	184
8.2	Tipos Básicos de Sucesiones	184
8.2.1	Progresiones Aritméticas	184
8.2.2	Progresiones Geométricas	185
8.2.3	Progresiones Aritmético-Geométricas	186
8.2.4	Progresiones Hipergeométricas	186
8.2.5	Progresiones Armónicas	187
8.2.6	Sucesiones de Potencias	187
8.2.7	Sucesión de Fibonacci	187
8.3	Representación Gráfica de Sucesiones	188
8.3.1	Representación en la Recta Real	188
8.3.2	Representación en Ejes de Coordenadas	188
8.4	Operaciones con Sucesiones	189
8.5	Monotonía	189
8.5.1	Determinación de la Monotonía	190
8.6	Acotación	192
8.7	Límite de una Sucesión	193
8.7.1	Convergencia	195
8.7.2	Sucesión de Cauchy o Fundamental	195
8.7.3	Propiedades de los Límites de Sucesiones	196
8.7.4	Divergencia	197
8.7.5	Sucesión Oscilante	198
8.7.6	Resumen: Tipos de Sucesiones	198
8.8	Teorema de la Convergencia	199
8.8.1	Relación entre Monotonía, Acotación y Convergencia	200
8.8.2	Límite de una Sucesión en Forma Recurrente	200
8.8.3	Ejercicios	201
8.9	El Número e	202
8.9.1	Definiciones Alternativas del Número e	203
8.9.2	Función Exponencial	204
8.10	Cálculo de Límites de Sucesiones	204
8.10.1	Operaciones con Infinito	204
8.10.2	Tipos de Indeterminaciones	206
8.10.3	Proceso de Cálculo de Límites de Sucesiones	206
8.10.4	Límite de Funciones Simples	207
8.10.5	Límite de Polinomios	208
8.10.6	Límite de Sucesiones Racionales y similares	209
8.10.7	Indeterminaciones	210
8.11	Infinitésimos e Infinitos	216
8.11.1	Propiedades de los Infinitésimos	216
8.11.2	Órdenes de los Infinitos	217
8.11.3	Órdenes de los Infinitésimos	219
8.11.4	Infinitésimos Equivalentes	220
8.11.5	Infinitos Equivalentes	220
8.11.6	Principio de Sustitución	221



8.1. Sucesiones

8.1.1. Concepto de Sucesión

De forma general una sucesión es un *conjunto ordenado*¹ formado por infinitos términos². Veamos la definición matemática.

Definición 8.1. Sucesión

Una **sucesión** es una *función*³ $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada número $n \in \mathbb{N}$ le asigna un número real $a_n \in \mathbb{R}$.

- Las sucesiones se denotan mediante *llaves*⁴ $\{ \}$ de las siguientes formas:

$$\{a_n\} \qquad \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \qquad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

- Los elementos de una *sucesión* se denominan **términos**.

8.1.2. Formas de Expresar de Sucesión

- Primeros términos:** $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

Cuando la sucesión es sencilla⁵ se puede identificar dando los primeros términos de la misma, por ejemplo:

$$\{1, 2, 3, \dots\} \quad ; \quad \{2, 5, 8, 11, \dots\}$$

- Término General:** $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$

El *término general* que es una fórmula que permite determinar el término n -ésimo de la sucesión a través de su posición n . Esta forma es muy útil para la determinación del *límite*⁶ de una sucesión, pero no siempre es posible obtenerla. A continuación se muestran dos sucesiones dadas a través de su término general, donde se han calculado los primeros términos:

$$\left\{ \frac{1}{n} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\} \quad ; \quad \left\{ \frac{1+n^n}{3n^2+2n-2} \right\} = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{5}{14}, \frac{10}{31}, \dots \right\}$$

- Forma Recurrente:**
$$\begin{cases} a_1 = c_1, a_2 = c_2, \dots, a_n = c_n & , & c_i \in \mathbb{R} \\ a_{n+1} = f(n, a_1, \dots, a_n) \end{cases}$$

En determinados casos es complicado obtener el *término general* de una sucesión y es más sencillo⁷ obtener su *forma recurrente*. En ella se fijan el primero o primeros términos y el término n -ésimo se da a través de una fórmula (recurrente) que puede depender de n y de algunos o todos los términos anteriores. A continuación se muestran un par de ejemplos de sucesiones dadas a través de formas recurrentes:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = 3 \\ a_n = 5 - 2a_{n-1} \end{array} \right\} = \{3, -1, 7, \dots\} \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 = -1 \\ a_2 = 5 \\ a_n = \frac{n - a_{n-1}}{a_{n-2}} \end{array} \right\} = \{-1, 5, 2, \dots\}$$

¹La característica fundamental de las *sucesiones* que las distingue de los *conjuntos ordinarios* es que sus elementos están dispuestos en un **orden** determinado.

²En general los elementos de una *sucesión* pueden ser de cualquier tipo y pueden ser finitas, con un número determinado de elementos o bien con infinitos elementos. En este tema nosotros solo estamos interesados en las sucesiones numéricas infinitas, donde sus elementos son infinitos números reales, de forma que a partir de ahora el término *sucesión* hará referencia a "sucesiones numéricas infinitas".

³Ver la [Definición 2.1, página 49](#).

⁴Las llaves $\{ \}$ también se utilizan para definir a los elementos de un conjunto, por ejemplo $A = \{a, b, c\}$.

⁵Es decir, cuando la secuencia de términos de la sucesión sigue un patrón simple y fácil de interpretar.

⁶Ver la [Definición 8.5, página 193](#).

⁷Aunque no tan práctico.

8.1.3. Subsucesión

Definición 8.2. Subsucesión

Una **subsucesión** es cualquier *subconjunto infinito* de una *sucesión*.

Ejemplo 8.1. Subsucesión

Dada una determinada *sucesión*:

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

Podemos obtener de ella una determinada *subsucesión* tomando por ejemplo los términos impares:

$$\{a_{2n-1}\} = \{a_1, a_3, a_5, \dots\}$$

8.2. Tipos Básicos de Sucesiones

Vamos a ver algunos de los tipos de sucesiones elementales que aparecen con relativa frecuencia en problemas matemáticos, entre los que se encuentran:

- Progresiones aritméticas
- Progresiones geométricas
- Progresiones aritmético-geométricas
- Progresiones hipergeométricas
- Progresiones armónicas
- Sucesiones de potencias
- Sucesión de Fibonacci

8.2.1. Progresiones Aritméticas

Las **progresiones aritméticas** son sucesiones cuya *diferencia* entre un término y el siguiente es una constante d llamada **diferencia**, que puede ser una cantidad positiva o negativa.

$$a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3 \xrightarrow{+d} \dots$$

A continuación se muestra la *forma recurrente*, el *término general* y la fórmula que da la suma de los n primeros términos de una *progresión aritmética*:

$$\begin{cases} a_1 = c \\ a_n = a_{n-1} + d \end{cases}$$

Forma Recurrente

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Término General

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n$$

Suma n primeros términos

Demostración 8.0.

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + [a_1 + (n-1)d] = \\ &= na_1 + d[1 + 2 + \dots + (n-1)] = na_1 + d \frac{(n-1)(1+n-1)}{2} = na_1 + d \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}[2a_1 + d(n-1)] = \\ &= \frac{n}{2}[a_1 + \underbrace{a_1 + d(n-1)}_{a_n}] = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \end{aligned}$$

Ejercicio 8.1. Dada la siguiente sucesión: $\{5, 8, 11, 14, \dots\}$

Encontrar una forma recurrente, su término general y la suma de los 500 primeros términos.

Claramente es una progresión aritmética con $a_1 = 5$ y diferencia $d = 3$, por tanto su forma recurrente y su término general serán:

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = a_{n-1} + 3 \end{cases} \quad ; \quad a_n = 5 + 3(n-1)$$

La suma pedida es:

$$S_{500} = \frac{a_1 + a_{500}}{2} \cdot 500 = \frac{5 + (5 + 499 \cdot 3)}{2} \cdot 500 = \frac{5 + 1502}{2} \cdot 500 = 376750$$

8.2.2. Progresiones Geométricas

Las **progresiones geométricas** son sucesiones donde el **cociente** entre un término y el siguiente es una constante r llamada **razón**, que puede ser positiva o negativa.

$$a_1 \xrightarrow{\times r} a_2 \xrightarrow{\times r} a_3 \xrightarrow{\times r} \dots$$

A continuación se muestra la *forma recurrente*, el *término general* y la fórmula que da la suma de los n primeros términos de una *progresión geométrica*⁸:

$$\begin{cases} a_1 = c \\ a_n = a_{n-1} * r \end{cases}$$

Forma Recurrente

$$a_n = a_1 * r^{n-1}$$

Término General

$$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r} = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

Suma n primeros términos

Demostración 8.0.

$$\left\{ \begin{array}{l} s_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \\ r \cdot s_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n \end{array} \right\} \text{ Restando } s_n - r \cdot s_n = a(1 - r^n) \implies s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

Ejercicio 8.2. Dada la siguiente sucesión:

$$\{3, 15, 75, 375, \dots\}$$

Encontrar una forma recurrente, su término general y la suma de los 10 primeros términos.

Claramente es una progresión geométrica con $a_1 = 3$ y razón $r = 5$, por tanto su forma recurrente y su término general serán:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} * 5 \end{cases} \quad ; \quad a_n = 3 * 5^{n-1}$$

La suma pedida será:

$$S_{10} = \frac{3(5^{10} - 1)}{5 - 1} = \frac{3 + 9765625}{4} = 2441407$$

⁸Es común también definir la sucesión como $a_n = ar^n$ considerando el primer término para $n = 0$.

8.2.3. Progresiones Aritmético-Geométricas

Una **progresión aritmético-geométrica** es una sucesión cuyo término general tiene la forma⁹:

$$a_n = [\alpha + d(n-1)] r^{n-1} \quad ; \quad \alpha, d, r \in \mathbb{R}$$

Notar que si $r = 1$ es una *progresión aritmética*¹⁰ y si $d = 0$ se trata de una *progresión geométrica*¹¹.

La suma de los n primeros términos de una progresión aritmético-geométrica viene dada por la siguiente fórmula:

$$S_n = \frac{\alpha(1-r^n) + dr \left[\frac{1-r^{n-1}}{1-r} - (n-1)r^{n-1} \right]}{1-r} \quad ; \quad r \neq 1$$

Demostración 8.0.

$$\left\{ \begin{array}{l} S_n = \alpha + (\alpha+d)r + (\alpha+2d)r^2 + \dots + [\alpha+d(n-1)]r^{n-1} \\ r \cdot S_n = \alpha r + (\alpha+d)r^2 + (\alpha+2d)r^3 + \dots + [\alpha+d(n-1)]r^n \end{array} \right\} \quad r \neq 1$$

Restando $S_n - r \cdot S_n = \alpha + d(r+r^2+\dots+r^{n-1}) - [\alpha+d(n-1)]r^n = \alpha + d \left(\frac{1-r^n}{1-r} - 1 \right) - [\alpha+d(n-1)]r^n$

$$S_n - r \cdot S_n = \alpha + d \frac{r-r^n}{1-r} - [\alpha+d(n-1)]r^n = \alpha(1-r^n) + dr \frac{1-r^{n-1}}{1-r} - d(n-1)r^n$$

$$S_n = \frac{\alpha(1-r^n) + dr \left[\frac{1-r^{n-1}}{1-r} - (n-1)r^{n-1} \right]}{1-r}$$

8.2.4. Progresiones Hipergeométricas

Se denomina **progresión hipergeométrica** a las sucesiones cuyo cociente entre cada término por el inmediatamente anterior es una expresión de la forma¹²:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha + \gamma n}{\beta + \gamma n} \quad ; \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Las *progresiones geométricas*¹³ son un caso particular de las *progresiones hipergeométricas* ya que se obtienen para $\gamma = 0$, siendo la razón $r = \alpha/\beta$. La suma de los n primeros términos de una *progresión hipergeométrica* viene dada por la siguiente fórmula:

$$S_n = \frac{a_{n+1}(\beta + n\gamma) - a_1\beta}{\gamma + \alpha - \beta}$$

Demostración 8.0.

Dando valores a $n = 1, 2, \dots, m$ se tiene:

$$a_1(\alpha + \gamma) = a_2(\beta + \gamma)$$

$$a_2(\alpha + 2\gamma) = a_3(\beta + 2\gamma)$$

$$\vdots$$

$$a_m(\alpha + m\gamma) = a_{m+1}(\beta + m\gamma)$$

⁹Los valores de α , d y r deben ser apropiados para que no se obtengan sucesiones nulas. Una forma alternativa, considerando el primer término para $n = 0$ es $a_n = (\alpha + dn)r^n$. También reciben este nombre las sucesiones con término general $a_n = P_m(n)r^n$ donde $P_m(n)$ es cualquier polinomio de grado m en la variable n .

¹⁰Ver la Sección 8.2.1, página 184.

¹¹Ver la Sección 8.2.2, página 185.

¹²Los valores de α y γ no pueden anularse simultáneamente.

¹³Ver la Sección 8.2.2, página 185.

Sumando miembro a miembro y eliminando los sumandos comunes que figuran en ambos miembros, queda:

$$S_m(\alpha + \gamma) = S_m\beta - a_1\beta + a_{m+1}(m\gamma + \beta) \quad ; \quad S_m(\alpha + \gamma) - S_m\beta = a_{m+1}(m\gamma + \beta) - a_1\beta$$

$$S_m = \frac{a_{m+1}(m\gamma + \beta) - a_1\beta}{\gamma + \alpha - \beta}$$

8.2.5. Progresiones Armónicas

Se denomina **progresión armónica**¹⁴ a las sucesiones cuyo término general es de la forma:

$$a_n = \frac{1}{\alpha n + \beta} \quad ; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad , \quad \alpha \neq 0$$

Las *progresiones armónicas* están formadas por los recíprocos de una *progresión aritmética*¹⁵.

8.2.6. Sucesiones de Potencias

Las **sucesiones de potencias** están formadas por los números naturales elevados a una determinada potencia m también natural.

$$\{ 1^m, 2^m, 3^m, 4^m, \dots \} \quad ; \quad m \in \mathbb{N}$$

Algunos ejemplos:

$$\{ 1, 2, 3, 4 \dots \} \quad ; \quad \{ 1^2, 2^2, 3^2, 4^2 \dots \} \quad ; \quad \{ 1^3, 2^3, 3^3, 4^3 \dots \}$$

Para estos casos existen fórmulas simples que nos permiten determinar la suma los n primeros términos.

$$\text{Suma de los } n \text{ primeros naturales} \quad : \quad 1 + 2 + \dots + n \quad = \quad \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{Suma de los } n \text{ primeros cuadrados} \quad : \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 \quad = \quad \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{Suma de los } n \text{ primeros cubos} \quad : \quad 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 \quad = \quad \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

8.2.7. Sucesión de Fibonacci

La **sucesión de Fibonacci** es una sucesión muy conocida y práctica que viene dada en forma *recurrente*¹⁶ donde los dos primeros términos son la unidad y cada uno de los términos siguientes se obtiene sumando los dos anteriores.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{array} \right\} = \{ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots \}$$

Esta sucesión¹⁷ tiene importancia, además de en matemáticas, en campos como la computación, teoría de juegos y biología, entre otros.

¹⁴Tres números a , b y c se dice que están en *razón armónica* si $a/c = (a-b)/(b-c)$. Las *progresiones armónicas* se denominan así ya que cada tres términos consecutivos forman una *razón armónica*.

¹⁵Ver la [Sección 8.2.1, página 184](#).

¹⁶Ver la [Sección 8.1.2, página 183](#).

¹⁷Comúnmente mal llamada "serie de Fibonacci", ya que fue primeramente descrita por el matemático Leonardo de Pisa en el siglo XII.

8.3. Representación Gráfica de Sucesiones

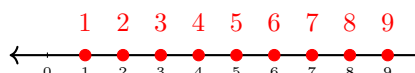
A veces es interesante representar gráficamente una sucesión para analizar sus propiedades, de una forma sencilla y eficaz. Vamos a ver dos tipos de representaciones gráficas apropiadas para sucesiones de números reales:

- Representación en la recta real
- Representación en unos ejes de coordenadas

8.3.1. Representación en la Recta Real

Una forma simple de representar una sucesión es colocar sus términos en la *recta real*, mediante puntos colocados en su correspondiente posición e indicando por ejemplo con números su ordenación. A continuación se muestran tres ejemplos:

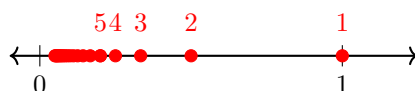
$$\{ n \} = \{1, 2, 3, \dots\}$$



$$\{ (-1)^n \} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$$



$$\left\{ \frac{1}{n} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$$



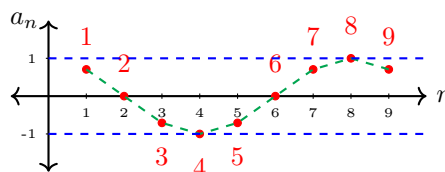
Esta representación unidimensional en la recta real es relativamente sencilla e intuitiva, pero solo es práctica para sucesiones con un comportamiento elemental. Cuando las sucesiones son más complicadas no resulta sencillo inferir sus propiedades mediante este tipo de representación gráfica y es preferible utilizar el otro tipo de representación que veremos a continuación.

8.3.2. Representación en Ejes de Coordenadas

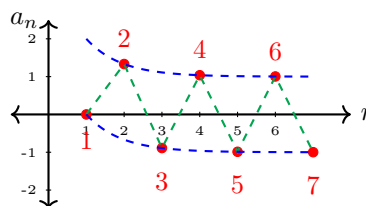
Otra forma de representar gráficamente las sucesiones es colocar sus términos en un sistema de *ejes coordenados*, donde el eje horizontal corresponde con el orden de los términos n y el eje vertical corresponde con el valor de cada uno de los términos a_n .

A continuación se muestran dos ejemplos de sucesiones y su correspondiente representación gráfica en este tipo de ejes coordenados. Además de los términos representados por puntos rojos, y su correspondiente orden, se muestran unas curvas en línea discontinua para apreciar mejor la tendencia de la sucesión.

$$\left\{ \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) \right\} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, \dots \right\}$$



$$\{ (-1)^n + 3^{1-n} \} = \left\{ 0, \frac{4}{3}, \frac{-8}{9}, \frac{28}{27}, \dots \right\}$$



8.4. Operaciones con Sucesiones

Vamos a estudiar las *operaciones básicas* entre sucesiones que permiten la formación de sucesiones más complicadas a través de sucesiones más sencillas.

Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ dos sucesiones de número reales. Entre ellas se pueden definir las siguientes operaciones básicas que dan lugar a nuevas sucesiones:

- $\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\} = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots\}$
- $\{x_n\} - \{y_n\} = \{x_n - y_n\} = \{x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, \dots\}$
- $\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\} = \{x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, x_3 \cdot y_3, \dots\}$
- $\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\} = \left\{ \frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \dots \right\} ; y_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

8.5. Monotonía

El concepto de **monotonía** en una sucesión hace referencia a la *uniformidad* de su comportamiento. Vamos a ver la definición de los diferentes tipos de **sucesiones monótonas**.

Definición 8.3. Sucesiones Monótonas

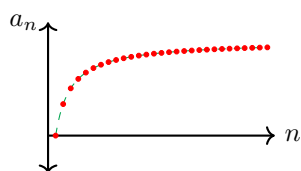
Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es:

- **Monótona Creciente**¹⁸ (Estricta) : si $a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- **Monótona Creciente No Estricta** : si $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\{1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, \dots\}$
- **Monótona Decreciente** (Estricta) : si $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\{-1, -2, -3, -4, \dots\}$
- **Monótona Decreciente No Estricta** : si $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\{-1, -1, -2, -3, \dots\}$
- **Monótona** : Si es Monótona **Creciente** o **Decreciente**.

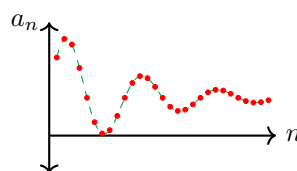
Nota 8.1.

- La mayoría de las sucesiones no son *monótonas* (de ningún tipo), al no cumplir ninguna de estas condiciones.
- A veces a las sucesiones *monótonas no decrecientes*¹⁹ se las denomina simplemente **crecientes** y a las *monótonas no crecientes*²⁰ se las denomina simplemente *decrecientes*.

Ejemplo 8.2. Sucesiones Monótonas y no Monótonas



Sucesión Monótona Creciente



Sucesión no Monótona

¹⁸En determinadas ocasiones se le añade la palabra *estricta* y en otras puede que no aparezca.

¹⁹Es decir a las sucesiones monótonas crecientes estrictas y no estrictas.

²⁰Es decir a las sucesiones monótonas decrecientes estrictas y no estrictas.

8.5.1. Determinación de la Monotonía

No siempre es fácil determinar si una sucesión es monótona o no, y en caso afirmativo de qué tipo es. Vamos a ver dos métodos de determinación de la monotonía de una sucesión, basados en el **conocimiento** de su *término general*²¹ $\{a_n\}$.

- El **primer método** se basa en determinar cuánto vale la **diferencia** entre dos términos sucesivos a_{n+1} y a_n de la sucesión.
 - Si este valor es siempre **mayor que cero** la sucesión será *monótona creciente*, y si es **mayor o igual que cero** será *monótona creciente no estricta*.
 - De igual forma si esta diferencia es **menor que cero** la sucesión será *monótona decreciente*, y si es **menor o igual que cero** será *monótona decreciente no estricta*.
- El **segundo método** no es tan general como el primero, ya que solo es válido si todos los términos tienen el mismo signo (positivo o negativo). Sin embargo en determinados casos puede resultar más sencillo de aplicar que el método anterior.

Este método se basa en comparar el **cociente** entre cada término y el inmediatamente anterior, con el valor de la unidad. Así, en el caso de que todos los términos de la sucesión sean **positivos**:

- Si dicho cociente es **mayor que 1** la sucesión es *monótona creciente* y si es **mayor o igual que 1** la sucesión es *monótona creciente no estricta*.
- De igual forma, si dicho cociente es **menor que 1** la sucesión es *monótona decreciente* y si es **menor o igual que 1** la sucesión es *monótona decreciente no estricta*.

En el caso de que todos los términos sean **negativos** la regla es al contrario, es decir: > 1 *decreciente* y < 1 *creciente*.

A continuación se muestra de forma esquemática los dos métodos de determinación de la monotonía.

Conocido el **Término General**: $\{a_n\}$

- **Método 1**

$$a_{n+1} - a_n \begin{cases} > 0 & \forall n \in \mathbb{N} & \implies & \text{M. Creciente} \\ \geq 0 & \forall n \in \mathbb{N} & \implies & \text{M. Creciente No Estricta} \\ < 0 & \forall n \in \mathbb{N} & \implies & \text{M. Decreciente} \\ \leq 0 & \forall n \in \mathbb{N} & \implies & \text{M. Decreciente No Estricta} \end{cases}$$
- **Método 2:** Si todos los términos son **positivos**:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \begin{cases} > 1 & \forall n \in \mathbb{N} & \implies & \text{M. Creciente} \\ \geq 1 & \forall n \in \mathbb{N} & \implies & \text{M. Creciente No Estricta} \\ < 1 & \forall n \in \mathbb{N} & \implies & \text{M. Decreciente} \\ \leq 1 & \forall n \in \mathbb{N} & \implies & \text{M. Decreciente No Estricta} \end{cases}$$

Si todos los términos son **negativos**, los criterios son:

> 1 **M. Dec.** ; ≥ 1 **M. Dec. No E.** ; < 1 **M. Crec.** ; ≤ 1 **M. Crec. No E.**

²¹En caso de no disponer del término general de la sucesión, el primer paso sería determinarlo.

Ejercicio 8.3. Estudiar la monotonía de las siguientes sucesiones de números reales:

$$\text{a) } \{ 10n - n^2 \} \qquad \text{b) } \left\{ \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right\} \qquad \text{c) } \left\{ \frac{n!}{2^n} \right\}$$

- a) A través del término general de la sucesión calculamos los primeros términos para entender el comportamiento inicial:

$$\{ 10n - n^2 \} = \{ 9, 16, 21, \dots \} \implies a_1 < a_2 < a_3$$

Los primeros tres términos son todos positivos y parece una sucesión monótona creciente, pero desconocemos en principio el comportamiento del resto de los términos. Vamos a utilizar el primer método, que es general, para la determinación de la monotonía de esta sucesión. Para ello calculamos la diferencia de dos términos sucesivos de la sucesión, teniendo en cuenta el término general:

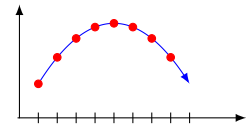
$$a_{n+1} - a_n = 10(n+1) - (n+1)^2 - (10n - n^2) = 10n + 10 - n^2 - 2n - 1 - 10n + n^2 = \boxed{9 - 2n}$$

Si estudiamos el signo del resultado vemos que:

$$9 - 2n \rightarrow \begin{cases} > 0 & \text{si } n < 5 \\ < 0 & \text{si } n \geq 5 \end{cases} \implies \boxed{\text{No es monótona}}$$

La sucesión es monótona creciente para los primeros cuatro términos y monótona decreciente a partir del quinto término, por tanto tiene dos comportamientos distintos y la sucesión **no** es monótona en su totalidad.

Si representamos gráficamente la sucesión, con ayuda de un software informático (por ejemplo *GeoGebra*, ver el [Sección C.1.3, página 361](#)), podemos verificar el resultado obtenido.



- b) Calculamos los primeros términos de la sucesión:

$$\left\{ \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right\} = \left\{ 0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots \right\} \implies a_1 < a_2 < a_3$$

Inicialmente parece una sucesión monótona creciente. Fijándonos en el término general claramente podemos determinar que todos los términos de esta sucesión, excepto el primero, son positivos por tanto podemos utilizar el segundo método para determinar la monotonía de la sucesión.

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} > 0 \quad \forall n > 1 \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} ?$$

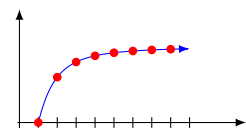
Haciendo uso del término general, calculamos el valor de dicho cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2 + 1}}{\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}} = \frac{[(n+1)^2 - 1](n^2 + 1)}{[(n+1)^2 + 1](n^2 - 1)} = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2 + 2n}{n^4 + 2n^3 + n^2 - 2n - 2} > 1 \quad \forall n > 1$$

Por tanto:

$$\implies a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies \boxed{\text{Monótona Creciente}}$$

Al igual que en el apartado anterior, si representamos gráficamente la sucesión podemos verificar el resultado obtenido.



- c) Calculamos los primeros términos de la sucesión, teniendo en cuenta la función *factorial* $n!$:

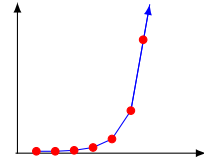
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \implies \left\{ \frac{n!}{2^n} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \dots \right\} \implies a_1 = a_2 < a_3$$

La sucesión a partir del segundo término parece monótona creciente. Como claramente todos los términos de la sucesión son positivos podemos utilizar el segundo método para estudiar la monotonía de la sucesión:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{\frac{2^{n+1}}{n!}} = \frac{2^n (n+1)!}{2^{n+1} n!} = \frac{n+1}{2} > 1 \quad \forall n > 1 \implies \boxed{\text{Monótona Creciente No Estricta}}$$

Como los dos primeros términos son iguales y por tanto su cociente es la unidad, la sucesión es monótona creciente pero no estricta.

Si representamos gráficamente la sucesión podemos verificar el resultado obtenido.



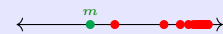
8.6. Acotación

Vamos a ver ahora el concepto de **acotación** en sucesiones, que junto con el concepto de **monotonía** visto anteriormente nos permitirán caracterizarlas.

Definición 8.4. Sucesiones Acotadas

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ está:

- **Acotada Superiormente:** Si $\exists M \in \mathbb{R} : a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- **Acotada Inferiormente:** Si $\exists m \in \mathbb{R} : a_n \geq m \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- **Acotada:** Si está acotada superiormente e inferiormente.



Ejemplo 8.3. Monotonía y Acotación

- $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ \longrightarrow **Monótona Creciente** y **Acotada Inferiormente**
- $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ \longrightarrow **Monótona Decreciente** y **Acotada**
- $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots\right\}$ \longrightarrow **Monótona Creciente** y **Acotada**
- $\left\{1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ \longrightarrow **Monótona Decreciente No Estricta** y **Acotada**
- $\{1, -1, 2, -2, 3, \dots, n, -n, \dots\}$ \longrightarrow **No Monótona** y **No Acotada**

8.7. Límite de una Sucesión

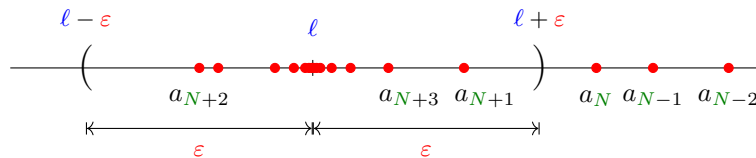
Vamos a ver la importante definición de el *límite de una sucesión*.

Definición 8.5. Límite de una Sucesión

Se dice que el **límite** de una sucesión $\{a_n\}$ cuando n tiende a infinito es un número real ℓ , y se representa de la siguiente forma, si se cumple la siguiente definición matemática²²:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad |a_n - \ell| < \varepsilon$$

Vamos a ver una interpretación gráfica de esta definición matemática. En la recta real disponemos el valor del **límite** ℓ , que es un número real, junto con una representación gráfica de los términos de la sucesión $\{a_n\}$ (puntos rojos) y sea ε el valor pequeño y positivo del que habla la definición, el cual representa una distancia alrededor del valor del límite y que da lugar a un *entorno*²³ de centro ℓ y radio ε , $E(\ell, \varepsilon) = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$.



Entonces, si para cualquier valor de ε que tomemos, por pequeño que sea, existe un determinado término a_N , a partir del cual todos los siguientes términos de la sucesión se encuentran dentro del entorno $E(\ell, \varepsilon)$, entonces se dice que el límite de la sucesión es ℓ .

Básicamente, una sucesión tiene *límite* si podemos encontrar infinitos términos de la sucesión tan cercanos²⁴ al valor del *límite* como queramos.

Ejercicio 8.4. Usando la definición de límite, determinar el límite de las siguientes sucesiones:

a) $\{c\}$ $c = \text{constante}$

b) $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$

a) Esta es una sucesión constante y por tanto claramente el límite de esta sucesión es el valor c . Vamos a comprobar que tomando este valor como el límite de la sucesión se cumple la **Definición 8.5**, **página 193**.

En este caso la relación que tiene que cumplirse $|a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$, se cumple para cualquier N , ya que tomando el límite $\ell = c$ y teniendo en cuenta que $a_n = c$, se tiene $|c - c| = 0 < \varepsilon$, ya que $\varepsilon > 0$. Por tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$$

²²Esto se lee de la siguiente forma: “el límite de una sucesión $\{a_n\}$ cuando n tiende a infinito es ℓ , si para cualquier valor ε mayor que cero y por pequeño que sea, existe un número natural N , tal que para cualquier número natural $n > N$, se cumple que la distancia del término a_n al valor del límite ℓ es menor que ε ”.

²³Ver la **Definición 1.17**, **página 34**.

²⁴Cuanto menor es el valor de ε , más cercanos están los términos de la sucesión al valor del límite.

b) Si calculamos los primeros términos de esta sucesión:

$$\left\{ \frac{1}{n} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$$

claramente observamos que sus términos van tendiendo a cero, por tanto parece evidente que este valor debe ser el límite de la sucesión.

Para demostrar que 0 es el límite de la sucesión, tenemos que encontrar un número natural N , dado un valor ε cualquiera, tal que a partir de él, todos los términos de la sucesión disten de 0 menos que ese valor ε .

$$\begin{aligned} \varepsilon &\stackrel{?}{\rightarrow} N \quad \mapsto \quad |a_n - 0| < \varepsilon \quad , \quad \forall n > N \\ \implies |a_n| < \varepsilon &\rightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon \rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \implies N = \frac{1}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Como ε es un número real y N tiene que ser real, al calcular el cociente $1/\varepsilon$ basta con tomar cualquier número natural mayor o igual que ese valor.

A veces es necesario determinar que un valor **no** es el límite de una sucesión. En esos casos es útil la siguiente definición de *no límite*.

Definición 8.6. No Límite de una Sucesión

Un determinado valor $\ell \in \mathbb{R}$ **no es el límite** de una sucesión $\{a_n\}$ si²⁵:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \ell \implies \exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} : \exists n \geq N \quad |a_n - \ell| \geq \varepsilon_0$$

Nota 8.2. Esto se lee de la siguiente forma: “el límite de una sucesión no es un valor ℓ si existe un valor $\varepsilon_0 > 0$ y un $n \in \mathbb{N}$ tal que la distancia entre a_n y el valor ℓ es mayor o igual que ε_0 ”.

Ejercicio 8.5. Demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \neq 1$

En este caso es fácil ver que:

$$|a_n - 1| = \left| \frac{1}{n} - 1 \right| \geq \frac{1}{2} \quad \forall n > 1$$

por tanto por ejemplo basta con tomar $\varepsilon_0 = 1/2$ y n cualquiera mayor que 1 para verificar la definición de *no límite*.

La determinación del límite de una sucesión a través de su definición²⁶, como hemos hecho en estos ejercicios, no resulta nada práctico en la mayoría de los casos. Por por ello, para determinar el límite de una sucesión siempre se utilizan diferentes propiedades de los límites que se verán a continuación.

²⁵Para negar una afirmación matemática basta con intercambiar los símbolos de *existe* (\exists) por los de *para todo* (\forall) y viceversa.

²⁶Definición 8.5, página 193 y Definición 8.6, página 194.

8.7.1. Convergencia

Definición 8.7. Sucesión Convergente y Divergente

- Una sucesión es **convergente** si tiene límite *finito*²⁷, y se dice que **converge** a dicho valor.
- Una sucesión que **no** es *convergente* es **divergente**²⁸.

Veamos ahora algunos resultados importantes relativos a las *sucesiones convergentes*.

Teorema 8.1. Sucesiones Convergentes

- Si una sucesión es **convergente** su *límite* es único.
- Si una sucesión es **convergente** está *acotada*²⁹.
- Toda *subsucesión*³⁰ de una sucesión **convergente**, también es **convergente** al mismo *límite*³¹.
- **Teorema de Bolzano-Weierstrass**: toda sucesión *acotada* tiene una *subsucesión convergente*.

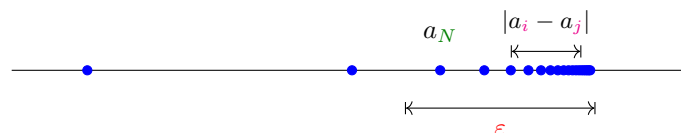
8.7.2. Sucesión de Cauchy o Fundamental

Definición 8.8. Sucesión de Cauchy o Fundamental

Se dice que $\{a_n\}$ es una **sucesión de Cauchy** o **fundamental** si:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall i, j \geq N \quad |a_i - a_j| < \varepsilon$$

Vamos a ver una explicación gráfica de esta importante definición matemática, disponiendo los términos de una sucesión en la recta real. Decimos que la sucesión es de Cauchy, si a partir de un determinado N , que es el índice de un término de la sucesión, la distancia que hay entre cualquier par de términos siempre es menor que un $\varepsilon > 0$ dado, por pequeño que sea.



Teorema 8.2. Completitud de \mathbb{R}

Una sucesión es **convergente** si y solo si es una **sucesión de Cauchy**.

- Las sucesiones de Cauchy son importantes por que describen la estructura interna que tienen que tener los términos de una sucesión para que sea *convergente*, es decir, que tenga *límite*.
- Además, caracterizar las sucesiones convergentes mediante el *criterio de Cauchy* tiene la ventaja de que no interviene el valor l del posible límite, sino solamente los valores de los términos de la sucesión.

²⁷Es decir, que tiene por límite un número real. Ver la definición de límite infinito en la [Definición 8.10, página 197](#).

²⁸En la [Sección 8.7.4, página 197](#) se estudian en detalle las sucesiones divergentes.

²⁹Ver la [Definición 8.4, página 192](#).

³⁰Ver la [Definición 8.2, página 184](#).

³¹Este teorema puede servir para determinar la *divergencia* de una sucesión, si encontramos al menos dos subsucesiones que tienen límites distintos.

8.7.3. Propiedades de los Límites de Sucesiones

Como se ha visto en las secciones anteriores, la determinación del límite de una sucesión no resulta nada práctica realizarla a través de su definición matemática. Pero esta definición sirve para determinar las propiedades de los límites y son con éstas con las que en la práctica se suele determinar el límite de una sucesión.

Vamos a empezar viendo las propiedades matemáticas más básicas de los límites de sucesiones. Como veremos, aunque son unas cuantas, son bastante sencillas y únicamente hay que habituarse a su nomenclatura.

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones convergentes, donde $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$, y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = y$. Entonces se cumple:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x + y$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x \cdot y$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{x}{y} \quad (\text{si } y \neq 0)$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{b_n} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = x^y \quad (\text{si } x > 0)$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} (\log_u a_n) = \log_u \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) = \log_u x \quad (\text{si } a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N})$$

$$6. \text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} (\log_u a_n) = c \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = u^c$$

$$7. \text{Si } a_n \leq b_n \text{ a partir de algún índice} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$8. \text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ y } \{b_n\} \text{ es acotada} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$$

$$9. \text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(c) \quad (\text{si } f(x) \text{ es continua en } x = c)$$

$$10. \text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x \text{ y } a_n \leq c_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = x \quad (\text{Regla del Sandwich}^{32})$$

Ejercicio 8.6. Utilizando las propiedades de los límites, calcular el límite de la siguiente sucesión:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Podemos utilizar la propiedad 9:

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(c) \quad (\text{si } f(x) \text{ es continua en } x = c)$$

Entonces, en este caso:

$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} = 0 \\ f(x) = \cos(x) \text{ es continua en } \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \cos 0 = 1}$$

³²También denominada *regla del emparedado*.

8.7.4. Divergencia

En la **Definición 8.7, página 195** se definió el concepto de *sucesión divergente* (aquella que no es *convergente*). En esta sección vamos a caracterizar las sucesiones divergentes y sus tipos. Empezamos con el concepto de límite infinito de una sucesión.

Definición 8.9. Límite Infinito

Se dice que $\{a_n\}$ tiene por límite $\pm\infty$ si³³:

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty & \iff & \forall k > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad a_n > k \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty & \iff & \forall k > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad a_n < -k \end{cases}$$

Veamos una explicación gráfica de ambas definiciones en la recta real. Que el límite de una sucesión sea ∞ (ó $+\infty$) significa que el valor de sus términos crece de forma indefinida y siempre podremos encontrar algún término a_n que sea **mayor** que cualquier valor k finito que elijamos (ver figura izquierda). De igual forma que el límite de una sucesión sea $-\infty$ significa que el valor de sus términos decrece de forma indefinida y siempre podremos encontrar algún término a_n que sea **menor** que cualquier valor $-k$ finito que elijamos (ver figura derecha).

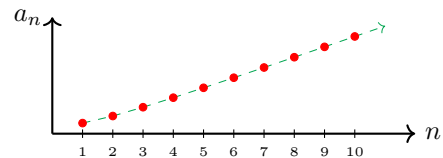


Definición 8.10. Sucesión Divergente hacia Infinito

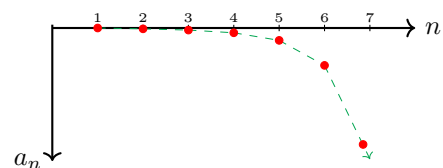
- Se dice que $\{a_n\}$ **diverge hacia $+\infty$** si : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$
- Se dice que $\{a_n\}$ **diverge hacia $-\infty$** si : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

Ejemplo 8.4. Sucesiones Divergentes hacia Infinito

• $\left\{ \frac{n^2 + 1}{n + 1} \right\} = \left\{ 1, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}, \frac{17}{5}, \dots \right\}$



• $\left\{ \frac{1 - n!}{2^n} \right\} = \left\{ 0, -\frac{1}{4}, -\frac{5}{8}, -\frac{23}{16}, \dots \right\}$



³³Estas dos definiciones se leen de la siguiente forma: “se dice que el límite de una sucesión a_n cuando n tiende a infinito es **más infinito** / **menos infinito**, si para cualquier número real k positivo, por muy grande que sea, siempre existe un número natural N tal que, todo término a_n cuyo orden n sea mayor o igual que N , siempre es mayor/menor que $k/-k$ ”.

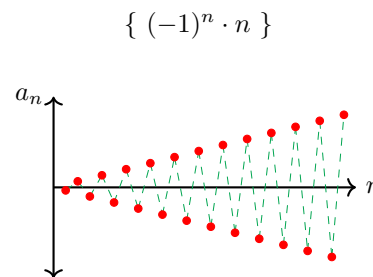
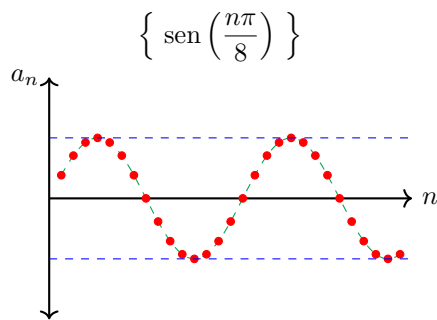
8.7.5. Sucesión Oscilante

Definición 8.11. Sucesión Oscilante

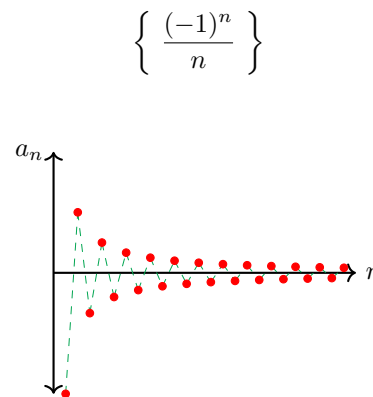
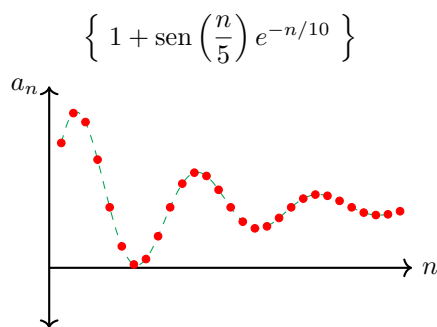
Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que es **oscilante** si no existe su límite:

$$\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Ejemplo 8.5. Sucesiones Oscilantes



Ejemplo 8.6. Sucesiones No Monótonas Convergentes



8.7.6. Resumen: Tipos de Sucesiones

Vamos a resumir los tipos de sucesiones que hemos visto.

Las sucesiones se pueden clasificar en función del valor de su límite, en los siguientes tipos:

- Sucesiones Convergentes :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \quad ; \quad l \in \mathbb{R}$$

- Sucesiones Divergentes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{S. Divergente hacia } \pm\infty : \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty \\ \text{S. Oscilante :} \quad \nexists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \end{array} \right.$$

8.8. Teorema de la Convergencia

La *convergencia*³⁴ de una sucesión depende de la existencia de su *límite*³⁵, y si existe de que éste sea finito. Si la sucesión está definida a través de su *término general*³⁶, el límite puede determinarse mediante técnicas de cálculo de límites³⁷. Sin embargo, si solo se dispone de la *forma recurrente*, no podemos utilizar estas técnicas y el siguiente teorema suele ser una herramienta muy útil en estos casos.

Teorema 8.3. Convergencia Monótona

Toda sucesión **monótona** y **acotada** es **convergente**, siendo su límite el extremo superior si la sucesión es creciente y el extremo inferior si es decreciente.

Demostración 8.3.

Demostración: Consideremos el caso de una sucesión monótona no decreciente:

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots$$

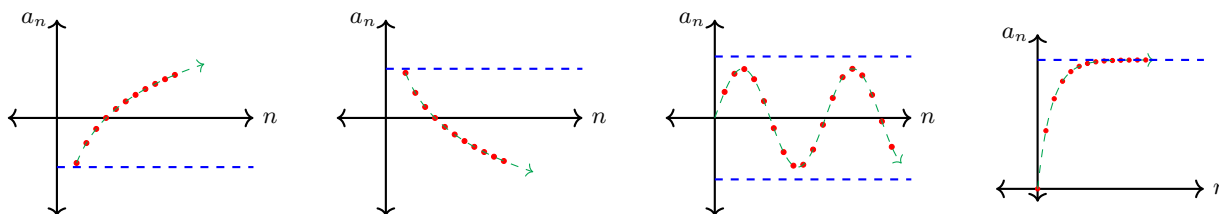
Por ser a_n un conjunto acotado de números reales tiene que tener supremo, que denominamos ℓ . Por definición de supremo: $a_n \leq \ell \forall n$, y dado un $\epsilon > 0$ existe un N tal que $\ell - a_N < \epsilon$.

Para $n > N$ por ser creciente:

$$a_n \geq a_N \Rightarrow \ell - a_n \leq \ell - a_N < \epsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \boxed{\ell}$$

El caso de una sucesión monótona no creciente se demuestra de igual forma.

En la siguiente figura se muestra una explicación gráfica de este teorema con ejemplos.



- Toda sucesión monótona creciente tiene siempre una cota inferior, pero puede ser divergente, creciendo constantemente y por tanto con límite infinito, (ver primera figura por la izquierda).
- También, toda sucesión monótona decreciente tiene siempre una cota inferior, pero puede ser divergente, decreciendo constantemente y por tanto con límite menos infinito, (ver segunda figura por la izquierda).
- Por otra parte, una sucesión acotada, puede ser oscilante y por tanto no existir su límite, (ver tercera figura por la izquierda).
- Sin embargo, si la sucesión es monótona, por ejemplo creciente como en el caso de la figura de la derecha, y además es acotada, obligatoriamente el crecimiento continuo debe tender hacia un valor que además de ser una cota superior, va a ser el límite de la sucesión cuando n tienda a infinito y por tanto va a ser convergente. Lo mismo pasa si la sucesión es monótona decreciente y acotada, donde su límite será una cota inferior.

³⁴Ver la [Definición 8.7](#), página 195.

³⁵Ver la [Definición 8.5](#), página 193.

³⁶Ver la [Sección 8.1.2](#), página 183.

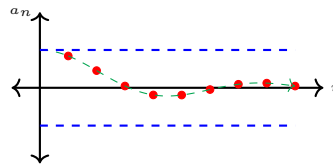
³⁷Ver la [Sección 8.10](#), página 204.

La *monotonía* es una condición *suficiente* para la convergencia, pero **no necesaria**³⁸.

Ejemplo 8.7. Monotonía en Sucesiones Convergentes

La siguiente sucesión no es **monótona**, ya que siguiendo la forma sinusoidal del numerador crece y decrece constantemente de forma acotada entre -1 y 1. Sin embargo a medida que crece n su denominador aumenta constantemente y por tanto el resultado del cociente tiende a 0 cuando n tiende a infinito. Por tanto es una sucesión convergente sin ser monótona.

$$\left\{ \frac{\text{sen}(n)}{n} \right\}$$



8.8.1. Relación entre Monotonía, Acotación y Convergencia

- Toda sucesión que sea **convergente**, tiene que ser obligatoriamente **acotada**. Es decir la *acotación* es una condición **necesaria** para la *convergencia*.
- Por ello, si una sucesión **no es acotada** (superior e inferiormente) obligatoriamente es **divergente**, con límite infinito o bien oscilante.
- Toda sucesión **monótona** y **acotada** es **convergente**, que es lo que establece el **Teorema 8.3, página 199**.
- La **monotonía** es una condición **suficiente** pero **no necesaria** para la convergencia, ya que hay sucesiones acotadas pero oscilantes que pueden ser convergentes³⁹.

- **Convergencia** \implies **Acotación**
- No **acotada** \implies **Divergente**
- **Acotación** + **Monotonía** \implies **Convergencia**
- **Monotonía** condición suficiente pero no necesaria

8.8.2. Límite de una Sucesión en Forma Recurrente

En caso de que una sucesión $\{a_n\}$ definida en forma recurrente sea convergente entonces existe su límite ℓ , verificándose:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+k} = \ell \quad ; \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Por ejemplo, sea la función de recurrencia $a_n = f(a_{n-1})$ de una sucesión convergente con límite:

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1}$$

Entonces tomando límites en la fórmula de recurrencia:

$$a_n = f(a_{n-1}) \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_{n-1}) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1}\right) \quad ; \quad \ell = f(\ell)$$

Esto da lugar a una ecuación (generalmente no lineal) en ℓ donde al menos una de sus soluciones debe ser ℓ .

³⁸Ver la **Sección 0.5, página 8**.

³⁹Como el ejemplo anterior y las mostradas en el **Ejemplo 8.6, página 198**.

8.8.3. Ejercicios

En esta sección vamos a ver algunos ejercicios resueltos sobre el estudio de la convergencia de sucesiones en forma recurrente.

Ejercicio 8.7. Demostrar la convergencia de la siguiente sucesión y calcular su límite.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n} \end{cases}$$

Calculamos los primeros términos: $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \dots\right\}$

Parece que la sucesión es **monótona decreciente**. Calculamos su **posible límite**:

$$\ell = \frac{1}{3 - \ell} \quad ; \quad \ell^2 - 3\ell + 1 = 0 \quad ; \quad \ell = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \approx \{0' \dots, 2' \dots\} \implies \boxed{\ell = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$$

De los dos valores nos quedamos con el de signo menos ya que el límite de la sucesión debería, en base a lo que hemos calculado, ser menor que 1.

Demostramos por **inducción** la acotación de la sucesión, por ejemplo: $0 < a_n \leq 1$.

- $a_n \leq 1 \begin{cases} a_1 = 1 \geq 1 \implies \text{Cierto!} \\ \text{Sup. } a_n \leq 1 \xrightarrow{\text{dem}} a_{n+1} \leq 1 : a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n} \stackrel{\text{Sup}}{\leq} \frac{1}{3 - 1} = \frac{1}{2} \leq 1 \implies \text{Cierto!} \end{cases}$
- $a_n > 0 \begin{cases} a_1 = 1 > 0 \implies \text{Cierto!} \\ \text{Sup. } a_n > 0 \xrightarrow{\text{dem}} a_{n+1} > 0 : a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n} \stackrel{\text{Sup}}{>} \frac{1}{3 - 0} = \frac{1}{3} > 0 \implies \text{Cierto!} \end{cases}$

Queda demostrada la acotación de la sucesión: $0 < a_n \leq 1$.

Demostramos ahora que es monótona decreciente, para ello se tiene que cumplir $a_{n+1}/a_n < 1$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(3 - a_n)a_n} < 1 \implies a_n^2 - 3a_n + 1 < 0$$

Vamos a demostrar esta expresión por inducción:

- $a_1 = 1 : 1^2 - 3 + 1 = -1 < 0 \implies \text{Cierto!}$
- Sup. $a_n^2 - 3a_n + 1 < 0 \xrightarrow{\text{dem}} a_{n+1}^2 - 3a_{n+1} + 1 < 0$

Determinamos su valor:

$$\left(\frac{1}{3 - a_n}\right)^2 - 3\frac{1}{3 - a_n} + 1 = \frac{1}{(3 - a_n)^2} - \frac{3}{3 - a_n} + 1 = \frac{1 - 3(3 - a_n) + (3 - a_n)^2}{(3 - a_n)^2} = \frac{1 - 3a_n + a_n^2}{(3 - a_n)^2}$$

Como el denominador es siempre positivo y el numerador, por hipótesis de inducción, es negativo, el cociente siempre es negativo y por tanto queda demostrado que es menor que cero.

La sucesión es monótona decreciente y acotada, por tanto **convergente** con límite $\ell = (3 - \sqrt{5})/2$.

Ejercicio 8.8. Estudiar la convergencia de la sucesión $\{a_n\}$ y dar el valor de su límite en caso de ser convergente.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt[3]{2a_n + (a_n)^2} \end{cases}$$

Obteniendo los primeros términos de la sucesión:

$$\{1, \sqrt[3]{3}, \dots\} = \{1, 1', \dots\}$$

Parece ser monótona creciente. Encontramos el valor del posible límite ℓ de la sucesión, tomando límites a ambas partes de la fórmula de recurrencia:

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} \implies \ell = \sqrt[3]{2\ell + \ell^2} \quad ; \quad \ell^3 - \ell^2 + 2\ell = 0$$

$$\ell(\ell - 2)(\ell + 1) = 0 \implies \begin{cases} \ell = 0 & \text{imposible si es creciente} \\ \ell = -1 & \text{imposible si es creciente} \\ \ell = 2 & \text{posible límite} \end{cases}$$

Por tanto, si es convergente, su límite es 2 con: $1 \leq a_n < 2$. Intentamos demostrar estas características. Empezamos con la acotación por inducción:

- $a_n \geq 1 \begin{cases} a_1 = 1 \geq 1 \implies \text{Cierto!} \\ \text{Sup. } a_n \geq 1 \xrightarrow{\text{dem}} a_{n+1} \geq 1 : a_{n+1} = \sqrt[3]{2a_n + a_n^2} \stackrel{\text{Sup}}{\geq} \sqrt[3]{3} \geq 1 \implies \text{Cierto!} \end{cases}$
- $a_n < 2 \begin{cases} a_1 = 1 < 2 \implies \text{Cierto!} \\ \text{Sup. } a_n < 2 \xrightarrow{\text{dem}} a_{n+1} < 2 : a_{n+1} = \sqrt[3]{2a_n + a_n^2} \stackrel{\text{Sup}}{<} \sqrt[3]{8} = 2 \implies \text{Cierto!} \end{cases}$

Queda demostrada la acotación de la sucesión: $1 \leq a_n < 2$.

Demostramos ahora que es monótona creciente, demostrando que $a_{n+1}/a_n > 1$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt[3]{2a_n + (a_n)^2}}{a_n} = \sqrt[3]{\frac{2}{a_n^2} + \frac{1}{a_n}} \stackrel{a_n < 2}{>} \sqrt[3]{\frac{2}{2^2} + \frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt[3]{1} = 1$$

Queda demostrado también que la sucesión es monótona creciente y por tanto convergente con límite 2.

8.9. El Número e

Vamos a estudiar en esta sección uno de los números más importantes que hay en matemáticas, como es el número e . Empezamos analizando una *sucesión* particular, cuyo término general es la siguiente:

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\} = \left\{ 2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4, \dots, \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \dots \right\} = \{ 2, 2.25, 2.37, 2.44, \dots \}$$

Dando valores a n se pueden obtener los primeros términos en forma de fracción y su forma decimal correspondiente. Para valores altos de n se puede observar que tiende a un valor aproximado de 2.7, con lo que parece que es una sucesión convergente.

Vamos a analizar la sucesión desde el punto de vista de los límites. Empecemos analizando el límite de sucesiones similares pero algo más sencillas.

1. El primer límite es similar pero sustituyendo la potencia n por un número k tan grande como se quiera pero finito. Aplicando las propiedades de los límites se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k = \left(1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}\right)^k = (1 + 0)^k = 1^k = 1$$

2. El segundo límite similar se obtiene sustituyendo el denominador n por un número k tan grande como se quiera pero finito. Aplicando las propiedades de los límites se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^n = \left(\frac{k+1}{k}\right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} n} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^\infty = (1' \dots)^\infty = \infty$$

3. El que nos interesa tiene n tanto en la potencia como en el denominador y tiene que ser un resultado intermedio entre 1 e ∞ , pero al calcularlo da lugar a una indeterminación:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}\right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} n} = (1+0)^\infty = 1^\infty = ?$$

Aunque no lo haremos aquí por ser algo largo (aunque no difícil), se puede demostrar matemáticamente que esta sucesión es *monótona creciente y acotada*, por tanto **convergente** a un *número irracional* denominado⁴⁰ **número e** , siendo sus primeros dígitos decimales los siguientes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828182845904523536\dots$$

El **número e** es seguramente el número más importante de las matemáticas y aparece además relacionado en múltiples ramas de la ciencia como economía, biología, física, etc.

8.9.1. Definiciones Alternativas del Número e

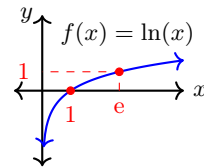
Como hemos visto, el *número e* se puede definir a través del siguiente límite:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Pero también se puede definir a través de otras formas alternativas:

- Resultado de la siguiente **ecuación**:

$$\ln(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad x = e$$



donde $\ln()$ es el logaritmo neperiano o natural de base e .

- Suma de la siguiente serie infinita⁴¹:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

- Límite alternativo a través de *infinitésimos*⁴²:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \epsilon_n)^{1/\epsilon_n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0 \quad (\text{infinitésimo})$$

- Límite alternativo a través de *infinitos*⁴³:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pm\infty \quad (\text{infinito})$$

⁴⁰Fue el gran matemático Euler en el siglo XVIII el primero en utilizar esta notación, aunque su descubrimiento y primeros usos se reparten entre varios matemáticos como Neper, Jacob Bernoulli y Leibniz entre otros.

⁴¹Ver la [Sección 9.3, página 229](#).

⁴²Ver la [Sección 8.11, página 216](#).

⁴³Ver la [Definición 8.14, página 216](#).

8.9.2. Función Exponencial

Como hemos visto, el número e se puede definir de varias formas, siendo dos de ellas las siguientes:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \epsilon_n)^{1/\epsilon_n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$$

Estamos interesados en determinar el valor del siguiente límite, el cual define una determinada función en la variable x :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = ?$$

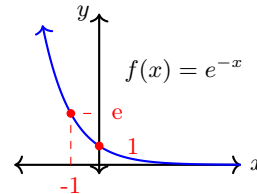
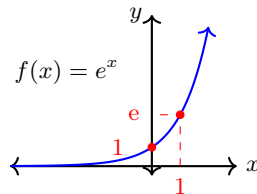
Para calcular este límite hacemos uso del concepto de *infinitésimo*⁴² ϵ_n para despejar el valor de n :

$$\epsilon_n = \frac{x}{n}, \quad n = \frac{x}{\epsilon_n}$$

Por tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \epsilon_n)^{\frac{x}{\epsilon_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(1 + \epsilon_n)^{\frac{1}{\epsilon_n}}\right]^x = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \epsilon_n)^{\frac{1}{\epsilon_n}}\right]^x = \boxed{e^x}$$

Esta importante función recibe el nombre de **función exponencial**⁴⁴, siendo su representación gráfica y la de su inversa las siguientes:



8.10. Cálculo de Límites de Sucesiones

Cuando una sucesión viene definida a través de su *término general*⁴⁵ podemos utilizar técnicas particulares de cálculo para determinar su límite, que serán estudiadas en esta sección.

Vamos a estudiar primero las operaciones con el símbolo infinito y el concepto de *indeterminación*, para posteriormente analizar el proceso de cálculo de límites de sucesiones y su aplicación en diferentes tipos de sucesiones e indeterminaciones.

8.10.1. Operaciones con Infinito

En la [Sección 8.7.3, página 196](#) hemos visto las propiedades de los límites finitos⁴⁶ y en la [Definición 8.9, página 197](#) vimos la introducción del valor *infinito* en los límites de las sucesiones *divergentes*. Vamos a ver aquí como trabajar con los límites de *valor infinito*.

Las propiedades generales del límite son también válidas para el caso $\pm\infty$, siempre que se sigan las siguientes **reglas** particulares relativas a las operaciones con *infinito*.

⁴⁴Ver la [Sección 2.8.5, página 62](#).

⁴⁵Ver la [Sección 8.1.2, página 183](#).

⁴⁶Correspondientes a las sucesiones *convergentes*.

Sea $a \in \mathbb{R}$, entonces se cumple:

$$\bullet a + \infty = \infty \quad ; \quad a - \infty = -\infty$$

$$\bullet \infty + \infty = \infty \quad ; \quad -\infty - \infty = -\infty$$

$$\infty - \infty = \text{Indeterminación}$$

$$\bullet a \cdot \infty = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} (+\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty) \\ (+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \\ (-\infty) \cdot (-\infty) = (+\infty) \end{cases}$$

$$\infty \cdot 0 = \text{Indeterminación}$$

$$\bullet \frac{a}{\pm\infty} = 0 \quad ; \quad \frac{a}{0} = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$$\frac{0}{0} = \frac{\infty}{\infty} (= \infty \cdot 0) = \text{Indeterminación}$$

$$\bullet \infty^a = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \quad \text{ó } a = +\infty \\ 0 & \text{si } a < 0 \quad \text{ó } a = -\infty \end{cases}$$

$$\infty^0 = \text{Indeterminación}$$

$$\bullet a^\infty = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ 0 & \text{si } -1 < a < 1 \\ \nexists & \text{si } a \leq -1 \quad (\neq \text{Indeterminación}) \end{cases}$$

$$0^0, 1^\infty = \text{Indeterminación}$$

En estas operaciones aparecen varios resultados como **indeterminación**. Veamos su definición:

Definición 8.12. Indeterminación

En el cálculo de límites, una operación se dice que es una **indeterminación** si no se sabe si existe o no su resultado, y en el caso de que exista, se desconoce su valor.

Diferencia entre una *indeterminación* y un valor que *no existe*:

- El valor de una operación *no existe* cuando no hay un resultado que verifique dicha operación. Por ejemplo valores que no existen son⁴⁷:

$$\frac{1}{0} \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$$

- El valor de un límite es una *indeterminación* cuando en la operación que lo define no se tiene la suficiente información para determinar si existe un resultado o no. Por ejemplo los siguientes límites de sucesiones generan (inicialmente) indeterminaciones:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n) = \infty - \infty \quad ? \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = \frac{\infty}{\infty} \quad ?$$

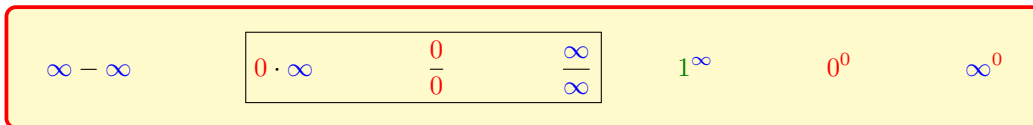
- Las *indeterminaciones* solo aparecen en el cálculo de límites y no en operaciones normales con números.
- Cuando aparece una *indeterminación* en el cálculo de un límite el primer paso es **resolverla**⁴⁸, que consiste en expresar la operación del límite de una forma alternativa pero equivalente y que no presente ninguna *indeterminación* en su cálculo.

⁴⁷El primer caso se trata de una operación entre números reales y no existe ningún número que al multiplicarlo por 0 de 1. Recordamos que ∞ **no** es un número. El segundo caso es el cálculo de un límite y en función de que el exponente $n \in \mathbb{N}$ sea par o impar dará un resultado (1) u otro (-1), por tanto no existe el valor de dicho límite cuando n crezca de forma indefinida.

⁴⁸Ver la [Sección 8.10, página 204](#).

8.10.2. Tipos de Indeterminaciones

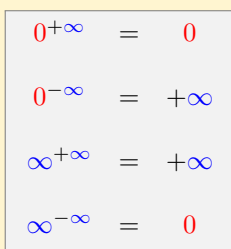
Existen 7 indeterminaciones, donde 3 de ellas son *equivalentes*:



Nota 8.3. Las tres indeterminaciones equivalentes *equivalentes* son distintas formas de expresar una misma indeterminación:

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0} = 0 \cdot \frac{1}{0} = 0 \cdot \infty$$

Notar que **no son indeterminaciones** las siguientes potencias con infinito:



Estos resultados se pueden obtener teniendo en cuenta la siguiente relación entre potencias⁴⁹:

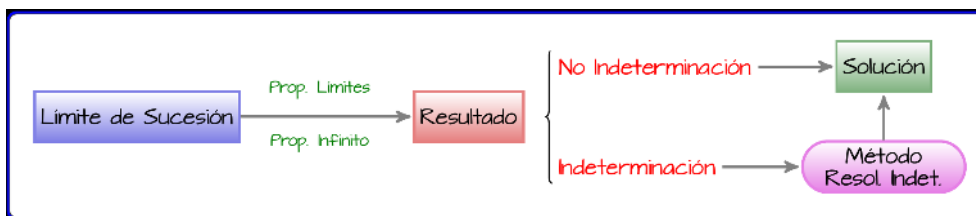
$$A = a^b \quad ; \quad \ln A = \ln(a^b) \quad ; \quad \ln A = b \ln a \quad ; \quad A = e^{b \ln a} \quad \implies \quad a^b = e^{b \ln a}$$

Por tanto:

- $0^\infty = e^{\infty \ln 0} = e^{\infty \cdot (-\infty)} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$
- $0^{-\infty} = e^{-\infty \ln 0} = e^{-\infty \cdot (-\infty)} = e^\infty = \infty$
- $\infty^\infty = e^{\infty \ln \infty} = e^{\infty \cdot (\infty)} = e^\infty = \infty$
- $\infty^{-\infty} = e^{-\infty \ln \infty} = e^{-\infty \cdot (\infty)} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$

8.10.3. Proceso de Cálculo de Límites de Sucesiones

El proceso general de la determinación del valor del límite de una sucesión es el siguiente:



1. Primeramente aplicamos las *propiedades de los límites*⁵⁰ y la *aritmética de infinitos*⁵¹ con lo que se obtendrá un resultado inicial.

⁴⁹La función $\ln()$ es el *logaritmo neperiano* o *natural* y e es el *número e*, ver la *Sección 2.8.4, página 61* y la *Sección 8.9, página 202*.

⁵⁰Ver la *Sección 8.7.3, página 196*.

⁵¹Ver la *Sección 8.10.1, página 204*.

En algunos casos, será necesario tener en cuenta el comportamiento particular de las funciones que componen el término general de la sucesión, por ejemplo si contienen funciones trigonométricas.

- Si este resultado no contiene ninguna *indeterminación*⁵², entonces éste resultado corresponde con la **solución**.
- Si aparecen *indeterminaciones* tendremos que aplicar los **métodos** de resolución de indeterminaciones que veremos en esta sección, y a través de ellos obtener la **solución**.

Vamos a ver los siguientes casos:

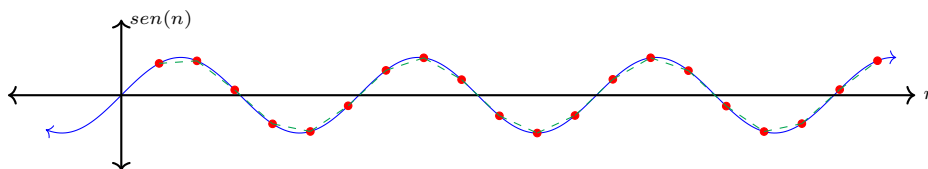
- Límite de Funciones Simples
- Límite de Polinomios
- Límite de Funciones Racionales y similares
- Indeterminación $\infty - \infty$
- Indeterminaciones ∞/∞ y $0/0$ (**Criterio de Stolz**)
- Indeterminación 0∞
- Indeterminaciones 0^0 e ∞^0
- Indeterminación 1^∞

8.10.4. Límite de Funciones Simples

La existencia y el posible valor del límite de una sucesión depende de la función que define su término general y de la disposición de los términos de la sucesión en dicha función. Vamos a ver varios ejemplos:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{sen}(n)$

Para calcular el valor de este límite tenemos que tener en cuenta que la función $\text{sen } x$ es continua, acotada entre -1 y 1 y con la siguiente forma (trazo en azul):



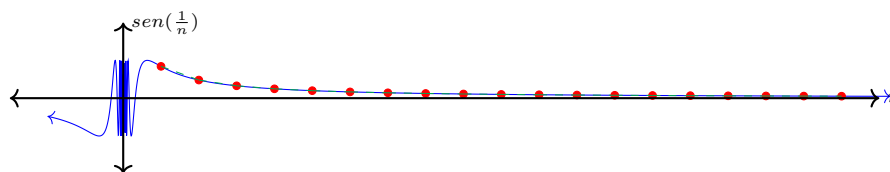
La sucesión (en rojo) está formada por determinados puntos de la función y su tendencia no necesariamente tiene que seguir el comportamiento de la función, ya que depende de los términos de la sucesión.

En este caso, dando valores naturales a n se obtienen los siguientes puntos y la sucesión es oscilante, y por tanto el límite no existe.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{sen}(n) = \text{No existe}$$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

Si analizamos la función $\text{sen } 1/x$ vemos que no existe en $x = 0$ y que entre -1 y 1 tiene unas rápidas oscilaciones. Sin embargo fuera de este intervalo la función suavemente tiende hacia cero.



⁵²Ver la [Sección 8.10.2, página 206](#).

Dando valores a n podemos visualizar los puntos correspondientes a los términos de la sucesión, que como vemos siguen la tendencia suave de la función.

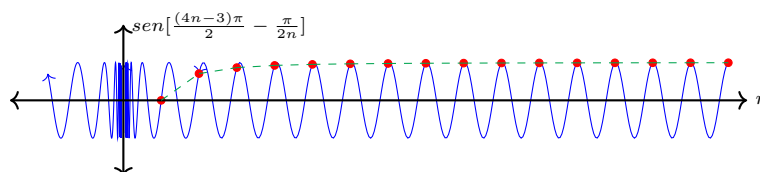
Notar que para determinar el límite de esta función, no es necesario representar gráficamente su comportamiento y basta aplicar las propiedades de los límites.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{n} \right) = \operatorname{sen} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) = \operatorname{sen}(0) = \boxed{0}$$

- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sen} \left[\frac{(4n-3)\pi}{2} - \frac{\pi}{2n} \right]$$

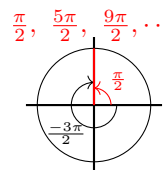
Este tercer caso también se trata de una función seno pero con un argumento algo más complicado.

Si representamos gráficamente la función asociada al término general, vemos que oscila fuertemente en un entorno del origen y que no existe para $x = 0$, pero tiene un comportamiento sinusoidal similar al de la función seno en el resto del dominio (trazo azul).



Si representamos los primeros términos de la sucesión vemos que en principio parece que la sucesión tiende a 1. Para determinar el límite de la sucesión debemos analizar el argumento de la función seno.

$$\left[\frac{(4n-3)\pi}{2} - \frac{\pi}{2n} \right] \begin{cases} \frac{\pi}{2n} \rightarrow 0 \\ \frac{(4n-3)\pi}{2} = [2\pi n - \frac{3\pi}{2}] \rightarrow \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \dots \right\} \end{cases}$$



Vemos que cuando n tiende a infinito el término $\pi/2n$ tiende a cero y por tanto no es necesario tenerlo en cuenta cuando $n \rightarrow \infty$.

Por otra parte reordenando el otro término, se obtiene $\pi/2 + (n-1)$ vueltas en la circunferencia unidad. Por tanto, volviendo al límite de la sucesión, es igual al valor del seno de $\pi/2$ más un número de vueltas $2k\pi$, que es **igual** al seno de $\pi/2$ que es la unidad.

Por tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sen} \left[\frac{(4n-3)\pi}{2} - \frac{\pi}{2n} \right] = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \boxed{1}$$

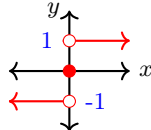
Como hemos visto, en la determinación del límite de una sucesión, es necesario en algunos casos, analizar el comportamiento de las funciones que componen el término general.

8.10.5. Límite de Polinomios

El límite de una sucesión cuyo término general es un polinomio depende de su grado k , y puede dar lugar a dos valores distintos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left(a_k + a_{k-1} \frac{1}{n} + \dots + a_1 \frac{1}{n^{k-1}} + a_0 \frac{1}{n^k} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^k a_k = \begin{cases} \operatorname{sign}(a_k) \infty & \text{si } k > 0 \\ a_0 & \text{si } k = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

donde $\operatorname{sign}()$ es la *función signo* definida como:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$


Notar que siguiendo el procedimiento anterior e independientemente de los signos de los coeficientes de los monomios, los polinomios no presentan ningún problema con la indeterminación⁵³ $\infty - \infty$.

Ejercicio 8.9. Calcular los siguientes límites de sucesiones:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} 3n^2 + n - 1$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} -n^3 + 100n^2 + n + 5$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} -3$

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} 3n^2 + n - 1 = \boxed{+\infty}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} -n^3 + 100n^2 + n + 5 = \boxed{-\infty}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} -3 = \boxed{-3}$

8.10.6. Límite de Sucesiones Racionales y similares

Vamos a ver como determinar límites de sucesiones racionales formadas por cociente de polinomios de la forma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} \implies P(n), Q(n) \text{ polinomios.} \implies \boxed{\text{Ind. } \pm \frac{\infty}{\infty}}$$

Estos límites generan indeterminaciones del tipo ∞/∞ y pueden resolverse fácilmente sacando factor común del monomio de mayor grado en el numerador y en el denominador, y simplificando⁵⁴ de la siguiente forma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_k n^k + \alpha_{k-1} n^{k-1} + \dots + \alpha_0}{\beta_j n^j + \beta_{j-1} n^{j-1} + \dots + \beta_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k (\alpha_k + \alpha_{k-1} \frac{1}{n} + \dots + \alpha_0 \frac{1}{n^k})}{n^j (\beta_j + \beta_{j-1} \frac{1}{n} + \dots + \beta_0 \frac{1}{n^j})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_k}{\beta_j} n^{k-j}$$

Por tanto este tipo de límites tienen el siguiente resultado:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_k n^k + \alpha_{k-1} n^{k-1} + \dots + \alpha_0}{\beta_j n^j + \beta_{j-1} n^{j-1} + \dots + \beta_0} = \begin{cases} \text{sign} \left(\frac{\alpha_k}{\beta_j} \right) \cdot \infty & \text{si } k > j \\ \frac{\alpha_k}{\beta_j} & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k < j \end{cases}$$

Notar que esta misma técnica se puede aplicar en el caso de tener cociente de raíces n -ésimas de polinomios, de la siguiente forma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[r]{P(n)}}{\sqrt[s]{Q(n)}} = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[r]{\alpha_k}}{\sqrt[s]{\beta_j}} n^{k/r-j/s}$$

dependiendo el resultado, en caso de existir, de los coeficientes y grados de los polinomios y los índices de las raíces.

⁵³Ver la Sección 8.10.7, página 210.

⁵⁴Notar que cuando $n \rightarrow \infty$ toda fracción $1/n^a$ tiende a cero.

Ejercicio 8.10. Determinar el valor de los siguientes límites de sucesiones:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2}{1 - n} & \text{b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 - 2n^2 + 1}{n^5 - 3n^3} & \text{c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 4n^7}{n^7 + 12n} \\ \text{d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2 - 3}}{2n + 1} & \text{e)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5 - n^4}}{\sqrt{2n + 1}} & \text{f)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 - n}}{\sqrt[4]{2n^6 + 1}} \end{array}$$

$$\text{a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2}{1 - n} = \boxed{-\infty}$$

$$\text{b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 - 2n^2 + 1}{n^5 - 3n^3} = \boxed{0}$$

$$\text{c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 4n^7}{n^7 + 12n} = \boxed{-4}$$

$$\text{d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2 - 3}}{2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}n}{2n} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\text{e)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5 - n^4}}{\sqrt{2n + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{5/2}}{\sqrt{2}n^{1/2}} = \boxed{+\infty}$$

$$\text{f)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 - n}}{\sqrt[4]{2n^6 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{4/3}}{\sqrt[4]{2}n^{3/2}} = \boxed{0}$$

8.10.7. Indeterminaciones

Indeterminación $\infty - \infty$ en Polinomios

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} - a_{k-2} n^{k-2} + \dots) = \infty + \infty - \infty + \dots = \boxed{\infty - \infty}$$

En estos casos basta con sacar factor común al monomio de mayor grado para deshacer la indeterminación⁵⁵.

Ejemplo 8.8. Indeterminación $\infty - \infty$ en Polinomios

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} -n^3 + n \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(-1 + \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} -n^3 = \boxed{-\infty}$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} 3n^4 + n^3 - 5n^2 - n + 8 \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \left(3 + \frac{1}{n} - 5\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + 8\frac{1}{n^4} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3n^4 = \boxed{\infty}$$

Indeterminación $\infty - \infty$ en Raíces

Vamos a ver ahora el caso de las sucesiones formadas por diferencia de raíces donde aparece la indeterminación $\infty - \infty$. Para resolver la indeterminación en este caso, basta con transformar la diferencia de raíces por otra expresión equivalente, algo más compleja, pero que no produce dicha indeterminación.

Para ello se utiliza la siguiente fórmula donde A y B son expresiones cualesquiera y n es el índice de las raíces, que puede ser cuadradas $n = 2$, cúbicas $n = 3$, etc.

$$\sqrt[n]{A} - \sqrt[n]{B} = \frac{A - B}{\sqrt[n]{A^{n-1}} + \sqrt[n]{A^{n-2}B} + \sqrt[n]{A^{n-3}B^2} + \dots + \sqrt[n]{AB^{n-2}} + \sqrt[n]{B^{n-1}}}$$

Notar que en el denominador hay una suma de raíces n -ésimas del producto de A por B , elevados a todas las potencias que suman $n - 1$.

⁵⁵Ver la Sección 8.10.5, página 208.

Aquí mostramos algunos ejemplos sencillos.

$$\boxed{\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}} \quad \boxed{\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} = \frac{A - B}{\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}}} \quad \boxed{\sqrt[4]{A} - \sqrt[4]{B} = \frac{A - B}{\sqrt[4]{A^3} + \sqrt[4]{A^2B} + \sqrt[4]{AB^2} + \sqrt[4]{B^3}}}$$

Ejercicio 8.11. Determinar el valor de los siguientes límites de sucesiones:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^3 - 3n} - \sqrt{n^3}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(\sqrt[4]{n^2 + 1} - \sqrt{n + 1} \right)$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2}{\sqrt{9n^2 - 1} - n - 2}$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - \sqrt{3n + 1}}{\sqrt[3]{n} - n}$

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^3 - 3n} - \sqrt{n^3} \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 3n - n^3}{\sqrt{n^3 - 3n} + \sqrt{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n}{\sqrt{n^3 - 3n} + \sqrt{n^3}} \stackrel{\infty/\infty}{=} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n}{2n^{3/2}} = \boxed{0}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(\sqrt[4]{n^2 + 1} - \sqrt{n + 1} \right) \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(\sqrt[4]{n^2 + 1} - \sqrt[4]{(n + 1)^2} \right) =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} (n^2 + 1 - (n + 1)^2)}{\sqrt[4]{(n^2 + 1)^3} + \sqrt[4]{(n^2 + 1)^2(n + 1)^2} + \sqrt[4]{(n^2 + 1)(n + 1)^4} + \sqrt[4]{(n + 1)^6}} \stackrel{\infty/\infty}{=} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n\sqrt{n} + \dots}{4n^{6/4} + \dots} = \boxed{\frac{1}{2}}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2}{\sqrt{9n^2 - 1} - (n + 2)} \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2}{\sqrt{9n^2 - 1} - \sqrt{(n + 2)^2}} =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2[\sqrt{9n^2 - 1} + (n + 2)]}{9n^2 - 1 - (n + 2)^2} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2(4n) + \dots}{8n^2 + \dots} = \boxed{+\infty}$

d) En este caso también se podría usar la fórmula de diferencia de raíces, pero ya que en el denominador hay una diferencia de términos de órdenes distintos, $n^{1/3}$ y n , resulta más sencillo su resolución dividiendo numerador y denominador por el término de mayor orden, en este caso n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - \sqrt{3n + 1}}{\sqrt[3]{n} - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{\sqrt{3n + 1}}{n}}{\frac{\sqrt[3]{n}}{n} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \sqrt{\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} - 1} = \boxed{-2}$$

Indeterminaciones ∞/∞ y $0/0$. Criterio de Stolz

Vamos a ver un teorema que establece un método para resolver las indeterminaciones equivalentes⁵⁶ del tipo $0/0$ ó ∞/∞ en el cálculo de límites de sucesiones generalmente complicados.

⁵⁶Ver la Nota 8.10.2, página 206.

Teorema 8.4. Criterio o Regla de Stolz

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones que cumplen al menos una de las siguientes condiciones:

- $\{b_n\}$ es monótona estricta (Creciente o Decreciente).
- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \pm\infty$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Si existe: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \ell$ (finito o infinito) \implies $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \ell$

Notar que el teorema necesita que se cumplan **dos** exigencias: que las sucesiones cumplan alguna de las tres condiciones y que exista el límite ℓ

En caso de cumplirse podremos transformar el cálculo del límite de la sucesión $\{a_n/b_n\}$, que será una indeterminación $0/0$ ó ∞/∞ , por otro límite del cociente de las diferencias de dos términos consecutivos, que en los casos prácticos será más sencillo y no tendrá indeterminaciones.

Consecuencias del Criterio de Stolz

Vamos a ver ahora unas consecuencias directas que se obtienen de la aplicación del *criterio de Stolz*, que dan lugar a unas reglas sencillas pero muy útiles para el cálculo de límites de sucesiones.

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell$ (finito o infinito), entonces:

- Regla de la Media Aritmética (R.M.A.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \stackrel{\text{Stolz}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + \dots + x_n - (x_1 + \dots + x_{n-1})}{n - (n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{1} = \boxed{\ell}$$

- Regla de la Media Geométrica (R.M.G.)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left[\frac{\ln(x_1 \cdots x_n)}{n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left[\frac{\ln x_1 + \dots + \ln x_n}{n} \right] = \\ &= \exp \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x_1 + \dots + \ln x_n}{n} \right] \stackrel{\text{R.M.A.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \exp [\ln x_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \boxed{\ell} \end{aligned}$$

- Regla de la Raíz (R.R.)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left[\frac{\ln x_n}{n} \right] = \exp \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x_n}{n} \right] \stackrel{\text{Stolz}}{=} \exp \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x_n - \ln x_{n-1}}{n - (n-1)} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left[\ln \left(\frac{x_n}{x_{n-1}} \right) \right] = \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n-1}}} \end{aligned}$$

Nota 8.4. Naturalmente para que la raíz n -ésima y los logaritmos tengan sentido, es necesario que todos los términos de la sucesión x_n sean mayores que cero.

Ejercicio 8.12. Determinar el valor de los siguientes límites de sucesiones:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n} & \text{b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} & \text{c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{3} + \dots + n\sqrt[n]{n}}{n^2} \\ \text{d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n}{n+1}}{n} & \text{e)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} & \text{f)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 22^{1/2} + 33^{1/3} + \dots + nn^{1/n}}{n^2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n} &\stackrel{\text{Stolz}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n) - \ln(n-1)}{n - (n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) = \ln\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)\right] = \\ &= \ln 1 = \boxed{0} \end{aligned}$$

$$\text{b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \stackrel{\text{R. Raíz}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-1} = \boxed{1}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{3} + \dots + n\sqrt[n]{n}}{n^2} &\stackrel{\text{Stolz}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[n]{n}}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[n]{n}}{2n-1} = \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1}\right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}\right) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \boxed{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n}{n+1}}{n} \stackrel{\text{Stolz}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n+1}}{1} = \boxed{1}$$

$$\text{e)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} \implies \binom{a}{b} = \frac{a!}{b! \cdot (a-b)!}$$

Aplicamos la regla de la raíz:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n-2}{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2n)!}{n! \cdot n!}}{\frac{(2n-2)!}{(n-1)! \cdot (n-1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)! \cdot [(n-1)!]^2}{(n!)^2 \cdot (2n-2)!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot 2n][1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)]^2}{[1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n]^2 [1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (2n-2)]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)2n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2}{n^2} = \boxed{4} \end{aligned}$$

$$\text{f)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 22^{1/2} + 33^{1/3} + \dots + nn^{1/n}}{n^2} \stackrel{\text{Stolz}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nn^{1/n}}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} \cdot \frac{n}{2n-1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Indeterminación $0 \cdot \infty$

Esta indeterminación es equivalente a las indeterminaciones ∞/∞ y $0/0$, por tanto basta en transformarla en una de ellas expresando el producto como un cociente. Hay dos formas de expresarlo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \pm\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \frac{1}{\frac{1}{b_n}} = \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{b_n}}} \rightarrow \text{Ind. } \frac{0}{0} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{a_n}} \cdot b_n = \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\frac{1}{a_n}}} \rightarrow \text{Ind. } \frac{\infty}{\infty} \end{cases}$$

Las dos formas se pueden utilizar en todos los casos, pudiéndose usar los métodos vistos para la resolución de indeterminaciones ∞/∞ y $0/0$. Naturalmente siempre elegiremos aquella que resulte más sencilla de resolver dependiendo de las sucesiones de partida.

Ejemplo 8.9. Indeterminación $0 \cdot \infty$

Vamos a ver un ejemplo de aplicación de este tipo de método en el siguiente límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cdot n = 0 \cdot \infty = ? \quad \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{0}{0} & \underline{\text{Si}} \text{ se puede aplicar Stolz} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}} = \frac{\infty}{\pm\infty} & \underline{\text{No}} \text{ se puede aplicar Stolz} \end{cases}$$

De estas dos formas alternativas de expresar el producto, solo en la primera se puede aplicar *Stolz* ya que el denominador de la segunda no cumple las condiciones del teorema⁵⁷, al no ser monótona estricta, ya que el valor del seno oscila con valores cercanos a cero pero con signo positivo y negativo, y por tanto no tiene límite. En este caso particular, resulta mucho más fácil de resolver este problema a través de la utilización de **infinitésimos equivalentes**⁵⁸ como será resuelto en el **Ejercicio 8.16, página 221**.

Indeterminaciones 0^0 e ∞^0

Estas indeterminaciones aparecen en sucesiones de potencias del tipo:

$$\{ a_n^{b_n} \}$$

Las indeterminaciones del tipo 0^0 e ∞^0 se pueden transformar fácilmente en indeterminaciones del tipo $0 \cdot \infty$, expresando la potencia como una exponencial usando la siguiente fórmula:

$$A = a^b \quad ; \quad \ln A = \ln(a^b) \quad ; \quad \ln A = b \ln a \quad ; \quad A = e^{b \ln a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a^b = e^{b \ln a}}$$

Aplicado a las sucesiones de nuestro interés se tiene:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp[b_n \cdot \ln(a_n)]}$$

Posteriormente esta indeterminación se puede transformar en una del tipo ∞/∞ ó $0/0$ y resolverla por alguno de los métodos apropiados a estas indeterminaciones⁵⁹.

⁵⁷Ver el **Teorema 8.4, página 212**.

⁵⁸Ver la **Sección 8.11.4, página 220**.

⁵⁹Ver la **Sección 8.10.7, página 211**.

Ejercicio 8.13. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n + 2^n)^{\frac{1}{2+3n}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (n + 2^n)^{\frac{1}{2+3n}} &\stackrel{\infty^0}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left[\frac{1}{2+3n} \ln(n + 2^n) \right] \stackrel{\infty/\infty}{=} \exp \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2+3n} \ln \left[2^n \left(\frac{n}{2^n} + 1 \right) \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^n)}{2+3n} \right\} = \exp \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln(2)}{2+3n} \right\} = \exp \left(\frac{\ln(2)}{3} \right) = \{\exp[\ln(2)]\}^{1/3} = 2^{1/3} = \boxed{\sqrt[3]{2}} \end{aligned}$$

Indeterminación 1^∞

Esta indeterminación también aparece en sucesiones de potencias del tipo:

$$\{ a_n^{b_n} \} \implies \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \end{cases}$$

pero tiene un tratamiento distinto de las indeterminaciones 0^0 e ∞^0 vistas en la sección anterior.

Vamos a ver el proceso apropiado en el que se usa el concepto de un *infinitésimo* ϵ_n visto en una de las definiciones alternativas del número⁶⁰ e y analizado en detalle en la sección sobre *infinitos e infinitésimos*⁶¹.

En este caso el infinitésimo viene dado por $\epsilon_n = a_n - 1$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \end{array} \right\} \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} &\stackrel{1^\infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \underbrace{a_n - 1}_{\epsilon_n} \right)^{\frac{b_n(a_n-1)}{a_n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \epsilon_n)^{\frac{b_n(a_n-1)}{\epsilon_n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(1 + \epsilon_n)^{1/\epsilon_n} \right]^{b_n(a_n-1)} = \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} e^{b_n(a_n-1)}} \end{aligned}$$

Ejercicio 8.14. Determinar el valor de los siguientes límites de sucesiones:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{2n} \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n+2} \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+2n-1}{n^2+2n} \right)^{\frac{2n^2}{n-1}}$$

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{2n} \stackrel{1^\infty}{=} \exp \left[\lim_{n \rightarrow \infty} 2n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1} - 1 \right) \right] = \exp \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{n+1} \right) \right] = \boxed{e^2}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n+2} \stackrel{1^\infty}{=} \exp \left[\lim_{n \rightarrow \infty} (n+2) \cdot \left(\frac{n+1}{n+2} - 1 \right) \right] = \exp \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-n-2}{n+2} \right) \right] = \boxed{e^{-1}}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+2n-1}{n^2+2n} \right)^{\frac{2n^2}{n-1}} &\stackrel{1^\infty}{=} \exp \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{n-1} \right) \cdot \left(\frac{n^2+2n-1}{n^2+2n} - 1 \right) \right] = \\ &= \exp \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{n-1} \right) \cdot \left(\frac{-1}{n^2+2n} \right) \right] = \exp \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-n^2 + \dots}{n^3 + \dots} \right) \right] = e^0 = \boxed{1} \end{aligned}$$

⁶⁰Ver la Sección 8.9.1, página 203.

⁶¹Ver la Sección 8.11, página 216.

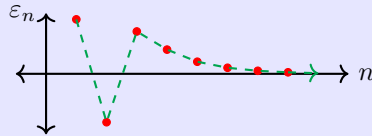
8.11. Infinitésimos e Infinitos

En esta sección vamos a estudiar los importantes conceptos de *infinitos* e *infinitésimos*, que además de ser muy útiles en el estudio de los límites de sucesiones son una herramienta fundamental en el estudio de límites de funciones, como se verá en la [Sección 3.4, página 85](#).

Definición 8.13. Infinitésimo

Una sucesión⁶² ε_n se denomina **infinitésimo** si⁶³:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$$



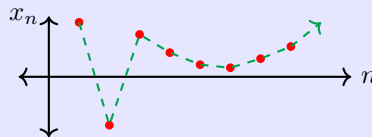
Ejemplo 8.10. Infinitésimos

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n} \quad ; \quad \varepsilon_n = \frac{n+1}{n^2+1} \quad ; \quad \varepsilon_n = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \quad ; \quad \varepsilon_n = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)$$

Definición 8.14. Infinito

Una sucesión⁶⁴ x_n se denomina **infinito** si⁶⁵:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pm\infty$$



Ejemplo 8.11. Infinitos

$$x_n = n \quad ; \quad x_n = \frac{n^2+1}{n+1} \quad ; \quad x_n = \ln(n) \quad ; \quad x_n = \sqrt[3]{n}$$

8.11.1. Propiedades de los Infinitésimos

Dados dos *infinitésimos* a_n y b_n , entonces:

- La suma de dos *infinitésimos* es otro *infinitésimo*:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 0$$

- El producto de un *infinitésimo* por una sucesión acotada⁶⁶ c_n es otro *infinitésimo*:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot c_n) = 0$$

⁶²Es muy común denominar a las sucesiones que son *infinitésimos* mediante la notación ε_n .

⁶³No importa el comportamiento inicial de la sucesión y lo esencial es que cuando $n \rightarrow \infty$ la sucesión ε_n tiende a cero de cualquier forma (monótona o no).

⁶⁴En el caso de los *infinitos* no hay una única notación generalizada, como sí ocurre con los *infinitésimos* (ε_n), y en este texto los denominaremos mediante x_n .

⁶⁵Al igual que con los *infinitésimos*, no importa el comportamiento inicial y lo esencial aquí es que cuando $n \rightarrow \infty$ la sucesión x_n tienda o bien a infinito o bien a menos infinito.

⁶⁶Notar que un *infinitésimo* es una sucesión acotada, al tener límite 0, por tanto esta propiedad también incluye el producto de *infinitésimos*.

Ejemplo 8.12. Propiedades de los Infinitésimos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \operatorname{sen}(n) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{n} \rightarrow \text{infinitésimo} \\ \operatorname{sen}(n) \rightarrow \text{acotada: } -1 \leq \operatorname{sen}(n) \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{0}$$

8.11.2. Órdenes de los Infinitos

Como hemos visto⁶⁷, los *infinitos* son sucesiones cuyo límite es $\pm\infty$. Sin embargo hay *infinitos* que tienden más rápidamente a infinito que otros, es decir que a partir de un determinado n , sus términos aumentan (en valor absoluto) más que los términos de otro *infinito*.

Vamos a ver como podemos comparar *infinitos* a través del concepto de **orden de infinitos**, y para ello introduciremos los símbolos⁶⁸: O , \gg , \ll y \sim , de la siguiente forma:

Definición 8.15. Órdenes de los Infinitos

Dados dos **infinitos** a_n y b_n , y sea $k \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$, se tiene:

- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ \Rightarrow a_n y b_n son del **mismo orden** $\Rightarrow a_n = O(b_n)$
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \pm\infty$ \Rightarrow a_n es de **orden superior** que b_n $\Rightarrow a_n \gg b_n$
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ \Rightarrow a_n es de **orden inferior** que b_n $\Rightarrow a_n \ll b_n$
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ \Rightarrow a_n y b_n son **equivalentes** $\Rightarrow a_n \sim b_n$

- Si dos *infinitos* a_n y b_n son del **mismo orden** significa que son **comparables** y por tanto tienen una velocidad de *crecimiento* similar, y se expresa como⁶⁹: $a_n = O(b_n)$.
- Si un *infinito* a_n es de **orden superior** a otro b_n significa que tiene una velocidad de *crecimiento* muy superior y por tanto se dice que b_n es **despreciable** frente a a_n , y se expresa como: $a_n \gg b_n$.
- Si un *infinito* a_n es de **orden inferior** a otro b_n significa que tiene una velocidad de *crecimiento* muy inferior y por tanto se dice que a_n es **despreciable** frente a b_n , y se expresa como: $a_n \ll b_n$.
- Si dos *infinitos* a_n y b_n son **equivalentes** significa que tienen la misma velocidad de *crecimiento*, y se expresa como⁷⁰: $a_n \sim b_n$.

⁶⁷Ver la **Definición 8.14**, página 216.

⁶⁸Los símbolos \gg y \ll tienen múltiples usos y definiciones en función del área y autor que se trate. En este texto utilizaremos la definición que aquí se detalla.

⁶⁹Sobre la notación $a_n = O(b_n)$, se hablará de forma más extendida en la **Sección 3.4.2**, página 86.

⁷⁰El símbolo \sim se denomina *virgulilla* y corresponde con la parte superior de la letra ñ.

Ejercicio 8.15. Determinar el orden relativo de los siguientes tres *infinitos*:

$$n \quad ; \quad n^p \quad (p > 1) \quad ; \quad a^n \quad (a > 1)$$

Calculamos el límite del cociente entre ellos:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{p-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{p-1} \ln n = e^\infty = \infty \implies \boxed{n^p \gg n}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n} \stackrel{\text{Stolz}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - a^{n-1}}{n - (n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n - a^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n \left(1 - \frac{1}{a}\right) = \infty \implies \boxed{a^n \gg n}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{a^n}$

Para calcular este límite, vamos a suponer que su valor es ℓ y vamos a tomar logaritmos a ambas partes de la igualdad:

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{a^n} \quad ; \quad \ln \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} (p \ln n - n \ln a) \quad ; \quad \ln \ell = n \left(p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a \right)$$

$$\ln \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n \ln a) = -\infty \implies \ell = e^{-\infty} = 0 \implies \boxed{a^n \gg n^p}$$

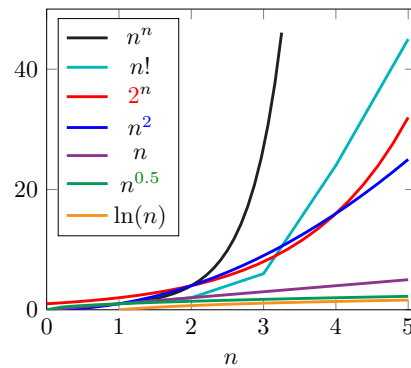
Finalmente:

$$\boxed{a^n \gg n^p \gg n}$$

Siguiendo un proceso similar al del ejercicio anterior se puede establecer un **orden** de los *infinitos* básicos:

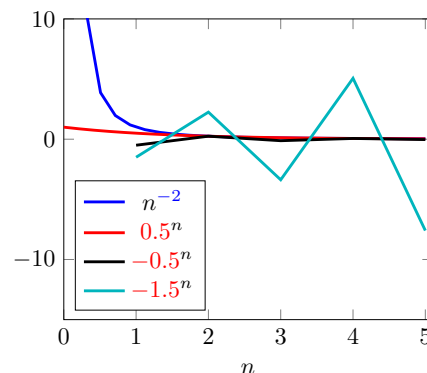
$$\boxed{n^n \gg n! \gg \begin{matrix} a^n \\ a > 1 \end{matrix} \gg \begin{matrix} n^p \\ p > 1 \end{matrix} \gg n \gg \begin{matrix} n^p \\ 0 < p < 1 \end{matrix} \gg \begin{matrix} \ln^p(n) \\ p > 0 \end{matrix}}$$

En la siguiente figura se muestra una representación gráfica de la *velocidad de crecimiento* de ejemplos de cada uno de los infinitos anteriores.



Notar que en esta ordenación faltan algunas potencias que **no** corresponden con *infinitos*:

$$\begin{matrix} n^p & \begin{matrix} p < 0 \\ \leq 0 \end{matrix} & \frac{1}{n^{|p|}} & \rightarrow & \textit{infinitésimo} \\ a^n & & \begin{matrix} -1 < a < 1 \\ \leq -1 \end{matrix} & \rightarrow & \textit{infinitésimo} \\ a^n & & a \leq -1 & \rightarrow & \textit{oscilante} \end{matrix}$$



8.11.3. Órdenes de los Infinitésimos

Recordamos⁷¹ que los *infinitésimos* son sucesiones cuyo límite es 0. De igual forma que con los *infinitos*⁷², los *infinitésimos* también se pueden comparar a través del concepto de **orden de infinitésimos**.

Notar que en este caso, si un *infinitésimo* a_n es de **mayor orden** que otro b_n se indicará como $a_n \ll b_n$ haciendo referencia a que a partir de un determinado n , los términos de a_n **decrecen**, en valor absoluto, más rápido que los términos de la otra sucesión b_n .

Vamos a ver como podemos comparar *infinitésimos*:

Definición 8.16. Órdenes de los Infinitésimos

Dados dos **infinitésimos** a_n y b_n , y sea $k \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$, se tiene:

- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ \implies a_n y b_n son del mismo orden $\implies a_n = O(b_n)$
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ \implies a_n es de orden inferior que b_n $\implies a_n \gg b_n$
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ \implies a_n es de orden superior que b_n $\implies a_n \ll b_n$
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ \implies a_n y b_n son equivalentes $\implies a_n \sim b_n$

- Si dos *infinitésimos* a_n y b_n son del **mismo orden** significa que son **comparables** y por tanto tienen una velocidad de *decrecimiento* similar, y se expresa como: $a_n = O(b_n)$.
- Si un *infinitésimo* a_n es de **orden superior** a otro b_n significa que tiene una velocidad de *decrecimiento* muy superior y por tanto se dice que a_n es **despreciable** frente a b_n , y se expresa como: $a_n \ll b_n$.
- Si un *infinitésimo* a_n es de **orden inferior** a otro b_n significa que tiene una velocidad de *decrecimiento* muy inferior y por tanto se dice que b_n es **despreciable** frente a a_n , y se expresa como: $a_n \gg b_n$.
- Si dos *infinitésimos* a_n y b_n son **equivalentes** significa que tienen la misma velocidad de *decrecimiento*, y se expresa como: $a_n \sim b_n$.

Notar que si a_n es un *infinito*, entonces $1/a_n$ es un *infinitésimo*⁷³. Por tanto a través del orden de los infinitos⁷⁴ podemos obtener el siguiente orden de infinitésimos:

$$\frac{1}{n^n} \ll \frac{1}{n!} \ll \frac{1}{a^n} \ll \frac{1}{n^p} \ll \frac{1}{n} \ll \frac{1}{n^p} \ll \frac{1}{\ln^p(n)}$$

$a > 1$
 $p > 1$
 $(0 < p < 1)$
 $p > 0$

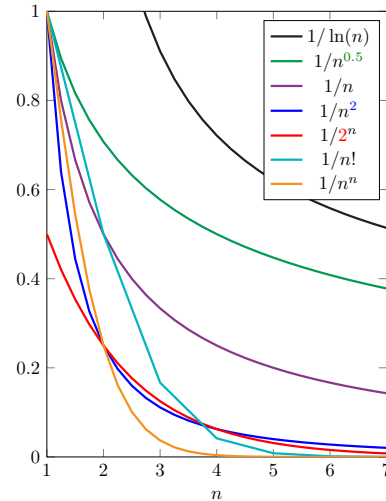
⁷¹Ver la [Definición 8.13](#), página 216.

⁷²Ver la [Sección 8.11.2](#), página 217.

⁷³Y de igual forma, si a_n es un infinitésimo, $1/a_n$ es un infinito.

⁷⁴Ver la [Sección 8.11.2](#), página 217.

En la siguiente figura se muestra una representación gráfica de la velocidad de crecimiento de ejemplos de cada uno de los infinitésimos anteriores.



8.11.4. Infinitésimos Equivalentes

Vamos a ver una colección de los infinitésimos equivalentes en sucesiones más importantes que hay.

$$\boxed{\operatorname{sen} \varepsilon_n \sim \tan \varepsilon_n \sim \operatorname{arcsen} \varepsilon_n \sim \operatorname{arctan} \varepsilon_n \sim \varepsilon_n}$$

$$\boxed{\cos \varepsilon_n \sim 1 - \frac{\varepsilon_n^2}{2}} \iff \boxed{1 - \cos \varepsilon_n \sim \frac{\varepsilon_n^2}{2}} \iff \boxed{\sqrt{2(1 - \cos \varepsilon_n)} \sim \varepsilon_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\ln(1 + \varepsilon_n) \sim \varepsilon_n} \iff \boxed{e^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n} \\ \boxed{\ln(a_n) \sim a_n - 1} \quad ; \quad \boxed{b^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n \ln(b)} \quad (b > 0) \end{array} \right.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

$$(m, n \neq 0) \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{(1 + \varepsilon_n)^m - 1 \sim m \varepsilon_n} \iff \boxed{\sqrt[m]{1 + m \varepsilon_n} \sim 1 + \varepsilon_n} \\ \boxed{\sqrt[n]{1 + \varepsilon_n} - 1 \sim \frac{\varepsilon_n}{n}} \iff \boxed{\left(1 + \frac{\varepsilon_n}{n}\right)^n \sim 1 + \varepsilon_n} \end{array} \right.$$

8.11.5. Infinitos Equivalentes

Aquí se muestra una colección de los infinitos equivalentes más importantes que hay.

$$\boxed{n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} \quad \text{Fórmula de Stirling}$$

$$\boxed{\ln(n) \sim 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}}$$

$$\boxed{\frac{n^{k+1}}{k+1} \sim 1 + 2^k + 3^k + \dots + n^k}$$

8.11.6. Principio de Sustitución

Vamos a ver un teorema importante que explica cómo utilizar las relaciones de equivalencia anteriores para resolver indeterminaciones en límites complicados de sucesiones, de una forma fácil y eficiente.

Teorema 8.5. Principio de Sustitución

Si $a_n \sim b_n$ y c_n es una sucesión arbitraria, entonces:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cdot c_n \\ \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{c_n} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Si y solo si existen los límites de los segundos miembros.}$$

- En caso de que no existan los límites de los segundos términos, no podremos decir nada sobre los límites de los primeros términos, si existen o no y en caso afirmativo cual es su valor.
- El *principio de sustitución* solo se cumple en operaciones de multiplicación y división sobre el total de la expresión ⁷⁵ y no en otro tipo de operaciones como sumas o restas.

Ejercicio 8.16. Calcular los siguientes límites de sucesiones.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{sen} \left(\frac{1}{n} \right) & \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{1/n} - 1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 - 1} & \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{1}{2n} \right)}{1 - \cos \left(\frac{1}{n} \right)} \\ \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\operatorname{sen}(2/n^2)} - 1}{\ln \left(\frac{n^2+2}{n^2-1} \right)} & \text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(e^{\frac{\operatorname{sen}(1/n)}{n}} - 1 \right)}{\sqrt[n]{n!}} & \text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(n^2 - 1)e^{1/n^2} - n^2 \right] \end{array}$$

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{sen} \left(\frac{1}{n} \right) = \infty \cdot 0 ?$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{sen} \left(\frac{1}{n} \right) \stackrel{\operatorname{sen} \varepsilon_n \sim \varepsilon_n}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \cancel{n} \frac{1}{\cancel{n}} = \boxed{1}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{1/n} - 1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 - 1} = \frac{0}{0} ?$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{1/n} - 1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 - 1} = \left\{ \begin{array}{ll} a^{\varepsilon_n} - 1 & \sim \varepsilon_n \ln(a) \\ (1 + \varepsilon_n)^m & \sim \varepsilon_n m \end{array} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2)/\cancel{n}}{3/\cancel{n}} = \boxed{\frac{\ln(2)}{3}}$$

⁷⁵Es decir, la sucesión a sustituir (infinito o infinitésimo) por otra *equivalente* debe estar multiplicando o dividiendo al total del resto de la expresión.

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2n}\right)}{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{0}{0} ?$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2n}\right)}{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} \varepsilon_n \sim \varepsilon_n \\ 1 - \cos \varepsilon_n \sim \frac{\varepsilon_n^2}{2} \end{array} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1/2n)^2}{1/2 \cdot (1/n)^2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\operatorname{sen}(2/n^2)} - 1}{\ln\left(\frac{n^2+2}{n^2-1}\right)} = \frac{0}{0} ?$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\operatorname{sen}(2/n^2)} - 1}{\ln\left(\frac{n^2+2}{n^2-1}\right)} &= \left\{ \begin{array}{l} e^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n \\ \operatorname{sen} \varepsilon_n \sim \varepsilon_n \\ \ln(a_n) \stackrel{a_n \sim 1}{\sim} a_n - 1 \end{array} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}(2/n^2)}{\frac{n^2+2}{n^2-1} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2/n^2}{\frac{3}{n^2-1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n^2-1)}{3n^2} = \boxed{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(e^{\frac{\operatorname{sen}(1/n)}{n}} - 1 \right)}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{\infty \cdot 0}{\infty} ?$$

$$\text{Notar que: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} \stackrel{\text{Stirling}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e} (2\pi n)^{1/2n} =$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e} \exp\left[\frac{\ln(2\pi n)}{2n}\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e} \exp\left[\frac{\ln(\pi) + \ln(2n)}{2n}\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e} \exp\left[\frac{\ln(2n)}{2n}\right] \stackrel{x_n \gg \ln x_n}{=} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e} e^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e} = \infty \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(e^{\frac{\operatorname{sen}(1/n)}{n}} - 1 \right)}{\sqrt[n]{n!}} &= \left\{ \begin{array}{l} e^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n \\ \operatorname{sen} \varepsilon_n \sim \varepsilon_n \\ n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \end{array} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \operatorname{sen}(1/n)}{\sqrt[n]{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \frac{1/n}{n}}{n e^{-1} (2\pi n)^{1/2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{(2\pi n)^{1/2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{1} = \boxed{e} \end{aligned}$$

$$\text{Notar que: } \lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi n)^{1/2n} \stackrel{\infty^0}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left[\frac{\ln(2\pi n)}{2n}\right] = e^0 = 1$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(n^2 - 1)e^{1/n^2} - n^2 \right] = \infty - \infty ?$$

Vamos a intentar resolver este límite siguiendo distintos caminos y repasando los errores más comunes que se suelen cometer en estos casos.

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(n^2 - 1)e^{1/n^2} - n^2 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\cancel{n^2} - 1 - \cancel{n^2} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} -1 = \boxed{-1} \quad \text{¡ Erróneo!}$$

Este resultado es **erróneo** y el paso incorrecto que hemos realizado ha sido sustituir e^{1/n^2} por 1. Como la indeterminación es $\infty - \infty$, es fundamental la velocidad de crecimiento de cada término y e^{1/n^2} juega un papel fundamental aquí que no puede simplificarse de esa forma.

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(n^2 - 1)e^{1/n^2} - n^2 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 e^{1/n^2} - e^{1/n^2} - n^2 \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{n^2 \left(e^{1/n^2} - \frac{e^{1/n^2}}{n^2} - 1 \right)}_{\infty \cdot 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{1/n^2} - 1 \right) n^2 \stackrel{e^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cancel{n^2} = \boxed{-1} \quad \text{¡ Erróneo!}$$

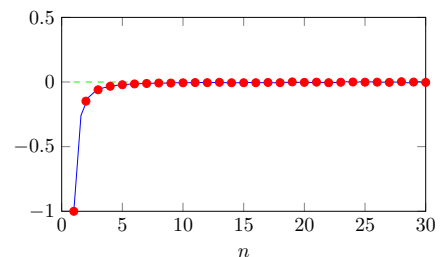
Este resultado vuelve a ser **erróneo**. El fallo en este caso ha sido eliminar la exponencial en una expresión cuya indeterminación es $\infty \cdot 0$ y donde es fundamental determinar la velocidad con que $n^2 \rightarrow \infty$ y $\left(e^{1/n^2} - \frac{e^{1/n^2}}{n^2} - 1 \right) \rightarrow 0$ y por tanto no se puede eliminar el término $\frac{e^{1/n^2}}{n^2}$ en sumas y/o restas.

3) Vamos a ver la forma apropiada de resolverlo.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\underbrace{(n^2 - 1)e^{1/n^2} - n^2}_{\infty - \infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\underbrace{n^2 (e^{1/n^2} - 1)}_{\infty \cdot 0} - e^{1/n^2} \right] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (e^{1/n^2} - 1) \stackrel{e^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \frac{1}{n^2} = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} e^{1/n^2} = 1 \end{array} \right\} = 1 - 1 = \boxed{0}$$

Podemos verificar dicho resultado representado gráficamente los primeros términos de esta sucesión:

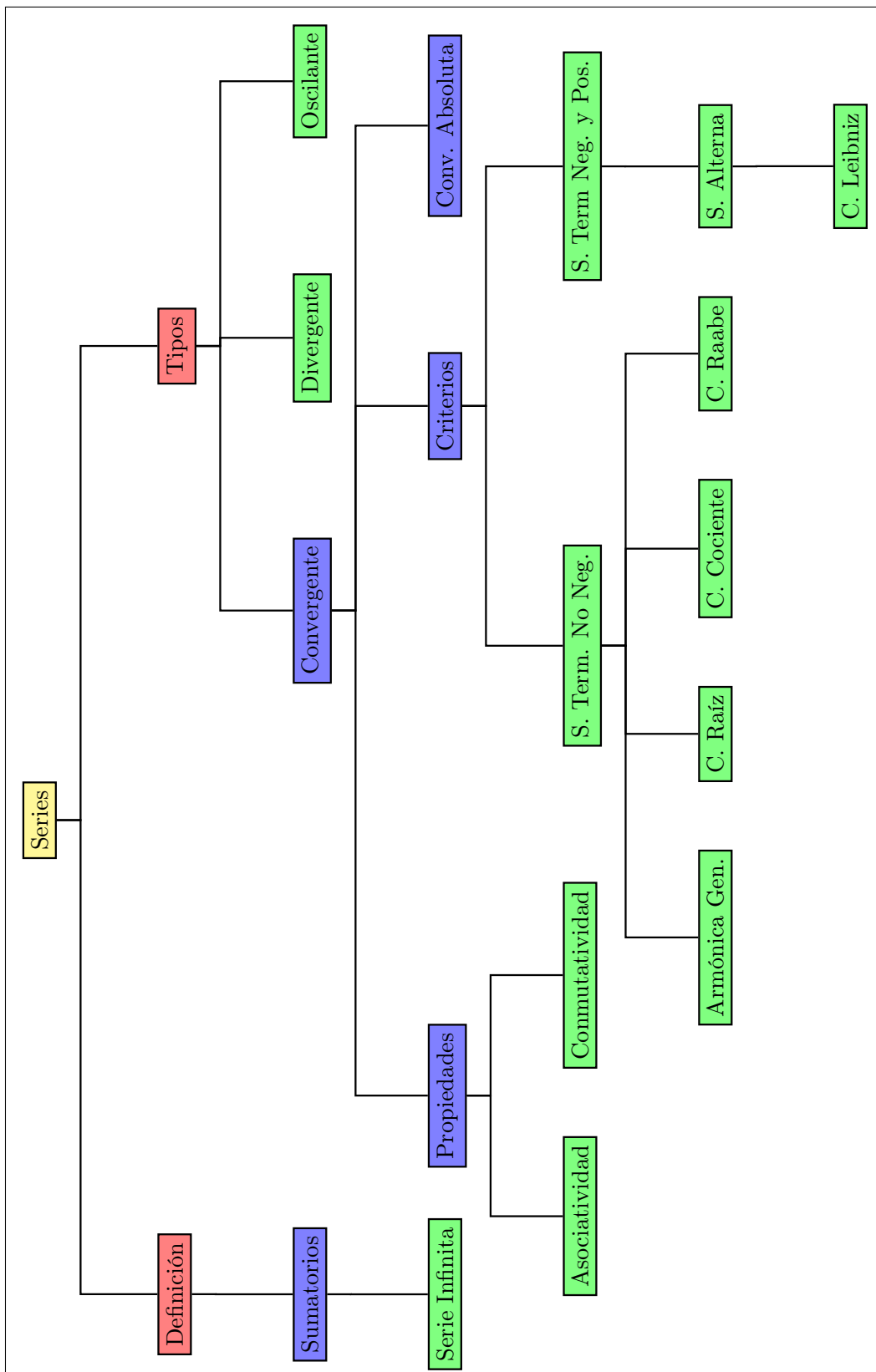




Series

Contenido

9.1	Introducción	227
9.2	Sumatorio	227
9.2.1	Propiedades de los Sumatorios Finitos	228
9.3	Series Infinitas	229
9.4	Convergencia de las Series	230
9.4.1	Asociatividad de las Series	230
9.4.2	Conmutatividad de las Series	231
9.4.3	Convergencia de Series Notables	232
9.4.4	Serie Telescópica	234
9.5	Criterios de Convergencia	235
9.5.1	Criterios de Convergencia Generales	235
9.5.2	Criterios de Convergencia para Series de Términos No Negativos	236
9.5.3	Criterios de Convergencia para Series de Términos Positivos y Negativos	240
9.5.4	Criterios de Convergencia Absoluta	240
9.6	Series de Potencia	242
9.6.1	Series de Taylor	242
9.6.2	Series de Potencia	244
9.6.3	Radio de Convergencia	245
9.6.4	Criterios de Convergencia	245



9.1. Introducción

Como hemos visto¹, hay determinadas fórmulas para sumar los términos de algunas sucesiones particulares y estamos interesados en estudiar de forma general en qué casos tiene sentido sumar sus *infinitos* términos:

$$\{x_n\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \quad \implies \quad S = x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots$$

El resultado tendrá sentido siempre que esta suma sea un *número finito*. Sin embargo hemos comprobado que los procesos donde aparecen *infinitos* términos tienen un comportamiento a veces peculiar, así:

- Los conjuntos de números $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}$, parecen ser unos mayores que otros, pero teniendo todos el mismo número de elementos, (*infinito*).
- Operaciones donde aparece el símbolo *infinito* a veces no están determinadas.

Esto nos lleva a preguntarnos sobre las propiedades de la operación de sumar infinitos términos. Así por ejemplo:

- Sabemos que sumar infinitas veces un mismo número, por pequeño que sea, se obtiene como resultado el valor infinito, como por ejemplo:

$$10^{-6} + 10^{-6} + \dots = \infty \cdot 10^{-6} = \infty$$

- La suma de infinitos términos, cada uno más pequeño que el anterior, ¿es un número finito o infinito?

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = ?$$

- ¿Se siguen verificando las propiedades conmutativa y asociativa en las sumas infinitas?

De forma general adelantamos que las propiedades de una suma infinita **no** serán las mismas que la de la suma tradicional.

La *teoría de las series infinitas*² surgió para estudiar matemáticamente estos conceptos, que como veremos se hará a través de un proceso de paso al *límite*.

9.2. Sumatorio

Definición 9.1. Sumatorio

Un **sumatorio** es una notación matemática que permite representar una suma de un número finito o infinito de términos y se expresa mediante la letra griega *sigma mayúscula* Σ de la siguiente forma³:

$$\sum_{i=a}^b x(i) = x(a) + x(a+1) + x(a+2) + \dots + x(b) \quad ; \quad a, b \text{ finitos o infinitos, con } a \leq b$$

donde $x(i)$ es una expresión que depende de la variable i , denominándose:

$$\left\{ \begin{array}{l} i \quad \text{índice, (variable muda}^4) \\ a \quad \text{límite inferior} \\ b \quad \text{límite superior} \end{array} \right.$$

¹Ver la [Sección 8.2, página 184](#).

²Ver la [Sección 9.3, página 229](#).

³Se lee: "Sumatorio desde $i = a$ hasta b de x_i ".

⁴Variable cuyo nombre puede ser cualquiera que no sea utilizada en la expresión.

- Independencia de la variable muda:
$$\sum_{j=1}^n P_j = \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{\alpha=1}^n P_\alpha$$

- Variables independientes del sumatorio:

$$\sum_{j=1}^m a_k x_j = a_k x_1 + a_k x_2 + \cdots + a_k x_m = a_k (x_1 + x_2 + \cdots + x_m) = a_k \sum_{j=1}^m x_j$$

9.2.1. Propiedades de los Sumatorios Finitos

- $$\sum_{i=a}^n x_i + \sum_{k=a}^n y_k = \sum_{j=a}^n (x_j + y_j)$$
- $$\sum_{i=a}^b x_i + \sum_{i=b+1}^n x_i = \sum_{i=a}^n x_i \quad \implies \quad \sum_{i=a}^b x_i = \sum_{i=a}^n x_i - \sum_{i=b+1}^n x_i \quad \left\{ \begin{array}{l} a, b \in \mathbb{R} \\ n \text{ finito o infinito} \\ a \leq b < n \end{array} \right.$$
- $$\sum_{i=a}^b (\alpha x_i)^\beta = \alpha^\beta \sum_{i=a}^b (x_i)^\beta \quad \left\{ \begin{array}{l} a, b \in \mathbb{R} \quad , \quad a \leq b \\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$
- $$\sum_{i=a}^b \alpha = \alpha \sum_{i=a}^b 1 = \alpha (b - a + 1) \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$$
- $$\sum_{j=a}^b x_j = \sum_{j=a-c}^{b-c} x_{j+c} \quad (\text{Reordenación de índices})$$
- $$\sum_{i=a}^n \sum_{j=b}^m x_i y_j = \left(\sum_{i=a}^n x_i \right) \left(\sum_{j=b}^m y_j \right) \quad (\text{Sumatorios Combinados})$$

Ejemplo 9.1. Sumatorio Simple

$$\sum_{i=2}^5 1 = 1 + 1 + 1 + 1 = (5 - 2 + 1) = 4$$

②
③
④
⑤

Ejemplo 9.2. Sumatorios con Expresiones

- $$\sum_{k=0}^n (-f_k) = -f_0 - f_1 - f_2 - \cdots - f_n = - \sum_{k=0}^n f_k$$
- $$\sum_{i=m}^{n+j} p(i) = p(m) + p(m+1) + \cdots + p(n) + p(n+1) + \cdots + p(n+j)$$
- $$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{a+j}{k-2j} = -\frac{a+1}{k-2} + \frac{a+2}{k-4} - \frac{a+3}{k-6} + \cdots + (-1)^n \frac{a+n}{k-2n} + \cdots$$
- $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{1+n^2} = \cdots - \frac{n}{1+n^2} - \cdots - \frac{2}{1+2^2} - \frac{1}{1+1} + 0 + \frac{1}{1+1^2} + \frac{2}{1+2^2} + \cdots + \frac{n}{1+n^2} + \cdots$$

De una forma análoga se define el **productorio**.

Definición 9.2. Productorio

Un **productorio** es una notación matemática que permite representar un producto de un número finito o infinito de términos y se expresa mediante la letra griega *pi* mayúscula (Π) de la siguiente forma⁵:

$$\prod_{i=a}^b x_i = x_a \cdot x_{a+1} \cdot x_{a+2} \cdot \dots \cdot x_b$$

9.3. Series Infinitas

Definición 9.3. Sumas Parciales

Sea $\{a_n\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ una sucesión de números reales. Se denominan **sumas parciales** a cada uno de los términos s_i definidos como:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 &= \sum_{i=1}^1 a_i \\ s_2 &= a_1 + a_2 &= \sum_{i=1}^2 a_i \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 &= \sum_{i=1}^3 a_i \\ &\vdots & \\ s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n &= \sum_{i=1}^n a_i \end{aligned}$$

Definición 9.4. Serie Infinita o Serie

Se denomina **serie infinita** o simplemente **serie** a la *sucesión de las sumas parciales* de una sucesión dada.

$$\{s_n\} = \{s_1, s_2, \dots, s_n, \dots\}$$

Definición 9.5. Suma de una Serie

Se denomina **suma de una serie** al valor del siguiente límite:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

El *índice inferior* del sumatorio puede ser un valor distinto de 1, incluido el cero o valores negativos.

⁵Se lee: "Productorio desde $i = a$ hasta b de x_i ".

Ejemplo 9.3. Serie Infinita

- *Sucesión:* $\left\{ \frac{1}{n!} \right\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{0!}, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \dots, \frac{1}{n!}, \dots \right\} = \left\{ 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{n!}, \dots \right\}$
- *Serie:* $\{s_i\}_{i=0}^{\infty} = \{s_0, s_1, s_2, \dots\} = \left\{ \frac{1}{0!}, \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}, \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}, \dots \right\} = \left\{ 1, 2, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \dots \right\}$
- *Suma de la Serie*⁶: $S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

Por simplicidad, es muy común representar mediante la notación $\sum a_n$, tanto a la **serie** como a su **suma**.

9.4. Convergencia de las Series**Definición 9.6.** Serie Convergente, Divergente y Oscilante

Se dice que una determinada *serie* es :

- **Convergente:** si $S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{i=0}^{\infty} x_i = a$, $a \in \mathbb{R}$ (El límite existe y es finito)
- **Divergente hacia infinito:** $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{i=0}^{\infty} x_i = \pm\infty$
- **Oscilante:** $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{i=0}^{\infty} x_i$

Las series *divergentes* son aquellas que no son *convergentes* (*divergentes hacia infinito* + *oscilantes*).

Definición 9.7. Resto n -ésimo de una Serie

Se llama **resto** n -ésimo a la serie que resulta de suprimir los n primeros sumandos. Su suma, (que también se la denomina *resto*, por abuso del lenguaje), si existe, es:

$$r_n = S - s_n = x_{n+1} + x_{n+2} + \dots = \sum_{i=n+1}^{\infty} x_i$$

9.4.1. Asociatividad de las Series

Las *series* no gozan de la propiedad asociativa en general. Así, por ejemplo, la siguiente serie es *oscilante*⁷:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Sin embargo agrupando de distintas formas, su suma puede ser diferente:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n &= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots \longrightarrow 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n &= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots \longrightarrow 1 \end{aligned}$$

⁶Ver la [Sección 8.9.1, página 203](#).

⁷Y por tanto no existe su suma.

Definición 9.8. Serie Asociada y Asociativa

- Una **serie asociada** de otra $\sum x_n$ es aquella que se obtiene agrupando varios términos x_n entre paréntesis, sin cambiarlos de orden.
- Una serie se dice que es **asociativa** si su *suma* es igual al de cualquiera de sus series *asociadas*.

- Las series **no oscilantes** (convergentes o divergentes) son *asociativas*. La serie *asociada* tiene la misma suma y carácter que la original.
- Si el *término general* de una serie **tiende a cero**, y al asociar la serie de p en p términos ($p \in \mathbb{N}$ fijo), se obtiene una serie que **no es oscilante**, entonces la serie inicial tiene el mismo carácter y la misma suma que la serie *asociada*.

Nota 9.1. A veces puede resultar difícil detectar que una serie es oscilante.

Ejercicio 9.1. Determinar la suma de la serie:

$$\sum x_n = \frac{1}{1! \cdot 2} - \frac{1}{1! \cdot 3} + \frac{1}{2! \cdot 3} - \frac{1}{2! \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-2)! \cdot (n-1)} - \frac{1}{(n-2)! \cdot n} + \dots$$

Como el término general tiende a cero, podemos en principio asociar sus términos:

$$x_{n-1} - x_n = \frac{1}{(n-2)! \cdot (n-1)} - \frac{1}{(n-2)! \cdot n} = \frac{1}{(n-2)!} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{(n-2)!} \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n!}, \quad n > 2$$

Por tanto⁸:

$$\sum x_n = \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \right) = e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \right) = \boxed{e - \frac{5}{2}}$$

9.4.2. Conmutatividad de las Series

De forma general las series infinitas **no** cumplen la *propiedad conmutativa*, así por ejemplo sea la serie:

$$\sum x_n = x_1 + x_2 + \dots \quad (9.1)$$

y sean:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots \\ b_1 + b_2 + \dots \end{cases} \quad (9.2)$$

las series formadas por los sumandos positivos y negativos respectivamente de $\sum x_n$. Según el conocido con el nombre de **teorema de Riemann**:

1. Si las dos series de (9.2) son *convergentes*, la serie 9.1 también lo es, independientemente de la ordenación de sus términos.
2. Si una de series de (9.2) es *convergente* y la otra *divergente*, la serie (9.1) es divergente, independientemente de la ordenación de sus términos.
3. Si las dos series de (9.2) son divergentes y el término general de (9.1) es un *infinitésimo*⁹, en función de la ordenación de los términos se obtienen series equivalentes a la serie de (9.1) convergentes a cualquier número prefijado, divergentes u oscilantes.

Por tanto en los casos 1 y 2 (donde basta que una de las series de (9.2) sea convergente), la serie (9.1) es conmutativa mientras que el caso 3 no lo es.

⁸Ver la Sección 8.9.1, página 203.

⁹Ver la Definición 8.13, página 216.

Definición 9.9. Reordenación

Una **reordenación** de una sucesión $\{x_n\}$ es otra sucesión que contiene todos los términos de $\{x_n\}$, y solo estos, pero en distinto orden.

Ejemplo 9.4. Serie no Conmutativa

Dada la serie oscilante:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

y teniendo en cuenta que tiene infinitos términos $+1$ y -1 , podemos ordenarlos de diferentes formas obteniendo diferentes valores de su suma:

- $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{\alpha} + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = \alpha$
- $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \underbrace{(-1 - 1 + \dots - 1)}_{\alpha} + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = -\alpha$

9.4.3. Convergencia de Series Notables**Serie Aritmética**

$$a_n = a_1 + d(n - 1) \quad \implies \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots +$$

Como hemos visto¹⁰ la suma de los términos de una sucesión aritmética viene dada por:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n \quad \implies \quad S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$$

Las series aritméticas son siempre divergentes.

Serie Geométrica

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad \implies \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots +$$

Como hemos visto¹¹ la suma de los términos de una sucesión geométrica viene dada por:

$$S_n = a_1 \frac{1 + r^n}{1 - r} \quad \implies \quad S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - r} \quad ; \quad \text{solo si } |r| < 1$$

Las series geométricas son convergentes si $|r| < 1$.

¹⁰Ver la Sección 8.2.1, página 184.

¹¹Ver la Sección 8.2.2, página 185.

Serie Aritmético-Geométrica

$$a_n = [\alpha + (n - 1)d]r^{n-1} = \alpha + (\alpha + d)r + (\alpha + 2d)r^2 + \dots$$

Como hemos visto¹² la suma de los términos de una *sucesión aritmética* viene dada por:

$$S_n = \frac{\alpha(1 - r^n) + dr \left[\frac{1-r^{n-1}}{1-r} - (n-1)r^{n-1} \right]}{1 - r} \quad \xrightarrow{|r| < 1} \quad S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\alpha}{1 - r} + \frac{dr}{(1 - r)^2}$$

Notar que si $d = 0$ coincide con el resultado obtenido en las *series geométricas*.

Las series *aritmético-geométricas* son convergentes si $|r| < 1$.

Ejercicio 9.2. Calcular la suma de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n - 1}{2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n - 1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1 + 2n) \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow \text{Serie Aritmético-Geométrica con } \alpha = -1, d = 2 \text{ y } r = 1/2$$

Notar que para que sea una serie aritmético-geométrica completa le falta el primer término $\alpha = -1$, por tanto:

$$S_n = \frac{\alpha}{1 - r} + \frac{dr}{(1 - r)^2} - \alpha = \frac{-1}{1 - 1/2} + \frac{2(1/2)}{(1 - 1/2)^2} - (-1) = -2 + 4 + 1 = \boxed{3}$$

Serie Armónica

Definición 9.10. Serie Armónica

Se denomina **serie armónica**¹³ a la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

La *serie armónica* es *divergente*.

Es fácil de demostrar su divergencia ya que como todos sus términos son positivos se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}}_{\geq 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \dots \geq 1 + k \frac{1}{2} \quad \text{con } k \rightarrow \infty$$

¹²Ver la **Sección 8.2.3, página 186**.

¹³El nombre de *armónica* proviene de que cada uno de sus términos es la **media armónica** de los términos anterior y siguiente a él. Se llama *media armónica* de dos números a y b al número m tal que:

$$\frac{2}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad ; \quad m = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Ver la definición de *progresión armónica* en **Sección 8.2.5, página 187**.

9.4.4. Serie Telescópica

Definición 9.11. Serie Telescópica

Se dice que una serie *asociativa*¹⁴: $\sum_{n=1}^n x_n = x_1 + x_2 + \dots$

es **telescópica**, si existe una sucesión $\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ tal que $x_i = a_i - a_{i+1} \quad \forall i \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{n=1}^n x_n = \sum_{n=1}^n (a_n - a_{n+1}) = (a_1 - \cancel{a_2}) + (\cancel{a_2} - \cancel{a_3}) + (\cancel{a_3} - \cancel{a_4}) + \dots + (\cancel{a_n} - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

Las series telescópicas son **convergentes** si $\{a_n\}$ es **convergente** y en ese caso su *suma* vale:

$$S_n = \sum_{i=1}^n x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Ejercicio 9.3. Calcular la suma de las siguientes series:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$

a) Descomponiendo en *fracciones simples* (Sección 11.1.1, página 267): $\frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

Por tanto:

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + k} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Así pues: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + k} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - 0 = \boxed{1}$

Notar que el término $a_1 = 1$ se refiere al primer término de la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ y no de $x_n = \frac{1}{n^2+n}$.

b) Notar que:

$$s_n = \sum_{n=1}^n \log \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \log \frac{2^2}{1 \cdot 3} + \log \frac{3^2}{2 \cdot 4} + \dots + \log \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \left(\log \frac{2}{1} - \log \frac{3}{2} \right) + \left(\log \frac{3}{2} - \log \frac{4}{3} \right) + \dots + \left(\log \frac{n+1}{n} - \log \frac{n+2}{n+1} \right)$$

Por tanto, si consideramos la sucesión:

$$\{a_n\} = \left\{ \log \frac{n+1}{n} \right\} = \left\{ \log \frac{2}{1}, \log \frac{3}{2}, \log \frac{4}{3}, \dots, \log \frac{n+1}{n}, \dots \right\}$$

Entonces: $\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = a_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \log 2 - \log 1 = \log 2 - 0 = \boxed{\log 2}$

¹⁴Ver la Definición 9.8, página 231.

9.5. Criterios de Convergencia

Definición 9.12. Criterios de Convergencia

Se denominan **Criterios de Convergencia** a determinadas condiciones que garantizan la convergencia de una serie.

Los criterios de convergencia dependen del tipo de serie y los podemos clasificar en:

- Criterios de convergencia generales
- Criterios de convergencia para series de términos no negativos
- Criterios de convergencia para series de términos positivos y negativos
- Criterios de convergencia absoluta.

9.5.1. Criterios de Convergencia Generales

Los **criterios de convergencia generales** son aquellos que sirven para todo tipo de series.

Teorema 9.1. Criterios Convergencia Generales

- **Condición del Resto:** Para que la serie $\sum x_n$ sea convergente es necesario, (pero no suficiente), que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

Es decir que su *término general* sea un *infinitésimo*¹⁵.

- **Criterio de Cauchy**¹⁶: Una serie de términos reales $\sum x_n$ es convergente sii:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall n > N, p > 0 \quad |x_n + x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}| < \varepsilon$$

Es decir, que cuando $n \rightarrow \infty$ se cumpla que $|x_n + x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}| \rightarrow 0$ independientemente del valor de $p > 0$.

Ejemplo 9.5. Condición del Resto

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ Es *divergente* ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1 \neq 0$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ No podemos decir nada sobre su convergencia.

¹⁵Ver la [Definición 8.13](#), página 216.

¹⁶El *criterio de Cauchy*, al igual que pasaba con las *sucesiones de Cauchy* y el *Teorema de Completitud* de \mathbb{R}), (ver la [Sección 8.7.2](#), página 195) es poco práctico, pero muy clarificador de la estructura de una *serie convergente*.

9.5.2. Criterios de Convergencia para Series de Términos No Negativos

Las series con todos sus términos *no negativos*¹⁷ poseen, entre otras, las siguientes *buenas* características:

- No son *oscilantes* (o bien *convergen* o bien *divergen*)
- Son *asociativas*¹⁸, es decir, tienen la misma *suma* y carácter que cualquiera de las series que se obtienen agrupando sus términos entre paréntesis.
- Son *conmutativas*¹⁹, es decir, tienen la misma *suma* y carácter que cualquiera de sus *reordenaciones*, (series con sus mismos sumandos pero en distinto orden).
- Si $\sum x_n$ y $\sum x'_n$ son series de *términos no negativos*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + x'_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} x'_n \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} cx_n = c \sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

Nota 9.2.

- Si una serie tiene todos sus *términos negativos*, sacando como factor común a -1 , se reduce a una serie de *términos positivos*.
- Si una serie tiene un número finito de *sumandos negativos*, y todos los demás son *positivos*, se la tratará como a suma serie de términos positivos, pues se la puede expresar como una suma finita más una serie de términos *positivos*, (e igual al contrario).

Vamos a ver algunos de los *criterios* más útiles para el estudio de la *convergencia* de las *series de términos no negativos*.

Criterios Generales de Comparación

Los **criterios de comparación** reducen el estudio de la convergencia de una serie dada a la comparación de los términos de la misma con los de otra serie de referencia, de la cual es conocida su *convergencia* o *divergencia*.

- **Criterio de Comparación de Gauss (o de la Mayorante)**

Sea $0 \leq x_n \leq y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (o a partir de un cierto índice) Entonces:

$$\begin{cases} \text{Si } \sum y_n \text{ converge} & \implies \sum x_n \text{ converge.} \\ \text{Si } \sum x_n \text{ diverge} & \implies \sum y_n \text{ diverge.} \end{cases}$$

- **Criterio de Comparación de Paso al Límite**

Sea $x_n, y_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (o a partir de un cierto índice) y sea $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \ell$

$$\begin{cases} \text{Si } 0 < \ell < +\infty & \implies \sum x_n, \sum y_n \text{ Tienen el mismo carácter (convergente o divergente)} \\ \text{Si } \ell = 0 & \implies \begin{cases} \text{Si } \sum y_n \text{ converge} & \implies \sum x_n \text{ converge} \\ \text{Si } \sum x_n \text{ diverge} & \implies \sum y_n \text{ diverge} \end{cases} \\ \text{Si } \ell = +\infty & \implies \begin{cases} \text{Si } \sum x_n \text{ converge} & \implies \sum y_n \text{ converge} \\ \text{Si } \sum y_n \text{ diverge} & \implies \sum x_n \text{ diverge} \end{cases} \end{cases}$$

¹⁷Con términos positivos o cero.

¹⁸Ver la [Definición 9.8, página 231](#).

¹⁹Ver la [Sección 9.4.2, página 231](#).

Serie Armónica Generalizada

Definición 9.13. Serie Armónica Generalizada

Se llama **serie armónica de orden** $\alpha \in \mathbb{R}$ (o **armónica generalizada** o **hiperarmónica**) a la siguiente *serie* y con las siguientes características:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots \quad \begin{cases} \alpha \leq 1 & \text{Divergente} \\ \alpha > 1 & \text{Convergente} \end{cases}$$

Es fácil verificar este resultado, ya que $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{n^\alpha} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- $\alpha = 1$ **Serie Armónica**²⁰ \implies **Divergente**
- $\alpha < 1$ Como $\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n}$ y la *serie armónica* es **divergente** $\xRightarrow{\text{C. Comparación}}$ **Divergente**
- $\alpha > 1$ Como es una serie de términos positivos, podemos asociar los términos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right)}_{< \frac{2}{2^\alpha} = \frac{1}{2^{\alpha-1}}} + \underbrace{\left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right)}_{< \frac{2^2}{2^\alpha} = \frac{1}{2^{2\alpha-2}}} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{(2^i)^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2^{i+1}-1)^\alpha}\right)}_{< \frac{1}{(2^{\alpha-1})^i}} + \dots$$

Por tanto cada término de la serie es **menor** que cada uno de los términos de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{\alpha-1})^i}$$

que al ser una *serie geométrica*²¹ de razón $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$, (ya que $\alpha > 1$), es *convergente*.

Ejercicio 9.4. Estudiar el carácter de las series $\sum x_n$ en los siguientes casos:

a) $x_n = \frac{\text{sen}^2 n}{3^n}$

b) $x_n = \frac{n + 2 \log n}{n}$

a) Como $\frac{\text{sen}^2 n}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}$ y ésta es una *serie geométrica* de razón $1/3 < 1$ $\xRightarrow{\text{C.Comp}}$ Convergente

b) Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+2 \log n}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n \log n}{n^2} = 1$ y $\sum \frac{1}{n}$ es **divergente** $\xRightarrow{\text{C.P.Lim}}$ Divergente

Criterios Automáticos de Convergencia

A partir de los *criterios de comparación*²² se pueden deducir casos particulares, cuya determinación de la *convergencia* es directo, sin necesidad de compararlos con alguna otra serie.

²⁰Ver la **Definición 9.10**, página 233.

²¹Ver la **Sección 8.2.2**, página 185.

²²Ver la **Sección 9.5.2**, página 236.

• **Criterio de la Raíz**

Sea $x_n \geq 0$ Entonces si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = r$

Si $r < 1$	\implies	$\sum x_n$ Converge
Si $r > 1$	\implies	$\sum x_n$ Diverge
Si $r = 1$	\implies	Este criterio no decide

• **Criterio del Cociente o de D'Alambert**

Sea $x_n > 0$ Entonces si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = r$

Si $r < 1$	\implies	$\sum x_n$ Converge
Si $r > 1$	\implies	$\sum x_n$ Diverge
Si $r = 1$	\implies	Este criterio no decide

• **Criterio de Raabe**

Sea $x_n > 0$ Entonces si $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n} \right) = r$

Si $r > 1$	\implies	$\sum x_n$ Converge
Si $r < 1$	\implies	$\sum x_n$ Diverge
Si $r = 1$	\implies	Si además $n \left(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n} \right) < 1$ a partir de un cierto índice $\implies \sum x_n$ Diverge

Nota 9.3.

- El *criterio de la raíz* es algo más eficiente (sirve para más casos) que el del *cociente*.
- El *criterio de Raabe* es el más eficaz y permite resolver algunos problemas del tipo $x_{n+1}/x_n \rightarrow 1$, donde los dos anteriores son inoperantes.

Ejercicio 9.5. Estudiar el carácter de las series $\sum x_n$ en los siguientes casos:

a) $x_n = \frac{1}{n!}$ b) $x_n = n^5 \left(\frac{3n+2}{4n+3} \right)^n$ c) $x_n = \frac{n!}{a(a+1)\dots(a+n-1)}$, $(a > 0)$

a) Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$ $\xrightarrow{\text{C.Cociente}}$ Convergente

b) Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^5 \left(\frac{3n+2}{4n+3} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{5}{n}} \left(\frac{3n+2}{4n+3} \right) = 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} < 1$ $\xrightarrow{\text{C.Raíz}}$ Convergente

c) Si aplicamos el *criterio del cociente*:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! a(a+1)\dots(a+n-1)}{n! a(a+1)\dots(a+n-1)(a+n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{a+n} = 1 \rightarrow \text{No sirve}$$

Sin embargo, aplicando el *criterio de Raabe*:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{n+1}{a+n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an - n}{a+n} = a \begin{cases} a > 1 & \text{Convergente} \\ a < 1 & \text{Divergente} \\ a = 1 & ? \end{cases}$$

Para $a = 1$ se tiene:

$$x_n = \frac{n!}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} = \frac{n!}{n!} = 1$$

Como es una serie con términos constantes, es Divergente

Otros Criterios: del Logaritmo y de la Integral

• **Criterio del Logaritmo**

Sea $x_n > 0$ Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log x_n}{\log n} = r$

$$\begin{cases} \text{Si } r > 1 \implies \sum x_n \text{ Converge} \\ \text{Si } r < 1 \implies \sum x_n \text{ Diverge} \\ \text{Si } r = 1 \implies \text{A partir de un cierto índice} \implies \sum x_n \text{ Diverge} \end{cases}$$

• **Criterio de la Integral**

Sea x_n una serie de términos positivos y decreciente $x_1 > x_2 > \dots > x_n > \dots > 0$.

Si $f : [1, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ es una función positiva y *monótona decreciente* sobre $[1, +\infty)$ tal que $f(n) = x_n \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces $\sum x_n$ será convergente o divergente sii²³:

$$\int_1^\infty f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_1^\alpha f(x) dx = r$$

$$\begin{cases} \text{Si } r \in \mathbb{R} \implies \sum x_n \text{ Converge} \\ \text{Si } r = +\infty \implies \sum x_n \text{ Diverge} \end{cases}$$

Ejercicio 9.6. Estudiar el carácter de la series $\sum x_n$ donde:

$$x_n = \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n \log n}}$$

En este caso el *criterio de la Raíz* no sirve y el de *Raabe* resulta complicado. Sin embargo, aplicando el *criterio del Logaritmo*:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log x_n}{\log n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n \log n) \log \left(1 + \frac{2}{n}\right)}{\log n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \log e^2 = 2 > 1 \xrightarrow{\text{C.Log}} \text{Convergente}$$

Ejercicio 9.7. Estudiar el carácter de la siguiente serie en función del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \log^\alpha n}$$

Si $\alpha = 0$ se tiene $\sum \frac{1}{n}$ y la serie es divergente. Si $\alpha \neq 0$, como todos los términos de la serie son positivos y decrecientes, podemos aplicar el criterio de la integral:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x \log^\alpha x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{dx}{x \log^\alpha x} = \left\{ \begin{array}{l} u = \log x \\ du = \frac{dx}{x} \end{array} \right\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{du}{u^\alpha}$$

• Si $\alpha = 1$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{du}{u} = \lim_{t \rightarrow \infty} \log u \Big|_2^t \stackrel{\text{c.v.}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \log \log n \Big|_2^t = \lim_{t \rightarrow \infty} (\log \log t - \log \log 2) = \infty \implies \text{Divergente!}$$

• Para $\alpha \neq 1$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{du}{u^\alpha} = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{(1-\alpha)u^{\alpha-1}} \Big|_2^t \stackrel{\text{c.v.}}{=} \frac{1}{\alpha-1} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\log^{\alpha-1} x} \Big|_2^t = \frac{1}{\alpha-1} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\log^{\alpha-1} t} - \frac{1}{\log^{\alpha-1} 2} \right)$$

Si $\alpha > 1$ este límite es finito y la serie es convergente, y si $\alpha < 1$ el límite es infinito y la serie es divergente.

²³Ver la Sección 11.2, página 276.

9.5.3. Criterios de Convergencia para Series de Términos Positivos y Negativos

Vamos a estudiar ahora los criterios de convergencia para las series de números reales que poseen un número infinito de términos positivos y un número infinito de términos negativos.

Empezamos por un tipo particular de esta categoría de series.

Series Alternadas

Definición 9.14. Series Alternadas

Se denomina **serie alternada** a las series cuyos sumandos son *alternativamente* positivos y negativos, y además, decrecientes en valor absoluto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots \quad \text{donde} \quad |x_1| > |x_2| > |x_3| > \dots > 0$$

Criterio de Leibniz

Una *serie alternada* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$ es **convergente** si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Nota 9.4. Se permite que $|x_1| \geq |x_2| \geq |x_3| \geq \dots \geq 0$, siempre y cuando $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Ejercicio 9.8. Estudiar la convergencia de la serie armónica alternada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

Como es *alternada* y $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ $\xRightarrow{\text{C.Leibniz}}$ **Converge**

9.5.4. Criterios de Convergencia Absoluta

Definición 9.15. Convergencia Absoluta

- Se dice que una serie $\sum x_n$ de términos reales cualesquiera es **absolutamente convergente** si converge la serie:

$$\sum |x_n|$$

- En el caso de que diverja se dice que es **absolutamente divergente**
- Las series *convergentes* que no son *absolutamente convergentes* se las denomina **condicionalmente convergentes**.

Criterios de la Convergencia Absoluta

- Una serie es *absolutamente convergente* si la serie formada por sus términos positivos y la serie formada por sus términos negativos son ambas *convergentes*.
- Toda serie *absolutamente convergente* es *convergente*. El recíproco es falso en general.

Ejemplo 9.6. Serie Condicionalmente Convergente

La serie *armónica alternada*²⁴:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

Es *convergente*, pero **no** *absolutamente convergente* por tanto es **condicionalmente convergente**.

Ejercicio 9.9. Sea $\{a_n\}$ una sucesión cualquiera de números reales. Estudiar la convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } a_n}{3^n} = \frac{\text{sen } a_1}{3^1} + \frac{\text{sen } a_2}{3^2} + \frac{\text{sen } a_3}{3^3} + \dots$$

Esta serie de forma general **no** es una *serie alternada*, ya que los valores de $\text{sen}(a_n)$ crecen y decrecen continuamente, por tanto **no** se puede aplicar el *criterio de Leibniz*²⁵.

Sin embargo como:

$$\left| \frac{\text{sen } a_n}{3^n} \right| \leq \frac{1}{3^n} \quad (\text{independientemente del valor de los } a_n)$$

y la segunda es una *serie geométrica* de razón $\frac{1}{3} < 1$, por tanto *convergente*, aplicando el *criterio de comparación*:

$$\sum \left| \frac{\text{sen } a_n}{3^n} \right| \text{ convergente} \implies \sum \frac{\text{sen } a_n}{3^n} \text{ absolutamente convergente} \implies \sum \frac{\text{sen } a_n}{3^n} \text{ convergente}$$

Propiedades de las Series Absolutamente Convergentes

Sean $\sum x_n$ e $\sum y_n$ dos sucesiones cualesquiera de números reales absolutamente convergentes. Entonces se verifica:

- $\sum (x_n + y_n) = \sum x_n + \sum y_n$ También es absolutamente convergente.
- $\sum (x_n \cdot y_n) = \sum x_n \cdot \sum y_n$ También es absolutamente convergente.

²⁴Ver el [Ejercicio 9.8](#), página 240.

²⁵Ver la [Sección 9.5.3](#), página 240.

9.6. Series de Potencia

9.6.1. Series de Taylor

Una función $f(x)$ suficientemente derivable en un punto de su dominio $x = a$ puede expresarse a través del desarrollo de Taylor²⁶ de orden k de la siguiente forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + R_{k,a}(x) \quad ; \quad x \in E(a, r)$$

donde r es el radio de convergencia²⁷ del desarrollo y $R_{k,a}(x)$ es el resto del desarrollo, verificándose:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_{k,a}(x) = 0 \quad \forall x \in E(a, r)$$

Definición 9.16. Serie de Taylor

Toda función²⁸ $f \in \mathcal{C}^\infty$ en $x = a$ puede expresarse de la siguiente forma conocida como **serie de Taylor**²⁹:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad \forall x \in E(a, r)$$

Las **series de McLaurin** son series de Taylor para el caso particular $a = 0$.

Ejemplo 9.7. Ejemplos de *series de McLaurin*.

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ $|x| < 1$ Serie Geométrica
- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ $x \in \mathbb{R}$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$ $x \in \mathbb{R}$
- $\text{sen } x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$ $x \in \mathbb{R}$
- $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ $x > -1$

- La *serie de Taylor* **no** es un polinomio, ya que un polinomio es una suma de un número **finito** de términos (monomios), mientras que una *serie*³⁰ es una suma de infinitos términos.
- No todas las funciones tienen asociadas *series de Taylor* en algún punto, ya que como hemos comentado³¹ es necesario que la función sea de clase \mathcal{C}^∞ en dicho punto.

²⁶Ver el Teorema 6.1, página 147.

²⁷Ver la Sección 9.6.3, página 245.

²⁸Ver la Definición 5.11, página 128.

²⁹La *serie de Taylor* de una función en un punto es la extensión de su *polinomio de Taylor* a infinitos términos.

³⁰Ver la Definición 9.4, página 229.

³¹Ver la Definición 9.16, página 242.

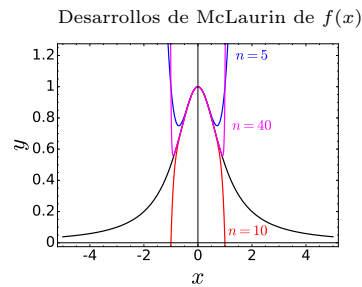
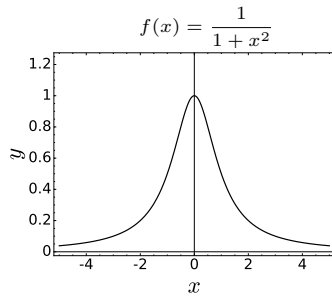
Ejemplo 9.8. Representación gráfica de los desarrollos de McLaurin de distintos órdenes de la función,

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

La serie de McLaurin de esta función es:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \dots \quad ; \quad |x| < 1$$

En las siguientes gráficas se muestra la función $f(x)$ y algunos términos de la serie truncada a distintos órdenes n , observándose el ajuste progresivo de los desarrollos a la función en el dominio³² $(-1, 1)$.



Ejemplo 9.9. Series de Taylor en distintos puntos de la función:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Los desarrollos de Taylor de $f(x)$ en torno a $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$ son los siguientes, junto con sus correspondientes zonas de convergencia:

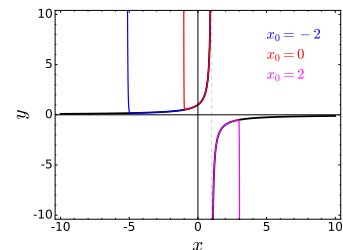
$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}(x+2) + \frac{1}{27}(x+2)^2 + \frac{1}{81}(x+2)^3 + \frac{1}{243}(x+2)^4 + \dots \quad ; \quad x \in (-5, 1)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \dots \quad ; \quad x \in (-1, 1)$$

$$\frac{1}{1-x} = -1 + (x-2) - (x-2)^2 + (x-2)^3 - (x-2)^4 + \dots \quad ; \quad x \in (1, 3)$$

En la siguiente gráfica podemos observar la función $f(x)$ (en negro) junto con las series de Taylor de la función obtenidas al desarrollar en torno a los puntos $x = -2$ (azul), $x = 0$ (rojo) y $x = 2$ (rosa).

Se puede observar como cada serie ajusta a la función en un dominio determinado, denominado *intervalo de convergencia*³³.



El *intervalo de convergencia* depende de la función y del punto de desarrollo, pudiendo ser en algunas funciones todo \mathbb{R} y en otras únicamente un punto, correspondiente al punto de desarrollo.

Las series de Taylor son casos particulares de las conocidas como series de potencia.

³²En la Sección 9.6.4, página 245 se dará una explicación a la existencia de este dominio.

³³Ver la Definición 9.19, página 245.

9.6.2. Series de Potencia

Definición 9.17. Series de Potencias

Una **serie de potencias** de x en torno al punto x_0 , denominado **centro**, es una función del tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n a_i(x-x_0)^i = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

donde x es la *variable independiente* y a_i son *constantes*.

- Las *series de Taylor* son *series de potencia* donde los términos a_n vienen dados a través de las derivadas sucesivas de una determinada función. De forma general los términos a_n de las *series de potencia* no provienen de ninguna derivada de alguna función y por tanto no son *series de Taylor*.
- Cada uno de los *desarrollos* (infinitos) *de Taylor* de una función en torno a puntos distintos x_0 , vienen dados por series **distintas**³⁴ que tienden a la función original en determinados dominios.
- Cada una de las *series de potencia*³⁵ corresponden con una función de un grupo de funciones denominadas *funciones especiales*³⁶.

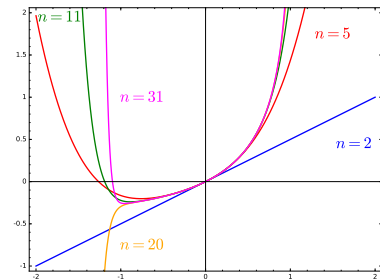
Ejemplo 9.10. Series de potencia con distintos centros.

Vamos a analizar una misma *serie de potencias* con los mismos *coeficientes* pero con *centros* distintos.

- Serie de potencias en torno a $x_0 = 0$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} x^n = 0 + \frac{1}{2}x + \frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{10}x^3 + \frac{4}{17}x^4 + \frac{5}{26}x^5 + \frac{6}{37}x^6 + \frac{7}{50}x^7 + \dots$$

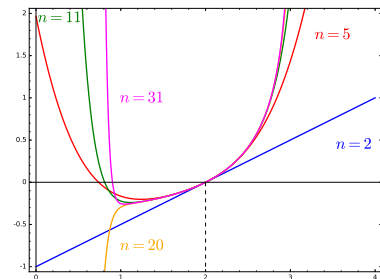
En la siguiente gráfica se muestran algunas funciones correspondientes a trozos de la serie truncados para distintos valores de n . Vemos que cada uno de ellos corresponde con una función distinta, pero que son similares en torno al punto $x_0 = 0$. También podemos observar que mientras que las partes derechas (positivas) tienden a parecerse, las partes izquierdas (negativas) en función de que n sea par o impar tiende a $-\infty$ y $+\infty$ respectivamente.



- Serie de potencias igual que la anterior pero en torno a $x_0 = 2$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} (x-2)^n = 0 + \frac{1}{2}(x-2) + \frac{2}{5}(x-2)^2 + \frac{3}{10}(x-2)^3 + \frac{4}{17}(x-2)^4 + \dots$$

Vemos que todas las gráficas son iguales a las calculadas en torno al punto $x_0 = 0$, pero desplazadas dos unidades a la derecha.



³⁴Ya que poseen coeficientes distintos correspondientes a los valores de los términos $f^{(n)}(x_0)$.

³⁵Caracterizadas por un determinado centro x_0 y un determinado conjunto infinito de coeficientes a_i .

³⁶Ver por ejemplo "Clases de Ampliación de Matemáticas para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 367.

9.6.3. Radio de Convergencia

Definición 9.18. Radio de Convergencia

Para toda *serie de potencias* existe un valor $0 \leq r \leq \infty$ denominado **radio de convergencia** de la *serie* en torno a x_0 , para el cual:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad \begin{cases} \text{Converge absolutamente}^{37} \text{ para } |x - x_0| < r \\ \text{Diverge para } |x - x_0| > r \end{cases}$$

Nota 9.5.

- si $r = 0 \rightarrow$ Únicamente converge en el *centro* x_0
- si $r = \infty \rightarrow$ Converge para todo $x \in \mathbb{R}$

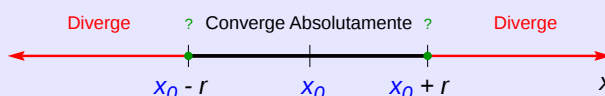
Ejemplo 9.11. Radio de Convergencia

El *radio de convergencia* en las series del [Ejemplo 9.10, página 244](#) es $r = 1$.

Definición 9.19. Intervalo de Convergencia

Dada una *serie de potencias* en torno a $x = x_0$ con *radio de convergencia* r , se denomina **intervalo de convergencia** al intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$, de forma que:

$$|x - x_0| < r \iff (x_0 - r, x_0 + r)$$



Los extremos del intervalo $x_0 - r$ y $x_0 + r$ son puntos de convergencia *indeterminada*, que necesitan de un estudio aparte para determinar si la serie converge o diverge en ellos.

9.6.4. Criterios de Convergencia

Para determinar el *radio de convergencia* r de una serie de potencias, se pueden utilizar diferentes **criterios de convergencia**³⁸ particularizados para este tipo de series. Vamos a ver un par de ellos, ya conocidos, que suelen ser muy útiles en la determinación del *radio de convergencia* r de una *serie de potencias*.

Teorema 9.2. Criterio de la Raíz

Si $0 \leq r \leq \infty$ es el *radio de convergencia* de una *serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, entonces si el siguiente límite existe, el valor de r queda determinado de la siguiente forma³⁹:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \quad (0 \leq L \leq \infty) \implies r = \frac{1}{L}$$

$$|x - x_0| < r \implies x_0 - r < x < x_0 + r \implies \text{Intervalo de Conv.} = (x_0 - r, x_0 + r)$$

³⁷Ver la [Definición 9.15, página 240](#).

³⁸Ver la [Sección 9.5, página 235](#).

³⁹Notar que de forma general el *criterio de la raíz* sirve para determinar la convergencia o divergencia de series con términos no negativos (ver la [Sección 9.5.2, página 237](#)), en función de que el valor de dicho límite sea menor o igual a 1. Para el caso particular de la series de potencias, que siempre son convergentes en al menos un punto de su dominio (el *centro* de la serie), el valor de dicho límite se puede utilizar para determinar (a través de su inverso) el radio de convergencia.

Consideraciones a tener en cuenta sobre el *criterio de la raíz*:

- Solo es válido si existe el límite. En caso contrario hay que utilizar otro criterio.
- No se puede aplicar directamente si infinitos términos a_i son cero.
- En los puntos frontera del intervalo: $x = x_0 - R$ y $x = x_0 + R$, este criterio no decide la convergencia.

Teorema 9.3. Criterio del Cociente

Si $0 \leq r \leq \infty$ es el *radio de convergencia* de una *serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, entonces si el siguiente límite existe, el valor de r queda determinado de la siguiente forma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \quad (0 \leq L \leq \infty) \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \quad \implies \quad r = \frac{1}{L}$$

$$|x - x_0| < r \quad \implies \quad x_0 - r < x < x_0 + r \quad \implies \quad \text{Intervalo de Conv.} = (x_0 - r, x_0 + r)$$

Las consideraciones a tener en cuenta sobre este criterio son las mismas que en el *criterio de la raíz*.

Ejercicio 9.10. Calcular el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie de McLaurin de la función:

$$f(x) = \arctan x$$

La serie de McLaurin de la función arcotangente es fácil de calcular:

$$f(x) = \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots \quad ; \quad |x| < r$$

Donde r es el radio de convergencia. Para determinarlo podemos aplicar el criterio del cociente:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)+1}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+1} = \boxed{1}$$

Por tanto, teniendo en cuenta que el punto de desarrollo es $x_0 = 0$, el intervalo de convergencia, en principio, es:

$$(x_0 - r, x_0 + r) = (-1, 1)$$

Para analizar la convergencia en los extremos del intervalo $x = 1$ y $x = -1$ podemos estudiar las series resultantes:

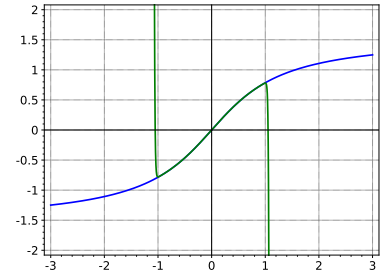
$$f(1) = \arctan(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (1)^{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

$$f(-1) = \arctan(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (-1)^{2n+1} = -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$$

Como ambas series son *alternas* (ver la [Sección 9.5.3, página 240](#)) y el límite de su término general tiende a cero, por el *criterio de Leibniz*, ambas son convergentes. Por tanto el intervalo de convergencia es:

$$(x_0 - r, x_0 + r) = [-1, 1]$$

En la siguiente figura se representa la función $\arctan(x)$ (en azul) y la serie de McLaurin de dicha función (en verde), comprobando que ambas solo coinciden (convergen) en el intervalo $[-1, 1]$.



Ejercicio 9.11. Determinar, en caso de ser posible, el radio de convergencia de las siguientes series de potencia.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$

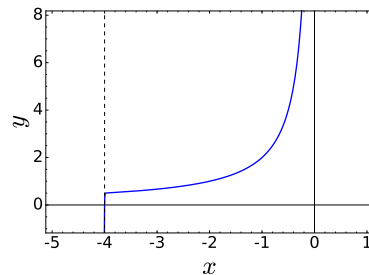
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} (x-5)^n$

a) Aplicamos el criterio de la raíz.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{R = \frac{1}{L} = 2} \implies \begin{cases} \text{si } |x+2| < 2 & \text{Serie Convergente} & -4 < x < 0 \\ \text{si } |x+2| > 2 & \text{Serie Divergente} & x < -4, x > 0 \end{cases}$$

En los extremos $x = -4$ y $x = 0$ no podemos asegurar la convergencia con este criterio. Si dibujamos la serie para un valor alto de n vemos que la serie converge para $x = -4$ y diverge para $x = 0$.



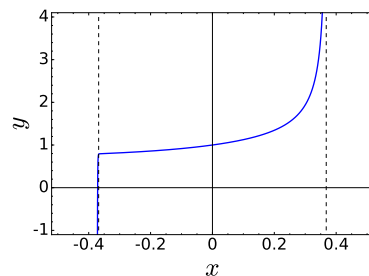
b) Aplicamos en este caso el criterio del cociente.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} n!}{n^n (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+1} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

$$\boxed{R = \frac{1}{L} = \frac{1}{e}} \implies \begin{cases} \text{si } |x| < 1/e & \text{Serie Convergente} & -1/e < x < 1/e \\ \text{si } |x| > 1/e & \text{Serie Divergente} & x < -1/e, x > 1/e \end{cases}$$

Notar que se podría haber calculado el valor del límite del cociente $|a_n/a_{n+1}|$ obteniéndose directamente el valor del radio de convergencia R , (sin necesidad de invertir el resultado).

En los extremos $x = -1/e$ y $x = 1/e$ no podemos asegurar la convergencia con este criterio. Si dibujamos la serie para un valor alto de n vemos que la serie converge para $x = -1/e$ y diverge para $x = 1/e$.

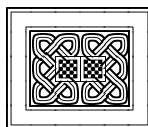
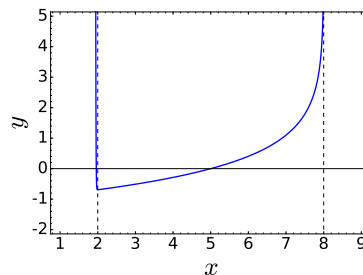


c) Intentamos también aplicar el criterio del cociente.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)3^{n+1}}}{\frac{1}{n3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{3}$$

$$R = \frac{1}{L} = 3 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{si } |x-5| < 3 & \text{Serie Convergente} & 2 < x < 8 \\ \text{si } |x-5| > 3 & \text{Serie Divergente} & x < 2, x > 8 \end{cases}$$

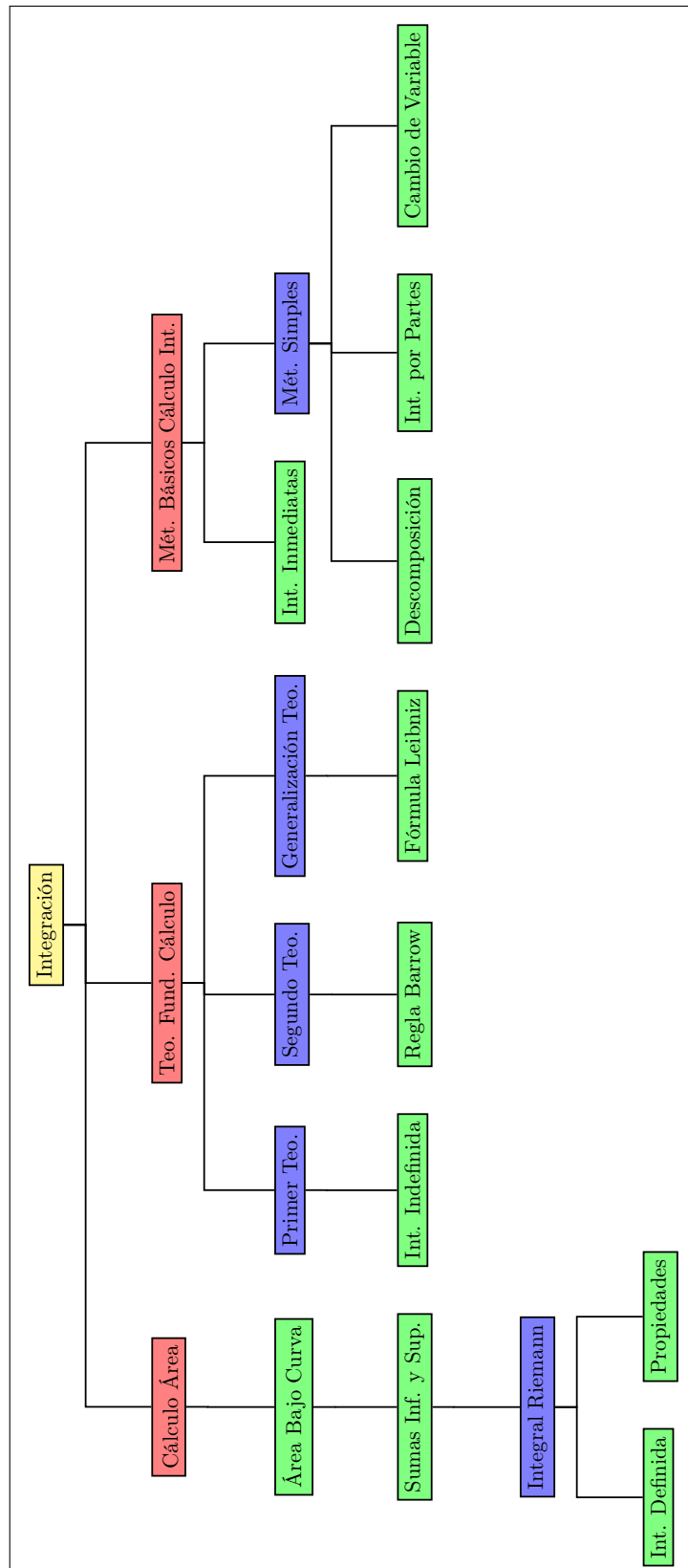
En los extremos $x = 2$ y $x = 8$ no podemos asegurar la convergencia con este criterio. Si dibujamos la serie para un valor alto de n vemos que la serie converge para $x = 2$ y diverge para $x = 8$.



Integración

Contenido

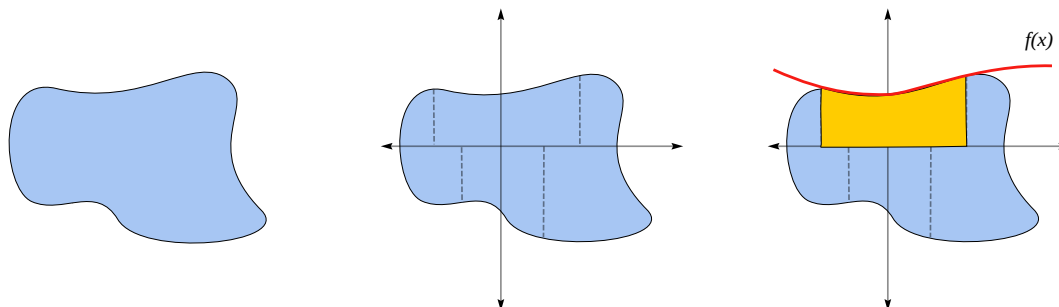
10.1 Cálculo del Área	251
10.1.1 Área Debajo de una Curva	251
10.1.2 Sumas Inferiores y Superiores	252
10.2 Integral de Riemann	252
10.2.1 Propiedades de la Integral Definida	253
10.3 Teoremas Fundamentales del Cálculo (TFC)	254
10.3.1 Primer Teorema Fundamental del Cálculo (TFC1)	254
10.3.2 Función Primitiva e Integral Indefinida	255
10.3.3 Segundo Teorema Fundamental del Cálculo	256
10.3.4 Generalización del Teorema Fundamental del Cálculo	257
10.4 Métodos Básicos para el Cálculo de Primitivas	260
10.4.1 Integrales Inmediatas	260
10.4.2 Métodos Simples de Integración	261
10.4.3 Descomposición	261
10.4.4 Integración por Partes	261
10.4.5 Cambio de Variable o Sustitución	262



10.1. Cálculo del Área

Es fácil determinar el área de figuras planas regulares como: paralelogramos, triángulos, hexágonos, círculos, etc., ya que existen *fórmulas* sencillas para su cálculo. Sin embargo para figuras más generales que no estén compuestas de estas figuras elementales no existen ningún tipo de fórmula que nos permita determinar su área. En este tema vamos a estudiar el método de determinación de áreas de todo tipo de figuras planas, y la generalización de dicho método que dará lugar al concepto de *integral*¹ de una función.

Partamos de una figura plana general cualquiera como se muestra en la parte izquierda de la siguiente figura.



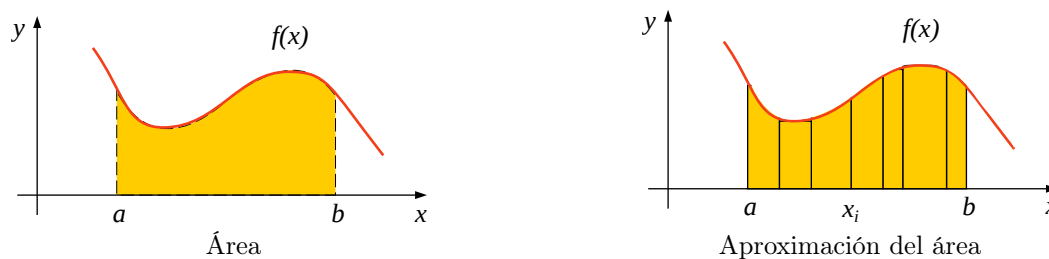
Estamos interesados en el cálculo de su área. Una forma de hacerlo sería particionarla en trozos más pequeños (figura central) de forma que el borde exterior de cada uno de ellos se pudiera aproximar mediante una función $f(x)$ (figura derecha).

Si tuviéramos un método de cálculo del área debajo de una curva dada por una función cualquiera entre dos valores de su dominio, podríamos aplicarlo a cada uno de los trozos de la figura² y sumando dichos valores se podría obtener el área total de la figura en cuestión.

Vamos por tanto a estudiar la forma de obtener este método de cálculo de áreas debajo de funciones.

10.1.1. Área Debajo de una Curva

Sea $f(x)$ una determinada función positiva³ y queremos determinar el área comprendida entre la función y el eje x entre dos valores dados a y b de su dominio (ver la parte izquierda de la siguiente figura).



Una forma aproximada de determinar dicha área consiste en particionar el intervalo $[a, b]$ en una serie de puntos x_i de la siguiente forma (ver figura derecha):

$$P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\} \implies \begin{cases} [x_{i-1}, x_i] : \text{subintervalo } i \\ \Delta x_i : \text{Amplitud del subintervalo } i \end{cases}$$

donde P es la **partición** formada por el conjunto de todos los puntos x_i , de forma que se generan **subintervalos** entre cada dos puntos sucesivos de la partición, con una longitud (**amplitud**) Δx_i .

Vamos a ver las formas de aproximar el valor del área buscada, a través de las denominadas *sumas inferiores* y *superiores*.

¹Ver la **Definición 10.1**, página 252.

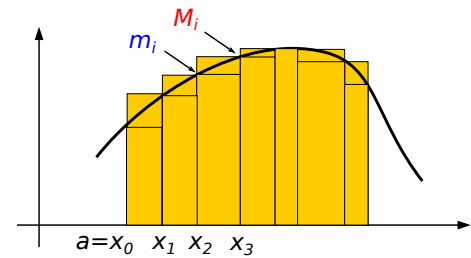
²Cada uno de estos trozos tendría asociado una determinada función $f(x)$ distinta en cada caso.

³Es decir, sus valores se encuentran por encima del eje x . Posteriormente se generalizará a cualquier tipo de función.

10.1.2. Sumas Inferiores y Superiores

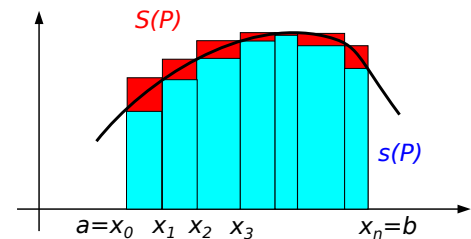
Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada en un compacto $[a, b]$ y sea $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ una partición cualquiera. Se define en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ los siguientes puntos:

- m_i : mínimo de f en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.
- M_i : máximo de f en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.



A través de ellos se definen la *sumas inferiores* y *superiores* asociadas a la partición P a los siguientes valores:

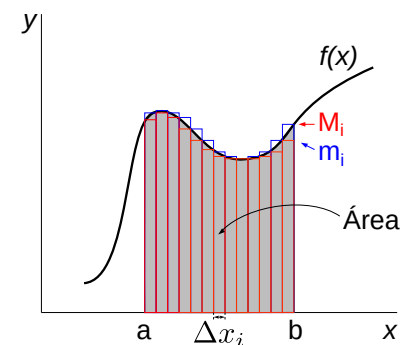
- **Suma Inferior** $s(P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$
- **Suma Superior** $S(P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$



Cada uno de estos dos valores representa una aproximación por defecto y por exceso del valor exacto del área buscada. Este valor exacto del área debajo de la curva, en caso de que exista, se puede obtener haciendo una partición con infinitos subintervalos. En este caso las *sumas inferiores* y *superiores* coincidirán y corresponderán con el valor del área buscada:

$$\text{Área} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

Este proceso de *paso al límite* en la partición de una región debajo de una curva es la que da lugar a la definición matemática de *integral definida* de una función que veremos a continuación.



10.2. Integral de Riemann

Definición 10.1. Función Integrable e Integral Definida

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada en el compacto⁴ $[a, b]$.

Se dice que f es **integrable según Riemann**⁵ o **R-integrable** en $[a, b]$ y se denota por $\int_a^b f$ o $\int_a^b f(x) dx$ al número real (positivo o negativo) dado por el siguiente *límite*⁶, en caso de que exista:

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

Al valor del *límite* se denomina **integral definida** de f entre a y b .

⁴Ver la [Definición 1.21](#), página 35.

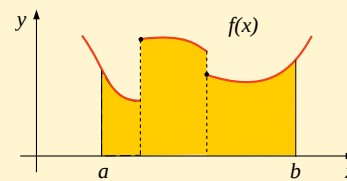
⁵En la [Definición 11.3](#), página 278 se extiende esta definición a funciones no acotadas y/o definidas sobre dominios no compactos.

⁶Ver la [Definición 3.1](#), página 75.

10.2.1. Propiedades de la Integral Definida

- Una función es *integrable* en un compacto $[a, b]$ si tiene un número finito de *discontinuidades finitas* en el intervalo. Por tanto no es necesario que una función sea *continua* para que sea *integrable*.

Notar que el área debajo de un punto es cero, pudiendo existir un número *finito* de discontinuidades, siempre que sean de *salto finito* (ver la **Definición 4.5, página 100**). Las funciones **continuas** y las funciones **monótonas** son siempre integrables.

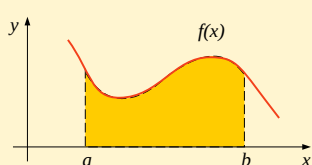


- La *integral indefinida* cumple la *propiedad de linealidad*, verificándose:

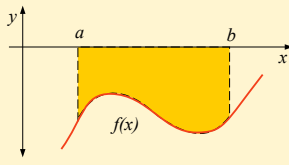
$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

3. Integral y Área

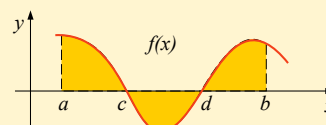
Si la función es negativa (por debajo del eje x) en el intervalo $[a, b]$, el valor de la *integral definida* será **negativo** y el área entre la función y eje x se obtiene cambiando de signo el valor de la *integral definida*⁷.



$$A = \int_a^b f(x) dx$$



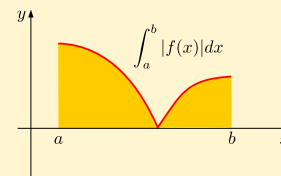
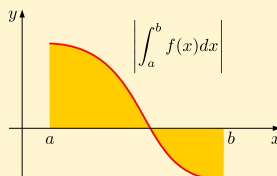
$$A = - \int_a^b f(x) dx$$



$$A = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$$

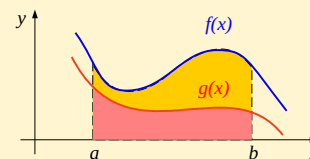
4. Valor Absoluto de la Integral

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$



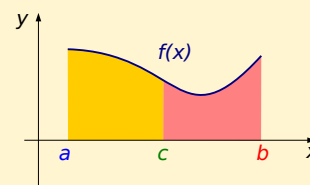
5. Relación entre Funciones y sus Integrales

$$f(x) \geq g(x), \quad \forall x \in [a, b] \implies \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$



6. Aditividad del Intervalo

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx; \quad \forall a, c, b \in \mathbb{R}, \quad a \leq c \leq b$$



Esto implica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \\ \bullet \int_a^a f(x) dx = 0 \end{array} \right.$$

10.3. Teoremas Fundamentales del Cálculo (TFC)

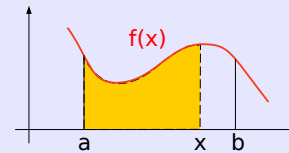
10.3.1. Primer Teorema Fundamental del Cálculo (TFC1)

Vamos a ver el teorema más importante del cálculo infinitesimal, que establece la relación entre las operaciones de *integración* y *derivación*. Empezamos viendo la definición de *función integral*.

Definición 10.2. Función Integral

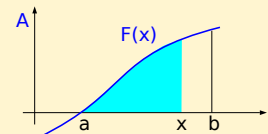
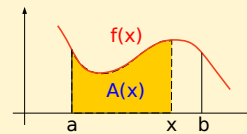
Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función *integrable* en $[a, b]$, entonces se puede definir la siguiente función continua $F(x)$ en $[a, b]$ denominada *función integral* de $f(x)$:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad ; \quad \forall x \in (a, b) \quad , \quad t \text{ (variable muda)}$$

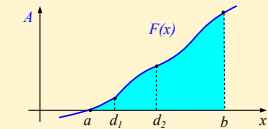
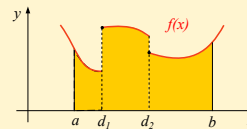


donde t se denomina *variable muda*, ya que el resultado final no depende de ella, pudiendo tener cualquier nombre distinto de las variables del sistema.

- Geométricamente la *función integral* $F(x)$ representa el **área** $A(x)$ de $f(x)$ entre $x = a$ y un determinado valor x .



- La *función integral* $F(x)$ siempre es **continua** a pesar de que $f(x)$ pueda no serlo⁸.



Teorema 10.1. Primer Teorema Fundamental del Cálculo (TFC1)

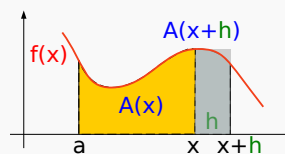
Si $f(x)$ es *continua* en $[a, b]$ entonces la *función integral* $F(x)$ es derivable en $[a, b]$ y además $F'(x) = f(x)$.

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \implies \quad F'(x) = \frac{dF}{dx} = f(x)$$

Demostración 10.1.

Se puede demostrar fácilmente a través de la interpretación de la integral como el cálculo de un área. Para ello definimos la función área $A(x)$ de una función $f(x)$ de la siguiente forma:

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt$$



Tomando el valor de h como una distancia pequeña se tiene:

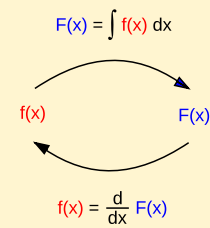
$$A(x+h) \approx A(x) + f(x)h \quad \implies \quad f(x) \approx \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \quad \implies \quad f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = A'(x)$$

⁷Como veremos el concepto de integral tiene un significado más amplio que el simple cálculo de áreas y su valor puede ser positivo, negativo o cero. Solo en el caso de que asociemos la integral al cálculo de un área, su valor tiene siempre que ser positivo, (cambiando de signo en caso necesario).

⁸Como el área debajo de un punto es cero, se pueden eliminar un número **finito** de puntos de la función y el valor del área debajo de la curva sigue siendo el mismo.

Notar que el *primer teorema fundamental del Cálculo*⁹ (TFC1) establece la relación entre una *función integrable* $f(x)$ y su *función integral* $F(x)$ asociada. Esta relación viene dada a través de las operaciones de *integración* y *derivación*, siendo una la operación inversa de la otra.

Así, la integral de una función $f(x)$ es su *función integral* $F(x)$, mientras que la derivada de la *función integral* $F(x)$ da lugar a la función original $f(x)$, como esquematiza la siguiente figura.



10.3.2. Función Primitiva e Integral Indefinida

Teniendo en cuenta el *primer teorema fundamental del Cálculo* (TFC1) se puede definir una *función primitiva* $F(x)$ de $f(x)$ de la siguiente forma:

Definición 10.3. Función Primitiva

Sea $f(x)$ una función *derivable*¹⁰ $\forall x \in [a, b]$. Se dice que $F(x)$ es una *función primitiva* o simplemente *primitiva* de $f(x)$ si:

$$F'(x) = \frac{d}{dx} F(x) = f(x) \quad , \quad \forall x \in [a, b]$$

Ejemplo 10.1. Función Primitiva

Sea $f(x) = 3x^2$. Entonces $F(x) = x^3$ es una *función primitiva* de $f(x)$ ya que:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2 = f(x)$$

Notar que si una función $f(x)$ tiene una *función primitiva* $F(x)$ entonces tiene **infinitas primitivas**, dadas por $F(x) + c$ para cualquier $c \in \mathbb{R}$, ya que:

$$\frac{d}{dx}[F(x) + c] = \frac{d}{dx} F(x) + \underbrace{\frac{d}{dx} c}_0 = \frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

Definamos ahora el concepto de *integral indefinida*¹¹.

Definición 10.4. Integral Indefinida

Se denomina **integral indefinida** de $f(x)$ al conjunto de todas las infinitas *funciones primitivas* de $f(x)$.

$$\int f(x) dx = F(x) + c \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 10.2. Integral Definida

Sea $f(x) = 3x^2$. Entonces su *integral indefinida* es:

$$\int f(x) dx = \int 3x^2 dx = x^3 + c \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

⁹Ver el **Teorema 10.1**, página 254.

¹⁰Ver la **Definición 5.8**, página 115.

¹¹Notar que la *integral definida* de una función (ver la **Definición 10.1**, página 252) es un número, mientras que la *integral indefinida* de una función es otra **función**.

10.3.3. Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

Hasta ahora hemos visto la definición de *integral definida*¹² de una función $f(x)$ y cómo el TFC1 lo relaciona con dicha función.

Sin embargo no se ha dado una forma práctica de determinar, en caso de que exista, la integral definida de una función. De esta parte se encarga el *segundo teorema fundamental del Cálculo* (TFC2).

Teorema 10.2. Segundo Teorema Fundamental del Cálculo. Regla de Barrow

Si una función $f(x)$ es *continua* en $[a, b]$ y $F(x)$ es una *primitiva* cualquiera de $f(x)$ en (a, b) , entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

Demostración 10.2.

El TFC1, (ver el [Teorema 10.1, página 254](#)), establece la relación entre la *integral definida* de una *función integrable* $f(x)$ y una *función primitiva* $F(x)$ de $f(x)$.

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + c$$

El valor de la *integral definida* viene dado particularizando la expresión anterior para un valor determinado $x = b$:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) + c$$

Si conocemos una función *primitiva* $F(x)$, (recordar que hay infinitas), bastaría conocer el valor de la constante c para determinar el valor de la *integral definida*. El valor de dicha constante c se puede obtener teniendo en cuenta las propiedades de la *integral definida* (ver la [Sección 10.2.1, página 253](#)) y particularizando la expresión anterior para $x = a$:

$$\int_a^a f(x) dx = F(a) + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -F(a)$$

Por tanto, el valor de la *integral definida* se puede calcular de la siguiente forma:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) + c = F(b) - F(a)$$

Ejercicio 10.1. Calcular el valor de la siguiente integral definida:

$$\int_{-1}^2 3x^2 dx$$

Según la regla de Barrow (segundo teorema fundamental del cálculo):

$$\int_{-1}^2 3x^2 dx = F(2) - F(-1)$$

donde $F(x)$ es una función primitiva cualquiera de $f(x)$. Como se ha visto en el [Ejemplo 10.1, página 255](#), una función primitiva de esta función es:

$$F(x) = x^3$$

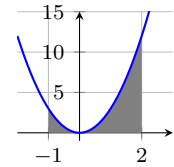
Por tanto:

$$\int_{-1}^2 3x^2 dx = x^3 \Big|_{-1}^2 = (2)^3 - (-1)^3 = 8 - (-1) = \boxed{9}$$

¹²Ver la [Definición 10.1, página 252](#).

Notar que el valor obtenido se puede interpretar como el área comprendida entre la función $f(x) = 3x^2$ y el eje x , entre los valores $x = -1$ y $x = 2$. Las unidades del resultado corresponderían con las apropiadas de la función.

En la siguiente figura se muestra de forma gráfica la función y el área correspondiente calculada.



Notar que la *función integral*¹³ y la *integral indefinida*¹⁴ de una función están íntimamente relacionadas:

$$\int_a^x f(t) dt = F(t) \Big|_a^x = F(x) - F(a) = F(x) + c = \int f(x) dx$$

10.3.4. Generalización del Teorema Fundamental del Cálculo

Como hemos visto¹³, a través de la operación *integral* se puede definir una *función integral* poniendo como límite superior de la integral la variable independiente x . Esta forma de definir funciones se puede generalizar incluyendo cualquier tipo de expresión de la variable x en ambos límites de integración, de la siguiente forma:

$$G(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt = F(x) \Big|_{a(x)}^{b(x)} = F[a(x)] - F[b(x)]$$

donde $a(x)$ y $b(x)$ son funciones de la variable independiente¹⁵ x , $F(x)$ es una *función primitiva* de $f(x)$ y $F[a(x)]$ y $F[b(x)]$ son funciones compuestas¹⁶. Notar que en este caso la función resultante $G(x)$ no tiene una interpretación geométrica sencilla como sí ocurre con el caso de la *función integral*¹⁷.

La función resultante $G(x)$ puede ser determinada de forma *explícita* siempre que una *primitiva* $F(x)$ correspondiente pueda ser calculada de forma relativamente fácil, aunque esto no siempre es así¹⁸. Independientemente de la forma en que pueda expresarse, la función $G(x)$ siempre se podrá derivar utilizando el *teorema fundamental del Cálculo generalizado* (TFCG) que veremos a continuación.

Teorema 10.3. Generalización del TFC. Fórmula de Leibniz

Sea la función $G(x)$ definida en un intervalo $[\alpha, \beta]$ de la siguiente forma:

$$G(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \quad \text{con} \quad \begin{cases} a(x), b(x) & \text{funciones derivables en } [\alpha, \beta] \\ f(t) & \text{función continua en } [a(x), b(x)] \end{cases}$$

Entonces $G(x)$ es derivable en $[\alpha, \beta]$, verificándose el siguiente resultado conocido con el nombre de **fórmula de Leibniz**:

$$\frac{dG(x)}{dx} = G'(x) = f[b(x)] \cdot b'(x) - f[a(x)] \cdot a'(x)$$

¹³Ver la [Definición 10.2](#), página 254.

¹⁴Ver la [Definición 10.4](#), página 255.

¹⁵Una de ellas o las dos pueden ser funciones constantes.

¹⁶Ver la [Definición 2.7](#), página 57.

¹⁷Ver la [Sección 10.3.1](#), página 254.

¹⁸Ver el [Ejercicio 10.3](#), página 259.

Demostración 10.3.

Aplicando la *regla de Barrow* (ver el **Teorema 10.2**, página 256):

$$G(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt = F[b(x)] - F[a(x)] \quad \text{donde} \quad F'(x) = f(x)$$

Entonces, aplicando la *regla de la cadena* (ver el **Teorema 5.4**, página 121):

$$G'(x) = F'[b(x)]b'(x) - F'[a(x)]a'(x) = f[b(x)]b'(x) - f[a(x)]a'(x)$$

- En las *integrales definidas*¹⁹ donde sus dos límites de integración son **constantes**:

- El resultado de la integral es siempre un **número** (función constante).
- Por tanto, si aplicamos la *fórmula de Leibniz* se obtiene siempre cero²⁰:

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(t) dt = f(b)b' - f(a)a' = f(b)0 - f(a)0 = 0$$

- En las *integrales definidas* en las que uno o los dos de sus límites de integración son **funciones** de una variable independiente:

- El resultado es una **función** de la variable independiente.
- Por tanto, al aplicar la *fórmula de Leibniz* se obtiene una nueva función, correspondiente a la derivada de la función anterior.

Ejercicio 10.2. Calcular la derivada de la siguiente función:

$$F(x) = \int_{3x^2+1}^{\operatorname{sen} x} (1+t^2) dt$$

Como en este caso la función $f(t)$ es un polinomio, es fácil de integrar²¹ y por tanto podemos calcular la derivada $F'(x)$ de dos formas:

- Integrando la función.

$$F(x) = \int_{3x^2+1}^{\operatorname{sen} x} (1+t^2) dt = t + \frac{t^3}{3} \Big|_{3x^2+1}^{\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x + \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x - (3x^2+1) - \frac{1}{3} (3x^2+1)^3$$

Ahora obtenemos la derivada de la función $F(x)$ obtenida, como pide el ejercicio:

$$F'(x) = \cos(x) + \operatorname{sen}^2(x) \cos(x) - 6x - (3x^2+1)^2(6x) = \boxed{\cos(x)[1 + \operatorname{sen}^2 x] - 6x[1 + (3x^2+1)^2]}$$

- Aplicando la *fórmula de Leibniz* el TFCG:

$$\begin{aligned} F'(x) &= f[b(x)]b'(x) - f[a(x)]a'(x) = [1 + \operatorname{sen}^2 x](\operatorname{sen} x)' - [1 + (3x^2+1)^2](3x^2+1)' = \\ &= \boxed{[1 + \operatorname{sen}^2 x] \cos(x) - [1 + (3x^2+1)^2]6x} \end{aligned}$$

Como vemos, este resultado coincide con el obtenido por el primer procedimiento.

¹⁹Ver la **Definición 10.1**, página 252.

²⁰Correspondiente a la derivada de una función constante.

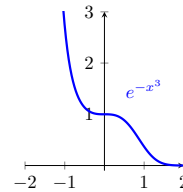
²¹Ver la **Sección 10.4.1**, página 260.

Ejercicio 10.3. Calcular la derivada de la siguiente función:

$$F(x) = \int_{x^2}^{x^2-x} e^{-t^3} dt$$

En este caso la función $f(t) = e^{-t^3}$ sí es integrable, pero el resultado de su integral:

$$\int e^{-t^3} dt$$



no puede expresarse como combinación de *funciones elementales*²², por ello la forma más sencilla de calcular la derivada de la función en este caso, es aplicar la *fórmula de Leibniz*:

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^2-x} e^{-t^3} dt = f[b(x)]b'(x) - f[a(x)]a'(x) = e^{-(x^2-x)^3} \cdot (2x-1) - e^{-(x^2)^3} \cdot 2x$$

Ejercicio 10.4. Calcular, en caso de existir, el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$$

Cuando $x \rightarrow \infty$ claramente las dos integrales del numerador y denominador tienden a infinito por tanto este límite tiene una indeterminación del tipo ∞/∞ y podemos aplicar la *regla de L'Hôpital*²³ en su resolución. Para hacerlo aplicamos la *fórmula de Leibniz*:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt} &\stackrel{\infty/\infty}{\underset{H}{=}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \left(\int_0^x e^{t^2} dt \right) (e^{x^2} - 0)}{e^{2x^2} - 0} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}} \stackrel{\infty/\infty}{\underset{H}{=}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \boxed{0} \end{aligned}$$

²²Se puede expresar por ejemplo a través de la función *especial* gamma $\Gamma(x)$. Ver una definición de dicha función por ejemplo en "Clases de Ampliación de Matemáticas para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 367.

²³Ver el [Teorema 5.13](#), página 136.

10.4. Métodos Básicos para el Cálculo de Primitivas

10.4.1. Integrales Inmediatas

Teniendo en cuenta las *derivadas* de las *funciones elementales*²⁴ podemos crear una tabla de *integrales indefinidas inmediatas*, donde $c \in \mathbb{R}$:

$\int 0 \, dx = c$	$\int dx = x + c$
$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c ; \quad n \neq -1$	$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + c$
$\int e^x \, dx = e^x + c$	$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$
$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c$	$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + c$
$\int \operatorname{tg}(x) \, dx = -\ln \cos(x) + c$	$\int \sec^2(x) \, dx = \operatorname{tg}(x) + c$
$\int \operatorname{senh}(x) \, dx = \operatorname{cosh}(x) + c$	$\int \operatorname{cosh}(x) \, dx = \operatorname{senh}(x) + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{arcsen}(x) + c$	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{arccos}(x) + c$

Nota 10.1. Notar que como un polinomio es una combinación lineal de monomios su integral es casi inmediata teniendo en cuenta la integral de un monomio (ver el [Ejercicio 10.5](#), página 261).

De forma más general, teniendo en cuenta el TFC1²⁵ y la *regla de la cadena*²⁶, podemos considerar integrales inmediatas las siguientes²⁷:

$$\int f'[u(x)]u'(x) = f[u(x)] + c$$

Ejemplo 10.3. Integrales Inmediatas

- $\int \tan x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx = -\log(\cos x) + c$
- $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} \, dx = 2\sqrt{\operatorname{sen} x} + c$
- $\int e^{\cos x} \operatorname{sen} x \, dx = -e^{\cos x} + c$
- $\int \operatorname{sen}(x) \cos(x) \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2(x) + c$

²⁴Ver la [Sección 5.1.8](#), página 117.

²⁵Ver el [Teorema 10.1](#), página 254.

²⁶Ver el [Teorema 5.4](#), página 121.

²⁷Ver la [Sección 10.4.5](#), página 262.

10.4.2. Métodos Simples de Integración

Calcular la *integral indefinida* de una función cualquiera suele ser una tarea difícil e incluso imposible en determinados casos. Para funciones relativamente sencillas²⁸ existen diferentes **métodos de integración** dependiendo del tipo de función a integrar, siendo los más básicos los siguientes²⁹:

1. Método de Descomposición.
2. Integración por partes.
3. Cambio de variable o Sustitución

10.4.3. Descomposición

La integral de sumas o restas de funciones se puede *descomponer* en sumas y/o restas de integrales más sencillas.

Ejercicio 10.5. Calcular la siguiente integral:

$$\int (x^2 + 1)^2 dx$$

$$\int (x^2 + 1)^2 dx = \int (x^4 + 2x^2 + 1) dx = \int x^4 dx + 2 \int x^2 dx + \int dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x + c$$

10.4.4. Integración por Partes

Teniendo en cuenta la fórmula de la *derivada de un producto*³⁰, se puede obtener una expresión muy útil para la determinación de algunos tipos de integrales, denominada **fórmula de integración por partes**.

$$d(uv) = vdu + u dv \implies u dv = d(uv) - vdu \implies \int u dv = uv - \int v du$$

Ejemplo 10.4. Integración por Partes

$$\bullet \int x e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \quad ; \quad du = dx \\ dv = e^x dx \quad ; \quad v = e^x \end{array} \right\} = \int x d(e^x) = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$$

$$\bullet \int x \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \quad ; \quad du = dx \\ dv = \cos x dx \quad ; \quad v = \sin x \end{array} \right\} = \int x d(\sin x) = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c$$

$$\bullet \int \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \quad ; \quad du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \quad ; \quad v = x \end{array} \right\} = \int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c$$

²⁸Y que no corresponden con la categoría de *integral inmediata* vista en la sección anterior.

²⁹En el siguiente tema se estudiarán algunos métodos más elaborados.

³⁰Ver el **Teorema 5.2**, página 119.

10.4.5. Cambio de Variable o Sustitución

Este método se basa en realizar un cambio de variable apropiado que permita simplificar el cálculo de una integral.

Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo $I = [a, b]$ y sea la integral *indefinida*:

$$\int f(x) dx$$

Consideramos el cambio de variable $x = g(t)$, donde g es una función de clase³¹ \mathcal{C}^1 de forma $g : [\alpha, \beta] \rightarrow I$. Entonces teniendo en cuenta³² que $dx = g'(t) dt$, se tiene:

$$\int f(x) dx = \int f[g(t)] g'(t) dt$$

El resultado de esta nueva integral en la variable t será necesario expresarlo en la variable original x , teniendo en cuenta el cambio de variable inverso $t = g^{-1}(x)$.

Nota 10.2. No toda función $g(t)$ es válida para un cambio de variable³³ $x = g(t)$, y dentro de las funciones válidas, solo en algunos casos el cambio de variable da lugar a una integral más sencilla de calcular que la original. Esto hace que en la práctica, de forma general, los cambios de variable apropiados no son triviales y hay que ir probando distintas posibilidades hasta encontrar uno adecuado.

En el cambio de variable de integrales *definidas*, generalmente no interesa deshacer el cambio de variable en el resultado, siendo preferible cambiar el valor de los **límites de integración** (a, b) de la variable original x a los nuevos límites (α, β) en la nueva variable t .

$$\int_a^b f(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} x = g(t) \\ t = g^{-1}(x) \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = g^{-1}(a) \\ \beta = g^{-1}(b) \end{array} \right\} = \int_\alpha^\beta f[g(t)] g'(t) dt$$

Ejercicio 10.6. Calcular la siguiente integral:

$$\int e^{\sqrt{x}} dx$$

En este caso la complejidad de la integral está en la raíz del exponente, por lo que probamos hacer el *cambio de variable* $t = \sqrt{x}$.

$$\int e^{\sqrt{x}} dx \stackrel{\text{c.v.}}{=} \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \implies x = t^2 \\ dt = \frac{dx}{2\sqrt{t}} \implies dx = 2t dt \end{array} \right\} = \int e^t 2t dt = 2 \int te^t dt$$

Esta nueva integral se puede calcular fácilmente *por partes* (ver el [Ejemplo 10.4](#), página 261).

$$2 \int te^t dt = \left\{ \begin{array}{l} u = t \\ dv = e^t dt \end{array} ; \begin{array}{l} du = dt \\ v = e^t \end{array} \right\} = 2 \int t d(e^t) = 2te^t - 2 \int e^t dt = 2e^t(t - 1) + c$$

Ahora deshacemos el cambio de variable, teniendo en cuenta que $t = \sqrt{x}$:

$$2e^t(t - 1) + c \stackrel{\text{c.v.}}{=} e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + c$$

³¹Ver la [Definición 5.11](#), página 128.

³²Por la regla de la cadena, ver el [Teorema 5.4](#), página 121.

³³Debe ser de clase \mathcal{C}^1 en el intervalo correspondiente.

Ejercicio 10.7. Calcular la siguiente integral:

$$\int \frac{e^{3x}}{1 + e^{3x}} dx$$

Probamos el cambio de variable $t = e^{3x}$:

$$\int \frac{e^{3x}}{1 + e^{3x}} dx \stackrel{\text{c.v.}}{=} \left\{ \begin{array}{l} t = e^{3x} \\ dt = 3e^{3x} dx = 3t dx \implies dx = \frac{dt}{3t} \end{array} \right\} = \int \frac{t}{1+t} \frac{dt}{3t} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{1+t} = \frac{1}{3} \ln(1+t) + c$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$\frac{1}{3} \ln(1+t) + c \stackrel{\text{c.v.}}{=} \frac{1}{3} \ln(1 + e^{3x}) + c$$

Ejercicio 10.8. Calcular la siguiente integral:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$$

Probamos el cambio de variable $t = \sqrt{1+x}$:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx \stackrel{\text{c.v.}}{=} \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{1+x} \implies x = t^2 - 1 \\ dt = \frac{dx}{2\sqrt{1+x}} \implies dx = 2t dt \end{array} \right\} = \int \frac{t^2 - 1}{t} 2t dt = 2 \int (t^2 - 1) dt = \frac{2}{3} t^3 - 2t + c$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$\frac{2}{3} t^3 - 2t + c \stackrel{\text{c.v.}}{=} \frac{2}{3} (1+x)^{3/2} - 2\sqrt{1+x} + c$$

Ejercicio 10.9. Calcular la siguiente integral definida:

$$\int_0^1 x(x^2 + 1)^{3/2} dx$$

Como aparece una raíz cuadrada, probamos el cambio de variable $t^2 = x^2 + 1$:

$$\int_0^1 x(x^2 + 1)^{3/2} dx \stackrel{\text{c.v.}}{=} \left\{ \begin{array}{l} t^2 = x^2 + 1 \implies x = \sqrt{t^2 - 1} \\ 2t dt = 2x dx \implies dx = \frac{t dt}{x} = \frac{t dt}{\sqrt{t^2 - 1}} \end{array} \right\}$$

Vamos a cambiar de variable también los límites de integración:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \implies t = \sqrt{1} = 1 \\ x = 1 \implies t = \sqrt{2} \end{array} \right\}$$

Por tanto:

$$\int_0^1 x(x^2 + 1)^{3/2} dx \stackrel{\text{c.v.}}{=} \int_1^{\sqrt{2}} \cancel{\sqrt{t^2 - 1}} t^3 \frac{t dt}{\cancel{\sqrt{t^2 - 1}}} = \int_1^{\sqrt{2}} t^4 dt = \frac{1}{5} t^5 \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{5} (2^{5/2} - 1)$$

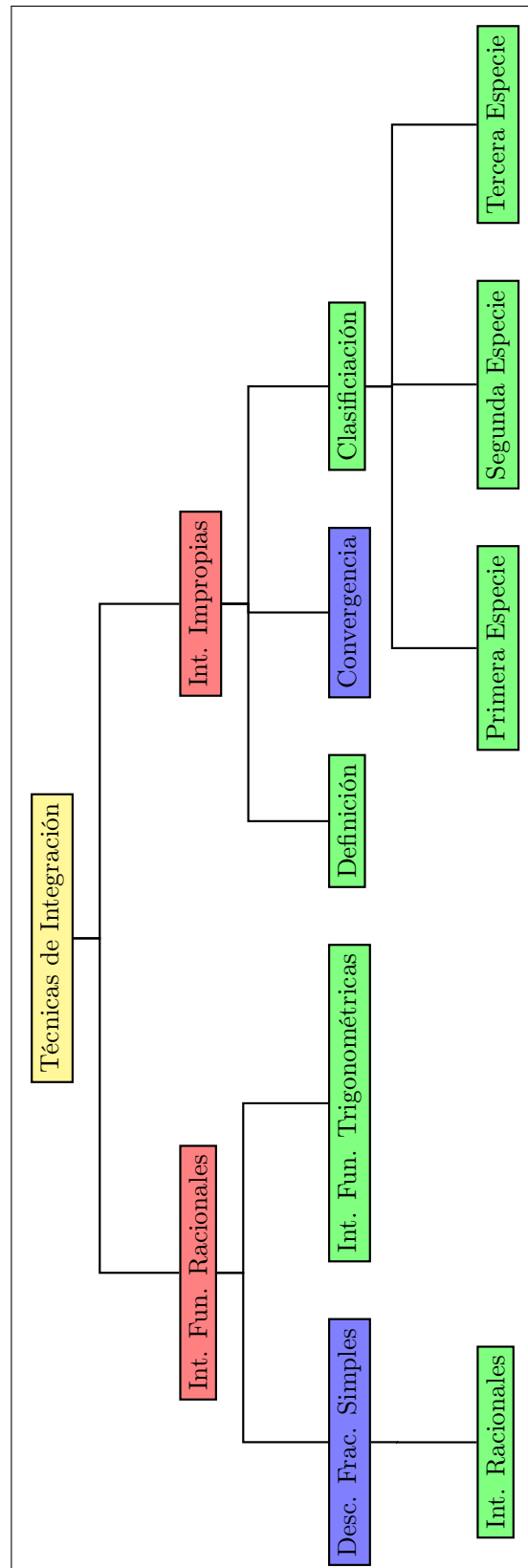
Notar que el cambio de variable de los límites de integración ha evitado el que tengamos que deshacer el cambio de variable para evaluarlo con los límites de integración originales.



Técnicas de Integración

Contenido

11.1 Cálculo de Primitivas de Funciones Racionales	267
11.1.1 Descomposición de una Fracción en Fracciones Simples	267
11.1.2 Integración Racional	272
11.1.3 Integración de Funciones Trigonométricas	274
11.2 Integrales Impropias	276
11.2.1 Definición	276
11.2.2 Convergencia de las Integrales Impropias	277
11.2.3 Clasificación de las Integrales Impropias	278
11.2.4 Integrales Impropias de Primera Especie	279
11.2.5 Integrales Impropias de Segunda Especie	281



11.1. Cálculo de Primitivas de Funciones Racionales

Vamos a estudiar la forma de calcular primitivas de *funciones racionales*¹ de la forma:

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$$

donde $P_m(x)$ y $Q_n(x)$ son *polinomios* de cualquier grado m y n . Si $m \geq n$ (grado del polinomio del numerador mayor o igual que el denominador), se divide uno entre otro obteniendo²:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

siendo el cociente $C(x)$ y el resto $R(x)$ dos polinomios, y siendo ahora $R(x)/Q(x)$ otra función racional donde el grado del numerador es siempre menor que el grado del denominador. Entonces se tiene:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} dx = \int C(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

La primera integral sobre $C(x)$ es fácil de calcular³, por lo que el único problema es resolver la segunda integral racional. Para ello es necesario previamente descomponerla en **fracciones simples**. Veamos este proceso.

11.1.1. Descomposición de una Fracción en Fracciones Simples

Toda función racional $P(x)/Q(x)$ donde el grado del numerador es **menor** que el grado del denominador, se puede descomponer en sumas o restas de *fracciones más simples*.

El proceso para transformar una función racional en una suma de otras más simples es el siguiente:

1. Factorización del Polinomio del denominador $Q(x)$

Encontramos los *ceros* o *raíces*⁴ del denominador⁵, resolviendo la ecuación $Q(x) = 0$. Las raíces encontradas pueden ser de cuatro tipos:

- **Raíces reales simples:** solución real $r \in \mathbb{R}$ con *multiplicidad*⁶ uno.
- **Raíces reales múltiples:** solución real $r \in \mathbb{R}$ con *multiplicidad* mayor que uno.
- **Raíces complejas simples:** solución compleja⁷ $a \pm bi \in \mathbb{C}$ con *multiplicidad* uno⁸.
- **Raíces complejas múltiples:** solución compleja $a \pm bi \in \mathbb{C}$ con *multiplicidad* mayor que uno.

Por ejemplo, sea el siguiente caso:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Sol. de } Q(x) = 0 \\ \text{reales simples} \quad : \quad r_1 \\ \text{reales múltiples} \quad : \quad r_2 \text{ (n veces)} \\ \text{complejas simples} \quad : \quad \alpha \pm \beta i \\ \text{complejas múltiples} \quad : \quad \delta \pm \gamma i \text{ (m veces)} \end{array} \right\}$$

Entonces el polinomio del denominador se puede factorizar de la siguiente forma:

$$Q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n (x - r_1) (x - r_2)^n [(x - \alpha)^2 + \beta^2] [(x - \delta)^2 + \gamma^2]^m$$

¹Ver la [Definición 2.9, página 59](#).

²Notar que si $m < n$ este paso no es necesario.

³Ver la [Sección 10.4.1, página 260](#).

⁴Ver la [Definición A.14, página 302](#).

⁵En los ejercicios prácticos estos ceros siempre podrán ser encontrados por el *método de Ruffini* (ver el [Apéndice A.5.1, página 304](#)).

⁶Número de veces que se repite esa raíz, ver la [Definición A.15, página 302](#).

⁷Ver una introducción a los números complejos en el [Apéndice B, página 321](#).

⁸Según el *Teorema Fundamental del Álgebra* las soluciones complejas siempre aparecen a pares, (ver el [Teorema A.2, página 302](#)).

Notar que en la factorización es necesario multiplicar por el coeficiente a_n correspondiente al monomio de **mayor grado** del polinomio.

Ejemplo 11.1. Factorización de un Polinomio

El siguiente polinomio de grado 15:

$$Q(x) = -3x^{15} + 27x^{14} - 108x^{13} + 198x^{12} + 54x^{11} - 1086x^{10} + 2124x^9 - 552x^8 - 3267x^7 + 1467x^6 + 9624x^5 - 12006x^4 - 14664x^3 + 28752x^2 + 6240x - 16800$$

Tiene las siguientes 15 raíces:

- Raíces reales simples: $x = 1$ y $x = -2$
- Raíces reales múltiples: $x = -1$ con multiplicidad 2 y $x = 2$ con multiplicidad 3.
- Raíces complejas simples: $x = -1 \pm i$ y $x = 2 \pm i\sqrt{3}$
- Raíces complejas múltiples: $x = 1 \pm 2i$ con multiplicidad 2.

Por tanto se puede factorizar de la siguiente forma⁹:

$$Q(x) = -3 (x - 1) (x + 2) (x + 1)^2 (x - 2)^3 [(x + 1)^2 + 1] [(x - 2)^2 + 3] [(x - 1)^2 + 4]^2$$

2. Descomponer en Fracciones Simples

Suponiendo el ejemplo del paso 1, nuestra fracción se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{a_n(x - r_1)(x - r_2)^n[(x - \alpha)^2 + \beta^2][(x - \delta)^2 + \gamma^2]^m}$$

Entonces una fracción de este estilo se puede descomponer como suma de fracciones más sencillas, de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{a_n} \left[\underbrace{\frac{A}{x - r_1}}_{\text{Real Simple}} + \underbrace{\frac{B_1}{x - r_2} + \frac{B_2}{(x - r_2)^2} + \dots + \frac{B_n}{(x - r_2)^n}}_{\text{Real Múltiple}} + \underbrace{\frac{Cx + D}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}}_{\text{Compleja Simple}} + \underbrace{\frac{M_1x + N_1}{(x - \delta)^2 + \gamma^2} + \frac{M_2x + N_2}{[(x - \delta)^2 + \gamma^2]^2} + \dots + \frac{M_mx + N_m}{[(x - \delta)^2 + \gamma^2]^m}}_{\text{Compleja Múltiple}} \right]$$

Donde para cada raíz aparecen tantas fracciones simples como multiplicidad tiene dicha raíz, con potencias en el denominador desde 1 hasta su multiplicidad, y donde los términos $A, B_1, \dots, B_n, C, D, M_1, N_1, \dots, M_m, N_m$, son constantes¹⁰ a determinar.

Notar que las raíces reales tienen asociadas una constante para cada una de sus multiplicidades, mientras que las raíces complejas necesitan dos constantes¹¹.

La determinación de los coeficientes se realiza encontrando una **ecuación principal** que se obtiene sumando la descomposición en *fracciones simples* obtenida, e igualando los numeradores. De ella se obtiene un *sistema de ecuaciones lineales* cuyas incógnitas son los términos A, B_1 , etc.

⁹Se puede comprobar fácilmente por ejemplo usando el programa *GeoGebra* con el comando **Desarrolla**, ver la **Sección C.1.3**, página 355.

¹⁰Siempre números reales.

¹¹Ya que como hemos visto las raíces complejas siempre aparecen a pares.

Para obtener la *ecuación principal* sumamos las *fracciones simples* obtenidas, multiplicando cada numerador por el *mínimo común múltiplo* de los denominadores. La *ecuación principal* se obtiene entonces igualando el resultado al polinomio del numerador $P(x)$ de la siguiente forma¹²:

$$\begin{aligned}
 P(x) = & A && (x - r_2)^n [(x - \alpha)^2 + \beta^2] [(x - \delta)^2 + \gamma^2]^m && + \\
 & B_1 && (x - r_1)(x - r_2)^{n-1} [(x - \alpha)^2 + \beta^2] [(x - \delta)^2 + \gamma^2]^m && + \\
 & B_2 && (x - r_1)(x - r_2)^{n-2} [(x - \alpha)^2 + \beta^2] [(x - \delta)^2 + \gamma^2]^m && + \\
 & \vdots && \vdots && \\
 & B_n && (x - r_1) [(x - \alpha)^2 + \beta^2] [(x - \delta)^2 + \gamma^2]^m && + \\
 & (Cx + D) && (x - r_1)(x - r_2)^{n-2} [(x - \delta)^2 + \gamma^2]^m && + \\
 & (M_1x + N_1) && (x - r_1)(x - r_2)^{n-1} [(x - \alpha)^2 + \beta^2] [(x - \delta)^2 + \gamma^2]^{m-1} && + \\
 & (M_2x + N_2) && (x - r_1)(x - r_2)^{n-1} [(x - \alpha)^2 + \beta^2] [(x - \delta)^2 + \gamma^2]^{m-2} && + \\
 & \vdots && \vdots && \\
 & (M_mx + N_m) && (x - r_1)(x - r_2)^{n-1} [(x - \alpha)^2 + \beta^2] &&
 \end{aligned}$$

Para formar el *sistema de ecuaciones lineales* (SEL) se dan valores sencillos¹³ a la variable x de la *ecuación principal* y por cada uno de ellos se obtendrá una ecuación cuyas incógnitas son los coeficientes buscados. Necesitaremos tener tantas ecuaciones lineales como incógnitas se tengan.

Resolviendo el SEL se obtienen el valor de las constantes y con ellas la *descomposición en fracciones simples* buscada.

Ejercicio 11.1. Descomponer en fracciones simples las siguientes funciones racionales:

a) $\frac{2x + 1}{2x^2 + x - 1}$ b) $\frac{x^5 + 3x^4 + x^3 - 2x^2 - 10x - 11}{x^3 + 3x^2 - 4}$ c) $\frac{3x^3 + 13x^2 + 6}{x^4 - 7x^2 + 4x + 20}$

a) Como el grado del polinomio del numerador (1) es menor que el grado del denominador (2), no es necesario dividirlos. Encontramos los ceros del denominador resolviendo la ecuación cuadrática y con ellos factorizamos el polinomio:

$$2x^2 + x - 1 = 0 \quad ; \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \left\{ \frac{1}{2}, -1 \right\} \implies 2x^2 + x - 1 = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) (x + 1)$$

Al ser raíces reales y distintas, la función racional se puede descomponer en fracciones simples de la siguiente forma:

$$\frac{2x + 1}{2x^2 + x - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{x - \frac{1}{2}} + \frac{B}{x + 1} \right)$$

Para encontrar el valor de las constantes A y B , sumamos la expresión multiplicando la parte derecha por el mínimo común múltiplo, que en este caso es $(x - 1/2)(x + 1)$ y encontramos la *ecuación principal*:

$$2x + 1 = A(x + 1) + B \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

Esta ecuación tiene que ser válida para todo valor de x , por tanto la evaluamos para dos valores sencillos. En este caso los más sencillos son las dos raíces: $x = \frac{1}{2}$ y $x = -1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \quad : \quad 2 = \frac{3}{2}A \quad \implies \quad A = \frac{4}{3} \\ x = -1 \quad : \quad -1 = -\frac{3}{2}B \quad \implies \quad B = \frac{2}{3} \end{array} \right\}$$

¹²Para un caso general como es este la expresión que se obtiene es *monstruosa*, pero en los casos prácticos con un número relativamente pequeño de raíces, la expresión es mucho más sencilla, como se puede ver por ejemplo en el **Ejercicio 11.1**.

¹³Los mejores valores son las raíces reales encontradas en el paso 1, aunque podrían ser cualquier otro, ya que se debe de cumplir para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

- c) En este caso el grado del numerador es menor que el del denominador por lo que pasamos directamente a la descomposición en fracciones simples. Encontramos los ceros del denominador, donde claramente uno de ellos es $x = -2$. Aplicando *Ruffini* dos veces vemos que una segunda raíz también es $x = -2$. Las otras dos últimas raíces las encontramos resolviendo la ecuación cuadrática resultante.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & -7 & 4 & 20 \\
 -2 & & -2 & 4 & 6 & -20 \\
 \hline
 & 1 & -2 & -3 & 10 & 0 \\
 -2 & & -2 & 8 & -10 & \\
 \hline
 & 1 & -4 & 5 & 0 &
 \end{array}
 \implies
 \begin{cases}
 x^4 - 7x^2 + 4x + 20 = (x+2)(x^3 - 2x^2 - 3x + 10) \\
 = (x+2)^2(x^2 - 4x + 5) \\
 x = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i \\
 x^4 - 7x^2 + 4x + 20 = \boxed{(x+2)^2[(x-2)^2 + 1]}
 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\frac{3x^3 + 13x^2 + 6}{x^4 - 7x^2 + 4x + 20} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C+Dx}{(x-2)^2 + 1}$$

Sumamos los términos para encontrar la ecuación principal, donde el *mínimo común múltiplo* de los tres denominadores, en este caso $(x+2)^2[(x-2)^2 + 1]$, de forma que:

$$3x^3 + 13x^2 + 6 = A(x+2)[(x-2)^2 + 1] + B[(x-2)^2 + 1] + (C+Dx)(x+2)^2$$

Tenemos ahora que dar 4 valores sencillos para determinar las cuatro ecuaciones que nos permitan encontrar las cuatro constantes, pudiendo ser por ejemplo: $x = -2$, $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$.

$$\begin{cases}
 x = -2 & : & 34 = 17B & \implies & \boxed{B = 2} \\
 x = 0 & : & 6 = 10A + 5B + 4C & \implies & 5A + 2C = -2 \\
 x = 1 & : & 22 = 6A + 2B + 9C + 9D = 6A + 4 + 9C + 9D & \implies & 2A + 3C + 3D = 6 \\
 x = -1 & : & 16 = 10A + 10B + C - D = 10A + 20 + C - D & \implies & 10A + C - D = -4
 \end{cases}$$

Nos queda un sistema de tres ecuaciones para determinar las constantes A , C y D . Despejando por ejemplo el valor de C de la primera ecuación se tiene un nuevo sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$C = \frac{-2 - 5A}{2} \implies \begin{cases}
 2A + 3\frac{-2 - 5A}{2} + 3D = 6 \implies -11A + 6D = 18 \\
 10A + \frac{-2 - 5A}{2} - D = -4 \implies 15A - 2D = -6
 \end{cases}$$

que puede resolverse fácilmente por ejemplo por el *método de reducción*¹⁴:

$$\begin{array}{r}
 -11A + 6D = 18 \\
 15A - 2D = -6 \quad (\times 3) \implies \boxed{A = 0} \quad , \quad \boxed{D = 3} \quad , \quad \boxed{C = -1} \\
 \hline
 34A + 0 = 0
 \end{array}$$

Por tanto finalmente la descomposición en fracciones simples de la función racional queda:

$$\boxed{\frac{3x^3 + 13x^2 + 6}{x^4 - 7x^2 + 4x + 20} = \frac{2}{(x+2)^2} + \frac{-1 + 3x}{(x-2)^2 + 1}}$$

¹⁴Ver por ejemplo "Clases de Álgebra Lineal para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 367.

11.1.2. Integración Racional

Las integrales de tipo *racional*:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

donde el grado del polinomio del numerador es menor que el grado del polinomio del denominador, se pueden resolver descomponiendo en *fracciones simples* como se ha visto en la sección anterior, dando lugar a una suma de integrales más sencillas de uno o varios de los siguientes tipos:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{A}{x-r_1} dx + \int \frac{B}{(x-r_2)^n} dx + \int \frac{Cx+D}{(x-\alpha)^2+\beta^2} dx + \int \frac{Mx+N}{[(x-\delta)^2+\gamma^2]^m} dx$$

Existen fórmulas para determinar estos tipos de integrales¹⁵:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + c$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \frac{A}{1-n} (x-a)^{1-n} + c$$

$$\int \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2} dx = \frac{M}{2} \ln|(x-\alpha)^2+\beta^2| + \frac{M\alpha+N}{\beta} \arctan \frac{x-\alpha}{\beta} + c$$

$$\int \frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} dx = \frac{-M}{2(n-1)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}} + \frac{M\alpha+N}{\beta^2} \left[\frac{x-\alpha}{2(n-1)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}} \right] + c$$

Ejercicio 11.2. Calcular las siguientes integrales de funciones racionales:

$$\text{a) } \int \frac{2x+1}{2x^2+x-1} dx \quad \text{b) } \int \frac{x^5+3x^4+x^3-2x^2-10x-11}{x^3+3x^2-4} dx \quad \text{c) } \int \frac{3x^3+13x^2+6}{x^4-7x^2+4x+20} dx$$

Notar que la descomposición en fracciones simples de las funciones racionales que aparecen en estas integrales está realizada en el [Ejercicio 11.1, página 269](#).

a) Como se tiene:

$$\frac{2x+1}{2x^2+x-1} = \frac{2/3}{x-\frac{1}{2}} + \frac{1/3}{x+1}$$

Entonces:

$$\int \frac{2x+1}{2x^2+x-1} dx = \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} = \frac{2}{3} \ln \left| x - \frac{1}{2} \right| + \frac{1}{3} \ln |x+1| + c$$

Este resultado se puede expresar de distintas formas alternativas como por ejemplo:

$$\int \frac{2x+1}{2x^2+x-1} dx = \ln \sqrt[3]{ \left| \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 (x+1) \right| } + c$$

¹⁵Las dos primeras son integrales inmediatas y la tercera se puede obtener fácilmente sumando y restando $M\alpha$ en el numerador para obtener la integral inmediata del logaritmo, y una segunda integral que mediante un cambio de variable se obtiene la arcotangente (ver el [Ejercicio 11.2](#) apartado c). La cuarta fórmula es una reducción de orden bastante menos práctica.

b) Como se tiene:

$$\frac{x^5 + 3x^4 + x^3 - 2x^2 - 10x - 11}{x^3 + 3x^2 - 4} = x^2 + 1 - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 + 3x^4 + x^3 - 2x^2 - 10x - 11}{x^3 + 3x^2 - 4} dx &= \int (x^2 + 1) dx - 2 \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+2} - 3 \int \frac{dx}{(x+2)^2} = \\ &= \boxed{\frac{x^3}{3} + x - 2 \ln|x-1| + 2 \ln|x+2| + \frac{3}{x+2} + c} \end{aligned}$$

De igual forma que antes, utilizando las propiedades de los logaritmos, este resultado se puede expresar de diversas formas alternativas.

c) Como se tiene:

$$\frac{3x^3 + 13x^2 + 6}{x^4 - 7x^2 + 4x + 20} = \frac{2}{(x+2)^2} + \frac{-1+3x}{(x-2)^2 + 1}$$

Entonces:

$$\int \frac{3x^3 + 13x^2 + 6}{x^4 - 7x^2 + 4x + 20} dx = 2 \int \frac{dx}{(x+2)^2} + \int \frac{-1+3x}{(x-2)^2 + 1} dx$$

La primera integral es inmediata y en la segunda se puede aplicar la fórmula vista en la [Sección 11.1.2, página 272](#), sin embargo aquí vamos a ver cómo calcular esta segunda integral sin necesidad de recordar dicha fórmula.

Lo más importante es conocer que el resultado de este tipo de integrales es la suma de un logaritmo y de una arcotangente. Para obtener la integral del logaritmo se suma y resta una constante para que en el numerador se tenga la derivada del argumento del logaritmo, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \int \frac{Cx + D}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} dx &= \int \frac{Cx + D - C\alpha + C\alpha}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} dx = \int \frac{C(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} dx + \int \frac{D + C\alpha}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} dx = \\ &= \frac{C}{2} \ln|(x-\alpha)^2 + \beta^2| + \int \frac{D + C\alpha}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} dx \end{aligned}$$

Para calcular esta nueva integral, tenemos que recordar la integral de la arcotangente:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$$

Entonces se tiene que conseguir un 1 en el denominador dividiendo ambas partes del cociente por β^2 y posteriormente hacer un cambio de variable:

$$\int \frac{D + C\alpha}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} dx = \frac{D + C\alpha}{\beta^2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2} = \frac{D + C\alpha}{\beta^2} \beta \arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) = \frac{D + C\alpha}{\beta} \arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)$$

Lo aplicamos en nuestro caso, teniendo en cuenta que $C = 3$, $D = -1$, $\alpha = 2$ y $\beta = 1$.

$$\begin{aligned} \int \frac{-1+3x}{(x-2)^2 + 1} dx &= \int \frac{-1+3x+6-6}{(x-2)^2 + 1} dx = 3 \int \frac{x-2}{(x-2)^2 + 1} dx + 5 \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 1} = \\ &= \frac{3}{2} \ln|(x-2)^2 + 1| + 5 \arctan(x-2) + c \end{aligned}$$

Por tanto el resultado final de la integral racional pedida es:

$$\boxed{\int \frac{3x^3 + 13x^2 + 6}{x^4 - 7x^2 + 4x + 20} dx = -\frac{2}{x+2} + \frac{3}{2} \ln|(x-2)^2 + 1| + 5 \arctan(x-2) + c}$$

11.1.3. Integración de Funciones Trigonómicas

Las integrales que contienen funciones trigonométricas se pueden resolver en algunos casos teniendo en cuenta alguna de sus relaciones básicas (ver un repaso sobre trigonometría en el [Apéndice A.7, página 308](#)).

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1}$$

$$\boxed{1 + \tan^2 = \sec^2 x}$$

$$\boxed{1 + \operatorname{cotan}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}}$$

$$\boxed{\operatorname{cos}^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}}$$

$$\boxed{\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x}$$

$$\boxed{\operatorname{cos} 2x = \operatorname{cos}^2 x - \operatorname{sen}^2 x}$$

$$\boxed{\operatorname{sen} x = \operatorname{cos} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)}$$

$$\boxed{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} [\operatorname{cos}(x - y) - \operatorname{cos}(x + y)]}$$

$$\boxed{\operatorname{cos} x \operatorname{cos} y = \frac{1}{2} [\operatorname{cos}(x - y) + \operatorname{cos}(x + y)]}$$

$$\boxed{\operatorname{sen} x \operatorname{cos} y = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(x - y) + \operatorname{sen}(x + y)]}$$

Cambio de Variable

Las integrales que solo contienen funciones trigonométricas del tipo $f(\operatorname{sen} x, \operatorname{cos} x)$ se pueden resolver en muchos casos mediante cambios de variable apropiados en función del tipo de *paridad*¹⁶ de la función. Vamos a ver algunos de ellos que las transforman en *integrales de funciones racionales*.

- **Función Par:** $f(-\operatorname{sen} x, -\operatorname{cos} x) = f(\operatorname{sen} x, \operatorname{cos} x)$

$$\int f(\operatorname{sen} x, \operatorname{cos} x) dx \stackrel{\text{c.v.}}{=} \left\{ \begin{array}{l} t = \tan x \rightarrow x = \arctan t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \operatorname{cos} x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right\} = \int \frac{P(t)}{Q(t)} dt$$

- **Función Impar en Seno:** $f(-\operatorname{sen} x, \operatorname{cos} x) = -f(\operatorname{sen} x, \operatorname{cos} x)$

$$\int f(\operatorname{sen} x, \operatorname{cos} x) dx \stackrel{\text{c.v.}}{=} \left\{ t = \operatorname{cos} x, \quad \operatorname{sen} x = \sqrt{1-t^2}, \quad dx = \frac{-dt}{1-t^2} \right\} = \int \frac{P(t)}{Q(t)} dt$$

- **Función Impar en Coseno:** $f(\operatorname{sen} x, -\operatorname{cos} x) = -f(\operatorname{sen} x, \operatorname{cos} x)$

$$\int f(\operatorname{sen} x, \operatorname{cos} x) dx \stackrel{\text{c.v.}}{=} \left\{ t = \operatorname{sen} x, \quad \operatorname{cos} x = \sqrt{1-t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1-t^2} \right\} = \int \frac{P(t)}{Q(t)} dt$$

- **Funciones Generales (ni par ni impar).**

$$\int f(\operatorname{sen} x, \operatorname{cos} x) dx \stackrel{\text{c.v.}}{=} \left\{ \begin{array}{l} t = \tan \frac{x}{2} \rightarrow \frac{x}{2} = \arctan t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \operatorname{cos} x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2} \end{array} \right\} = \int \frac{P(t)}{Q(t)} dt$$

¹⁶Para funciones de dos variables $f(x, y)$ se tiene: $\left\{ \begin{array}{l} \bullet f(x, y) \text{ es } \mathbf{par} \text{ si } f(-x, -y) = f(x, y) \\ \bullet f(x, y) \text{ es } \mathbf{impar} \text{ si } f(-x, y) = -f(x, y) \\ \bullet f(x, y) \text{ es } \mathbf{impar} \text{ si } f(x, -y) = -f(x, y) \end{array} \right.$
 Notar que la función seno es impar $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$, mientras que la función coseno es par $\operatorname{cos}(-x) = \operatorname{cos}(x)$.

Demostración 11.0.

• Funciones de tipo Par

$$\text{– Seno: } t = \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} \quad ; \quad \operatorname{sen} x = t \operatorname{cos} x = t\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} \quad ; \quad \operatorname{sen}^2 x = t^2(1 - \operatorname{sen}^2 x)$$

$$(1 + t^2) \operatorname{sen}^2 x = t^2 \quad ; \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2} \quad ; \quad \boxed{\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}}$$

$$\text{– Coseno: } \operatorname{cos} x = \frac{\operatorname{sen} x}{t} = \frac{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{t} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}$$

• Funciones Generales

$$\text{– Seno: } \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \operatorname{cos} \frac{x}{2} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \operatorname{cos} \frac{x}{2}}{\operatorname{cos}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}} = \frac{\frac{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \operatorname{cos} \frac{x}{2}}{\operatorname{cos}^2 \frac{x}{2}}}{\frac{\operatorname{cos}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{cos}^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \boxed{\frac{2t}{1 + t^2}}$$

$$\text{– Coseno: } \operatorname{cos} x = \operatorname{cos}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{cos}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{cos}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}} = \frac{\frac{\operatorname{cos}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{cos}^2 \frac{x}{2}}}{\frac{\operatorname{cos}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{cos}^2 \frac{x}{2}}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \boxed{\frac{1 - t^2}{1 + t^2}}$$

$$\text{– Tangente: } \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \boxed{\frac{2t}{1-t^2}}$$

Al hacer estos cambios de variable en algunas integrales de este tipo se obtienen polinomios de alto grado, de forma que desde un punto de vista práctico el método solo resulta útil en determinados casos.

Ejercicio 11.3. Calcular las siguientes integrales de funciones racionales:

$$\text{a) } \int \frac{dx}{\operatorname{cos}^4 x} \qquad \text{b) } \int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x}$$

a) En este caso la función claramente es de tipo par, por tanto:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{cos}^4 x} \stackrel{\text{c.v.}}{=} \left\{ \begin{array}{l} t = \tan x \quad , \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \operatorname{cos} x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right\} = \int (\sqrt{1+t^2})^4 \frac{dt}{1+t^2} = \int (1+t^2) dt = t + \frac{t^3}{3} + c =$$

$$\stackrel{\text{c.v.}}{=} \boxed{\tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x + c}$$

b) En este caso la función no es ni par ni impar, por tanto:

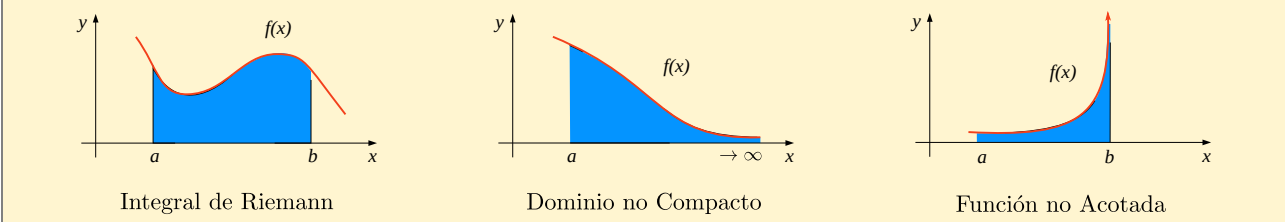
$$\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x} \stackrel{\text{c.v.}}{=} \left\{ \begin{array}{l} t = \tan \frac{x}{2} \quad , \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \quad , \quad \operatorname{cos} x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right\} = \int \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= 2 \int \frac{\cancel{1+t^2}}{1 + \cancel{t^2} + 2t + 1 - \cancel{t^2}} \frac{dt}{\cancel{1+t^2}} = 2 \int \frac{dt}{2(1+t)} = \ln(1+t) + c \stackrel{\text{c.v.}}{=} \boxed{\ln\left(1 + \tan \frac{x}{2}\right) + c}$$

11.2. Integrales Impropias

11.2.1. Definición

En la definición de *integral de una función*¹⁷ se exige que la función tiene que estar definida en un **compacto** y ser **acotada**. En esta sección se extiende la definición de *integral de Riemann* a funciones no acotadas y/o definidas en intervalos no acotados.

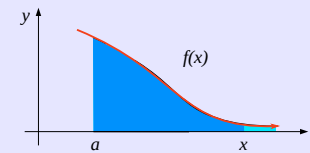
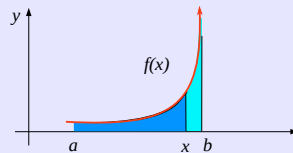


Definición 11.1. Integral Impropia

Sea $[a, b)$ un intervalo no compacto donde $-\infty < a < b \leq +\infty$ y sea $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función *integrable* en todo intervalo compacto $[a, x] \subset [a, b)$.

Se denomina **integral impropia** de f en $[a, b)$ y se representa por $\int_a^{\rightarrow b} f$ o de forma más general como $\int_a^b f$ al valor, en caso de que exista, del siguiente límite:

$$\int_a^{\rightarrow b} f = \int_a^b f = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f$$



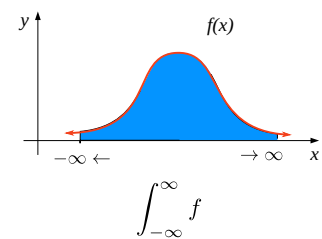
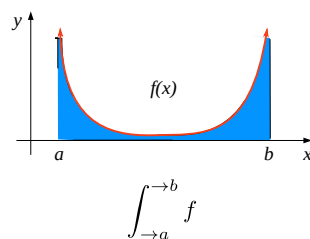
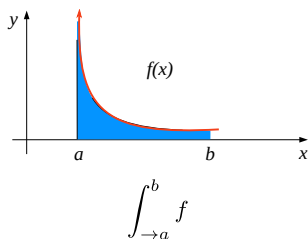
La definición de *integral impropia* se puede extender de forma análoga a los siguientes casos:

- $\int_{\rightarrow a}^b$: el intervalo no acotado es $(a, b]$ con $-\infty \leq a < b < +\infty$.

$$\int_{\rightarrow a}^b f = \int_a^b f = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f$$

- $\int_{\rightarrow a}^{\rightarrow b} = \int_{\rightarrow a}^c f + \int_c^{\rightarrow b} f$: el intervalo no acotado es (a, b) con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ y $c \in (a, b)$.

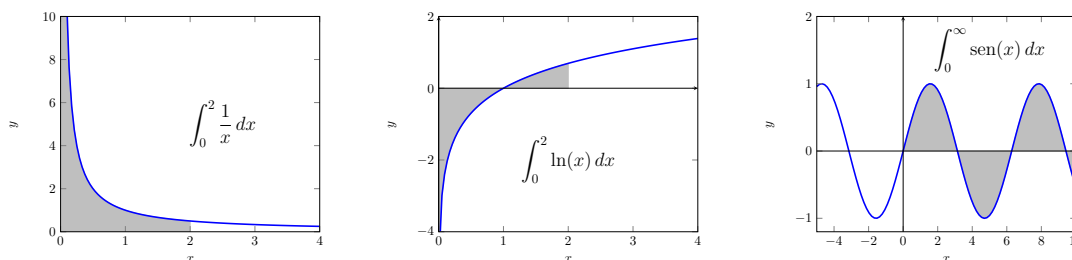
$$\int_{\rightarrow a}^{\rightarrow b} f = \int_a^b f = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^c f + \lim_{x \rightarrow b^-} \int_c^x f$$



En las *integrales impropias* siempre aparece el valor infinito, o bien en el dominio de integración y/o bien porque la función tiene alguna asíntota vertical en el interior de su dominio.

¹⁷Ver la [Definición 10.1](#), página 252.

Ejemplo 11.2. Integrales Impropias



11.2.2. Convergencia de las Integrales Impropias

El valor de una *integral impropia*, dado por el resultado del límite de su definición¹⁸, determina el *carácter de la integral*, y en caso de existir, puede ser un número finito o infinito.

Definición 11.2. Integrales Impropias Convergentes, Divergentes y Oscilantes

- **Integral Impropia Convergente:** El valor del límite de su definición es un número finito.
- **Integral Impropia Divergente:** El valor del límite de su definición es $\pm\infty$.
- **Integral Impropia Oscilante:** El valor del límite de su definición no existe.

Ejercicio 11.4. Estudiar el carácter de las integrales impropias del anterior **Ejemplo 11.2**.

a) $\int_0^2 \frac{dx}{x}$ b) $\int_0^2 \ln(x) dx$ c) $\int_0^\infty \sin(x) dx$

a) Aplicando la definición de integral impropia:

$$\int_0^2 \frac{dx}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^2 \frac{dx}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(x)|_t^2 = \lim_{t \rightarrow 0^+} [\ln(2) - \ln(t)] = \ln(2) - (-\infty) = +\infty \implies \text{Divergente}$$

b)

$$\int_0^2 \ln(x) dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^2 \ln(x) dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} x[\ln(x) - 1]|_t^2 = \lim_{t \rightarrow 0^+} [2(\ln 2 - 1) - t(\ln t - 1)] = \ln 4 - 2 - \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t$$

Como:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t \stackrel{0/\infty}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t}{t^{-1}} \stackrel{\infty/\infty}{\underset{H}{=}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^{-1}}{-t^{-2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} -t = 0$$

Por tanto:

$$\int_0^2 \ln(x) dx = \ln 4 - 2 \implies \text{Convergente}$$

c) $\int_0^\infty \sin(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \sin(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} -\cos(x)|_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} (\cos 0 - \cos t) =$
 $= 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} \cos t = \nexists \implies \text{Oscilante}$

¹⁸Ver la **Definición 11.1**, página 276.

Notar que el valor de una *integral impropia*, en caso de existir, se puede asociar desde un punto de vista geométrico al área comprendida entre la curva de la función a integrar y el eje x , en el intervalo de integración.

El concepto de función *integrable según Riemann*¹⁹ se puede extender para integrales impropias, donde la función no está acotada o bien el intervalo de integración es infinito, de la siguiente forma:

Definición 11.3. Generalización de Función Integrable según Riemann

Se dice que una determinada función $f(x)$ (acotada o no) es **integrable según Riemann** en un determinado intervalo (finito o infinito) si la integral (impropia) sobre dicho intervalo es **convergente**.

11.2.3. Clasificación de las Integrales Impropias

Definición 11.4. Tipos de Integrales Impropias

Hay tres tipos de *integrales impropias* en base a la acotación de la función y a su dominio de integración, de la siguiente forma:

- **Integral Impropia de Primera Especie:** La función está acotada y el dominio de integración es infinito. Puede ser de alguno de estos tres tipos:

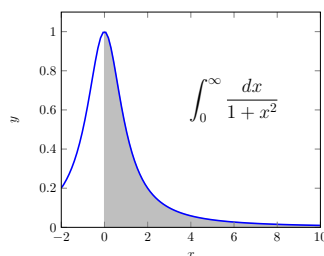
$$\int_a^\infty f \quad ; \quad \int_{-\infty}^b f \quad ; \quad \int_{-\infty}^\infty f \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}$$

- **Integral Impropia de Segunda Especie:** El dominio de integración es finito pero la función tiende a $\pm\infty$ en alguno de los extremos de integración²⁰.

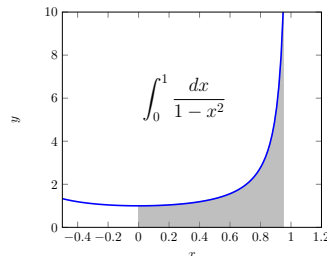
$$\int_a^b f \quad , \quad a, b \in \mathbb{R} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f = \pm\infty \quad \text{y/o} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f = \pm\infty$$

- **Integral Impropia de Tercera Especie:** Mezcla de los dos casos anteriores, donde el dominio de integración es infinito y la función no está acotada.

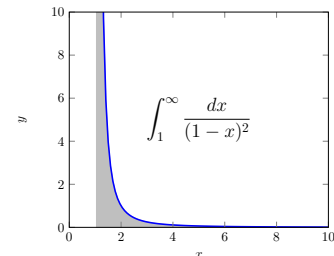
Ejemplo 11.3. Tipos de Integrales Impropias



Primera Especie



Segunda Especie



Tercera Especie

¹⁹Ver la [Definición 10.1](#), página 252.

²⁰Notar que en este tipo de integrales si la función tiene asíntotas verticales en medio del intervalo, se puede particionar dando lugar varias integrales impropias de segunda especie.

11.2.4. Integrales Impropias de Primera Especie

Vamos a estudiar el siguiente caso general característico de las *integrales impropias de primera especie*:

$$\int_a^{\infty} f$$

donde f es una función acotada en $[a, \infty)$ y siendo a un número finito o el valor $-\infty$.

Como el valor de muchas integrales no pueden calcularse de forma analítica, estamos interesados en la determinación del *carácter* de una integral impropia sin necesidad de calcular su valor. Para ello se utilizan diferentes *criterios de convergencia* que veremos a continuación.

Criterios de Convergencia para Integrales Impropias de Primera Especie

Vamos a ver dos *criterios de convergencia* para las *integrales impropias*, que son muy similares a los utilizados en el estudio de las *series*²¹.

Teorema 11.1. Criterios de Convergencia en Integrales Impropias

Sean dos funciones $f, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ integrables en todo intervalo $[a, x]$ para $x > a$. Si se cumple:

- **Criterio de Comparación**

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, \infty) \implies \begin{cases} \text{si } \int_a^{\infty} g(x) dx \text{ converge} \implies \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ converge} \\ \text{si } \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ diverge} \implies \int_a^{\infty} g(x) dx \text{ diverge} \end{cases}$$

- **Criterio de Comparación de Paso al Límite**

Sea $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0 \quad \forall x \in [a, \infty)$ y sea $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

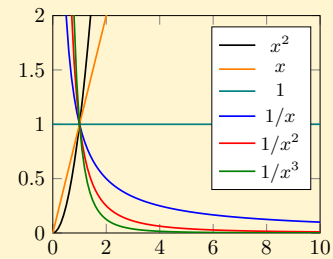
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } 0 < \ell < +\infty \implies \int_a^{\infty} f, \int_a^{\infty} g \text{ Tienen el mismo carácter (convergente o divergente)} \\ \text{Si } \ell = 0 \implies \begin{cases} \text{Si } \int_a^{\infty} g \text{ converge} \implies \int_a^{\infty} f \text{ converge} \\ \text{Si } \int_a^{\infty} f \text{ diverge} \implies \int_a^{\infty} g \text{ diverge} \end{cases} \\ \text{Si } \ell = +\infty \implies \begin{cases} \text{Si } \int_a^{\infty} f \text{ converge} \implies \int_a^{\infty} g \text{ converge} \\ \text{Si } \int_a^{\infty} g \text{ diverge} \implies \int_a^{\infty} f \text{ diverge} \end{cases} \end{array} \right.$$

²¹Ver la Sección 9.5.2, página 236.

Para poder utilizar estos criterios, se necesita conocer el resultado de una *integral impropia base* que sirva para compararla con la integral en cuestión que queremos analizar. Veamos el caso más sencillo y útil.

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^n} dx$$

$$; \quad a > 0, \quad n \in \mathbb{R}$$



Por definición de *integral impropia*:

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^n} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{1}{x^n} dx = \begin{cases} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{x^{1-n}}{1-n} \Big|_a^b & n \neq 1 \\ \lim_{b \rightarrow \infty} \ln \frac{b}{a} & n = 1 \end{cases}$$

Entonces:

- Si $n > 1$ la integral **converge** siendo su valor: $I = \frac{1}{(n-1)a^{n-1}}$
- Si $n \leq 1$ la integral es **divergente**.

Ejercicio 11.5. Estudiar el carácter de la siguiente integral impropia:

$$\int_0^\infty \frac{3x^2}{(1+x^2)^2} dx$$

Notar que nos piden solo determinar su carácter, sin ser necesario calcular su valor. Intentamos aplicar el *criterio de comparación de paso al límite*, usando como integral base conocida:

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^n}$$

que sabemos que es convergente para $n > 1$. Por tanto calculamos el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{(1+x^2)^2}}{\frac{1}{x^n}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^{2+n}}{(1+x^2)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^{2+n}}{x^4 + \dots}$$

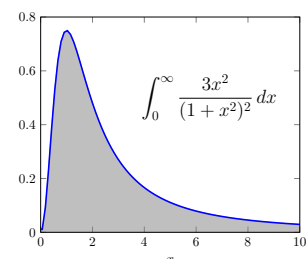
Si $n = 2$ el límite es 3, que al ser mayor que cero ambas *integrales impropias* tienen el mismo carácter y como para $n = 2$ sabemos que la *integral impropia base* es *convergente*, por tanto nuestra integral también es **convergente**.

Notar que el límite inferior de la integral del problema es cero, pero podría haber sido cualquier otro valor finito siendo válido el resultado anterior.

Como la integral pedida es de tipo racional podemos calcular su valor para comprobar la validez del resultado:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{3x^2}{(1+x^2)^2} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{3x^2}{(1+x^2)^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{2} \frac{x}{x^2+1} + \frac{3}{2} \arctan x \right) \Big|_0^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{2} \frac{t}{t^2+1} + \frac{3}{2} \arctan t + 0 - 0 \right) = \boxed{\frac{3\pi}{4}} \end{aligned}$$

Comprobando que efectivamente es convergente.

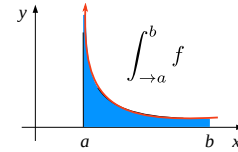


11.2.5. Integrales Impropias de Segunda Especie

El conjunto de *integrales impropias de segunda especie*²² se pueden reducir a dos casos generales que se detallan a continuación, donde F es una primitiva de f :

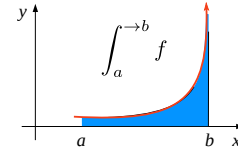
- Si f no está acotada en $x = a$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow a^+} [F(b) - F(t)]$$



- Si f no está acotada en $x = b$

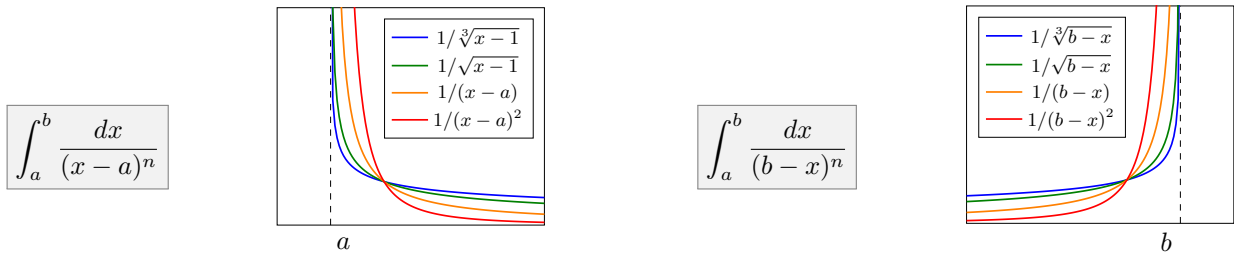
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b^-} [F(t) - F(a)]$$



En ambos casos $a, b, n \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

Criterios de Convergencia para Integrales Impropias de Segunda Especie

Los mismos *criterios de convergencia* vistos para las *integrales impropias de primera especie*²³ se pueden utilizar para las *integrales impropias de segunda especie*, pero utilizando *dos integrales impropias base* conocidas distintas, una para cada uno de los casos generales anteriores.



Ambas integrales impropias solo son convergentes para $0 < n < 1$, como se muestra a continuación:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n} = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b \frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow a^+} \left. \frac{(x-a)^{1-n}}{1-n} \right|_t^b = \lim_{t \rightarrow a^+} \left[\frac{(b-a)^{1-n}}{1-n} - \frac{(t-a)^{1-n}}{1-n} \right] & n \neq 1 \\ \lim_{t \rightarrow a^+} \ln(x-a) \Big|_t^b = \lim_{t \rightarrow a^+} \ln \frac{b-a}{t-a} = \infty & n = 1 \end{cases}$$

Entonces:

- Si $0 < n < 1$ la integral **converge** siendo su valor: $I = \frac{(b-a)^{1-n}}{1-n}$
- Si $n \geq 1$ la integral es **divergente**.

De forma análoga para la otra integral:

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$$

- Si $0 < n < 1$ la integral **converge** siendo su valor: $I = \frac{(b-a)^{1-n}}{1-n}$
- Si $n \geq 1$ la integral es **divergente**.

²²Ver la [Definición 11.4](#), página 278.

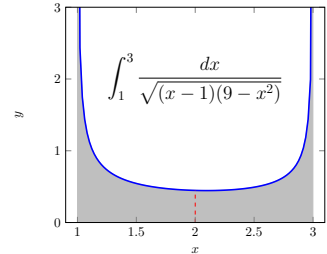
²³Ver la [Sección 11.2.4](#), página 279.

Ejercicio 11.6. Estudiar el carácter de la siguiente integral impropia:

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(9-x^2)}}$$

Notar que esta función tiende a infinito en los dos límites de integración. Para estudiar su carácter vamos a descomponerla en la suma de dos integrales impropias de segunda especie:

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(9-x^2)}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(9-x^2)}} + \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(9-x^2)}}$$



Vamos a estudiar el carácter de cada una de estas nuevas integrales por separado.

- $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(9-x^2)}}$

Esta integral impropia solo tiene una discontinuidad en el límite inferior $x = 1$. Vamos a aplicar el *criterio de comparación de paso al límite*, usando como integral base conocida:

$$\int_1^b \frac{dx}{(x-1)^n}, \quad b > 1$$

que sabemos que es convergente para $n < 1$. Por tanto calculamos el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{(x-1)(9-x^2)}}}{\frac{1}{(x-1)^n}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{(x-1)(9-x^2)}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^{n-\frac{1}{2}} (9-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Este límite es un número finito ($1/\sqrt{8}$) para $n = 1/2$ y por tanto la integral impropia estudiada es **convergente**.

- $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(9-x^2)}}$

Esta integral impropia solo tiene una discontinuidad en el límite superior $x = 3$. Vamos a aplicar el *criterio de comparación de paso al límite*, usando como integral base conocida:

$$\int_a^3 \frac{dx}{(3-x)^n}, \quad a < 3$$

que sabemos que es convergente para $n < 1$. Por tanto calculamos el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{(x-1)(9-x^2)}}}{\frac{1}{(3-x)^n}} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(3-x)^n}{\sqrt{(x-1)(3-x)(3+x)}} = \lim_{x \rightarrow 3^-} (3-x)^{n-\frac{1}{2}} (3+x)^{-\frac{1}{2}} (x-1)^{-\frac{1}{2}}$$

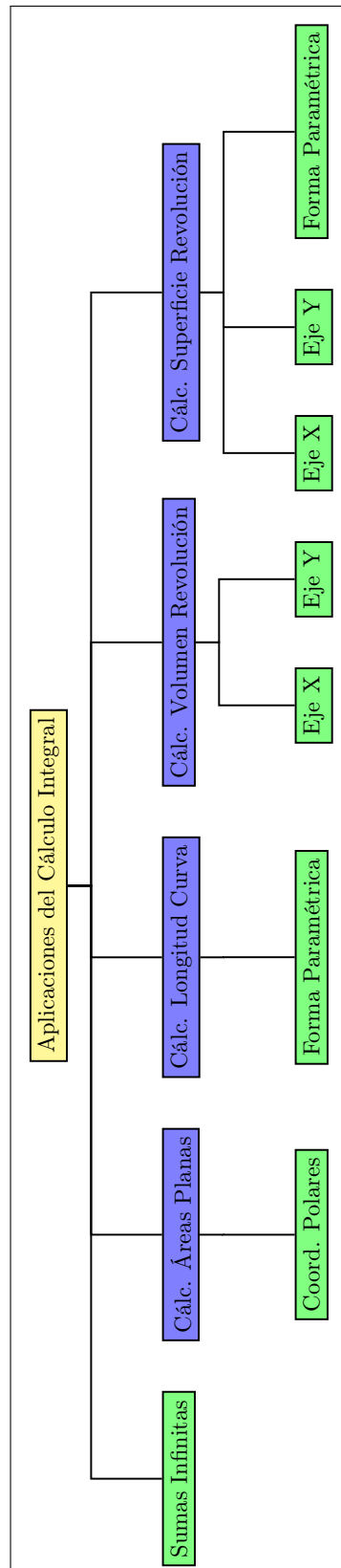
Este límite es un número finito ($1/\sqrt{12}$) para $n = 1/2$ y por tanto la integral impropia estudiada es **convergente**.

Como ambas integrales son convergentes la integral impropia del problema también es **convergente**.

Aplicaciones del Cálculo Integral

Contenido

12.1	Aplicaciones de la Integral	285
12.2	La Integral como una Suma Infinita	285
12.3	Cálculo de Áreas Planas	286
12.3.1	Área de Funciones en Coordenadas Paramétricas	287
12.3.2	Área de Funciones en Coordenadas Polares	287
12.4	Cálculo de Longitudes de Curvas	289
12.4.1	Longitud de Funciones en Coordenadas Paramétricas	289
12.4.2	Longitud de Funciones en Coordenadas Polares	290
12.5	Cálculo de Volúmenes de Sólidos de Revolución	291
12.5.1	Volumen Alrededor del Eje X	291
12.5.2	Volumen Alrededor del Eje Y	291
12.6	Cálculo del Área de una Superficie de Revolución	293
12.6.1	Área Alrededor del Eje X	293
12.6.2	Área Alrededor del Eje Y	293
12.6.3	Coordenadas Paramétricas	293
12.7	Resumen de Fórmulas	294



12.1. Aplicaciones de la Integral

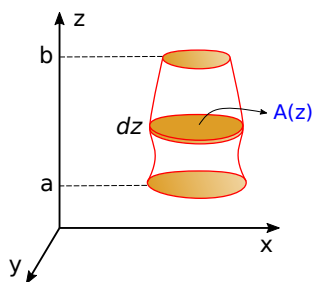
La integración es una técnica de cálculo ampliamente utilizada en todas las áreas, tanto teóricas como aplicadas, de las ciencias e ingenierías. Entre las aplicaciones más comunes se encuentran:

1. La integral como una suma infinita
2. Cálculo de áreas planas
3. Cálculo de longitudes de curva
4. Cálculo de volúmenes de sólidos de revolución
5. Cálculo de áreas de superficies de revolución

12.2. La Integral como una Suma Infinita

Como hemos visto¹, la integral se puede entender como una suma infinita de términos que varían de una forma determinada dada por una función. Veamos algunos ejemplos del uso de la integral como suma infinita.

- El volumen de un objeto 3D puede ser determinado si se conoce el área de la figura en función de la altura, a través de una integral de la siguiente forma²:

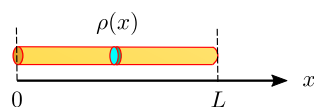


$$V = \int_a^b A(z) dz$$

Notar que el volumen total se obtiene como una suma infinita de diferenciales de volúmenes³:

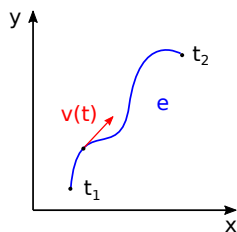
$$dV = A(z)dz \implies \int dV = \int A(z)dz \implies V = \int A(z)dz$$

- De forma similar, se puede determinar la masa de un determinado hilo de densidad variable⁴ si conocemos la *densidad lineal*⁵ ρ en función de la posición x , de la siguiente forma:



$$m = \int_0^L \rho(x) dx$$

- La *velocidad* es la variación del espacio recorrido por unidad de tiempo. Si conocemos la forma en que varía la velocidad de un móvil en función del tiempo, entonces se puede determinar el espacio recorrido por el mismo a través de la siguiente integral:



$$v = \frac{de}{dt} \implies de = v(t)dt \implies e = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

¹Ver la [Definición 10.1](#), página 252.

²Esto es consecuencia del denominado *principio de Cavalieri*.

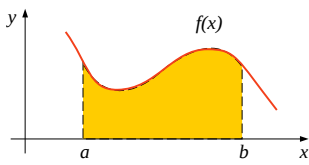
³Aquí se aplica el TFC (ver el [Teorema 10.1](#), página 254) para tener en cuenta que la integral y la derivada (diferencial) son operaciones inversas y por tanto se anulan.

⁴Por ejemplo un hilo metálico de una determinada aleación.

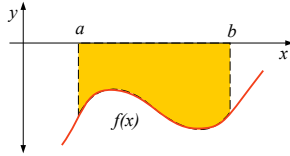
⁵La *densidad lineal* es la relación entre la masa y la longitud de un objeto. Sus unidades son *masa/longitud*, por ejemplo *gr/cm*.

12.3. Cálculo de Áreas Planas

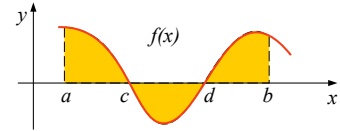
Una de las aplicaciones de la integral es el cálculo del área bajo una curva determinada⁶. Notar que el área es siempre un número no negativo, de forma que es necesario cambiar el signo de la integral si la curva cae por debajo del eje x .



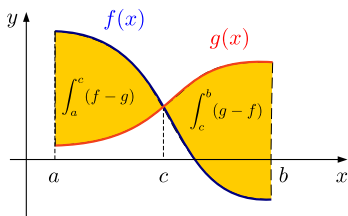
$$A = \int_a^b f(x) dx$$



$$A = - \int_a^b f(x) dx$$



$$A = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$$



Para calcular el área encerrada entre dos curvas es necesario determinar los puntos de corte entre ambas y establecer las integrales correspondientes, pudiéndose generalizar de la siguiente forma:

$$A = \int_a^b |f - g| = \int_a^c (f - g) + \int_c^b (g - f)$$

Ejercicio 12.1. Calcular el área encerrada entre las dos siguientes curvas:

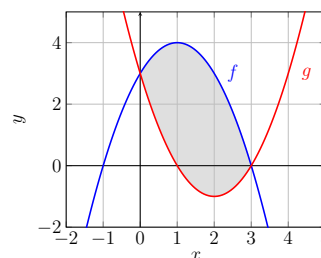
$$\begin{cases} f(x) = 3 + 2x - x^2 \\ g(x) = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$$

Encontramos los puntos de corte entre las dos curvas (parábolas):

$$3 + 2x - x^2 = x^2 - 4x + 3 \implies 2x^2 - 6x = 0 \quad ; \quad x(2x - 6) = 0 \quad ; \quad x = \{0, 3\}$$

Damos algunos valores entre 0 y 3:

x	f	g
0	3	3
1	4	0
2	3	-1
3	0	0



$$A = \int_0^3 |f - g| dx = \int_0^3 [(3 + 2x - x^2) - (x^2 - 4x + 3)] dx = \int_0^3 (6x - 2x^2) dx = 3x^2 - \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^3 = 27 - 18 = \boxed{9}$$

⁶Ver la Sección 10.1, página 251 y la Sección 11.2.2, página 277.

12.3.1. Área de Funciones en Coordenadas Paramétricas

Dada una función $y = f(x)$ definida en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$$

de forma que $x(t)$ es estrictamente monótona con primera derivada continua (curva simple).

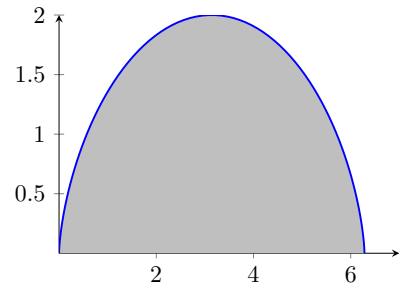
El área entre la curva y el eje x se puede obtener teniendo en cuenta el *teorema fundamental del cálculo*⁷ de la siguiente forma:

$$A = \int y(x) dx \quad ; \quad dA = y(x)dx = y[x(t)]d[x(t)] = y(t)x_t(t) dt \implies A = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x_t(t) dt \quad , \quad x_t(x) = \frac{d}{dt}x(t)$$

Ejercicio 12.2. Calcular el área por un arco del siguiente cicloide:

$$\begin{cases} x(t) = t - \text{sen } t \\ y(t) = 1 - \text{cos } t \end{cases} \quad ; \quad t \in [0, 2 * \pi]$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x_t(t) dt = \int_0^{2\pi} (1 - \text{cos } t)(1 - \text{cos } t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + \text{cos}^2 t - 2 \text{cos } t) dt = t + \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \text{sen}(2t) - 2 \text{sen } t \Big|_0^{2\pi} = \\ &= 2\pi + \pi + 0 - 0 - 0 - 0 - 0 + 0 = \boxed{3\pi} \end{aligned}$$

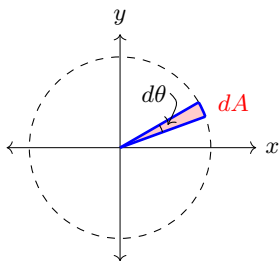


12.3.2. Área de Funciones en Coordenadas Polares

En algunos casos la determinación del área debajo de una curva es más sencilla si se realiza en *coordenadas polares*⁸.

$$y = f(x) \quad \xrightarrow{\text{c.v.}} \quad r = f(\theta)$$

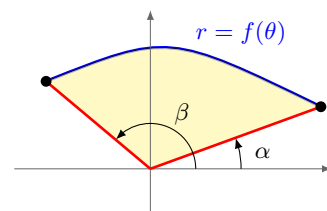
Para encontrar la relación diferencial entre el área A debajo de una curva en coordenadas polares y el ángulo θ (variable independiente), nos basamos en el área de un *sector circular* diferencial dA :



$$\left. \begin{array}{l} 2\pi \rightarrow \pi r^2 \\ d\theta \rightarrow dA \end{array} \right\} \implies dA = \frac{\pi r^2}{2\pi} d\theta \implies dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Integrando ambas partes de esta igualdad se tiene la **fórmula del área de una curva dada en coordenadas polares**:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta$$



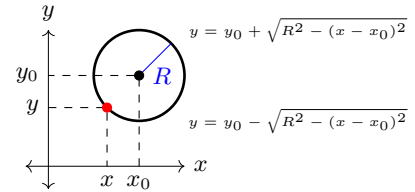
⁷Ver la Sección 10.3.1, página 254.

⁸Ver la Sección 2.9.4, página 69.

Ejercicio 12.3. Calcular el área de una semi-circunferencia genérica de centro (x_0, y_0) y radio R .

Una circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio R se puede poner en coordenadas cartesianas como:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y = y_0 \pm \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}}$$



Si el centro está el origen $(x_0 = 0, y_0 = 0)$, podemos calcular el área de una semi-circunferencia de radio R de la siguiente forma:

$$A = \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

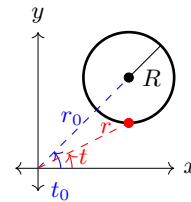
que se podría resolver con un cambio de variable adecuado.

Una forma más sencilla de calcular esta integral es expresar la circunferencia en coordenadas paramétricas (polares):

$$\begin{cases} x = x_0 + R \cos t \\ y = y_0 + R \sin t \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ t = \text{atan2}(y, x) \end{cases}$$

Donde ahora las nuevas variables son el radio r y el ángulo t y expresándose cada uno de los puntos en coordenadas polares como⁹ $(r; t)$. La ecuación general en coordenadas polares de una circunferencia de radio R y centro en coordenadas polares $(r_0; t_0)$, es:

$$\boxed{r^2 - 2rr_0 \cos(t - t_0) + r_0^2 = R^2}$$



Esta ecuación es incluso más complicada que la ecuación general en cartesianas. Sin embargo, en el caso de que el centro sea el origen de coordenadas, es decir $(r_0 = 0; t_0 = 0)$ entonces la ecuación de la circunferencia en polares es simplemente:

$$\boxed{r = R}$$

que indica que la variable radio¹⁰ r es constante e igual al radio de la circunferencia R , independientemente del ángulo. Si calculamos la integral del área en polares en este caso, usando la fórmula del área en polares, se tiene:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^\pi R^2 dr = \frac{1}{2} R^2 r \Big|_0^\pi = \frac{1}{2} R^2 \pi$$

que corresponde con el resultado conocido del área de un círculo $A = \pi R^2$.

Notar que la fórmula del cálculo del área dada en coordenadas polares da el área *encerrada* por la curva, mientras que la fórmula del área en forma paramétrica da el área *bajo la curva*. Ver el siguiente ejemplo que muestra de forma gráfica estas diferencias.

⁹Notar que el *punto y coma* (;) se utiliza para indicar que son *coordenadas polares*.

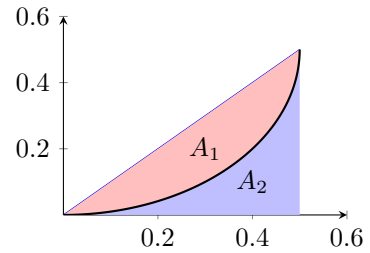
¹⁰Distancia desde el origen de coordenadas a cada uno de los puntos de la circunferencia.

Ejercicio 12.4. Calcular el área encerrada por la curva y bajo la curva definida por la siguiente función en coordenadas polares.

$$r = \text{sen } t \quad , \quad t \in [0, \pi/4]$$

La curva $r = \text{sen } t$ corresponde a una circunferencia de centro $(0, 1/2)$ y radio $1/2$ y en el intervalo $r \in [0, \pi/4]$ corresponde a un cuarto de esa curva (dibujada en color negro en la gráfica de la derecha).

El área encerrada por la curva entre sus dos extremos (zona roja en la gráfica) se podrá obtener calculando el área en coordenadas polares:



$$A_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \text{sen}^2 t \, dt = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \text{sen}(2t) \right) \Big|_0^{\pi/4} = \boxed{\frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}}$$

Para calcular el área bajo la curva (zona azul en la gráfica) hay que expresarla en forma paramétrica^a:

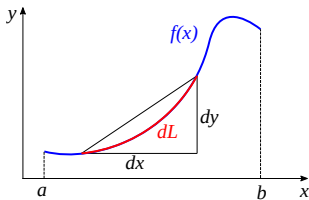
$$\begin{cases} x(t) = r \cos t = \text{sen } t \cos t \\ y(t) = r \text{sen } t = \text{sen}^2 t \end{cases}$$

El área bajo la curva será entonces:

$$A_2 = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x_t(t) \, dt = \int_0^{\pi/4} \text{sen}^2 t (\cos^2 t - \text{sen}^2 t) \, dt = -\frac{t}{4} - \frac{1}{16} \text{sen}(4t) - \frac{1}{4} \text{sen}(2t) \Big|_0^{\pi/4} = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{16}}$$

12.4. Cálculo de Longitudes de Curvas

Queremos calcular la longitud de una función suave (derivable) entre dos puntos de su dominio a y b . Para ello empezamos determinando el diferencial de longitud dL y posteriormente integramos la expresión resultante.



$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{[(dx)^2 + (dy)^2] \frac{(dx)^2}{(dx)^2}} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx \quad ; \quad f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

12.4.1. Longitud de Funciones en Coordenadas Paramétricas

Generalmente esta integral puede resultar difícil de calcular, por ello en determinados casos resulta más sencillo expresar la función de forma paramétrica:

$$y = f(x) \implies \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad , \quad t \in [\alpha, \beta] \implies \begin{cases} x(\alpha) = a \\ x(\beta) = b \end{cases}$$

En este caso, un diferencial de longitud de la curva vendrá dado por la siguiente expresión:

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{[(dx)^2 + (dy)^2] \frac{(dt)^2}{(dt)^2}} = \sqrt{[x_t]^2 + [y_t]^2} \, dt \implies L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x_t]^2 + [y_t]^2} \, dt \quad \begin{cases} x_t = \frac{dx}{dt} \\ y_t = \frac{dy}{dt} \end{cases}$$

^aVer la Sección 2.9.4, página 71.

Notar que las dos fórmulas de la longitud coinciden ya que una función $y = f(x)$ se puede poner de forma paramétrica como:

$$y = f(x) \implies \begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases} \implies f' = \begin{cases} \frac{dx}{dx} = 1 \\ \frac{dy}{dx} = f'(x) \end{cases}$$

Ejercicio 12.5. Calcular la longitud de una circunferencia de radio R usando coordenadas paramétricas.

Una circunferencia de radio R y centro origen se puede definir en coordenadas paramétricas como:

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi] \implies \begin{cases} x_t = -R \sin t \\ y_t = R \cos t \end{cases}$$

Entonces:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x_t^2 + y_t^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} R dt = \boxed{2\pi R}$$

12.4.2. Longitud de Funciones en Coordenadas Polares

Si la función está definida por coordenadas polares de la forma:

$$r = f(t), \quad t \in [\alpha, \beta] \implies \begin{cases} x(t) = r \cos t = f(t) \cos t \\ y(t) = r \sin t = f(t) \sin t \end{cases}$$

la longitud del arco comprendido en el intervalo $[\alpha, \beta]$ puede determinarse de la forma:

$$\begin{aligned} L &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x_t]^2 + [y_t]^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f'(t) \cos t - f(t) \sin t]^2 + [f'(t) \sin t + f(t) \cos t]^2} dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f'(t)]^2 \cos^2 t + [f(t)]^2 \sin^2 t - 2f(t)f'(t) \sin t \cos t + [f'(t)]^2 \sin^2 t + [f(t)]^2 \cos^2 t + 2f(t)f'(t) \sin t \cos t} dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(t)]^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) + [f'(t)]^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(t)]^2 + [f'(t)]^2} dt \\ & \quad \boxed{L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(t)]^2 + [f'(t)]^2} dt} \end{aligned}$$

En muchos casos las integrales de este tipo no tienen soluciones analíticas y es necesario utilizar métodos de integración numérica para su resolución¹¹.

Ejercicio 12.6. Calcular la longitud de una circunferencia de radio R usando coordenadas polares.

Una circunferencia de radio R y centro origen se puede definir en coordenadas polares como:

$$r = R \quad ; \quad R > 0$$

Entonces:

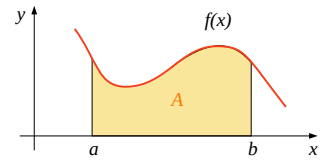
$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(t)]^2 + [f'(t)]^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + 0} dt = \int_0^{2\pi} R dt = \boxed{2\pi R}$$

¹¹Este tipo de métodos no serán tratados en este texto.

12.5. Cálculo de Volúmenes de Sólidos de Revolución

En esta sección se estudia la determinación del volumen¹² de un tipo especial de sólidos 3D denominadas de *revolución*, que se obtienen al hacer girar una figura plana alrededor de un determinado eje.

En nuestro caso la figura plana está formada por la superficie A comprendida entre una función $f(x)$ y el eje x en un intervalo $[a, b]$.

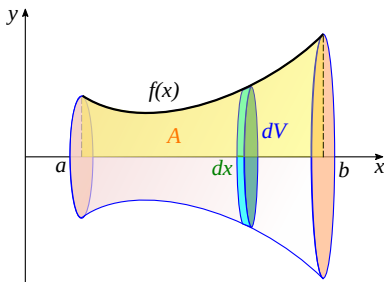


Vamos a estudiar dos casos:

- El sólido se genera haciendo girar A alrededor del eje X .
- El sólido se genera haciendo girar A alrededor del eje Y .

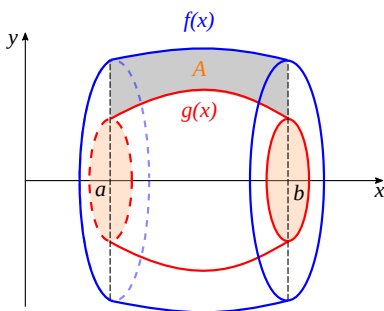


12.5.1. Volumen Alrededor del Eje X



En este caso el diferencial de volumen dV de una rodaja infinitesimal sería el área del disco¹³ por la anchura infinitesimal de la rodaja dx , e integrando dicha expresión se tiene:

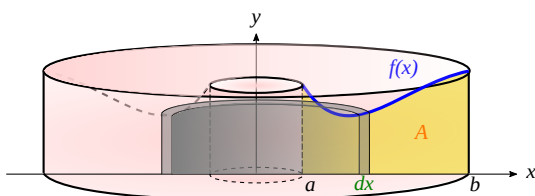
$$dV = \underbrace{\pi[f(x)]^2}_{\text{Área disco}} dx \implies V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



Si el sólido de revolución esté comprendido entre dos curvas, la fórmula será:

$$V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx$$

12.5.2. Volumen Alrededor del Eje Y



En este caso el diferencial de volumen dV está formado por un cilindro con eje central y , de radio x , anchura dx y altura $f(x)$, por tanto:

$$dV = 2\pi x f(x) dx \implies V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

¹²El problema general del cálculo del volumen se verá en el segundo cuatrimestre en la asignatura *Cálculo II*. Ver por ejemplo "Clases de Cálculo II para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 367..

¹³Notar que el valor de la función en dicho punto $f(x)$ corresponde con el radio del disco, de ahí que el área sea $\pi[f(x)]^2$.

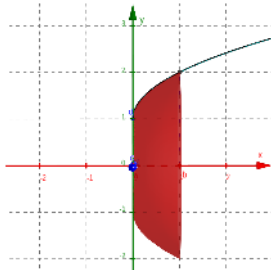
Ejercicio 12.7. Calcular el volumen de revolución al hacer girar la siguiente función:

$$y = \sqrt{x} + 1 \quad ; \quad x \in [0, 1]$$

a) Alrededor del eje x

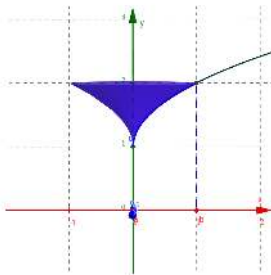
b) Alrededor del eje y

a) Alrededor del eje x



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (\sqrt{x} + 1)^2 dx = \\ &= \pi \int_0^1 (x + 2\sqrt{x} + 1) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} + 2 \frac{2}{3} x^{3/2} + x \right) \Big|_0^1 = \\ &= \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3} + 1 \right) = \boxed{\frac{17\pi}{6}} \end{aligned}$$

b) Alrededor del eje y



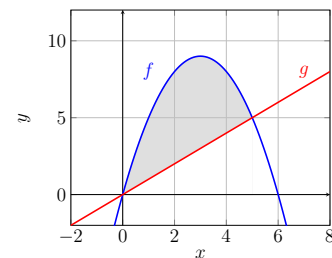
$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 x(\sqrt{x} + 1) dx = \\ &= 2\pi \int_0^1 (x^{3/2} + x) dx = 2\pi \left(\frac{2}{5} x^{5/2} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \\ &= 2\pi \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{2} \right) = \boxed{\frac{9\pi}{5}} \end{aligned}$$

Ejercicio 12.8. Calcular el volumen de revolución encerrado entre las dos siguientes funciones al hacerlas girar sobre el eje x .

$$f(x) = 6x - x^2 \quad ; \quad g(x) = x$$

Los puntos de corte entre las dos curvas son $(0, 0)$ y el $(5, 5)$ de forma que el volumen pedido es:

$$V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx$$



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^5 [(6x - x^2)^2 - x^2] dx = \pi \int_0^5 (36x^2 + x^4 - 12x^3 - x^2) dx = \pi \int_0^5 (35x^2 + x^4 - 12x^3) dx = \\ &= \pi \left(\frac{35}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - 3x^4 \right) \Big|_0^5 = 125\pi \left(\frac{35}{3} + 5 - 15 \right) = \boxed{\frac{625}{3}\pi} \end{aligned}$$

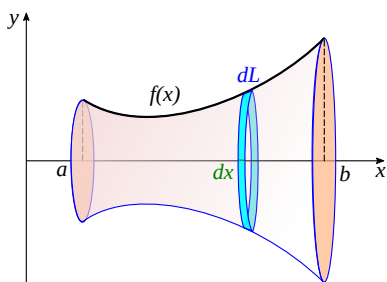
12.6. Cálculo del Área de una Superficie de Revolución

En esta sección vamos a estudiar la determinación del área de la superficie¹⁴ de los *cuerpos de revolución* vistos en la anterior [Sección 12.5, página 291](#).

Al igual que antes vamos a estudiar dos casos: rotación sobre el eje x y rotación sobre el eje y .

12.6.1. Área Alrededor del Eje X

Estamos interesados en determinar el área de la superficie exterior (sin contar las tapas laterales¹⁵) del sólido de revolución sobre el eje X .

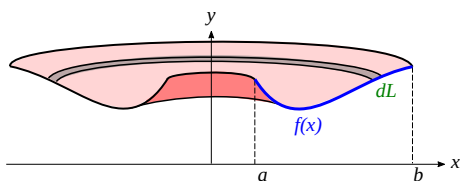


En este caso, el diferencial de área de una *cinta* infinitesimal circular de anchura dL dada por la fórmula obtenida en la longitud de una curva¹⁶. Como este valor gira alrededor del eje x se forma un anillo de radio $f(x)$ por tanto se tiene:

$$dA = 2\pi f(x) \underbrace{\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}_{dL} \implies A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

12.6.2. Área Alrededor del Eje Y

En este caso se quiere determinar el área de la superficie superior¹⁷ del sólido de revolución sobre el eje Y . En la siguiente figura se muestra una sección de esa superficie (su forma completa sería circular).



Para ello se toma una *cinta* infinitesimal de anchura dL que forma un anillo alrededor del eje y , pero en este caso el radio es x en lugar de $f(x)$:

$$dA = 2\pi x \underbrace{\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}_{dL} \implies A = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

12.6.3. Coordenadas Paramétricas

Como las dos integrales anteriores suelen ser complicadas de calcular, se suelen utilizar coordenadas paramétricas para definir las funciones, de la siguiente forma:

$$y = f(x) \implies \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

En este caso y teniendo en cuenta lo explicado en la [Sección 12.4, página 289](#), las fórmulas para el cálculo del área de revolución en coordenadas paramétricas son:

- Alrededor eje X : $A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{[x_t(t)]^2 + [y_t(t)]^2} dt$

- Alrededor eje Y : $A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x(t) \sqrt{[x_t(t)]^2 + [y_t(t)]^2} dt$

¹⁴El problema general del cálculo del área de una superficie cualquiera se verá en el segundo cuatrimestre en la asignatura *Cálculo II*. Ver por ejemplo "Clases de Cálculo II para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 367..

¹⁵Cuyo valor es fácil determinar al ser círculos.

¹⁶Ver la [Sección 12.4, página 289](#).

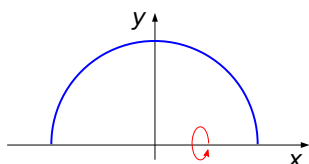
¹⁷Las paredes laterales son cilindros cuyo área es fácil determinar.

Ejercicio 12.9. Calcular el área de la superficie exterior de una esfera de radio 1.

Una circunferencia centrada en el origen y de radio R se puede definir en coordenadas paramétricas (polares) como:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Para obtener una esfera podemos hacerla girar 360° en torno al eje x una *media circunferencia*, por tanto $t \in [0, \pi]$. El área de la superficie generada se puede calcular, en coordenadas paramétricas de la siguiente forma:

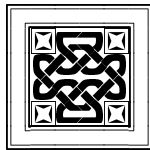


$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^\pi \sin(t) \sqrt{(\cos(t))^2 + (\sin(t))^2} dt = 2\pi \int_0^\pi \sin(t) dt = \\ &= -2\pi \cos t \Big|_0^\pi = \boxed{4\pi} \end{aligned}$$

12.7. Resumen de Fórmulas

Tipo	Forma	Fórmula
Área	Cartesianas	$A = \int_a^b f(x) dx$
	Paramétricas	$A = \int_\alpha^\beta y(t)x_t(t) dt$
	Polares	$A = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta f^2(t) dt$
Longitud	Cartesianas	$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$
	Paramétricas	$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x_t(t)]^2 + [y_t(t)]^2} dt$
	Polares	$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f(t)]^2 + [f'(t)]^2} dt$
Volumen de Revolución	Cartesianas	$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$
		$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$
Superficie Revolución	Cartesianas	$A_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$
		$A_y = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$
	Paramétricas	$A_x = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t) \sqrt{[x_t(t)]^2 + [y_t(t)]^2} dt$
		$A_y = 2\pi \int_\alpha^\beta x(t) \sqrt{[x_t(t)]^2 + [y_t(t)]^2} dt$

APÉNDICES



Temas de Repaso

Contenido

A.1 Conjuntos	298
A.1.1 Cuerpo	299
A.2 Relaciones	299
A.3 Productos Notables	300
A.4 Binomio de Newton	301
A.5 Polinomios	302
A.5.1 Regla de Ruffini	304
A.6 Distancia Euclídea	307
A.6.1 Distancia en \mathbb{R}	307
A.6.2 Distancia en \mathbb{R}^2	307
A.6.3 Distancia en \mathbb{R}^3	307
A.7 Trigonometría	308
A.7.1 Medida de Ángulos: Radianes	308
A.7.2 Funciones Trigonométricas	309
A.8 Funciones Hiperbólicas	318

A.1. Conjuntos

Definición A.1. Conjunto

Un **conjunto** es una colección de elementos con características similares, considerada en sí misma como un objeto.

Los conjuntos se representan por letras mayúsculas y sus elementos por letras minúsculas encerradas entre llaves:

$$A = \{a_1, a_2, \dots\}$$

Definición A.2. Cardinal de un Conjunto

Al número de elementos de un conjunto se le denomina **cardinal** del conjunto y se representa por:

$$|A| = \text{cardinal de } A$$

- **Conjunto vacío:** No tiene ningún elemento. Se representa por $\emptyset = \{\}$
- **Conjunto finito:** aquel que su *cardinal* es un número natural.
- **Conjunto infinito:** aquel que posee un número *infinito*¹ de elementos.
- **Conjunto discreto:** aquel que entre dos números cualesquiera del conjunto siempre existe un número *finito* de elementos². El conjunto puede ser *finito* o *infinito*.

Definición A.3. Conjunto Numerables

Se dice que un conjunto es **numerable** si se puede establecer una relación uno a uno entre los elementos del conjunto y todos o algunos de los números naturales.

Definición A.4. Operación Interna a un Conjunto

Se dice que una determinada *operación*³ entre los elementos de un conjunto A es **interna**, si cualquier resultado entre elementos del conjunto da como resultado otro elemento que también pertenece al mismo conjunto A .

Definición A.5. Conjunto Cerrado respecto a una Operación

Se dice que un conjunto es **cerrado** respecto a una determinada *operación* si ésta es una *operación interna*⁴ al conjunto.

¹Ver la [Sección 0.2, página 4](#).

²Los conjuntos que no son *discretos* pueden ser *densos*, ver la [Definición A.8, página 299](#).

³Como puede ser la suma, resta, etc.

⁴Ver la [Definición A.4, página 298](#).

A.1.1. Cuerpo

Definición A.6. Cuerpo

Un **cuerpo** es una estructura algebraica en la que hay definidas dos operaciones llamadas *adición* y *multiplicación* que cumplen las propiedades: *asociativa*, *conmutativa* y *distributiva* de la multiplicación respecto de la adición, además de la existencia de *inverso* aditivo, del *inverso* multiplicativo y de un *elemento neutro* para la adición y otro para la multiplicación, los cuales permiten efectuar las operaciones de sustracción y división (excepto la división por cero).

Definición A.7. Cuerpo Ordenado

Se dice que un conjunto y dos operaciones $(A; +, \cdot)$ es un **cuerpo ordenado**, si es un *cuerpo* y además hay una *relación de orden total*⁵ (\leq) :

$$a, b, c \in A \quad \begin{cases} \text{si } a \leq b & \implies a + c \leq b + c \\ \text{si } a \leq b, c > 0 & \implies a \cdot c \leq b \cdot c \end{cases}$$

Definición A.8. Conjunto Denso

Se dice que un conjunto A es **denso** respecto al orden (\leq) , si:

$$\forall a, b \in A \text{ con } a < b \quad \exists \text{ infinitos } c \in A : a < c < b$$

A.2. Relaciones

Definición A.9. Relación

Una **relación** R es una *regla* que se establece entre elementos de un conjunto.

Sea un conjunto $A = \{a, b, c, \dots\}$ siendo a, b, c , etc. sus elementos. Si dos de sus elementos $a, b \in A$ verifican una determinada relación R se representa como aRb .

Las *relaciones matemáticas* se caracterizan por las propiedades que verifican. Hay cuatro propiedades básicas.

Definición A.10. Propiedades de una Relación

Sea un conjunto A de elementos sobre el que se establece una relación R entre ellos. Se dice que R es:

- **Reflexiva** : si aRa , $\forall a \in A$.
- **Simétrica** : si $aRb \implies bRa$, $\forall a, b \in A$.
- **Antisimétrica** : si aRb y $bRa \implies a = b$, $\forall a, b \in A$.
- **Transitiva** : Si aRb y $bRc \implies aRc$.

⁵Ver la [Definición A.11](#), página 300.

Definición A.11. Relación de Equivalencia y de Orden

Una relación R entre los elementos de un conjunto A se denomina:

- **Relación de Equivalencia:** si para todos los elementos del conjunto se verifican las propiedades *reflexiva, simétrica y transitiva*.
- **Relación de Orden u Ordenación:** si para todos los elementos del conjunto se verifican las propiedades *reflexiva, antisimétrica y transitiva*.
- **Relación de Orden Total:** *relación de orden* que se puede establecer entre **todos** los elementos de un conjunto, es decir que o bien se verifica aRb , o bien bRa , para cualquier a y b elemento del conjunto.

- Las **relaciones de equivalencia** permiten crear grupos o subconjuntos de elementos con unas mismas determinadas características.
- Las **relaciones de orden** permiten crear determinadas ordenaciones entre los elementos de un conjunto, indicando qué elementos van delante de otros.

Ejemplo A.1. Relaciones

Sea A el conjunto formado por los alumnos de la asignatura Cálculo I de una titulación.

- La relación definida por "pertener al mismo grupo de la asignatura que ..." es una **relación de equivalencia**.
- La relación definida por "tener la calculadora más cara o igual de precio que ..." es una **relación de orden** pero **no total**, ya que solo se puede aplicar sobre los alumnos que tienen calculadora.
- La relación "ser más alto o igual que..." es una **relación de orden total**.

A.3. Productos Notables

Definición A.12. Producto Notable

Se llaman **productos notables** a ciertas expresiones muy comunes cuyo resultado es conocido.

Algunos de los productos notables más sencillos y útiles son:

- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Nota A.1. Estas expresiones se pueden generalizar a través del **binomio de Newton** (ver [Apéndice A.4](#), página 301).

A.4. Binomio de Newton

El **binomio de Newton**, también conocido como **teorema del binomio**, establece la forma de expandir en sumas cualquier potencia de un *binomio* $x + y$.

Recordamos previamente la definición de **factorial de un número natural** y el **cociente binomial** o **números combinatorios**.

Factorial : $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$; **Números Combinatorios :** $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$

Nota A.2. Por definición, el factorial de cero es la unidad: $0! = 1$

Teorema A.1. Binomio de Newton

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n =$$

$$= x^n + n x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} y^2 + \dots + n x y^{n-1} + y^n$$

Ejercicio A.1. Utilizando el binomio de Newton, desarrollar la siguiente potencia:

$$(1 + x)^5$$

$$(1 + x)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} 1^{5-k} x^k = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} x^k = \binom{5}{0} x^0 + \binom{5}{1} x^1 + \binom{5}{2} x^2 + \binom{5}{3} x^3 + \binom{5}{4} x^4 + \binom{5}{5} x^5 =$$

$$= \frac{5!}{5!0!} + \frac{5!}{4!1!} x + \frac{5!}{3!2!} x^2 + \frac{5!}{2!3!} x^3 + \frac{5!}{1!4!} x^4 + \frac{5!}{0!5!} x^5 = \boxed{1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5}$$

Ejercicio A.2. Encontrar el valor del coeficiente del término xy^2z^7 de la siguiente potencia

$$(3x - y + 2z)^{10}$$

Como en la fórmula del binomio de Newton solo aparecen dos términos y aquí tenemos tres, vamos a agrupar los dos primeros y aplicamos dos veces dicha fórmula.

$$(3x - y + 2z)^{10} = [(3x - y) + 2z]^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (3x - y)^k (2z)^{10-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \left[\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (3x)^i (-y)^{k-i} \right] (2z)^{10-k}$$

Como la potencia de z tiene que ser 7, por tanto $10 - k = 7$ y $k = 3$. Por otra parte como la potencia de x debe ser 1, $i = 1$ y de ahí la potencia de y será $k - i = 3 - 1 = 2$ como indica el enunciado. Por tanto:

$$\binom{10}{3} \binom{3}{1} (3x)(-y)^2 (2z)^7 = \frac{10!}{7! \cdot 3!} \frac{3!}{2! \cdot 1!} 3 \cdot 2^7 xy^2 z^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2} 384 xy^2 z^7 = \boxed{138240 xy^2 z^7}$$

A.5. Polinomios

Definición A.13. Polinomio

Un **polinomio** es una suma y/o resta de términos formados por productos de **coeficientes** (números reales o complejos) y potencias enteras de una o más variables **variables independientes**.

Ejemplo A.2. Polinomios de una y varias variables

- $P(x) = x^5 - 4x^3 + 12$
- $P(x, y, z) = -1 + x^2z + xy^2z^3$

Nos vamos a centrar en los polinomios reales de una sola *variable independiente* x , de *grado* n (potencia mayor):

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad ; \quad a_i \in \mathbb{R} \quad \left\{ \begin{array}{l} n \quad : \text{Grado del polinomio } (a_n \neq 0) \\ a_i \quad : \text{Coeficientes} \\ a_n \quad : \text{Coeficiente principal o director} \\ a_0 \quad : \text{Término independiente} \\ \text{Monomio} \quad : \text{Cada uno de los términos } a_i x^i \end{array} \right.$$

Raíces o Ceros de un Polinomio

Definición A.14. Raíz o Cero de un Polinomio

Se dice que $r \in \mathbb{C}$ es una **raíz** o **cero** del polinomio $P(x)$ si: $P(r) = 0$.

Teorema A.2. Teorema Fundamental del Álgebra

- Todo polinomio de grado n tiene exactamente n raíces reales y/o complejas, iguales y/o distintas.
- En caso de que un número complejo $a + bi$ sea raíz de un polinomio, entonces siempre su complejo conjugado $a - bi$ también será raíz del polinomio, de forma que las raíces complejas siempre aparecen a pares $a \pm bi$.

Definición A.15. Multiplicidad de una Raíz

La **multiplicidad** de una raíz de un polinomio de grado n es el número $m \leq n$ de veces que se repite esa raíz en el conjunto de las n raíces del polinomio.

Definición A.16. Factorización de un Polinomio

Factorizar un polinomio consiste en descomponer el polinomio en un *producto* de **polinomios irreducibles**⁶ del tipo:

$$P(x) = a_n (x - a)^n (x - b)^m \dots [(x - \alpha)^2 + \beta^2]^k \dots \quad ; \quad a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad ; \quad n, m, k \in \mathbb{N}$$

donde a_n es el **coeficiente principal** del polinomio, $a, b, \alpha \pm \beta i, \dots$ son las **raíces** reales y/o complejas y n, m, k, \dots sus correspondientes **multiplicidades**.

⁶Ver la [Definición A.17](#), página 306.

Ejercicio A.3. Encontrar el polinomio que tiene por raíces:

$$\begin{cases} -2 & \text{con multiplicidad } 3 \\ 3 & \text{con multiplicidad } 2 \\ 1 \pm 2i & \text{con multiplicidad } 1 \end{cases}$$

El polinomio buscado $P(x)$ tiene 5 raíces reales (una se repite tres veces y otra dos) y una raíz compleja (formada por dos raíces $1 + 2i$ y $1 - 2i$) y por tanto el grado de $P(x)$ debe ser $n = 3 + 2 + 2 = 7$. Lo calculamos a través de su factorización:

$$P(x) = (x + 2)^3(x - 3)^2[(x - 1)^2 + 2^2] = (x^3 + 6x^2 + 12x + 8) \cdot 3(x^2 - 6x + 9) \cdot (x^2 - 2x + 5) =$$

$$x^7 - 2x^6 - 10x^5 + 20x^4 + 5x^3 - 98x^3 + 156x + 360$$

División entre Polinomios

Todo polinomio $P(x)$ se puede dividir entre otro $Q(x)$ de grado menor o igual de la siguiente forma:

Dividendo	$P(x)$	$Q(x)$	Divisor
Resto	$R(x)$	$C(x)$	Cociente

donde $C(x)$ y $R(x)$ son polinomios apropiados, de forma que $P(x)$ se puede **descomponer** como:

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x) \quad \begin{cases} \text{grado } P(x) \geq \text{grado } Q(x) < \text{grado } R(x) \\ \text{grado } P(x) = \text{grado } Q(x) + \text{grado } C(x) \end{cases}$$

Ejercicio A.4. Dividir el polinomio $P(x) = 6x^4 + 4x^2 + x - 4$ entre el polinomio $Q(x) = 2x^2 - 1$ y descomponer $P(x)$ en base al resultado.

$$\begin{array}{r} \cancel{6x^4} + 4x^2 + x - 5 \\ -\cancel{6x^4} + 3x^2 \\ \hline 0 \quad 7x^2 + x - 5 \\ \quad -\cancel{7x^2} + 7/2 \\ \quad \hline 0 \quad x - 3/2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 1 \\ \hline 3x^2 + 7/2 \end{array}$$

Por tanto se tiene:

$$P(x) = Q(x)C(x) + R(x)$$

$$6x^4 + 4x^2 + x - 4 = (2x^2 - 1) \left(3x^2 + \frac{7}{2} \right) + \left(x - \frac{3}{2} \right)$$

Se dice que un polinomio $P(x)$ es **divisible** por otro polinomio $Q(x)$ si el resto de la división $P(x)/Q(x)$ es cero, y por tanto:

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) \quad \text{grado } P(x) \geq \text{grado } Q(x)$$

Ejemplo A.3.

El polinomio $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ es *divisible* por el polinomio $Q(x) = 2x + 1$ ya que:

$$P(x) = (2x + 1)(x^2 + x + 1)$$

Vamos a repasar una forma sencilla de dividir un polinomio $P(x)$ a través de la **Regla de Ruffini** que nos permitirá encontrar sus **raíces** y a través de ellas su **factorización**.

A.5.1. Regla de Ruffini

La **regla de Ruffini**⁷ permite dividir fácilmente polinomios de orden n $P(x)$ entre polinomios de grado uno $Q(x)$ de la forma:

$$\begin{cases} P(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \\ Q(x) = x - r \end{cases} \implies \frac{P(x)}{Q(x)} \implies \boxed{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \mid x - r}$$

donde⁸ $r \in \mathbb{C}$. El procedimiento es el siguiente:

1. Se trazan dos líneas a modo de ejes y se ordenan todos los coeficientes de $P(x)$ de mayor a menor en la parte superior, poniendo ceros en caso de que algún monomio entre a_n y a_0 no aparezca. El valor de r se coloca abajo en la zona izquierda, siendo positivo si $Q(x) = x - r$ y negativo si $Q(x) = x + r$.

$$\begin{array}{r|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ r & & & & & & \end{array}$$

2. El primer coeficiente a_n se baja directamente.

$$\begin{array}{r|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ r & & & & & & \\ \hline & a_n & & & & & \end{array}$$

3. Se multiplica a_n por r y se coloca debajo de a_{n-1} . Posteriormente se suman ambos obteniéndose $b_{n-2} = a_{n-1} + a_n r$.

$$\begin{array}{r|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ r & & +a_n r & & & & \\ \hline & a_n & b_{n-2} & & & & \end{array}$$

4. Se repite el paso 3 obteniéndose: $b_{n-3} = a_{n-2} + b_{n-2} r$, $b_{n-4} = a_{n-3} + b_{n-3} r$, etc. hasta obtener $b = a_0 + b_0 r$.

$$\begin{array}{r|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ r & & +a_n r & +b_{n-2} r & \dots & +b_1 r & +b_0 r \\ \hline & a_n & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_0 & b \end{array}$$

5. Llamando $\boxed{b_{n-1} = a_n}$, al cociente de la división $\boxed{C(x)}$ y al resto $\boxed{R(x) = b}$, se tiene:

$$\begin{array}{r|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ r & & +a_n r & +b_{n-2} r & \dots & +b_1 r & +b_0 r \\ \hline & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_0 & b \end{array} \implies \begin{cases} C(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0 \\ R(x) = b \end{cases}$$

6. Con estos resultados el polinomio $P(x)$ se puede descomponer como:

$$\boxed{P(x) = C(x)(x - r) + R(x)}$$

El uso de la regla de Ruffini para la búsqueda de raíces de un polinomio interesa hacerlo cuando el grado del mismo es mayor o igual que tres. Para grado 1 es trivial encontrar la raíz y para grado dos es preferible usar la fórmula de la ecuación cuadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0 \implies x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

⁷Paolo Ruffini (1765-1822) fue un matemático, profesor y médico italiano.

⁸El caso más sencillo es cuando r es un número real entero.

Ejercicio A.5. Calcular el siguiente cociente de polinomios:

$$3x^3 - 5x^2 + 2x - 7 \quad | \quad x + 2$$

Aplicando la *regla de Ruffini*:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -5 & 2 & -7 \\ -2 & & -6 & 22 & -48 \\ \hline & 3 & -11 & 24 & -55 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C(x) = 3x^2 - 11x + 24 \\ R(x) = -55 \end{cases}$$

Por tanto: $3x^3 - 5x^2 + 2x - 7 = (3x^2 - 11x + 24)(x + 2) - 55$

Teorema A.3. Teorema del Resto

El *resto* R de la división del polinomio $P(x)$ entre $x - \alpha$ coincide con el valor $P(\alpha)$, donde $\alpha \in \mathbb{C}$.

Nota A.3. Demostración: $P(x) = (x - \alpha)C(x) + R$; Si $x = \alpha \Rightarrow P(\alpha) = R$

Teorema A.4. Divisibilidad de un Polinomio

El polinomio $P(x)$ es **divisible** por $(x - \alpha)$ si y solo si $\alpha \in \mathbb{C}$ es una **raíz** de $P(x)$.

Cálculo de las Raíces de un Polinomio

Sea un polinomio $P(x)$ con todos sus coeficientes a_i enteros. Entonces:

1. Si tiene una raíz *entera* r , ésta debe ser un divisor del *término independiente* a_0 del polinomio.
2. Si tiene una raíz *racional* $r = p/q$ (irreducible), entonces el numerador p debe ser un divisor de a_0 y el denominador q debe ser un divisor del *coeficiente principal* a_n .

Descomposición de un Polinomio en Factores

Si un polinomio $P(x)$ de grado n tiene raíces reales r_1, \dots, r_m , entonces se puede **descomponer** de la forma:

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_m)C_k(x)$$

donde $C_k(x)$ es un polinomio de grado $k = n - m$.

En particular si $P(x)$ tiene tantas raíces reales como su grado entonces se puede hacer una **descomposición en factores simples** (factorización⁹) de la forma:

$$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_m)$$

siendo a_n el **coeficiente principal** del polinomio.

⁹Ver la **Definición A.16**, página 302.

Definición A.17. Polinomios Irreducibles

Un polinomio se dice **irreducible** si no puede descomponerse en producto de dos o más polinomios de grado mayor o igual que uno.

- Todos los polinomios de grado cero (constantes) y de grado uno $ax + b$, son irreducibles.
- No existen polinomios irreducibles de grado mayor o igual que tres.
- Los polinomios de grado dos irreducibles son los que no tienen raíces reales.

Ejercicio A.6. En caso de ser posible, descomponer en factores simples el polinomio:

$$P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 10x - 12$$

Al ser un polinomio de grado 3, tiene exactamente 3 raíces (reales y/o complejas, iguales o distintas). Buscando posibles raíces enteras entre los divisores de -12, $\{-12, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 12\}$, encontramos que $P(r) = 0$ para $r = \{-2, 1, 3\}$, por tanto:

$$P(x) = -2(x + 2)(x - 1)(x - 3)$$

Ejercicio A.7. Descomponer en factores simples el siguiente polinomio:

$$P(x) = x^5 - x^4 - 6x^3 - 50x^2 - 100x$$

Como el polinomio no tiene coeficiente independiente una raíz de $P(x)$ es $x = 0$. Sacando factor común:

$$P(x) = x(x^4 - x^3 - 6x^2 - 50x - 100)$$

Buscamos entonces las raíces del polinomio $Q(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 - 50x - 100$ entre los divisores de 100.

$$Q(-2) = (-2)^4 - (-2)^3 - 6 \cdot (-2)^2 - 50 \cdot (-2) - 100 = 16 + 8 - 24 + 100 - 100 = 0$$

Por tanto $x = -2$ es otra raíz del polinomio $P(x)$. Usamos Ruffini para factorizar.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & -6 & -50 & -100 \\ -2 & & -2 & 6 & 0 & 100 \\ \hline & 1 & -3 & 0 & -50 & 0 \end{array} \implies \begin{cases} C(x) = x^3 - 3x^2 - 50 \\ R(x) = 0 \end{cases} \implies P(x) = x(x + 2)(x^3 - 3x^2 - 50)$$

Buscamos entonces las raíces del nuevo polinomio $Q_2(x) = x^3 - 3x^2 - 6x^2 - 50$ entre los divisores de -50.

$$Q_2(5) = (5)^3 - 3 \cdot 5^2 - 50 = 125 - 75 - 50 = 0$$

Por tanto $x = 5$ es otra raíz del polinomio $P(x)$. Usamos nuevamente Ruffini para factorizar.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & -50 \\ 5 & & 5 & 10 & 50 \\ \hline & 1 & 2 & 10 & 0 \end{array} \implies \begin{cases} C(x) = x^2 + 2x + 10 \\ R(x) = 0 \end{cases} \implies P(x) = x(x + 2)(x - 5)(x^2 + 2x + 10)$$

Aplicando la fórmula de la ecuación cuadrática en el polinomio $Q_3(x) = x^2 + 2x + 10$ se tiene:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 40}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{(-1)36}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-1}\sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm i\sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6i}{2} = -1 \pm 3i$$

Que indica que es irreducible, por tanto la factorización del polinomio pedido se puede expresar de estas dos formas:

$$P(x) = x(x + 2)(x - 5)(x^2 + 2x + 10) = x(x + 2)(x - 5)[(x + 1)^2 + 3^2]$$

A.6. Distancia Euclídea

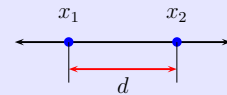
La **distancia euclídea** o **euclidiana** es la considerada como distancia ordinaria y habitualmente se le suele denominar simplemente como *distancia*.

A.6.1. Distancia en \mathbb{R}

Definición A.18. Distancia en \mathbb{R}

La **distancia** entre dos números reales x_1 y x_2 se representa mediante $d(x_1, x_2)$ y se define como:

$$d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1| = d(x_2, x_1)$$



Ejemplo A.4. Distancia euclídea entre dos números.

$$d(2, -5) = |2 - (-5)| = |7| = 7 \quad ; \quad d(-5, 2) = |-5 - 2| = |-7| = 7$$

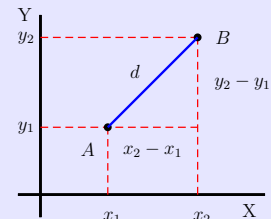
A.6.2. Distancia en \mathbb{R}^2

Definición A.19. Distancia en \mathbb{R}^2

En el plano \mathbb{R}^2 la **distancia entre dos puntos** $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, se define a través del Teorema de Pitágoras.

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d(B, A)$$

Teorema de Pitágoras : $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$



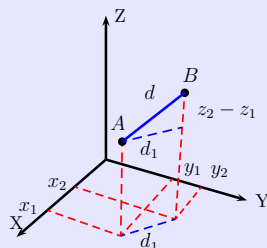
Ejemplo A.5. Distancia euclídea entre dos puntos del plano.

$$d[(1, 2), (-1, -1)] = \sqrt{[1 - (-1)]^2 + [2 - (-1)]^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

A.6.3. Distancia en \mathbb{R}^3

Definición A.20. Distancia en \mathbb{R}^3

En el espacio \mathbb{R}^3 la **distancia entre dos puntos** $A = (x_1, y_1, z_1)$ y $B = (x_2, y_2, z_2)$ se define como:



$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = d(B, A)$$

$$d_1^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d(A, B) = \sqrt{d_1^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

A.7. Trigonometría

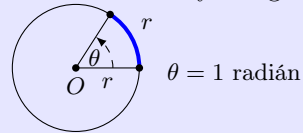
A.7.1. Medida de Ángulos: Radianes

En diversos campos de las matemáticas, los ángulos conviene medirlos en *radianes*.

Definición A.21. Radian

Un *radian* es el ángulo central de una circunferencia que abarca un arco cuya longitud es el radio.

$$1 \text{ radian} = \frac{360}{2\pi} \text{ grados} \approx 57.3^\circ$$



Relación Grados-Radianes

$$2\pi \text{ radianes} = 360^\circ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 360^\circ \rightarrow 2\pi \\ \text{grad} \rightarrow \text{rad} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{rad} = \frac{(\text{grad}) \times \pi}{180}$$

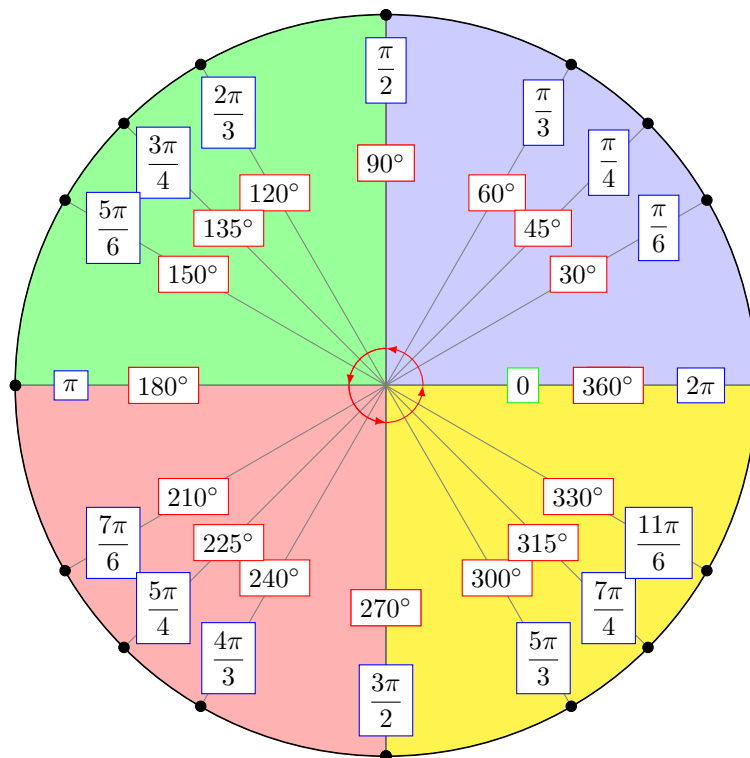


Figura A.1: Relación entre grados sexagesimales (marco rojo) y radianes (marco azul) de los ángulos más usuales en los cuatro cuadrantes.

Ejercicio A.8. Determinar cuántos radianes son 15° y cuántos grados son $\frac{5\pi}{12}$ radianes.

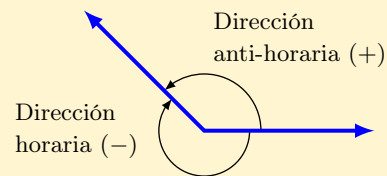
$$\bullet 15^\circ = \frac{15 \times \pi}{180} = \frac{\pi}{12} \text{ rad}$$

$$\bullet \frac{5\pi}{12} \text{ rad} = \frac{5 \times 180}{12} = 75^\circ$$

El signo del ángulo depende del sentido del giro:

- Signo positivo: sentido contrario a las agujas del reloj.
- Signo negativo: sentido igual a las agujas del reloj.

$$-\alpha = +(2\pi - \alpha) \quad ; \quad \alpha \in [0, \pi]$$



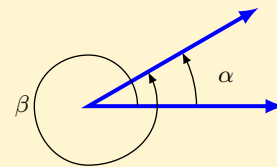
Ejercicio A.9. Determinar en sentido positivo el ángulo $\alpha = -\frac{\pi}{12}$ rad y en sentido negativo el ángulo $\beta = \frac{5\pi}{12}$ rad.

- $\alpha = 2\pi - \frac{\pi}{12} = \frac{23\pi}{12}$ rad

- $\beta = -2\pi + \frac{5\pi}{12} = -\frac{19\pi}{12}$ rad

Los ángulos cuyo valor absoluto es mayor que 2π radianes (360°) indican más de una vuelta en una determinada dirección.

$$\left. \begin{aligned} \beta &= 2k\pi + \alpha = \alpha \\ -\beta &= -2k\pi - \alpha = -\alpha \end{aligned} \right\} \quad \alpha \in [0, 2\pi) \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}^+$$



Ejercicio A.10. Simplificar el ángulo $\alpha = 63\pi$ rad y el ángulo $\beta = -\frac{41\pi}{2}$ rad.

- $\alpha = 63\pi = 2\pi * 31 + \pi = \pi$ rad

- $\beta = -\frac{41\pi}{2} = -20,5\pi = -2\pi * 10 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$ rad

A.7.2. Funciones Trigonómicas

Definición de Seno, Coseno y Tangente

Dado un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con su ángulo recto en C y longitudes a , b y h , como indica la **Figura A.2**.

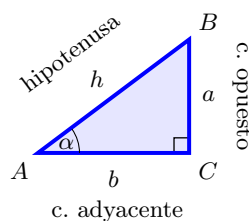


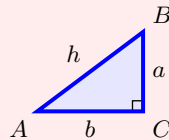
Figura A.2: Triángulo rectángulo de hipotenusa h y catetos a y b .

Se definen la siguientes funciones trigonométricas del ángulo agudo $\alpha = \widehat{BAC}$:

Nombre Función	Abreviatura	Definición
seno α	$\text{sen } \alpha$	$= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{h}$
coseno α	$\text{cos } \alpha$	$= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{h}$
tangente α	$\text{tan } \alpha$	$= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{a}{b}$

Tabla A.1: Funciones Trigonómicas Directas: Seno, Coseno y Tangente

Ejercicio A.11. Determinar los valores del seno, coseno y tangente correspondientes al ángulo \widehat{ABC} del siguiente triángulo rectángulo cuyos valores son: $a = 3$ y $b = 4$.



Calculamos primero el valor de la hipotenusa aplicando el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Por tanto, llamando $\beta = \widehat{ABC}$ y teniendo en cuenta las definiciones de la [Tabla A.1](#) se tiene:

$$\sin \beta = \frac{\text{c. op.}}{\text{hipot.}} = \frac{b}{h} = \frac{4}{5} \quad ; \quad \cos \beta = \frac{\text{c. ady.}}{\text{hipot.}} = \frac{a}{h} = \frac{3}{5} \quad ; \quad \tan \beta = \frac{\text{c. op.}}{\text{c. ady.}} = \frac{b}{a} = \frac{4}{3}$$

Valores Trigonómicos: Seno, Coseno y Tangente

En la [Figura A.3, página 311](#) se muestran en el exterior de la circunferencia unidad, los valores trigonométricos seno (en negro), coseno (en azul) y tangente (en rojo) de algunos de los ángulos más usuales.

Nota A.4. Tener en cuenta que los valores de la tangente de $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$ y $\frac{3\pi}{2} = 270^\circ$ son respectivamente $+\infty$ y $-\infty$.

Ejercicio A.12. Determinar los siguientes valores trigonométricos, donde los ángulos están expresados en radianes.

a) $\text{sen } \frac{5\pi}{3}$

b) $\text{cos } \frac{3\pi}{4}$

c) $\text{tan } \frac{4\pi}{3}$

Utilizando los valores de la [Figura A.3](#), se tiene:

$$\text{a) } \frac{5\pi}{3} \text{ rad} = 300^\circ = -\frac{\pi}{3} \text{ rad} = -60^\circ \quad ; \quad \text{sen } \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{b) } \frac{3\pi}{4} \text{ rad} = 135^\circ = -\frac{5\pi}{4} \text{ rad} = -225^\circ \quad ; \quad \text{cos } \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{c) } \frac{4\pi}{3} \text{ rad} = 240^\circ = -\frac{2\pi}{3} \text{ rad} = -120^\circ \quad ; \quad \text{tan } \frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}$$

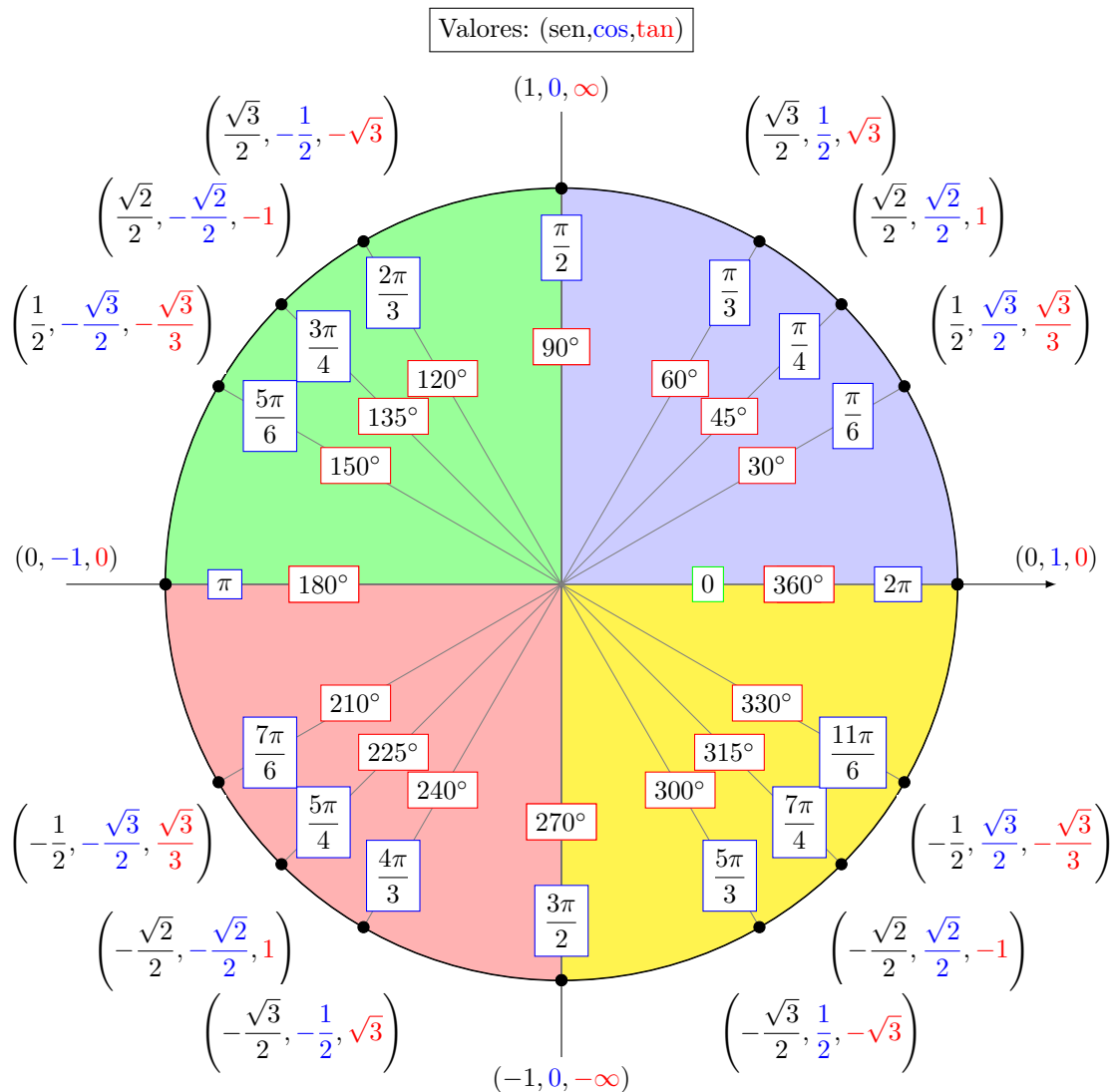


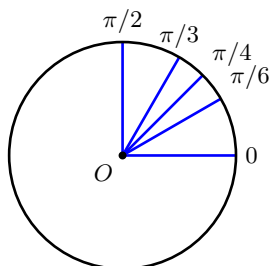
Figura A.3: Valores trigonométricos del seno, coseno y tangente.

Determinación Simplificada

Recordar todos los valores de la **Figura A.3** no es fácil. Resulta más práctico conocer una pequeña lista de ángulos simples del primer cuadrante y mediante ellos determinar otros valores del resto de cuadrantes.

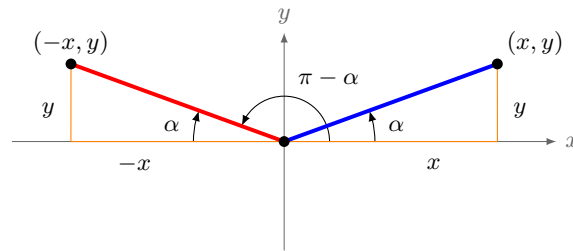
Primer Cuadrante ($[0^\circ, 90^\circ] = [0, \pi/2]$)

Vamos a ver una pequeña tabla de valores del seno, coseno y tangente de un conjunto de valores $\alpha \in [0, \pi/2]$. Con ellos se puede obtener fácilmente el valor de otros ángulos del resto de cuadrantes.



	Primer Cuadrante				
Grados	0°	30°	45°	60°	90°
Radianes	0	π/6	π/4	π/3	π/2
sen	0	1/2	√2/2	√3/2	1
cos	1	√3/2	√2/2	1/2	0
tan	0	1/√3 = √3/3	1	√3	+∞

Segundo Cuadrante ($[90^\circ, 180^\circ] = [\pi/2, \pi]$)



$$\boxed{\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}(\alpha)}$$

;

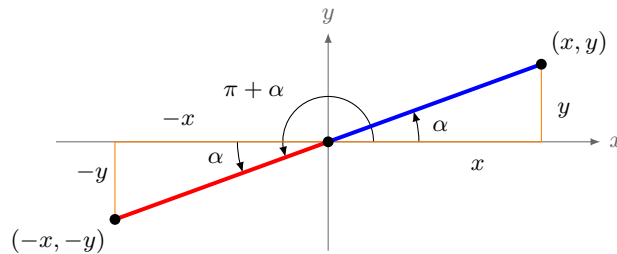
$$\boxed{\operatorname{cos}(\pi - \alpha) = -\operatorname{cos}(\alpha)}$$

;

$$\boxed{\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}(\alpha)}$$

;

Tercer Cuadrante ($[180^\circ, 270^\circ] = [\pi, 3\pi/2]$)



$$\boxed{\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)}$$

;

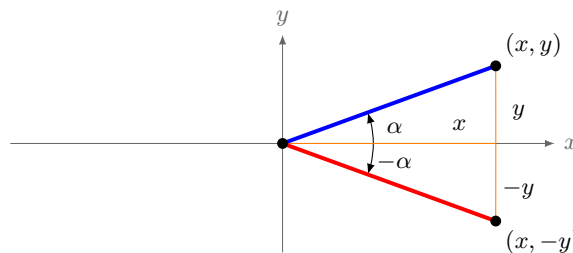
$$\boxed{\operatorname{cos}(\pi + \alpha) = -\operatorname{cos}(\alpha)}$$

;

$$\boxed{\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}(\alpha)}$$

;

Cuarto Cuadrante ($[270^\circ, 360^\circ] = [3\pi/2, 2\pi] = [0, -\pi/2]$)



$$\boxed{\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)}$$

;

$$\boxed{\operatorname{cos}(-\alpha) = \operatorname{cos}(\alpha)}$$

;

$$\boxed{\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}(\alpha)}$$

;

Ejercicio A.13. Determinar los siguientes valores trigonométricos, relacionando el correspondiente ángulo con un valor en el primer cuadrante.

a) $\operatorname{sen} \frac{11\pi}{6}$

b) $\operatorname{cos} \frac{3\pi}{4}$

c) $\tan \frac{4\pi}{3}$

Utilizando las relaciones vistas en esta sección se tiene:

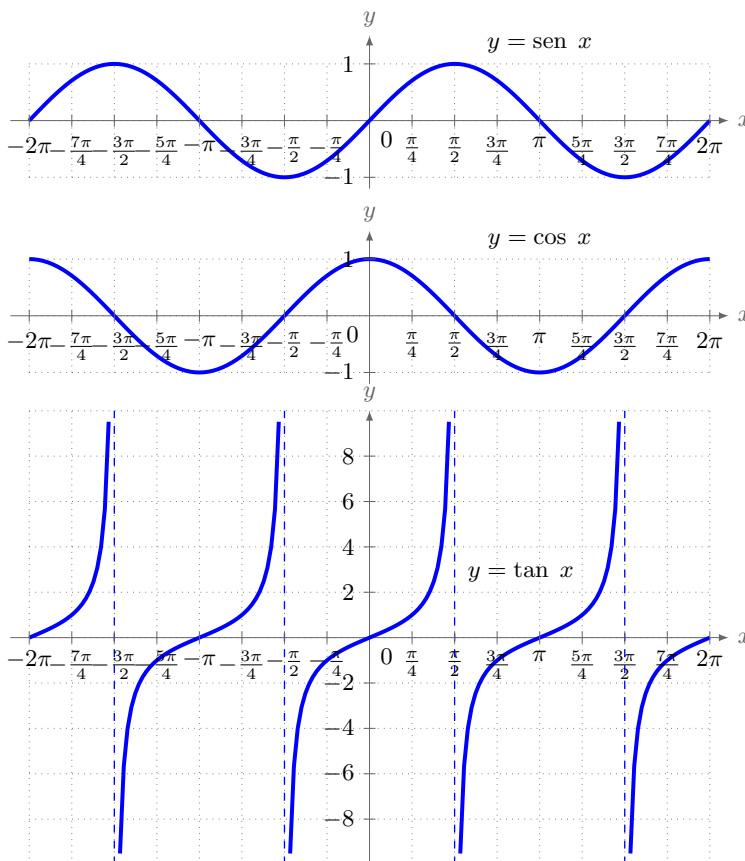
$$\text{a) } \operatorname{sen} \frac{11\pi}{6} = \operatorname{sen} \left(\frac{12\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) = \operatorname{sen} \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right) = \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{6} \right) = -\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} \right) = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

b) $\cos \frac{3\pi}{4} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = -\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\tan \frac{4\pi}{3} = \tan \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = \tan \left(\frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3}$

Utilizando los valores de la [Figura A.3, página 311](#) se pueden verificar los resultados.

Representación Gráfica de las Funciones Trigonométricas Directas



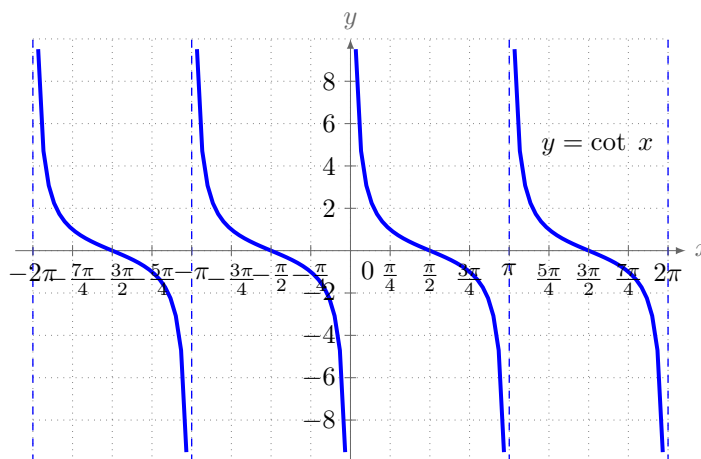
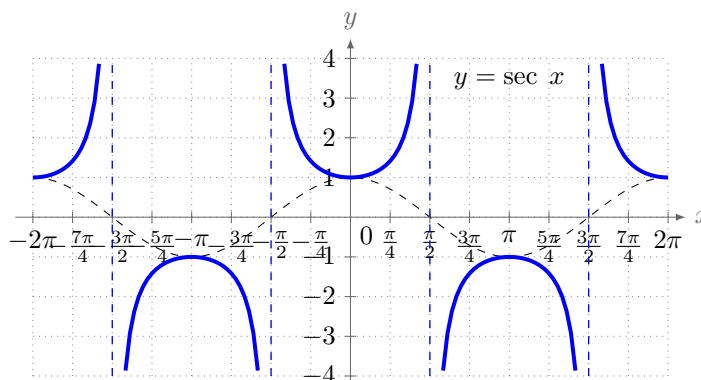
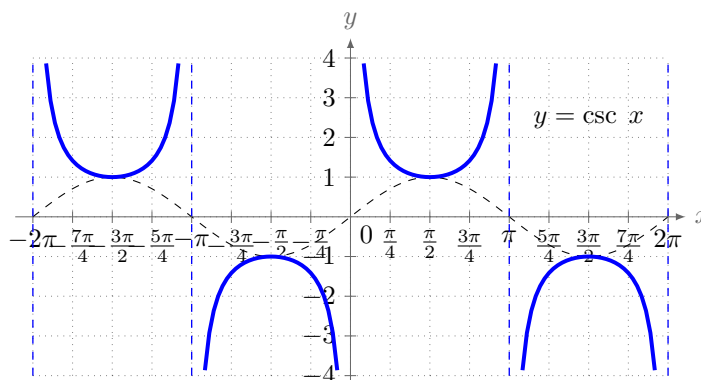
Inversas de las Funciones Trigonométricas

Las inversas de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente definen unas nuevas funciones denominadas cosecante, secante y cotangente respectivamente.

Basándonos en los datos de la [Figura A.2, página 309](#) estas funciones se definen de la siguiente forma:

Nombre Función	Abreviatura	Definición
cosecante α	$\text{csc } \alpha$	$= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{1}{\text{sen } \alpha} = (\text{sen } \alpha)^{-1} = \frac{h}{a}$
secante α	$\text{sec } \alpha$	$= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{1}{\text{cos } \alpha} = (\text{cos } \alpha)^{-1} = \frac{h}{b}$
cotangente α	$\text{cot } \alpha$	$= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{1}{\text{tan } \alpha} = (\text{tan } \alpha)^{-1} = \frac{b}{a}$

Representación Gráfica de las Inversas de las Funciones Trigonómicas

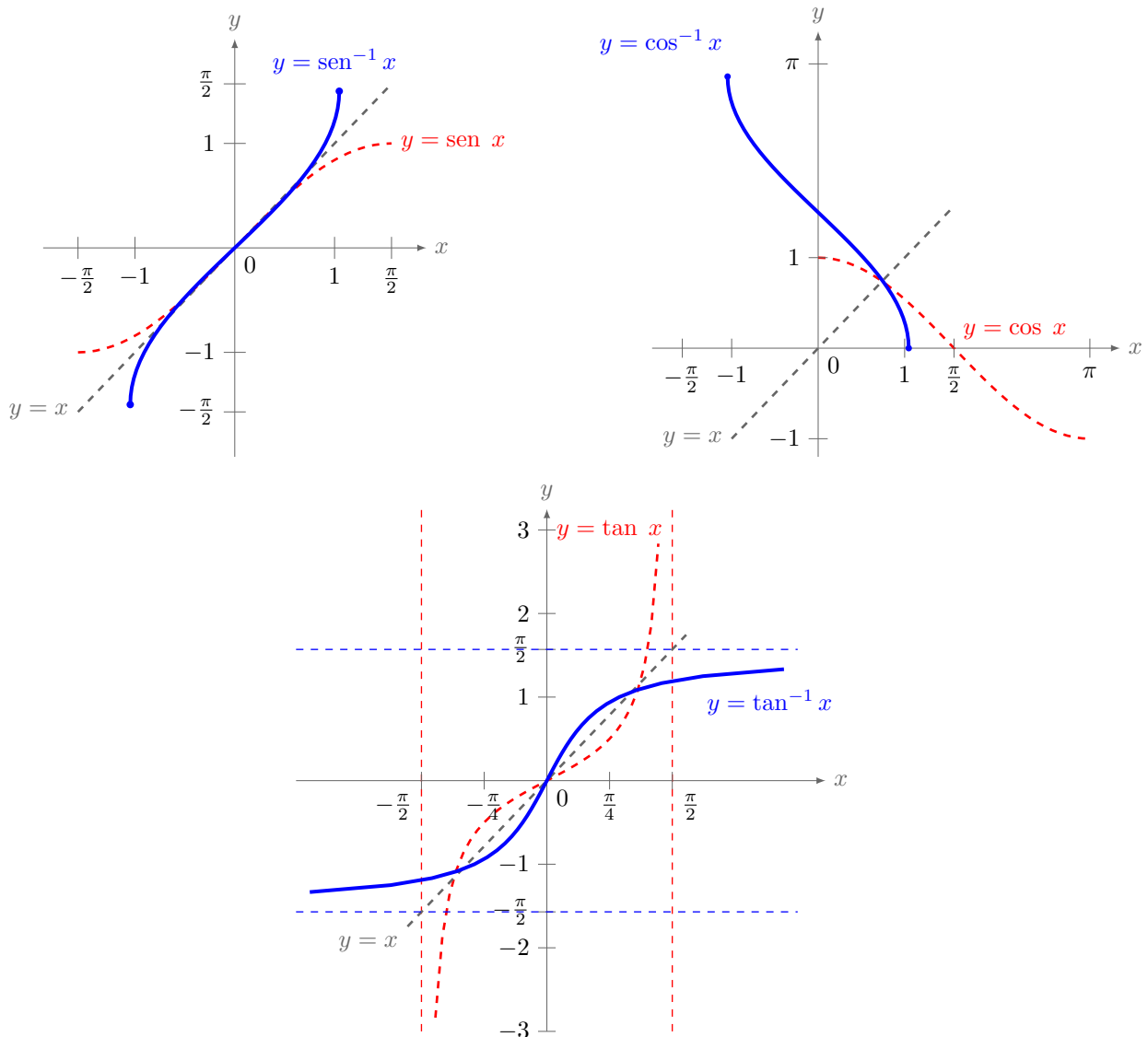


Funciones Inversas de las Funciones Trigonómicas

Las funciones inversas de las funciones trigonométricas de un determinado valor x , corresponden con los ángulos que tienen por seno, coseno o tangente dicho valor x . La siguiente tabla define las funciones inversas más usuales.

Nombre Función	Abreviatura	Consecuencia	Dominio
arcoseno	$\arcsen(x) = \text{sen}^{-1}(x) = \alpha \implies \text{sen } \alpha = x$	$x \in [-1, 1]$	
arcocoseno	$\arccos(x) = \text{cos}^{-1}(x) = \alpha \implies \text{cos } \alpha = x$	$x \in [-1, 1]$	
arcotangente	$\text{arctan}(x) = \text{tan}^{-1}(x) = \alpha \implies \text{tan } \alpha = x$	$x \in \mathbb{R}$	

Representación Gráfica de las Funciones Trigonométricas Inversas



Ejercicio A.14. Determinar los siguientes valores de las funciones trigonométricas inversas:

a) $\arcsen \frac{1}{2}$

b) $\arccos -\frac{1}{2}$

c) $\arctan \sqrt{3}$

Utilizando los valores de la **Figura A.3, página 311**, comprobamos que hay dos posibles soluciones simples en cada caso. La solución apropiada dependerá de consideraciones geométricas adicionales.

$$\text{a) } \sen \alpha = \frac{1}{2} \implies \alpha = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\} \quad ; \quad \text{b) } \cos \alpha = \frac{1}{2} \implies \alpha = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right\}$$

$$\text{c) } \tan \alpha = \sqrt{3} \implies \alpha = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}$$

Relaciones Trigonométricas Básicas

Relación Fundamental y Derivadas de ella

- $a^2 + b^2 = h^2$ (Teorema Pitágoras)
- $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

Ángulo Suma, Resta y Doble

- $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
- $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$
- $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$
- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

Ángulo Mitad

- $\sin \frac{1}{2}\theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$
- $\cos \frac{1}{2}\theta = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$
- $\tan \frac{1}{2}\theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$
- $\tan \frac{1}{2}\theta = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$

Transformaciones de Sumas en Productos

- $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
- $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
- $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$
- $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

Transformaciones de Productos en Sumas

- $\sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$
- $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$
- $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$

Equivalencias Útiles en Integración

- $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$
- $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
- $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$
- $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$
- $\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$

Ejercicio A.15. Determinar los siguientes valores:

a) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{12}$

b) $\operatorname{cos} -\frac{5\pi}{12}$

c) $\operatorname{tan} \frac{7\pi}{12}$

Utilizando las relaciones trigonométricas vistas anteriormente se tiene:

a) Como $\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{6}$, utilizando la fórmula del seno del ángulo mitad¹⁰ se tiene:

$$\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} \theta}{2}} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} \frac{\pi}{12} = \pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos}(\pi/6)}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \sqrt{3}/2}{2}} = \pm \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$$

El signo depende del cuadrante donde se encuentre el ángulo θ . Como $\pi/12 = 15^\circ$ está en el primer cuadrante y ahí el seno siempre es positivo, se tiene:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{12} = + \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

b) Como $\frac{5\pi}{12} = \frac{6\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$, utilizando la fórmula del coseno de una diferencia se tiene:

$$\operatorname{cos}(x - y) = \operatorname{cos} x \operatorname{cos} y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \quad \Rightarrow$$

$$\operatorname{cos}(\pi/2 - \pi/12) = \operatorname{cos}(\pi/2) \operatorname{cos}(\pi/12) + \operatorname{sen}(\pi/2) \operatorname{sen}(\pi/12) = 0 \operatorname{cos}(\pi/12) + 1 \operatorname{sen}(\pi/12) =$$

$$= + \operatorname{sen}(\pi/12) = + \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

donde el valor de $\operatorname{sen}(\pi/12)$ se ha obtenido del apartado a).

c) Como $\frac{7\pi}{12} = \pi - \frac{5\pi}{12}$, utilizando la fórmula de la tangente de una diferencia se tiene:

$$\operatorname{tan}(x - y) = \frac{\operatorname{tan} x - \operatorname{tan} y}{1 + \operatorname{tan} x \operatorname{tan} y} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tan}(\pi - 5\pi/12) = \frac{\operatorname{tan}(\pi) - \operatorname{tan}(5\pi/12)}{1 + \operatorname{tan}(\pi) \operatorname{tan}(5\pi/12)} =$$

$$= \frac{0 - \operatorname{tan}(5\pi/12)}{1 + 0 \operatorname{tan}(5\pi/12)} = -\operatorname{tan}(5\pi/12) = -\frac{\operatorname{sen}(5\pi/12)}{\operatorname{cos}(5\pi/12)} = -\frac{\operatorname{sen}(5\pi/12)}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(5\pi/12)}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{4 - 2 + \sqrt{3}}} = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}}$$

donde el valor de $\operatorname{sen}(5\pi/12)$ se ha obtenido del apartado b).

¹⁰Ver el Apéndice A.7.2, página 316.

A.8. Funciones Hiperbólicas

Definición A.22. Funciones Hiperbólicas

Las **funciones hiperbólicas** están basadas en la función exponencial $f(x) = e^x$ a través de operaciones racionales y presentan unas propiedades análogas a las *funciones trigonométricas*.

Seno hiperbólico

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Coseno hiperbólico

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Tangente hiperbólica

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Inverso de las Funciones Hiperbólicas

Secante hiperbólica

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

Cosecante hiperbólica

$$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x}$$

Cotangente hiperbólica

$$\operatorname{cotanh} x = \frac{1}{\tanh x}$$

Funciones Hiperbólicas Inversas

Arcoseno hiperbólico

$$\operatorname{arsenh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

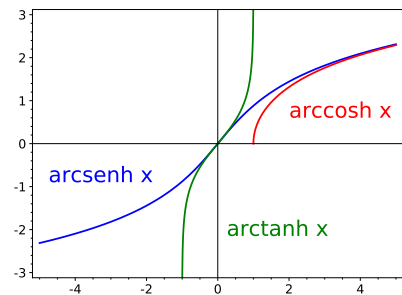
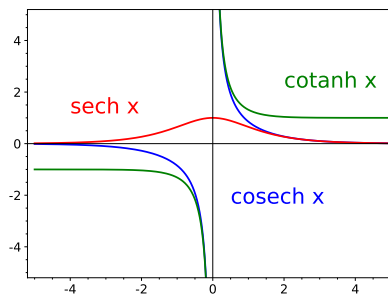
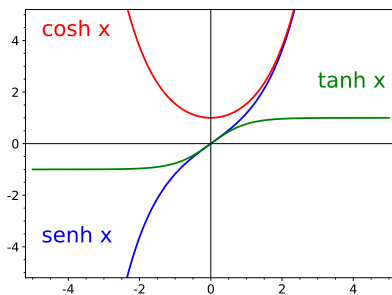
Arccoseno hiperbólico ($x \geq 1$)

$$\operatorname{arcosh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

Arcotangente hiperbólica ($|x| < 1$)

$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

Representación Gráfica de las Funciones Hiperbólicas



Relaciones Hiperbólicas Básicas

- Ecuación Fundamental: $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$
- $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$
- $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \sinh y \cosh x$
- $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$
- $\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$
- $\operatorname{cotanh}^2 x - 1 = \operatorname{cosech}^2 x$
- $\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$
- $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$
- $\tanh(2x) = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$

- $e^x = \cosh x + \sinh x$
- $e^{-x} = \cosh x - \sinh x$
- $\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$
- $\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$

Ejercicio A.16. Demostrar las fórmulas correspondientes a las funciones hiperbólicas inversas.

$$\text{a) } \operatorname{arcsenh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \text{b) } \operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{c) } \operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

a) Viendo la gráfica de la función $\sinh(x)$ vemos que es biyectiva y por tanto existe su función inversa en todo \mathbb{R} .

Buscamos un valor A tal que:

$$\operatorname{arcsenh} x = A \quad ; \quad x = \sinh A = \frac{e^A - e^{-A}}{2} \quad ; \quad 2x = e^A - e^{-A}$$

Llamando $B = e^A$ se tiene:

$$2x = B - \frac{1}{B} \quad ; \quad 2xB = B^2 - 1 \quad ; \quad B^2 - 2xB - 1 = 0 \quad ; \quad B = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

Como:

$$\ln B = A \quad \implies \quad A = \ln(x \pm \sqrt{x^2 + 1})$$

Notar que $\sqrt{x^2 + 1} > x$ y como no existe en \mathbb{R} el logaritmo de números negativos se tiene:

$$\operatorname{arcsenh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

b) Viendo la gráfica de función $\cosh(x)$ vemos que no es inyectiva. Para encontrar su función inversa tomamos solo valores $x \geq 0$, donde este tramo sí es una función inyectiva. Claramente para estos valores $x \geq 0$ el resultado de la función inversa de $\cosh(x)$ tiene que ser mayor o igual que 0.

Siguiendo el mismo proceso del apartado anterior se tiene:

$$\operatorname{arccosh} x = A \quad ; \quad x = \cosh A = \frac{e^A + e^{-A}}{2} \quad ; \quad 2x = e^A + e^{-A}$$

Llamando $B = e^A$ se tiene:

$$2x = B + \frac{1}{B} \quad ; \quad 2xB = B^2 + 1 \quad ; \quad B^2 - 2xB + 1 = 0 \quad ; \quad B = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

Como:

$$\ln B = A \quad \implies \quad A = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$$

Notar que para que exista el valor de la raíz es necesario que $|x| \geq 1$ y en este caso $\sqrt{x^2 - 1} < x$, para que el argumento del logaritmo sea positivo es necesario que $x \geq 1$.

En principio los dos signos delante de la raíz serían válidos, sin embargo para que los valores obtenidos sean mayores o iguales que cero es necesario que el argumento del logaritmo sea mayor que 1 y por tanto solo se toma el signo positivo, de forma que:

$$\operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad ; \quad x \geq 1$$

c) Siguiendo el mismo proceso que en los apartados anteriores se tiene:

$$\operatorname{arctanh} x = A \quad ; \quad x = \tanh A = \frac{e^A - e^{-A}}{e^A + e^{-A}} \quad ; \quad xe^A + xe^{-A} = e^A - e^{-A}$$

Llamando $B = e^A$ se tiene:

$$xB + \frac{x}{B} = B - \frac{1}{B} \quad ; \quad xB^2 + x = B^2 - 1 \quad ; \quad B^2(1-x) = 1+x \quad ; \quad B = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Como:

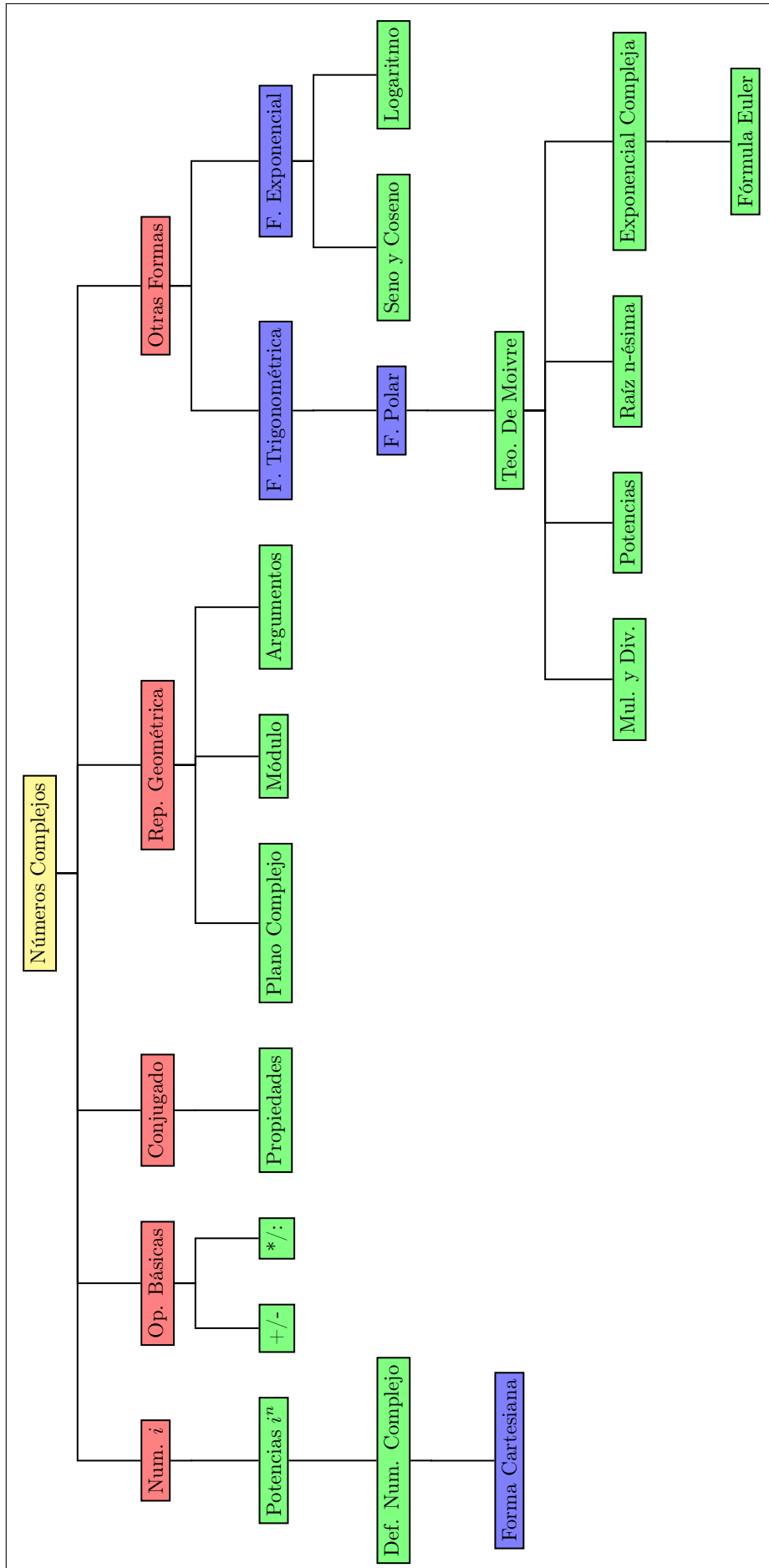
$$\ln B = A \quad \implies \quad \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \implies \quad \operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad ; \quad |x| < 1$$



Números Complejos

Contenido

B.1	Introducción	323
B.2	Formas de los Números Complejos	323
B.2.1	Forma Cartesiana, $z = (a, b)$	323
B.2.2	Forma Binómica, $z = a + bi$	324
B.3	Operaciones Básicas en \mathbb{C}	324
B.3.1	Suma de Números Complejos	324
B.3.2	Producto de Números Complejos	325
B.3.3	Potencias Enteras de i	325
B.3.4	Elemento Inverso, z^{-1}	326
B.3.5	División en \mathbb{C}	326
B.3.6	El Cuerpo de los Números Complejo	327
B.4	Conjugado de un Número Complejo	327
B.4.1	Propiedades del Conjugado	327
B.4.2	Conjugado y División de Números Complejos	327
B.5	Representación Geométrica de \mathbb{C}	328
B.5.1	El Plano Complejo	328
B.5.2	Módulo de un Número Complejo	329
B.5.3	Argumento de un Número Complejo	330
B.6	Otras Formas de los Números Complejos	332
B.7	Forma Trigonométrica y Polar	332
B.7.1	Propiedades y Operaciones Básicas de la Forma Polar	333
B.7.2	Potencia n-ésima en Forma Polar	334
B.8	Forma Exponencial	335
B.8.1	Exponencial Compleja. Fórmula de Euler	335
B.8.2	Fórmula de De Moivre	336
B.8.3	Forma Exponencial	337
B.8.4	Operaciones en Forma Exponencial	337
B.9	Logaritmo Complejo	337
B.10	Potencia Compleja	339
B.11	Raíz n-ésima de un Número Complejo	340
B.11.1	Raíz Cuadrada Generalizada	342
B.12	Seno y Coseno Complejo	343



B.1. Introducción

Se puede pensar en principio que los números complejos solo están relacionados con problemas que de alguna forma no tienen solución y que por tanto su utilidad básica radica en separar lo útil (real) de lo *irreal* (imaginario). Sin embargo, los números complejos son una herramienta matemática muy apropiada y *natural* en el estudio y resolución de una gran cantidad de problemas prácticos que aparecen en la ciencia y la tecnología. En este tema se verán los principios básicos de estos números.

B.2. Formas de los Números Complejos

A los números complejos se les puede tratar como *puntos*, como *vectores*, como *pares ordenados* o como *números*, ya que comparten propiedades con varias áreas.

Vamos a ver primeramente dos *formas* distintas de expresar los números complejos junto con sus propiedades.

B.2.1. Forma Cartesiana, $z = (a, b)$

Definición B.1. Forma Cartesiana

Un *número complejo* z se define como un *par ordenado*¹ de *números reales* (a, b) , donde:

- La primera componente a se denomina **parte real** y se representa por $\text{Re}(z) = a$.
- La segunda componente b se denomina **parte imaginaria** y se representa por $\text{Im}(z) = b$.

Definición de suma y producto de números complejos en la forma cartesiana:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad ; \quad (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc) \quad (\text{B.1})$$

Definición B.2. Cuerpo de los Números Complejos

El conjunto de todos los pares ordenados junto con las propiedades de suma y producto tiene estructura de *cuerpo*².

Definición B.3. Unidad Imaginaria

Se define la **unidad imaginaria** y se representa por³ i al número complejo:

$$i = (0, 1)$$

Teniendo en cuenta la definición de la unidad imaginaria i y el producto de números complejos en forma cartesiana (B.1), se tiene:

$$i^2 = ii = (0, 1)(0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0)$$

La forma cartesiana tiene un interés puramente teórico, siendo más interesantes desde el punto de vista práctico otras formas de los número complejos.

¹Se llama *par ordenado* a un conjunto formado por dos elementos y un criterio de ordenación que establece cuál es primer elemento y cuál el segundo.

²En Matemáticas un *cuerpo* o *campo* es una estructura algebraica en la cual las operaciones de adición y producto cumplen las propiedades: asociativa, conmutativa y distributiva del producto respecto de la adición, además de la existencia de inverso aditivo, de inverso multiplicativo y de un elemento neutro para la adición y otro para la multiplicación, los cuales permiten efectuar además las operaciones de sustracción y división.

³En algunos textos y aplicaciones se acostumbra a utilizar la letra j en lugar de la i para identificar la unidad imaginaria.

B.2.2. Forma Binómica, $z = a + bi$

Definición B.4. Forma Binómica

Se denomina **forma binómica** de un número complejo $z = (a, b)$ al siguiente modo de expresar sus partes real y compleja:

$$z = a + bi \quad \text{donde} \quad \begin{cases} a \in \mathbb{R} & \text{Parte Real : } \operatorname{Re}(z) = a \\ b \in \mathbb{R} & \text{Parte Imaginaria : } \operatorname{Im}(z) = b \end{cases}$$

Definición B.5. Imaginario Puro

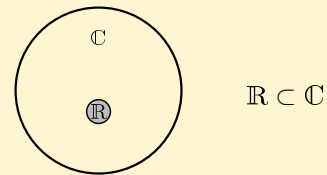
Se denominan **imaginarios puros** a los números complejos $z = bi$ con parte real $a = 0$ y parte imaginaria $b \neq 0$.

Definición B.6. Conjunto de los Números Complejos, \mathbb{C}

El conjunto de todos los *números complejos* se representa por \mathbb{C} y se define como:

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

El conjunto de los números reales \mathbb{R} es un (pequeño) subconjunto de \mathbb{C} y puede definirse como aquellos números complejos que tienen su *parte imaginaria* nula.



B.3. Operaciones Básicas en \mathbb{C}

La forma binómica es la forma preferida para realizar las operaciones básicas entre números complejos.

B.3.1. Suma de Números Complejos

Definición B.7. Suma en \mathbb{C}

Dados dos números complejos $z_1 = a_1 + b_1i$ y $z_2 = a_2 + b_2i$ se define la *suma* (+) de z_1 y z_2 como el número complejo dado por:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

Propiedades de la Suma

- **Conmutativa:** $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
- **Asociativa:** $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
- **Elemento Neutro (0):** $z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1$
- **Elemento Opuesto ($-z$):** $\forall z = a + bi \quad \exists -z = -a - bi : z + (-z) = 0$

⁴Por tanto la resta no se considera una operación distinta, sino como una suma particular.

Definición B.8. Resta o Diferencia en \mathbb{C}

Se definen la *resta* ($-$) de dos *números complejos* $z_1 - z_2$ como la *suma* del primero más el *opuesto* del segundo⁴.

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

B.3.2. Producto de Números Complejos

Definición B.9. Producto en \mathbb{C}

Dados dos números complejos $z_1 = a_1 + b_1i$ y $z_2 = a_2 + b_2i$ se define la *producto*⁵ de z_1 y z_2 como el número complejo dado por:

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = a_1 a_2 + i a_1 b_2 + i b_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Ejercicio B.1. Dados los números complejos $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = 2 - 2i$ calcular su suma, resta y producto.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (1 + i) + (2 - 2i) = 3 - i \\ z_1 - z_2 &= (1 + i) - (2 - 2i) = -1 + 3i \\ z_1 z_2 &= (1 + i)(2 - 2i) = (2 + 2) + (-2 + 2)i = 4 \end{aligned}$$

B.3.3. Potencias Enteras de i

Las primeras potencias enteras no negativas de la unidad imaginaria i tienen los siguientes valores⁶:

$$i^0 = 1 \quad i^1 = i \quad i^2 = -1 \quad i^3 = i^2 i = -i \quad i^4 = i^2 i^2 = 1$$

Las sucesivas potencias se pueden calcular fácilmente mediante la siguiente fórmula:

$$i^n = i^{n\%4} = i^r$$

donde $\%$ es el operador *módulo*, que da como resultado el resto de una división entera⁷. El valor de $r = n\%4$ solo puede ser algún natural del conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$.

La siguiente tabla muestra los posibles casos agrupados en los cuatro posibles resultados.

$r = 0$	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$
$i^0 = 1$	$i = \sqrt{-1}$	$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$	$i^3 = i \cdot i^2 = -i$
$i^4 = i \cdot i^3 = i^0 = 1$	$i^5 = i \cdot i^4 = i$	$i^6 = i \cdot i^5 = i^2 = -1$	$i^7 = i \cdot i^6 = i^3 = -i$
$i^8 = i \cdot i^7 = i^0 = 1$	$i^9 = i \cdot i^8 = i$	$i^{10} = i \cdot i^9 = i^2 = -1$	$i^{11} = i \cdot i^{10} = i^3 = -i$
...

Ejercicio B.2. Calcular i^{2010} .

Como $2010 = 502 * 4 + 2$, por tanto $2010\%4 = 2 \implies i^{2010} = i^2 = -1$

⁵Es habitual representar el *producto* de números (complejos y reales) sin utilizar ningún símbolo entre ellos.

⁶Notar que según se vio en el **Apéndice B.2, página 323** $i^2 = -1$, lo cual implica que $i = \pm\sqrt{-1}$. Esto no puede servir para la definición de i , ya que éste es único.

⁷En este caso una división entre 4.

B.3.4. Elemento Inverso, z^{-1}

Definición B.10. Elemento Inverso en \mathbb{C}

Dado un $z \in \mathbb{C}$, se define (en caso de que exista) el elemento inverso de z y se representa por z^{-1} , al número complejo que verifica: $zz^{-1} = 1$.

$$z = a + bi \quad (a, b \neq 0) \quad \Rightarrow \quad z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i$$

Ejercicio B.3. Demostrar la fórmula de z^{-1} para $z = a + bi$.

Sea $z^{-1} = x + yi$, donde $x, y \in \mathbb{R}$ son los valores a determinar.

$$zz^{-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad (a + bi)(x + yi) = (ax - by) + (ay + bx)i = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases}$$

Este es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (x, y) . Vamos a resolverlo por el método de igualación.

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{1 + by}{a} \\ x = \frac{-ay}{b} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1 + by}{a} = \frac{-ay}{b} ; \quad b + b^2y = -a^2y \Rightarrow y = \frac{-b}{a^2 + b^2} \\ x = \frac{-ay}{b} = \frac{a}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

$$z = a + bi \quad (a, b \neq 0) \quad \Rightarrow \quad z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i$$

B.3.5. División en \mathbb{C}

Definición B.11. División en \mathbb{C}

Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, se define la operación división z_1/z_2 como el producto⁸ $z_1z_2^{-1}$.

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1z_2^{-1} = (a_1 + b_1i) \left(\frac{a_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{-b_2}{a_2^2 + b_2^2}i \right) = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{-a_1b_2 + a_2b_1}{a_2^2 + b_2^2}i$$

Nota B.1. En el Apéndice B.4.2 y Apéndice B.5.2 se verá una forma más práctica de calcular la división entre números complejos sin necesidad de utilizar ninguna fórmula.

Ejercicio B.4. Dados los números complejos $z = 1 + 2i$ y $w = 2 - 2i$, calcular z/w y w/z , comprobando que el producto de ambos es igual a la unidad.

Aplicando la fórmula de la **Definición B.11** se tiene:

$$\begin{cases} \frac{z}{w} = \frac{1(2) + 2(-2)}{2^2 + 2^2} + \frac{-1(-2) + 2(2)}{2^2 + 2^2}i = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}i \\ \frac{w}{z} = \frac{2(1) + (-2)2}{1^2 + 2^2} + \frac{-2(2) + 1(-2)}{1^2 + 2^2}i = \frac{2}{5} - \frac{6}{5}i \end{cases}$$

$$\left(\frac{z}{w}\right)\left(\frac{w}{z}\right) = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i\right)\left(\frac{2}{5} - \frac{6}{5}i\right) = \frac{2}{20} + \frac{6}{20}i - \frac{6}{20}i + \frac{18}{20} = \boxed{1}$$

⁸Por tanto la división no se considera una operación nueva, sino un producto particular.

Propiedades del Producto

- **Conmutativa:** $zw = wz, \forall z, w \in \mathbb{C}$
- **Asociativa:** $(zw)s = z(ws), \forall z, w, s \in \mathbb{C}$
- **Elemento Neutro:** $1 = 1 + 0i : z1 = 1z = z, \forall z \in \mathbb{C}$
- **Elemento Inverso:** $\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}, \exists z^{-1} : zz^{-1} = 1$
- **Distributiva respecto a la suma:** $z(z + s) = zw + zs, \forall z, w, s \in \mathbb{C}$

B.3.6. El Cuerpo de los Números Complejo

Debido a las propiedades de la suma y producto de números complejos, se dice que \mathbb{C} junto con las operaciones suma y producto, $(\mathbb{C}, +, *)$, es un **cuerpo**⁹

B.4. Conjugado de un Número Complejo

Definición B.12. Complejo Conjugado

Dado $z = a + bi$, se define el *conjugado* de z , y se escribe \bar{z} , al número complejo $\bar{z} = a - bi$.

B.4.1. Propiedades del Conjugado

- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \forall z, w \in \mathbb{C}$
- $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w, \forall z, w \in \mathbb{C}$
- $\overline{\bar{z}} = z, \forall z \in \mathbb{C}$
- Si $\bar{z} = z \implies z \in \mathbb{R}$
- Si $\bar{z} = -z \implies z$ es *imaginario puro*

Ejercicio B.5. Dados $z = 5 - 3i$ y $w = -4 + 8i$,

- Calcular: $\bar{z}, \bar{w}, z + w, \bar{z} + \bar{w}$ y $\overline{z + w}$.
- Comprobar que $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$.

$$\text{a) } \bar{z} = \boxed{5 + 3i} ; \bar{w} = \boxed{-4 - 8i} ; z + w = \boxed{1 + 5i} ; \bar{z} + \bar{w} = \boxed{1 + 5i} ; \overline{z + w} = \boxed{1 - 5i}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \overline{z\bar{w}} = \overline{(5 - 3i)(-4 + 8i)} = \overline{-20 + (40 + 12)i + 24} = \overline{4 + 52i} = \boxed{4 - 52i} \\ \bar{z}w = (5 + 3i)(-4 - 8i) = -20 + (-40 - 12)i + 24 = \boxed{4 - 52i} \end{cases}$$

B.4.2. Conjugado y División de Números Complejos

La fórmula para realizar la división de números complejos en la forma binómica¹⁰ se puede simplificar utilizando el concepto del conjugado complejo de la siguiente forma:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} ; w\bar{w} \in \mathbb{R}$$

⁹El conjunto \mathbb{C} no es un *cuerpo ordenado*, ya que no tiene sentido por ejemplo $0 < i$ ó $0 < -i$.

¹⁰Ver la **Definición B.11**, página 326.

Demostración

$$w\bar{w} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - abi + abi + b^2 = a^2 + b^2 \implies w^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i = \frac{a-bi}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{w}}{w\bar{w}}$$

$$\frac{z}{w} = zw^{-1} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}}$$

Ejercicio B.6. Calcular las divisiones del **Ejemplo B.4**, página 326 utilizando la fórmula del **Apéndice B.4.2**, página 327.

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{(1+2i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)} = \frac{-2+6i}{8} = \boxed{-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i}$$

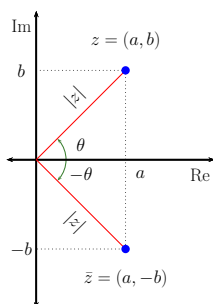
$$\frac{w}{z} = \frac{w\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{(2-2i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{-2-6i}{5} = \boxed{-\frac{2}{5} - \frac{6}{5}i}$$

Debido a su simplicidad, la *forma binómica* es muy utilizada sobre todo en operaciones sencillas. Sin embargo en cálculos más avanzados esta forma no resulta práctica, utilizándose las formas **polar**, **trigonométrica** y/o **exponencial**.

B.5. Representación Geométrica de \mathbb{C}

B.5.1. El Plano Complejo

- Un número complejo $z = a + bi$ se puede representar gráficamente a través de un punto en un sistema de ejes coordenados, donde en el eje X, denominado **eje real** (*Re*), se coloca la parte real $\text{Re}(z) = a$ y en el eje Y, denominado **eje imaginario** (*Im*), la parte imaginaria $\text{Im}(z) = b$.
- El plano formado por este sistema de ejes cartesianos se denomina **plano complejo**.
- Cada uno de los puntos del *plano complejo* se denominan **afijos** y sus coordenadas corresponden con sus partes real y compleja (a, b).
- Se denomina **módulo** de un número complejo a la distancia del segmento que une el origen del *plano complejo* con su afijo.
- Se denomina **argumento** de un número complejo al ángulo que forma el segmento que define su módulo y el *semieje real* positivo.



- *Re* : Eje real
- *Im* : Eje imaginario
- Afijo: punto del plano complejo con coordenadas (a, b)
- Módulo $|z|$: distancia del origen al afijo.
- Argumento θ : ángulo del segmento del módulo.

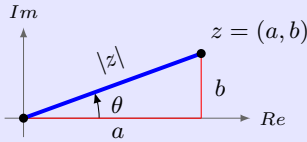
Figura B.1: Representación gráfica en el plano complejo y conceptos asociados.

Nota B.2. El conjunto de los números reales \mathbb{R} se representa a través de la recta real y ésta aparece en el plano complejo representada por el eje horizontal.

B.5.2. Módulo de un Número Complejo

Definición B.13. Módulo

El **módulo** de un número complejo $z = a + bi$ se representa por $|z|$ o por ρ y corresponde con el número real no negativo tal que: $|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$.



$$z = a + bi \quad \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = a = |z| \cos \theta = \rho \cos \theta \\ \operatorname{Im}(z) = b = |z| \operatorname{sen} \theta = \rho \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

Propiedades del Módulo, $|z|$

Sean $z, w \in \mathbb{C}$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- $|z| > 0 \quad \forall z \neq 0 \quad ; \quad |0| = 0$
- $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2 \implies |z| = \sqrt{z\bar{z}}$
- $|-z| = |z|$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $|zw| = |z| |w|$
- $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad ; \quad |z^{-1}| = \frac{1}{|z|} \quad , \quad (z \neq 0)$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Desigualdad Triangular)
- El número complejo $\frac{z}{|z|}$ tiene módulo unidad, ($z \neq 0$).

Ejercicio B.7. Dado $z = 1 + i\sqrt{3}$, calcular su módulo, conjugado e inverso.

$$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \quad ; \quad \bar{z} = 1 - i\sqrt{3} \quad ; \quad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$$

Comprobación del inverso:

$$zz^{-1} = (1 + i\sqrt{3}) \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i \right) = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i + \frac{\sqrt{3}}{4}i + \frac{3}{4} = 1$$

Módulo y División de Números Complejos

Atendiendo a las propiedades del producto¹¹, conjugado¹² y módulo en \mathbb{C} podemos llegar a las siguientes relaciones prácticas:

$$\frac{z}{w} = zw^{-1} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}$$

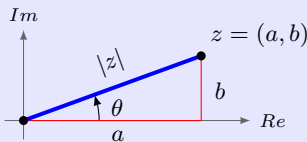
¹¹Ver el Apéndice B.3.2, página 325.

¹²Ver el Apéndice B.4.1, página 327.

B.5.3. Argumento de un Número Complejo

Definición B.14. Argumento

Si las partes real e imaginaria de un número complejo $z = a + bi$ son ambas positivas, el **argumento**¹³ θ de z expresado en radianes verifica la siguiente expresión¹⁴:



$$\tan \theta = \frac{b}{a} \quad ; \quad a, b > 0$$

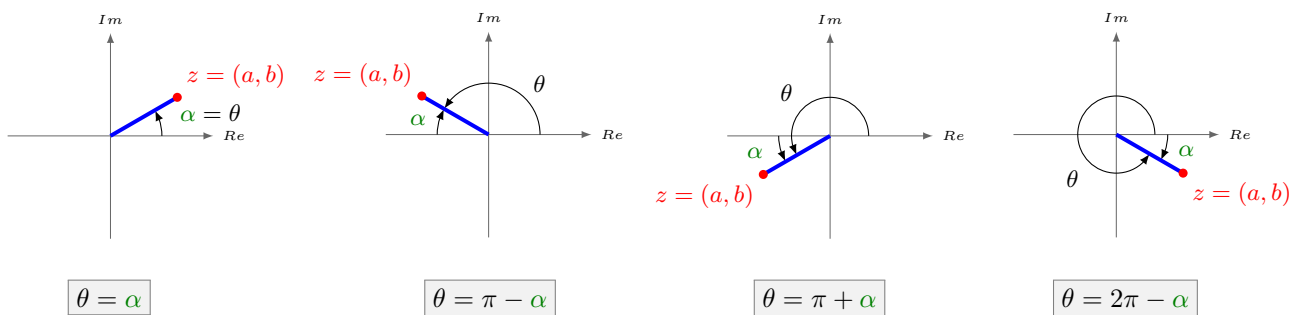
Determinación General del Argumento

La forma general de calcular el argumento θ de cualquier número complejo $z = a + bi$ depende del *cuadrante*¹⁵ del *plano complejo*¹³ en el que esté situado z . Para ello primero determinamos el siguiente ángulo¹⁶:

$$\alpha = \arctan \frac{|b|}{|a|}$$

que corresponde con el ángulo (argumento) que tendría si z estuviera en el primer cuadrante (valores positivos de a y b). En función del cuadrante en que se encuentre z , que dependerá de la posición del punto (a, b) en el plano complejo, así tendremos que modificar el valor de α para determinar el argumento.

En las siguientes figuras se ha representado los cuatro casos posibles en los que se puede encontrar z (primer cuadrante, segundo, tercero o cuarto) y la modificación que hay que hacer para obtener el valor del correspondiente argumento θ .



Notar que en todos estos casos se calcula un valor positivo del argumento $\theta \in [0, 2\pi]$, de los infinitos valores que tiene z .

En los siguientes ejercicios se muestran un par de ejemplos de este cálculo.

¹³Ver el Apéndice B.5.1, página 328

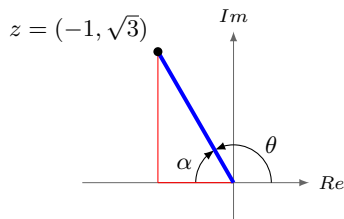
¹⁴Ver el Apéndice A.7.2, página 309.

¹⁵Ver el Apéndice A.7.2, página 311.

¹⁶En los casos prácticos, sin calculadora, es bueno recordar los valores de la tabla dada en el Apéndice A.7.2, página 311, para los valores trigonométricos de ángulos sencillos del primer cuadrante.

Ejercicio B.8. Dado $z = -1 + i\sqrt{3}$, determinar $\arg(z)$.

En este caso el *afijo* de z se encuentra en el segundo cuadrante del plano complejo. Teniendo en cuenta los valores trigonométricos dados en el **Apéndice A.7.2, página 310** se tiene:



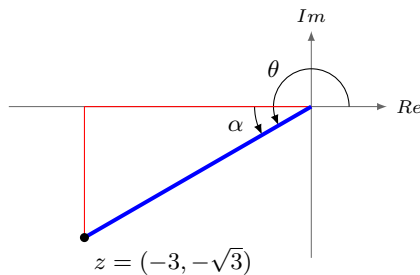
$$\tan \alpha = \frac{|b|}{|a|} = \frac{\sqrt{3}}{1} \implies \alpha = \frac{\pi}{3} \quad (60^\circ)$$

$$\theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad (120^\circ)$$

$$\arg(z) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ejercicio B.9. Dado $z = -3 - i\sqrt{3}$, determinar $\arg(z)$.

En este caso el *afijo* de z se encuentra en el tercer cuadrante del plano complejo. Teniendo en cuenta los valores trigonométricos dados en el **Apéndice A.7.2, página 310** se tiene:



$$\tan \alpha = \frac{|b|}{|a|} = \frac{\sqrt{3}}{3} \implies \alpha = \frac{\pi}{6} \quad (30^\circ)$$

$$\theta = \pi + \alpha = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \quad (210^\circ)$$

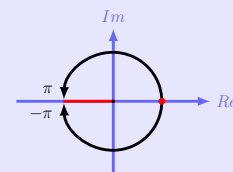
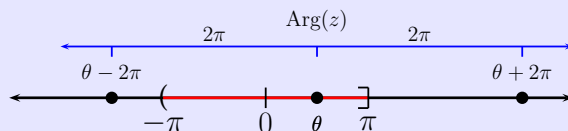
$$\arg(z) = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

Si θ es el argumento de un número complejo z , entonces $\theta + 2k\pi$ para cualquier entero k también lo será¹⁷, por tanto existen infinitos argumentos asociados a todo número complejo z y el conjunto de todos ellos se denota por $\arg(z)$.

$$\arg(z) = \theta + 2k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

Definición B.15. Argumento Principal

Se denomina **argumento principal**¹⁸ de un número complejo z , al único ángulo $\theta \in \arg(z)$ tal que $\theta \in (-\pi, \pi]$. Se representa por $\text{Arg}(z)$.



El argumento principal es un elemento clave en la identificación de un número complejo, y es utilizado de forma habitual para identificar un número complejo y hacer operaciones con él.

¹⁷Tener en cuenta que $2k\pi$ radianes corresponde con k vueltas completas de 360° , en el sentido positivo (contrario a las agujas del reloj) si $k > 0$ y en el sentido negativo (a favor de las agujas del reloj) si $k < 0$.

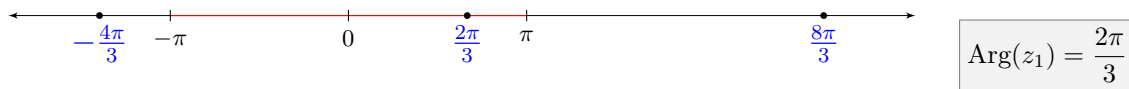
¹⁸A veces, por abuso del lenguaje, se denomina simplemente *argumento* al *argumento principal*.

Ejercicio B.10. Basándose en lo realizado en el [Ejemplo B.8](#) y [Ejemplo B.9](#) determinar el argumento principal de los números complejos $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ y $z_2 = -3 - i\sqrt{3}$.

Teniendo en cuenta que el argumento principal debe cumplir: $-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$, se tiene:

a) $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$

Según el resultado del [Ejemplo B.8, página 331](#) $\implies \arg(z_1) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$



b) $z_2 = -3 - i\sqrt{3}$

Según el resultado del [Ejemplo B.9, página 331](#) $\implies \arg(z_2) = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$



B.6. Otras Formas de los Números Complejos

Además de las formas¹⁹ cartesianas y binómica, existen otras formas de representar los números complejos, que son muy utilizadas en la práctica, en función de la aplicación u operaciones que se realicen. Estas formas son:

- Forma trigonométrica y polar.
- Forma exponencial.

Vamos a ver cada una de ellas, explicando sus aplicaciones, ventajas e inconvenientes.

B.7. Forma Trigonométrica y Polar

Definición B.16. Forma Trigonométrica o Polar

Teniendo en cuenta la geometría de un número complejo en el *plano complejo*²⁰ se puede definir un número complejo a través de su *forma trigonométrica* y/o *polar* como sigue:

$$z = a + bi = \rho \cos \theta + i \rho \operatorname{sen} \theta = \rho (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = \rho \theta$$

$$z = a + bi \quad \begin{cases} \text{Forma Trigonométrica de } z & : \rho (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \\ \text{Forma Polar de } z & : \rho \theta \quad [\text{Nota: } \theta \text{ está en el subíndice}] \end{cases}$$

La razón fundamental de expresar un número complejo z a través de su *forma trigonométrica* y/o *polar* es la sencillez de operaciones: *multiplicación*, *división*, *potenciación* y *raíz n-ésima*, como se verá en el [Apéndice B.7.2](#) y [Apéndice B.11](#). Sin embargo, las operaciones de suma y resta de números complejos es mucho más sencillo de realizar en la forma binómica o cartesiana.

¹⁹Ver el [Apéndice B.2.1, página 323](#).

²⁰Ver el [Apéndice B.5.1, página 328](#).

Ejercicio B.11. Pasar a la forma trigonométrica y polar los siguientes números complejos: $z_1 = 1 - i$; $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$.

a)

$$z_1 = 1 - i \left\{ \begin{array}{l} |z_1| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\ \theta = \arctan \frac{|-1|}{|1|} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\}$$

Como el afijo de z_1 cae en el cuarto cuadrante, el valor del argumento será: $\theta_1 = -\theta = -\frac{\pi}{4}$

$$z_1 = 1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{-\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{-\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

b)

$$z_2 = -1 + i\sqrt{3} \left\{ \begin{array}{l} |z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \theta = \arctan \frac{|\sqrt{3}|}{|-1|} = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \end{array} \right\}$$

En este caso el afijo de z_2 cae en el segundo cuadrante y por tanto su argumento será: $\theta_2 = \pi - \theta = \frac{2\pi}{3}$

$$z_2 = -1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \right) = 2 e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Ejercicio B.12. Dar la forma polar de un número real y de un imaginario puro, tanto positivo como negativo.

- $a + 0i = a_0$; $-a + 0i = a_\pi$
- $0 + bi = b_{\frac{\pi}{2}}$; $0 - bi = b_{-\frac{\pi}{2}}$

B.7.1. Propiedades y Operaciones Básicas de la Forma Polar

- $-z = \rho_{\theta+\pi}$
- $iz = \rho_{\theta+\frac{\pi}{2}}$
- $\bar{z} = \rho_{-\theta}$

Multiplicación y División en Forma Polar

Sean $z = a + bi = \rho_\theta$; $z' = a' + b'i = \rho'_\theta$

- $zz' = (\rho\rho')_{(\theta+\theta')}$
- $\frac{z}{z'} = \left(\frac{\rho}{\rho'} \right)_{(\theta-\theta')}$

Demostración

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b & ; & \quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b & ; & \quad \operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b\end{aligned}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= (\rho_\theta)(\rho_{\theta'}) = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \rho'(\cos \theta' + i \operatorname{sen} \theta') = \\ &= \rho \rho' [\cos \theta \cos \theta' - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta' + (\cos \theta \operatorname{sen} \theta' + \operatorname{sen} \theta \cos \theta') i] = \\ &= \rho \rho' [\cos(\theta + \theta') + i \operatorname{sen}(\theta + \theta')] = (\rho \rho')_{(\theta + \theta')}.\end{aligned}$$

Siguiendo el mismo procedimiento se puede demostrar la fórmula para el cociente de números complejos en forma polar, utilizando en este caso las fórmulas de coseno y seno de diferencia de ángulos.

Ejercicio B.13. Dados los números complejos $z_1 = -1 - i$ y $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$, determinar su producto $z_1 z_2$ y su cociente z_1/z_2 en forma polar.

Primero pasamos los complejos a su forma polar:

$$z_1 = -1 - i \left\{ \begin{array}{l} |z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\ \theta_1 = \pi + \arctan \frac{1}{1} = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \end{array} \right\} z_1 = \sqrt{2} \frac{5\pi}{4}$$

$$z_2 = 1 + i\sqrt{3} \left\{ \begin{array}{l} |z_2| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \\ \theta_2 = \arctan \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3} \end{array} \right\} z_2 = 2 \frac{\pi}{3}$$

- $z_1 z_2 = (\sqrt{2})(2) \left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) = 2\sqrt{2} \frac{19\pi}{12}$

- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{11\pi}{12}$

B.7.2. Potencia n-ésima en Forma Polar**Definición B.17. Potencia n-ésima de un Complejo**

Dado $z = a + bi$ se define la potencia n-ésima de z como:

$$z^n = (a + bi)^n = (a + bi)(a + bi) \dots (a + bi) \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

Teniendo en cuenta la *fórmula de De Moivre*²¹ es fácil comprobar que:

$$z^n = [\rho_\theta]^n = \rho_{n\theta}^n$$

Ejercicio B.14. Demostrar la fórmula de potenciación en forma polar.

$$z^n = [\rho_\theta]^n = [\rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^n = \rho^n (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \rho^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)] = \rho_{n\theta}^n$$

²¹Ver el Teorema B.2, página 336.

Ejercicio B.15. Calcular z^6 siendo $z = 1 + i$, dando el resultado en forma binómica.

A través de la forma tradicional:

$$z^6 = (1 + i)^6 = (1 + i)(1 + i)(1 + i)(1 + i)(1 + i)(1 + i) = \dots$$

En forma polar:

$$z = 1 + i = \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \theta = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} = \sqrt{2} \frac{\pi}{4} \quad ; \quad z^6 = (\sqrt{2})^6 \frac{6\pi}{4} = (2^3) \frac{3\pi}{2}$$

$$z^6 = 8 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \right) = 8(0 - i) = \boxed{-8i}$$

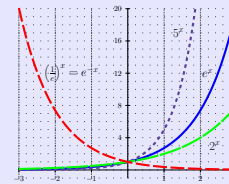
B.8. Forma Exponencial

B.8.1. Exponencial Compleja. Fórmula de Euler

Definición B.18. Función Exponencial en \mathbb{R}

La **función exponencial** es la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = e^x \quad \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ e = \text{número } e = 2,718281828459\dots \end{array} \right.$$



Por claridad en la notación, a veces la función exponencial suele expresarse mediante el término *exp* de la siguiente forma:

$$e^x = \exp(x)$$

Teorema B.1. Exponencial Compleja: Fórmula de Euler

Para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple²²:

$$e^{xi} = \cos x + i \operatorname{sen} x \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

denominada **exponencial compleja** o **fórmula de Euler**²³.

²²La expresión $\cos x + i \operatorname{sen} x$ a veces se denota por $\operatorname{cis} x$.

²³Con este nombre es también conocida la ecuación:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

que corresponde al caso particular $x = \pi$ y que es considerada *la ecuación más bella del mundo*.

Demostración B.1.

La función exponencial puede definirse a través de su *desarrollo de McLaurin*²⁴ de la siguiente forma:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} e^{xi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} x^n = 1 + \frac{i}{1!} x - \frac{1}{2!} x^2 - \frac{i}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{i}{5!} x^5 - \frac{1}{6!} x^6 - \frac{i}{7!} x^7 + \dots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta los desarrollos de McLaurin de las funciones seno y coseno:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

se obtiene la fórmula de Euler:

$$e^{xi} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

Definición B.19. Exponencial de un Complejo

Si $z \in \mathbb{C}$ se tiene que la **exponencial de un número complejo** es:

$$e^z = e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a (\cos b + i \operatorname{sen} b)$$

En la forma polar/trigonométrica:

$$e^z = \exp(\rho\theta) = \exp[\rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)] = \exp(\rho \cos \theta) \exp(i\rho \operatorname{sen} \theta) = e^{\rho \cos \theta} [\cos(\rho \operatorname{sen} \theta) + i \operatorname{sen}(\rho \operatorname{sen} \theta)]$$

B.8.2. Fórmula de De Moivre**Teorema B.2. Fórmula de De Moivre**

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)$$

Demostración B.2.

Aplicando la Fórmula de Euler y teniendo en cuenta que $(a^x)^y = a^{xy}$ tenemos :

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n \stackrel{\text{F. Euler}}{=} (e^{i\theta})^n = e^{n\theta i} \stackrel{\text{F. Euler}}{=} \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)$$

²⁴Correspondiente al *desarrollo de Taylor* en torno al punto $x = 0$. Ver el concepto en algún texto de Cálculo Infinitesimal.

B.8.3. Forma Exponencial

Definición B.20. Forma Exponencial

Un número $z \in \mathbb{C}$ se puede expresar en la *forma exponencial* como sigue:

$$z = a + bi = \rho_{\theta} = \rho (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = \boxed{\rho e^{i\theta}}$$

Las utilidades de la forma exponencial son las mismas que las de la forma polar.

B.8.4. Operaciones en Forma Exponencial

Sean $z = a + bi = \rho_{\theta} = \rho e^{i\theta}$; $z' = a' + b'i = \rho'_{\theta'} = \rho' e^{i\theta'}$

- $zz' = (\rho\rho')e^{(\theta+\theta')i}$
- $\frac{z}{z'} = \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)e^{(\theta-\theta')i}$
- $z^n = \rho^n e^{n\theta i}$

Nota B.3. La demostración es inmediata en base a el [Apéndice B.7.1, página 333](#) y [Apéndice B.7.2, página 334](#).

Ejercicio B.16. Dados los números $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = 1 - i$ calcular $z_1 z_2$, z_1/z_2 y z_1^{100} utilizando la forma exponencial.

$$z = 1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} \quad ; \quad z = 1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$$

$$z_1 z_2 = (\sqrt{2})(\sqrt{2})e^{(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4})i} = 2e^0 = \boxed{2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}e^{(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4})i} = e^{\frac{i\pi}{2}} = \boxed{i}$$

$$z_1^{100} = (\sqrt{2})^{100} e^{\frac{i100\pi}{4}} = 2^{50} e^{i25\pi} = 2^{50} e^{i[12(2\pi)+\pi]} = 2^{50} e^{i\pi} = \boxed{-2^{50}}$$

B.9. Logaritmo Complejo

Teorema B.3. Logaritmo Complejo

Dado un número complejo $z = a + bi = \rho_{\theta} = \rho e^{i\theta}$, con $z \neq 0$, se define el *logaritmo (natural o neperiano) complejo* de la siguiente forma:

$$\log z = \log(\rho_{\theta}) = \log \rho + (\theta + 2k\pi)i \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

Demostración B.3.

Sea $z = \rho_{\theta}$ y queremos calcular $\log z = x + yi$. Despejando de esta última expresión se tiene:

$$z = e^{x+yi} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) = e_y^x \implies \begin{cases} \rho = e^x & \implies x = \log \rho \\ \theta = y + 2k\pi & \implies y = \theta - 2k\pi \end{cases}$$

Notar que $k \in \mathbb{Z}$ y por tanto es indiferente que aparezca como positivo o negativo.

Existen infinitos valores del logaritmo de un $z \neq 0$, que se obtienen a través de la fórmula del **Teorema B.3**, dando valores a k .

El cambio de *base*²⁵ en los logaritmos complejos se hace de forma análoga al de los logaritmos reales:

$$\log_a z = \log_b z \cdot \log_a b \quad (\text{Fórmula de Cambio de Base})$$

Definición B.21. Logaritmo Principal

El **logaritmo principal** de un número complejo z se define como:

$$\log z = \log |z| + i \arg z \quad ; \quad z \neq 0$$

donde $\arg z$ es el *argumento principal*²⁶ de z .

Ejercicio B.17. Calcular el logaritmo principal del número $z = \sqrt{3} + i$.

$$z = \sqrt{3} + i = 2 \frac{\pi}{6}$$

$$\log(z) = \log 2 + \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)i \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

Tenemos que encontrar el valor de k que hace $(\theta + 2k\pi)$, es positiva y lo más pequeña posible.

⋮

$$k = -1 \quad ; \quad (\theta - 2\pi) = -\frac{11\pi}{6}$$

$$k = 0 \quad ; \quad (\theta) = \frac{\pi}{6}$$

$$k = 1 \quad ; \quad (\theta + 2\pi) = \frac{13\pi}{6}$$

$$k = 2 \quad ; \quad (\theta + 4\pi) = \frac{25\pi}{6}$$

⋮

Por tanto, en este caso el logaritmo principal es:

$$\log(\sqrt{3} + i) = \log 2 + \frac{\pi}{6}i$$

Una forma mucho más efectiva de calcular el valor principal de un número complejo es expresar el número complejo en forma exponencial y aplicar las propiedades de las potencias y logaritmos, de la siguiente forma:

$$\log(\sqrt{3} + i) = \log 2e^{i\pi/6} = \log 2 + \log e^{i\pi/6} = \log 2 + \frac{\pi}{6}i \log e = \log 2 + \frac{\pi}{6}i$$

²⁵El logaritmo en *base* b de un número x se define como:

$$\log_b x = y \quad \implies \quad b^y = x$$

²⁶Ver la **Definición B.15**, página 331.

Ejercicio B.18. Comprobar la veracidad del resultado del ejemplo anterior.

Como por definición de logaritmo:

$$\log_b x = y \implies b^y = x$$

En nuestro caso la base es el número e y por tanto:

$$\log(\sqrt{3} + i) = \log 2 + \frac{\pi}{6}i \implies e^{\log 2 + \frac{\pi}{6}i} = \sqrt{3} + i$$

Vamos a comprobarlo:

$$e^{\log 2 + \frac{\pi}{6}i} = e^{\log 2} e^{\frac{\pi}{6}i} = 2e^{\frac{\pi}{6}i} = 2e^{\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \boxed{\sqrt{3} + i}$$

Por tanto, el resultado es correcto.

B.10. Potencia Compleja

Definición B.22. Potencia Compleja

Dados dos números complejos $z \neq 0$ y w , se define la *potencia compleja* z^w de la siguiente forma:

$$z^w = e^{w \log z} \quad ; \quad z \neq 0$$

Ya que existen infinitos valores del logaritmo de un número complejo, también existen infinitos valores asociados a una potencia compleja.

Definición B.23. Valor Principal de una Potencia Compleja

Se denomina *valor principal*²⁷ de una potencia compleja z^w al único valor resultante de tomar el *logaritmo principal*²⁸ de z en la definición de potencia compleja.

Ejercicio B.19. Calcular el valor principal de la siguiente potencia compleja $(1 + i\sqrt{3})^{1-i}$.

Aplicando la definición de potencia de un número complejo, se tiene:

$$\begin{aligned} (1 + i\sqrt{3})^{1-i} &= e^{(1-i)\log(1+i\sqrt{3})} = e^{(1-i)\log(2e^{i\pi/3})} = e^{(1-i)(\log 2 + \log e^{i\pi/3})} = e^{(1-i)(\log 2 + \frac{i\pi}{3} \log e)} = \\ &= e^{(1-i)(\log 2 + \frac{i\pi}{3})} = e^{(\log 2 + \frac{\pi}{3}) + i(\frac{\pi}{3} - \log 2)} = e^{\log 2} e^{\pi/3} e^{i(\pi/3 - \log 2)} = \boxed{2e^{\pi/3} e^{i(\pi/3 - \log 2)}} \end{aligned}$$

Notar que esta forma de calcular el logaritmo, siguiendo las reglas habituales de los números reales, produce un único resultado correspondiente al valor principal del logaritmo.

²⁷También se le denomina *rama principal*.

²⁸Ver la [Definición B.21](#), página 338.

B.11. Raíz n-ésima de un Número Complejo

Definición B.24. Raíz n-ésima de un Número Complejo

Un número complejo no nulo $z = \rho\theta = \rho e^{i\theta}$ tiene n raíces n-ésimas, que pueden ser expresadas a través la siguiente fórmula²⁹:

$$z^{1/n} = \sqrt[n]{z} = r e^{i\phi} \implies \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} > 0 & \text{(siempre existe y es único)} \\ \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} & ; k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{cases} ; n \in \mathbb{N} \quad (\text{B.2})$$

En forma exponencial³⁰:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{\frac{\theta + 2k\pi}{n} i} ; k = 0, 1, \dots, n-1$$

Demostración B.3.

$$\text{Si } \sqrt[n]{\rho\theta} = r_\varphi \implies (r_\varphi)^n = \rho\theta \implies \begin{cases} r^n = \rho \implies r = \sqrt[n]{\rho} \\ n\varphi = \theta + 2k\pi \implies \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases}$$

El **valor principal** de la raíz n-ésima de $z = \rho\theta$ es $\sqrt[n]{z} = (\sqrt[n]{\rho})_{\theta/n}$ donde θ es el argumento principal de z y corresponde con tomar el valor $k = 0$ en la **Ecuación (B.2)**.

Ejercicio B.20. Calcular $\sqrt{1+i}$

Como es una raíz cuadrada tendrá *dos* soluciones z_1 y z_2 .

$$1 + 1i = \sqrt{2} \frac{\pi}{4} \implies \sqrt{1+i} \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2} \\ \theta = \frac{\pi/4 + 2k\pi}{2} \left\{ \begin{array}{ll} k=0 & \theta_1 = \pi/8 \\ k=1 & \theta_2 = 9\pi/8 \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad \boxed{\sqrt{1+i} = \{ \sqrt[4]{2} \frac{\pi}{8}, \sqrt[4]{2} \frac{9\pi}{8} \}}$$

En este caso, las dos raíces solución son números complejos, cuyo valor puede dejarse en forma polar. Notar que ambas soluciones son complejos *opuestos*³¹, ya que $\theta_2 = \theta_1 + \pi$ y por tanto³² $z_1 = -z_2$.

Ejercicio B.21. Calcular $\sqrt[3]{-1}$

En este caso al ser una raíz cúbica tendrá *tres* soluciones z_1, z_2 y z_3 .

$$-1 + 0i = 1_\pi \implies \sqrt[3]{-1} \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt[3]{-1} = 1 \\ \theta = \frac{\pi + 2k\pi}{3} \left\{ \begin{array}{ll} k=0 & \theta_1 = \frac{\pi}{3} \\ k=1 & \theta_2 = \pi \\ k=2 & \theta_3 = \frac{5\pi}{3} \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad \boxed{\sqrt[3]{-1} = \{ 1_{\frac{\pi}{3}}, 1_\pi, 1_{\frac{5\pi}{3}} \}}$$

Notar que 1_π es el número real -1 , por tanto $\sqrt[3]{-1}$ tiene dos soluciones complejas ($1_{\frac{\pi}{3}}, 1_{\frac{5\pi}{3}}$) y una real (-1).

²⁹Notar que θ representa el argumento principal de z , $\theta = \text{Arg}(z)$.

³⁰Ver la **Definición B.20**, página 337.

³¹Ver el **Apéndice B.3.1**, página 324.

³²Ver el **Apéndice B.7.1**, página 333.

Ejercicio B.22. Calcular $\sqrt{(1+i)^2}$

Primeramente calculamos el valor interior de la raíz:

$$1 + i = \sqrt{2}\pi/4 \implies (1 + i)^2 = 2\pi/2$$

$$\sqrt{(1+i)^2} \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi/2 + 2k\pi}{2} \left\{ \begin{array}{ll} k = 0 & \theta_1 = \pi/4 \\ k = 1 & \theta_2 = 5\pi/4 \end{array} \right. \end{array} \right\} \boxed{\sqrt{(1+i)^2} = \{\sqrt{2}\pi/4, \sqrt{2}5\pi/4\}}$$

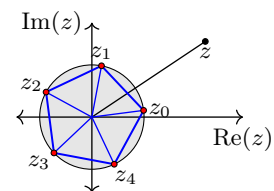
Notar que este resultado es igual al obtenido mediante la operación tradicional con números reales:

$$\sqrt{(1+i)^2} = \pm(1+i) = \begin{cases} 1+i & = \sqrt{2}\pi/4 \\ -1-i & = \sqrt{2}5\pi/4 \end{cases}$$

Geometría de las Raíces n-ésimas

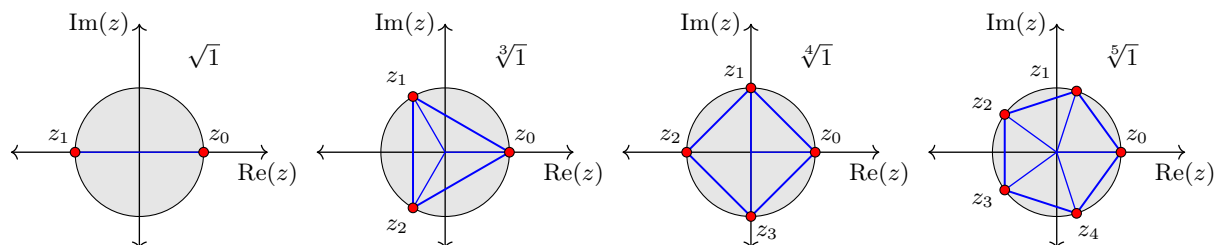
Si $n > 2$, las n raíces n-ésimas de un complejo z forman al representarlas en el plano complejo un *polígono regular*³³ de n lados inscrito en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{|z|}$.

En la siguiente figura se muestra gráficamente las cinco raíces z_k con $k = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ de $\sqrt[5]{z}$, siendo $z = 4 + 3i$. Vemos que las raíces forman en el plano complejo un pentágono inscrito en una circunferencia de radio $\sqrt[5]{|z|}$ y centro el origen.

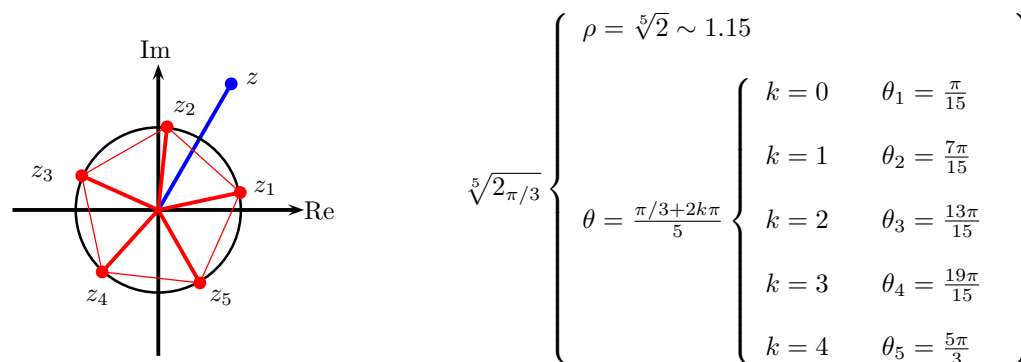


Notar que el argumento de z_0 es $\theta/5$, siendo θ el argumento de z , y el argumento del resto z_k es $(\theta + 2k\pi)/5$.

Ejercicio B.23. Representar gráficamente en el plano complejo las raíces segunda, tercera, cuarta y quinta de la unidad.



Ejercicio B.24. Calcular $\sqrt[5]{z}$ con $z = 2\pi/3$ y representar el resultado en el plano complejo.



³³Si $n = 2$ se obtiene una recta.

B.11.1. Raíz Cuadrada Generalizada

La fórmula general **Ecuación (B.2)** no siempre resulta una forma práctica para determinar las raíces de un número complejo, principalmente cuando los argumentos de las raíces no son ángulos simples conocidos. Vamos a ver una forma más general de determinar las raíces cuadradas de un número complejo.

Sea:

$$\sqrt{a+bi} = x+iy$$

donde $a+bi$ es un número complejo conocido y $x+iy$ los valores desconocidos de su correspondiente raíz cuadrada. Entonces despejando:

$$a+bi = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \implies \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

dando lugar a un sistema no lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuya resolución:

$$y = \frac{b}{2x} \implies x^2 - y^2 = x^2 - \frac{b^2}{4x^2} = a \implies x^4 - b^2 = 4ax^2 \implies x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0$$

da lugar a una ecuación *bicuatrálica*. Para resolverla podemos hacer un cambio de variable:

$$t = x^2 \implies t^2 - 4at - b^2 = 0 \implies t = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2 + 4b^2}}{2} = 2a \pm \sqrt{4a^2 + b^2}$$

De estos dos valores de t , solo el positivo tiene sentido al deshacer el cambio de variable, obteniéndose los valores $x, y \in \mathbb{R}$:

$$x_{\pm} = \pm\sqrt{t} \implies y = \frac{b}{2x_{\pm}} \implies \text{Raíces: } \boxed{x_{\pm} + iy_{\pm}}$$

Ejercicio B.25. Encontrar las soluciones de la siguiente ecuación cuadrática compleja:

$$z^2 + 4iz - 7 + 4i = 0$$

Aplicando la conocida fórmula para la resolución de ecuaciones cuadráticas reales a este caso se tiene³⁴:

$$z = \frac{-4i + \sqrt{-16 - 4(-7 + 4i)}}{2} = \frac{-4i + \sqrt{-16 + 28 - 16i}}{2} = \frac{-4i + \sqrt{12 - 16i}}{2} = -2i + \sqrt{3 - 4i}$$

Notar que en este caso al pasar el número complejo $3 - 4i$ a su forma polar, el argumento no es uno de los valores conocidos sencillos. Por tanto vamos a calcular la raíz cuadrada a través de la forma generalizada.

$$\sqrt{3 - 4i} = x + iy \implies 3 - 4i = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \implies \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \implies y = \frac{-2}{x} \end{cases}$$

$$x^2 - \frac{4}{x^2} = 3 \quad ; \quad x^4 - 4 = 3x^2 \quad ; \quad x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \quad \xrightarrow{\text{C.V.}} \quad t = x^2$$

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \implies t = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \{-1, 4\}$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$x = \sqrt{t} \implies \begin{cases} x = \sqrt{-1} \rightarrow \text{Sin sentido ya que } x \in \mathbb{R} \\ x = \sqrt{4} = \pm 2 \rightarrow y = \frac{-2}{x} = \{-1, 1\} \end{cases}$$

Por tanto, los valores de la raíz cuadrada buscados son:

$$\sqrt{3 - 4i} = \{2 - i, -2 + i\}$$

Por tanto las soluciones buscadas de la ecuación cuadrática compleja original son:

$$z = -2i + \sqrt{3 - 4i} = \begin{cases} z_1 = -2i + 2 - i = 2 - 3i \\ z_2 = -2i - 2 + i = -2 - i \end{cases}$$

B.12. Seno y Coseno Complejo

Teniendo en cuenta la *fórmula de Euler*³⁵, las funciones trigonométricas *seno* y *coseno* de un número real θ se pueden definir como:

$$\cos \theta = \frac{e^{\theta i} + e^{-\theta i}}{2} = \frac{\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta + \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta}{2} = \frac{2 \cos \theta}{2} = \cos \theta$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}{2i} = \frac{\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta - \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta}{2i} = \frac{2i \operatorname{sen} \theta}{2i} = \operatorname{sen} \theta$$

Si siguiendo estas fórmulas se pueden definir las funciones trigonométricas *seno* y *coseno* en el campo de los números complejos de la siguiente forma.

Definición B.25. Seno y Coseno Complejo

Las funciones trigonométricas *seno*, *coseno* y *tangente* se definen en el plano complejo de la siguiente forma:

$$\left. \begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} \\ \operatorname{sen} z &= \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} \end{aligned} \right\} \tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{i(e^{zi} + e^{-zi})} = -i \left(\frac{e^{zi} - e^{-zi}}{e^{zi} + e^{-zi}} \right)$$

Demostración B.3.

Comprobamos las fórmulas del coseno y seno complejo usando la fórmula de Euler y teniendo en cuenta que $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ y que $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)$.

$$\frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} = \frac{\cos(z) + i \operatorname{sen}(z) + \cos(-z) + i \operatorname{sen}(-z)}{2} = \frac{\cos(z) + i \operatorname{sen}(z) + \cos(z) - i \operatorname{sen}(z)}{2} = \frac{2 \cos(z)}{2} = \cos(z)$$

$$\frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} = \frac{\cos(z) + i \operatorname{sen}(z) - \cos(-z) - i \operatorname{sen}(-z)}{2i} = \frac{\cos(z) + i \operatorname{sen}(z) - \cos(z) + i \operatorname{sen}(z)}{2i} = \frac{2i \operatorname{sen}(z)}{2i} = \operatorname{sen}(z)$$

Ejercicio B.26. Expresar en forma binómica el valor de $\cos(1+i)$.

Aplicando la definición del coseno de un número complejo se tiene:

$$\begin{aligned} \cos(1+i) &= \frac{e^{(1+i)i} + e^{-(1+i)i}}{2} = \frac{e^{-1+i} + e^{1-i}}{2} = \frac{e^{-1}e^i + ee^{-i}}{2} = \frac{e^{-1}(\cos 1 + i \operatorname{sen} 1) + e[\cos(-1) + i \operatorname{sen}(-1)]}{2} \\ &= \frac{e^{-1}e^i + ee^{-i}}{2} = \frac{e^{-1}(\cos 1 + i \operatorname{sen} 1) + e(\cos 1 - i \operatorname{sen} 1)}{2} = \frac{e + e^{-1}}{2} \cos 1 + i \frac{e^{-1} - e}{2} \operatorname{sen} 1 \end{aligned}$$

³⁴Notar que en la fórmula no aparece el doble signo \pm delante de la raíz, ya que en este caso se obtendrán dos soluciones complejas cualesquiera, no necesariamente la misma con signos opuestos.

³⁵Ver el Teorema B.1, página 335.

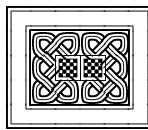
Nota B.4. Basadas en las fórmulas anteriores, se definen las *Funciones Hiperbólicas*: seno hiperbólico, coseno hiperbólico y tangente hiperbólica, de un número $x \in \mathbb{R}$, de la siguiente forma:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad ; \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad ; \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Verificándose, entre otras, la siguiente propiedad básica: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

En base a ellas se definen también las siguientes funciones hiperbólicas complejas para cualquier número $z \in \mathbb{C}$:

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad ; \quad \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad ; \quad \tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$



Software Matemático

Contenido

C.0	Software Matemático	346
C.1	Introducción a <i>GeoGebra</i>	346
C.1.1	Formas de Ejecutar el Programa	347
C.1.2	Calculadora Gráfica	348
C.1.3	Calculadora CAS	355

C.0. Software Matemático

Existe un gran número de programas matemáticos¹ que permiten resolver o ayudar a resolver e ilustrar problemas matemáticos de muy diferentes tipos. Estos programas cubren las necesidades de multitud de campos dentro de las ciencias e ingenierías. Algunos de ellos son de tipo *software libre*² o gratuitos (*freeware*), mientras que otros son comerciales. A grandes rasgos todos los programas matemáticos los podemos clasificar en tres tipos³:

- **Numéricos**: se utilizan cuando se necesita obtener resultados numéricos de nuestros problemas. Las operaciones son realizadas con la precisión de la máquina, de forma que los resultados obtenidos son generalmente aproximados⁴. Generalmente permiten la creación de programas, en lenguajes de programación sencillos propios del programa y suelen ser útiles para el tratamiento de grandes cantidades de datos mediante la utilización de vectores y matrices. Programas característicos de este tipo son **Matlab**⁵ (comercial) y **Octave**⁶ (software libre).
- **Simbólicos**⁷: Permite el tratamiento tanto de números como de símbolos, expresiones y fórmulas de manera exacta, al contrario que los *programas numéricos*⁸. Entre las operaciones típicas que permiten se incluye la diferenciación, integración y el cálculo de límites de funciones de una y varias variables, resolución de ecuaciones de diferentes tipos, operaciones vectoriales y matriciales, etc. Dentro de este tipo los más conocidos son **Mathematica**⁹ (comercial), **Maple**¹⁰ (comercial) y **SageMath**¹¹ (software libre).
- **Gráficos**: Permiten la visualización y el tratamiento de entes geométricos definidos mediante fórmulas matemáticas. Uno de los más conocidos de este tipo de programas es **GeoGebra**¹² (freeware).

En la [Figura C.1, página 347](#) se muestra el funcionamiento típico de estos programas.

C.1. Introducción a GeoGebra

Originalmente en sus inicios el programa *GeoGebra*¹³ era un programa interactivo para el uso exclusivo de problemas geométricos en 2D, pero a lo largo de estos años ha ido evolucionando y aumentando sus funcionalidades, siendo en la actualidad:

- Calculadora gráfica en 2D
- Representación gráfica en 3D
- Cálculo Simbólico (CAS)
- Geometría
- Probabilidad
- Hoja de Cálculo

En este capítulo vamos a ver el uso de GeoGebra en la asignatura de Cálculo I donde se utilizarán sus funcionalidades de representación gráfica en 2D y cálculo simbólico.

¹Ver por ejemplo https://es.wikipedia.org/wiki/Software_matem%C3%A1tico.

²El *software libre* o de *dominio público* es un software que no tiene un propietario (pero sí autor/es), y no existen derechos de autor, licencias o restricciones de distribución. Por este concepto, el software de *dominio público* se diferencia de un *freeware*, el cual que aun siendo gratuito conserva los derechos de autor. El *software de dominio público* puede ser libremente utilizado, copiado o alterado, ya que legalmente nadie es dueño de los derechos de restringir su uso.

³La mayoría de los programas cubren varios de estos tipos en mayor o menor medida y se encuentran disponibles para distintas plataformas (Windows, Linux, Mac OS, Android, etc.).

⁴Para un procesador de 32 bits se obtienen 19 dígitos decimales en precisión doble, mientras que para los procesadores de 64 bits se obtienen 38 dígitos.

⁵<https://es.mathworks.com/products/matlab.html>.

⁶<https://www.gnu.org/software/octave/>.

⁷En terminología inglesa se los denomina SAC cuya traducción es *Sistema de Álgebra Computacional* (SAC en español).

⁸Naturalmente esto tiene un coste que afecta a la velocidad de los cálculos, de forma que los programas simbólicos suelen ser mucho más lentos que los programas numéricos para la realización de una misma tarea.

⁹<https://www.wolfram.com/mathematica/>.

¹⁰<https://www.maplesoft.com/products/maple/>.

¹¹<http://www.sagemath.org/>.

¹²<http://https://www.geogebra.org/>.

¹³El proyecto fue creado por Markus Hohenwarter en 2001 como parte de su tesis doctoral.

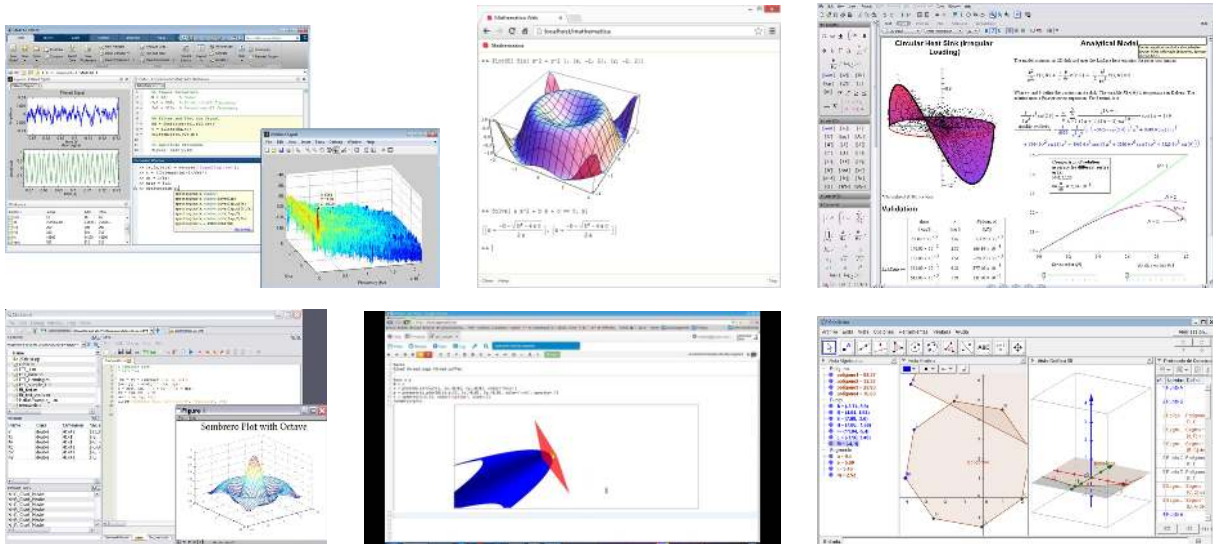


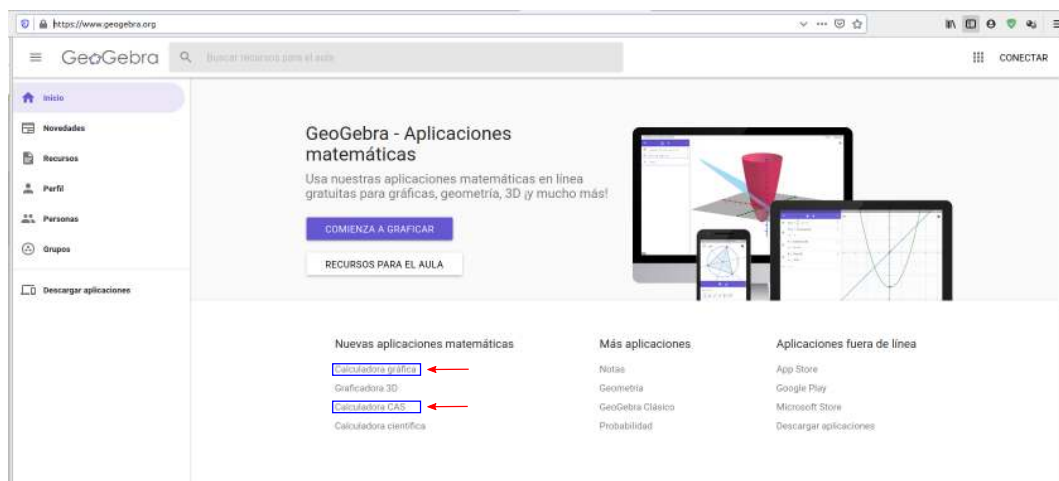
Figura C.1: Entornos de programas matemáticos. *Comerciales*: **Matlab** (superior izquierda), **Mathematica** (superior centro) y **Maple** (superior derecha). *Software libre y freeware*: **Octave** (inferior izquierda), **SageMath** (inferior centro) y **GeoGebra** (inferior derecha).

C.1.1. Formas de Ejecutar el Programa

En la actualidad¹⁴ el programa se puede ejecutar libremente de dos formas:

- Descargando la versión *Classic* del programa para la plataforma adecuada¹⁵, instalándola y ejecutando la aplicación de forma local desde nuestro dispositivo.
- Ejecutando la aplicación de forma *online* desde la web: <https://www.geogebra.org>.

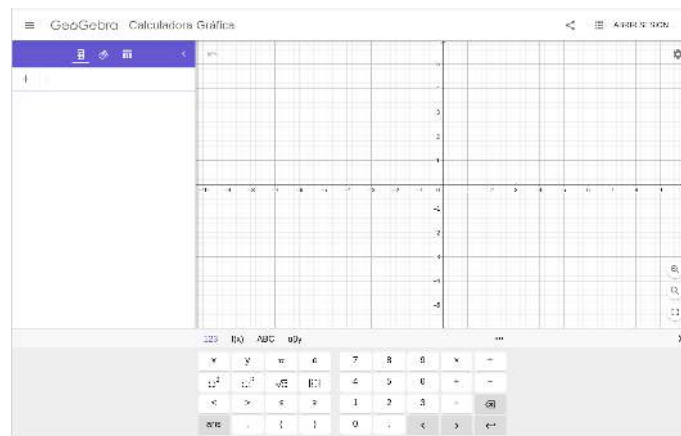
Aquí vamos a ver la ejecución del programa de forma *online* al resultar más sencilla y práctica desde cualquier plataforma. En la siguiente figura se muestra la página principal desde donde se puede acceder a las distintas opciones del programa entre las que se encuentran las dos que utilizaremos: *Calculadora Gráfica* y la *Calculadora CAS* (marcadas en amarillo).



¹⁴Versión 6 del año 2020.

¹⁵Hay versiones disponibles para Linux, Windows, Mac, Ipad, Android, Chrome y Rasperry a través de la siguiente web: https://wiki.geogebra.org/en/Reference:GeoGebra_Installation#GeoGebra_Classic_6.

C.1.2. Calculadora Gráfica



La ventana de esta aplicación muestra en la parte izquierda un panel de entradas cuyos resultados se muestran en la parte derecha sobre unos ejes coordenados.

En el panel de entrada se puede escribir las funciones a representar directamente con el teclado del dispositivo o bien utilizando el ratón y el teclado que aparece en la parte inferior de la ventana. Algunas características de su uso son las siguientes:

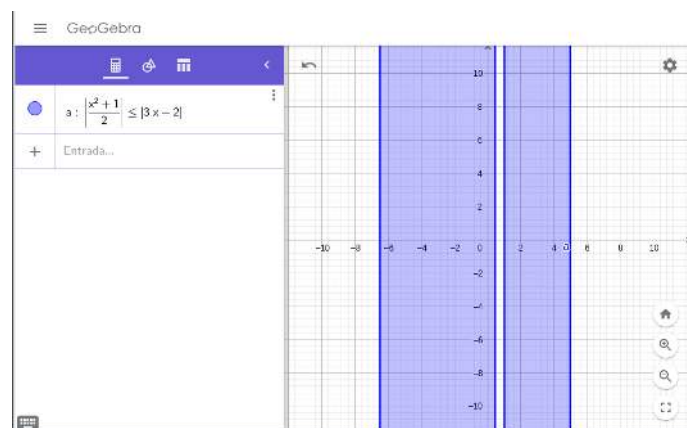
- Las **inecuaciones**¹⁶ de diferentes tipos¹⁷ se pueden resolver fácilmente de forma gráfica¹⁸, mostrándose en zonas sombreadas¹⁹ y con líneas continuas²⁰ la solución de las mismas.

Vamos a ver algunos ejemplos.

Ejemplo C.1. Inecuaciones con Valor Absoluto

$$\text{abs}((x^2+1)/2) \leq \text{abs}(3x-2)$$

$$\left| \frac{x^2 + 1}{2} \right| \leq |3x - 2|$$



La zona sombreada en azul (el color se puede configurar en los ajustes) indican los puntos que pertenecen a la solución. Las líneas continuas azules indican los puntos frontera que también pertenecen a la solución.

Como en este caso es una inecuación con una única variable x , solo hay que tener en cuenta los puntos del eje X que están dentro de la zona sombreada²¹. Además las líneas continuas azules indican que

¹⁶Ver la Sección 1.3, página 36.

¹⁷Lineales, polinómicas, con y sin valores absolutos y con una o dos variables.

¹⁸En la Sección C.1.3, página 360 se muestra cómo encontrar soluciones simbólicas de inecuaciones.

¹⁹En caso de no mostrarse ninguna zona sombreada, haciendo un *zoom* apropiado, significará que la inecuación no tiene solución.

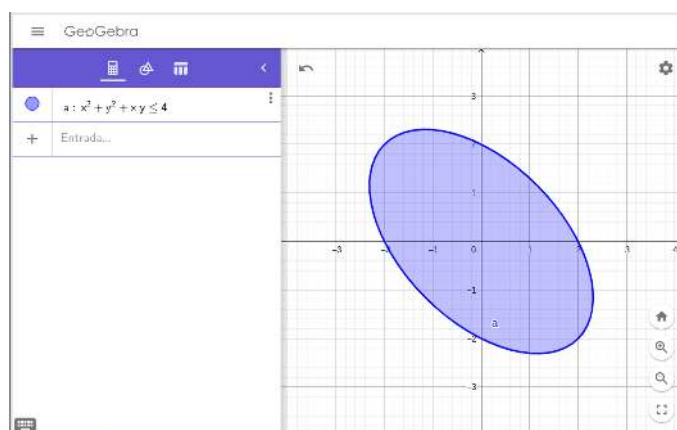
²⁰Las líneas discontinuas en las fronteras indican que esos puntos no pertenecen a la solución.

esos *puntos frontera*²² también pertenecen a la solución. Para determinar el valor aproximado de los extremos se puede hacer zoom con el ratón sobre la zona de interés. Para determinar de forma precisa los intervalos solución del problema se puede utilizar el comando **Resolver**²³.

Ejemplo C.2. Inecuaciones Cuadráticas de dos Variables

$$x^2 + y^2 + xy \leq 4$$

$$x^2 + y^2 + xy \leq 4$$

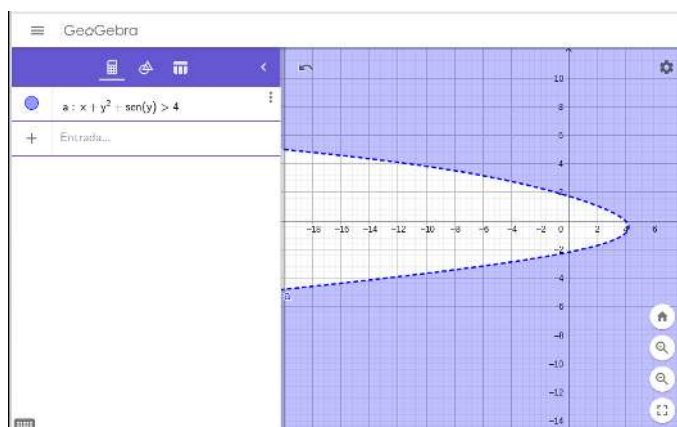


La ecuación $x^2 + y^2 + xy = 4$ corresponde con una elipse centrada en el origen y girada, correspondiendo la solución de la inecuación a su interior y frontera, como muestra la representación gráfica mostrada por *GeoGebra*.

Ejemplo C.3. Inecuaciones No Lineales de Dos Variables

$$x + y^2 + \sin(y) > 4$$

$$x + y^2 + \sin(y) > 4$$



En este caso la ecuación $x + y^2 + \sin(y) = 4$ define una curva de forma implícita que está representada en línea discontinua azul. Como la desigualdad es $>$ la solución de la inecuación es el exterior de la curva (región azul).

²¹Por defecto *GeoGebra* considera que es una inecuación en dos variables x e y , mostrando superficies de solución. Como en esta inecuación no aparece la variable y , todos los valores del eje Y son válidos y de ahí que aparezcan franjas verticales como solución.

²²Ver la [Sección 1.2.1, página 31](#).

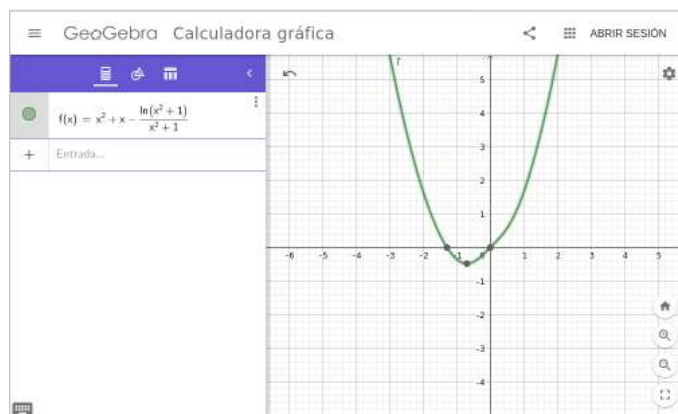
²³Ver la [Sección C.1.3, página 360](#).

- Las **funciones** se pueden escribir de forma *natural* como se hace al escribir en un papel sin necesidad de poner el signo de multiplicar²⁴. Si no se da nombre a las funciones, *GeoGebra* las va nombrando de forma automática empezando por $f(x)$ la primera, $g(x)$ la segunda y así sucesivamente. Por defecto la variable independiente es x pero puede ser cualquier otra. Además los nombres de las funciones pueden darse en español, como por ejemplo la función trigonométrica seno como $\text{sen}(x)$.

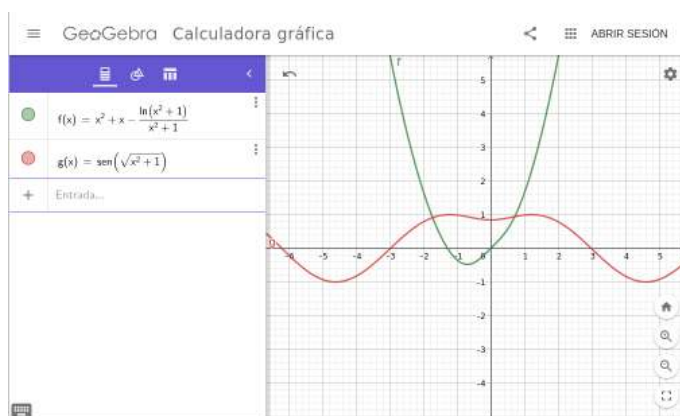
Ejemplo C.4. Función Real de Variable Real

$$x^2 + x - \ln(x^2 + 1) / (x^2 + 1)$$

$$f(x) = x^2 + x - \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1}$$



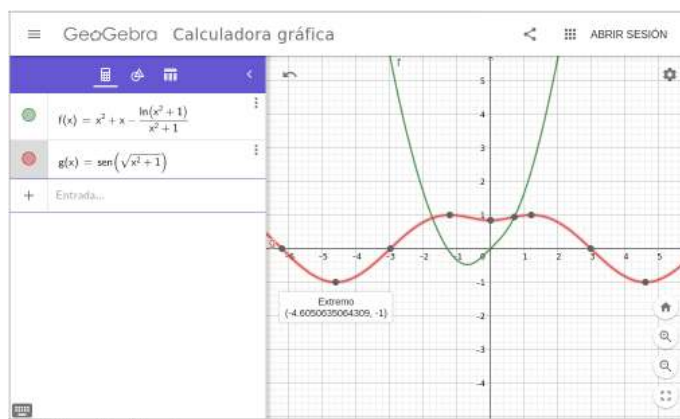
- Cada vez que se introduce una función en una línea del panel de comandas y se apreta *Enter*, se muestra una **representación gráfica** de la función con un color determinado²⁵, pudiéndose hacer *zoom* sobre cualquier parte de la gráfica a través del ratón.



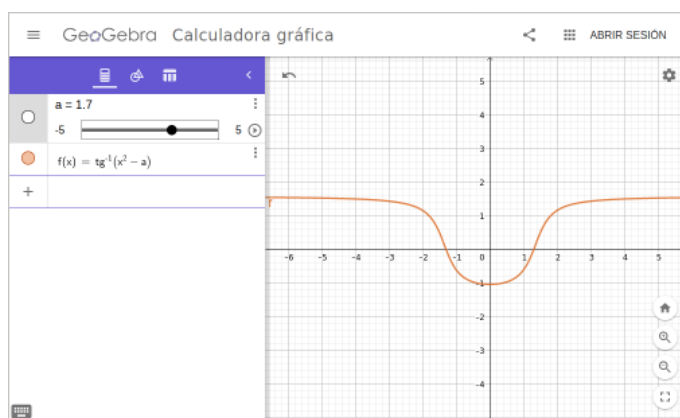
- En la representación gráfica aparece de forma automática sus **puntos característicos** como extremos relativos y ceros. Si hay más de una función también se muestran los puntos de corte entre ellas. Acercando el puntero del ratón a estos puntos se puede ver un valor numérico de los mismos.

²⁴De forma que por ejemplo $3x$ es lo mismo que $3 * x$.

²⁵Seleccionando la gráfica con el botón derecho del ratón en la representación gráfica de la función se puede acceder a sus ajustes pudiendo cambiar entre otras características su color, grosor y tipo de línea.



- Se pueden definir **parámetros** para utilizarlos en la declaración de funciones. El valor de estos parámetros se puede modificar de forma interactiva a través de *deslizadores*. Para definir parámetros basta con elegir su nombre (una o varias letras y/o números) e igualarla a un determinado valor. Al dar *Enter* se crea el deslizador, por defecto entre -5 y 5 pero que posteriormente en ajustes se pueden modificar estos valores.



- Se pueden definir **funciones a trozos** a través de la instrucción²⁶ **Si**²⁷:

$\text{Si}(\text{condición}, \text{fun1}, \text{fun2})$

donde *condición* es una *relación de orden*²⁸ del estilo $x > 2$, la función *fun1* se cumple en el intervalo definido por la *condición* y la función *fun2* cuando no se cumple la *condición*. Se pueden encadenar varias sentencias **Si** para definir funciones con más de dos trozos.

²⁶Al escribir una instrucción en la línea de comandos de *GeoGebra*, el programa muestra una lista de posibilidades disponibles.

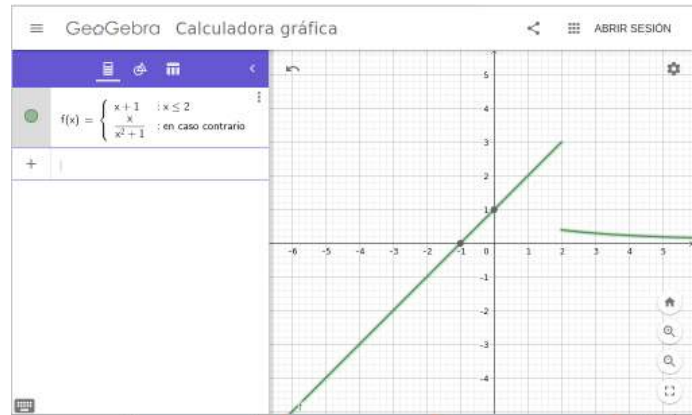
²⁷Todas las instrucciones tienen su versión en español y su versión en inglés, en este caso **If** pudiéndose utilizar indistintamente cualquiera de ellas, aunque en algunos casos resulta más cómodo utilizar la versión en inglés por ser más corta o sencilla. En el caso de la instrucción **Si/If** también se puede escribir en minúsculas aunque de forma general hay que utilizar las minúsculas y mayúsculas apropiadas.

²⁸Ver la [Definición 1.23](#), página 36.

Ejemplo C.5. Función Definida a Trozos

Si ($x \leq 2, x+1, x/(x^2+1)$)

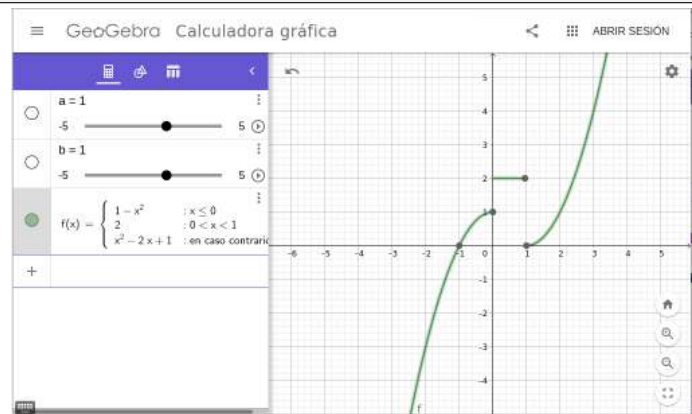
$$\begin{cases} x + 1 & x \leq 2 \\ \frac{x}{x^2 + 1} & x > 2 \end{cases}$$



Ejemplo C.6. Función Definida a Trozos (más de dos)

Si ($x \leq 0, a-x^2, \text{Si}(0 < x < 1, 2, x^2-2x+b)$)

$$\begin{cases} a - x^2 & x \leq 0 \\ 2 & 0 < x < 1 \\ x^2 - 2x + b & x \geq 1 \end{cases}$$



- Las **funciones implícitas**²⁹ se pueden definir escribiendo directamente una *ecuación*³⁰ en las variables x y y de la forma:

`funXY1 = funXY2`

donde `funXY1` y `funXY2` son dos funciones cualquiera que pueden depender de las variables x y y . De forma alternativa también se puede usar el comando³¹:

`CurvaImplicita(funXY)`

donde `funXY` es una función $f(x, y)$. Este comando declara una función implícita de la forma $f(x, y) = 0$.

²⁹Ver la [Sección 2.9.2](#), página 67.

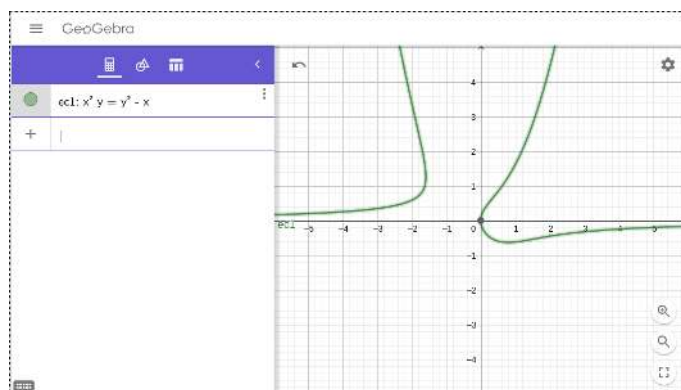
³⁰Expresión que contiene un signo igual (=).

³¹Notar que el comando lleva tilde en la palabra *Implícita*. También se puede usar el comando en inglés `ImplicitCurve`.

Ejemplo C.7. Función Implícita

$$x^2y = y^2 - x$$

$$x^2y = y^2 - x$$

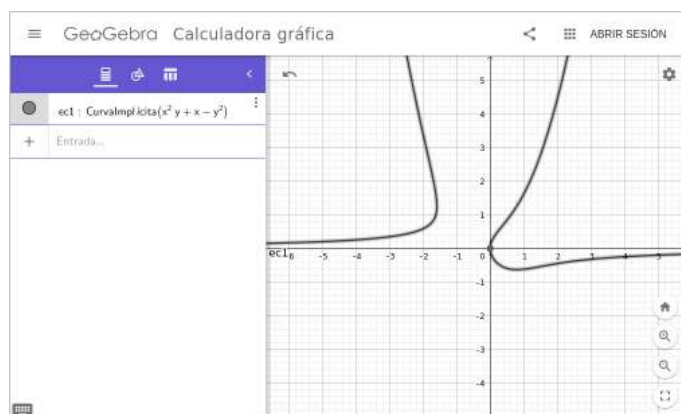


La misma función implícita del ejemplo anterior se puede definir de la siguiente forma:

Ejemplo C.8. Función Implícita

$$\text{CurvaImplícita}(x^2y + x - y^2)$$

$$x^2y + x - y^2 = 0$$



- Las **funciones en forma paramétrica**³² se pueden definir usando la instrucción:

$$\text{Curva}(\text{funX}, \text{funY}, \text{param}, \text{val1}, \text{val2})$$

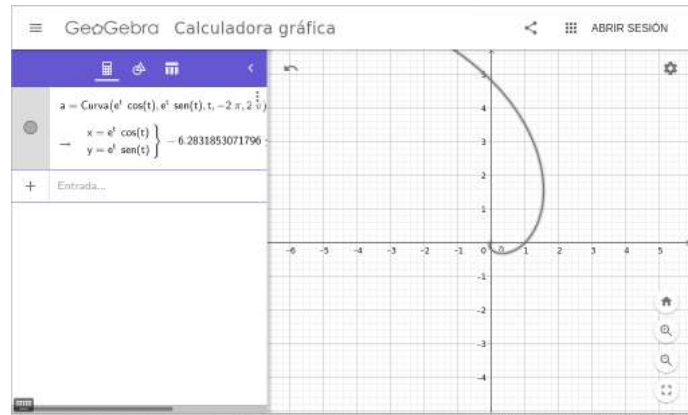
donde funX es la función que define la variable independiente x en función del parámetro param , funY es la función que define la variable dependiente y también en función del mismo parámetro param y los valores val1 y val2 son los límites inferior y superior del parámetro.

³²Ver la [Sección 2.9.3](#), página 67.

Ejemplo C.9. Función en Coordenadas Paramétricas

`Curva(e^t*cos(t), e^t*sen(t), t, -2pi, 2pi)`

$$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases} ; t \in [-2\pi, 2\pi]$$



- Las **funciones en coordenadas polares**³³ también se pueden definir usando la instrucción `Curva` anterior³⁴. Dada por ejemplo una función en coordenadas polares $r = f(t)$ donde r es el radio y t el ángulo, teniendo en cuenta las relaciones entre las variables cartesianas y polares³⁵: $x = r \cos t$ e $y = r \sin t$, entonces:

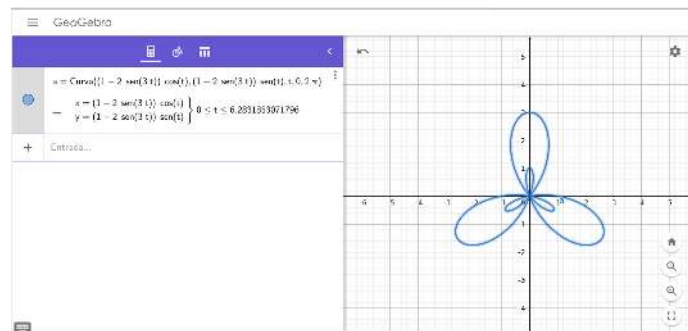
`Curva(f(t)*cos(t), f(t)*sen(t), t, 0, 2pi)`

representa la función polar en el intervalo $t \in [0, 2\pi]$ (pudiendo ser cualquier otro).

Ejemplo C.10. Función en Coordenadas Polares

`Curva((1-2sen(3t))cos(t), (1-2sen(3t))sen(t), t, 0, 2pi)`

$$r = 1 - 2 \sin(3\theta) ; t \in [0, 2\pi]$$



³³Ver la [Sección 2.9.4](#), página 69.

³⁴Ver la relación entre las coordenadas polares y paramétricas en la [Sección 2.9.4](#), página 71.

³⁵Ver la [Ecuación 2.1](#), página 69.

C.1.3. Calculadora CAS

La calculadora CAS de *GeoGebra* realiza cálculos simbólicos permitiendo entre otras múltiples capacidades las siguientes:

- Operaciones exactas con Números, Fracciones, Variables y Funciones³⁶
- Operaciones con números complejos³⁷
- Operaciones con Polinomios y Funciones Racionales³⁸
- Resolución de Ecuaciones y Sistemas de Ecuaciones (lineales y no lineales)³⁹
- Sucesiones y Series⁴⁰
- Cálculo de Límites, Derivadas, Integrales y Desarrollos de Taylor de Funciones⁴¹
- Operaciones con Vectores y Matrices
- Resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
- Transformadas de Laplace (directa e inversa)

Operaciones exactas con Números, Fracciones, Variables y Funciones

- Las funciones básicas son: `sqrt()`, `sen()`, `cos()`, `tan()`, `ln()`, `log(base,x)`, `abs()`, `asen()`, `acos()`, `atan()`, `sec()`, `cosec()`, `cotan()`, `atan2()`, `sign()`, `senh()`, `cosh()`, `tanh()`, `sech()`, `cosech()`, `cotanh()`, `asenh()`, `acosh()`, `atanh()`.
- El símbolo `=` se utiliza para definir ecuaciones mientras que el símbolo `:=` se utiliza para asignaciones (de valores a constantes, definición de funciones, etc.)
- De forma general el resultado de una operación es un valor exacto, para encontrar un valor numérico aproximado se puede pinchar en el símbolo \approx que aparece a la derecha de la línea de comandos del resultado.
- La letra `x` está reservada para las funciones y ecuaciones y no se permite su uso para nombre de constantes.
- Para que *GeoGebra* muestre los resultados de ángulos en radianes (en lugar de grados sexagesimales) es necesario especificarlo en **Configuración** \rightarrow **Álgebra**.
- El comando **Desarrolla** realiza las operaciones indicadas y expande el resultado.
- El comando **Simplifica** intentará⁴² simplificar el resultado de una operación. Puede utilizarse junto con el comando **Asumiendo** para tener en cuenta alguna condición.
- El comando **Factoriza** expresa un número⁴³ como producto de factores primos.

Vamos a ver algunos ejemplos:

³⁶Ver la [Sección C.1.3, página 355](#).

³⁷Ver la [Sección C.1.3, página 357](#).

³⁸Ver la [Sección C.1.3, página 358](#).

³⁹Ver la [Sección C.1.3, página 360](#).

⁴⁰Ver la [Sección C.1.3, página 361](#).

⁴¹Ver la [Sección C.1.3, página 363](#).

⁴²No siempre se obtiene el resultado apropiado.

⁴³También puede utilizarse con polinomios, ver el [Sección C.1.3, página 358](#). Para números complejos se utiliza el comando **FactorizaC**, ver la [Sección C.1.3, página 357](#).

$$3/(14+5/7)+ (6/7-5/4)/(6/4+8)$$

$$\frac{3}{14 + \frac{5}{7}} + \frac{\frac{6}{7} - \frac{5}{4}}{\frac{6}{4} + 8}$$

$$\rightarrow \frac{4453}{27398}$$

$$\text{Factoriza}(360)$$

$$\rightarrow 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$\text{Desarrolla}((x+1)^5(x^2+3))$$

$$\text{Desarrolla}((x+1)^5(x^2+3))$$

$$\rightarrow x^7 + 5x^6 - 13x^5 + 25x^4 + 335x^3 + 31x^2 + 15x + 3$$

$$f:=x^2\text{sen}(x)$$

$$\rightarrow x^2 \text{sen}(x)$$

$$g:=\ln(x)/\tan(x)$$

$$\rightarrow \frac{\ln(x)}{\tan(x)}$$

$$h:=f*g$$

$$\rightarrow x^2 \text{sen}(x) \frac{\ln(x)}{\tan(x)}$$

$$\text{Simplifica}((2x^3 - 3x^2 - 62x - 105) / (2(x+5/2)))$$

$$\text{Simplifica}\left(\frac{2x^3 - 3x^2 - 62x - 105}{2\left(x - \frac{5}{2}\right)}\right)$$

$$\rightarrow x^2 - 4x - 21$$

$$\text{Simplifica}(3x + 4x + ax)$$

$$\rightarrow x(a + 7)$$

$$\text{Asumiendo}(x < 2, \text{Simplifica}(\text{sqrt}(x - 2\text{sqrt}(x-1))))$$

$$\text{Asumiendo}\left(x < 2, \text{Simplifica}\left(\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}\right)\right)$$

$$\rightarrow \sqrt{x-1} - 1$$

Operaciones con Números Complejos

- La unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$ se representa mediante la letra i .
- La parte real de un número complejo z se puede obtener con `real(z)` o bien como $x(z)$, mientras que su parte imaginaria se puede obtener con `imaginaria(z)` o bien como $y(z)$.
- El módulo y argumento se obtienen con los comandos `abs()` y `arg()` respectivamente. El conjugado se obtiene con el comando `conjugado()`.
- Se pueden realizar todas las operaciones con números complejos de la misma forma que con los reales.
- Todas las n raíces complejas de $\sqrt[n]{z}$ se pueden calcular usando el comando `Secuencia`, (ver la [Sección C.1.3, página 361](#)), de la siguiente forma:
`Secuencia(Simplifica(abs(z)^(1/n)*e^((arg(z)+2*k*pi)*i/n)),k,0,n-1)`

$$z_1=2-\text{sqrt}(3)i$$

$$\rightarrow z_1 = 1 - \sqrt{3}i$$

$$z_2=2e^{(3\pi/4i)}$$

$$z_2 = 2e^{\frac{3}{4}\pi i}$$

$$\rightarrow (-1 + i)\sqrt{2}$$

$$\text{abs}(z_1)$$

$$|z_1|$$

$$\rightarrow \sqrt{7}$$

$$\text{arg}(z_1)$$

$$\text{arg}(z_1)$$

$$\rightarrow -\frac{1}{3}\pi$$

$$\text{conjugado}(z_2)$$

$$\overline{z_2}$$

$$\rightarrow (-1 - i)\sqrt{2}$$

$$\text{real}(z_2)$$

$$\text{real}(z_2)$$

$$\rightarrow -\sqrt{2}$$

<code>y(z_2)</code>
<code>y(z_2)</code>
<code>→ √2</code>
<code>Desarrolla(z_1^2*ln(z_2)/abs(z_1))</code>
<code>Desarrolla(z_1^2 * ln(z_2) / z_1)</code>
<code>→ 3 * (√3/4)π - ln(2) - (3i/4)π - i√3 ln(2)</code>
<code>a=1+i*sqrt(3)</code>
<code>→ i√3 + 1</code>
<code>n=5</code>
<code>Secuencia(Simplifica(abs(a)^(1/n)*e^((arg(a)+2*k*pi)*i/n)),k,0,n-1)</code>
<code>Secuencia(Simplifica(a ^(1/n) * e^(arg(a)+2kπ * i/n)), k, 0, n-1)</code>
<code>→ { √[5]{2}e^{iπ/15}, √[5]{2}e^{7iπ/15}, √[5]{2}e^{13iπ/15}, √[5]{2}e^{19iπ/15}, (-i√3+1)/2 * √[5]{2} }</code>

Operaciones con Polinomios y Funciones Racionales

- Los polinomios se definen igual que las funciones a través de `:=` y pueden realizarse operaciones simples (suma, resta, multiplicación y división) con ellos.
- El comando `División` permite obtener el cociente y resto de la división entre dos polinomios, mientras que con los comandos `Cociente` y `Resto` se pueden obtener los correspondientes valores por separado.
- El comando `Factoriza` permite factorizar un polinomio con raíces reales racionales mientras que el comando `FactorizaI` permite factorizar un polinomio con raíces reales irracionales.
- El comando `FactorizaC` permite factorizar un polinomio con raíces complejas racionales mientras que el comando `FactorizaCI` permite factorizar un polinomio con raíces complejas irracionales.
- El comando `FraccionesParciales` descompone una función racional en suma de *fracciones simples*⁴⁴.

<code>p:=3x^2+x-1</code>
<code>→ 3x² + x - 1</code>
<code>q:=(x+1)^5</code>

⁴⁴Ver la Sección 11.1.1, página 267.

$\rightarrow (x+1)^5$
Desarrolla(q)
$\rightarrow x^5 - 5x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$
h:=Desarrolla(p^2*q)/(q+x+3)
$h = \text{Desarrolla}\left(\frac{p^2 * q}{q + x + 3}\right)$
$\rightarrow \frac{9x^9 + 51x^8 + 115x^7 + 123x^6 + 46x^5 - 26x^4 - 29x^3 - 5x^2 + 3x + 1}{x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 6x + 4}$
Division(q,p)
$\rightarrow \left\{ \frac{1}{3}x^3 - \frac{16}{9}x^2 + \frac{109}{27}x - \frac{427}{81}, \frac{1159}{81}x - \frac{508}{81} \right\}$
c=Cociente(q,p)
$\rightarrow \left\{ \frac{1}{3}x^3 - \frac{16}{9}x^2 + \frac{109}{27}x - \frac{427}{81} \right\}$
r=Resto(q,p)
$\rightarrow \left\{ \frac{1159}{81}x - \frac{508}{81} \right\}$
Desarrolla(p*c+r)
$\rightarrow x^5 - 5x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$
Factoriza(x^5-3x^4+50x^2+24x-72)
Factoriza(x^5 - 3x^4 + 50x^2 + 24x - 72)
$\rightarrow (x-1)(x+2)^2(x^2-6x+18)$
FactorizaI(p)
$\rightarrow \left(x + \frac{\sqrt{13}+1}{6}\right) \left(3x + \frac{-\sqrt{13}+1}{2}\right)$
FactorizaC(a^2+x^2,a)
$\rightarrow (a+ix)(a-ix)$
FactorizaCI(x^2+x+1)
$\rightarrow \left(x + \frac{-i\sqrt{3}+1}{2}\right) \left(x + \frac{i\sqrt{3}+1}{2}\right)$
FraccionesParciales(x^2 / (x^2 - 2x + 1))

$$\text{FraccionesParciales}\left(\frac{x^2}{x^2 - 2x + 1}\right)$$

$$\rightarrow 1 + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1}$$

Resolución de Ecuaciones, Inecuaciones y Sistemas de Ecuaciones (lineales y no lineales)

- Los comandos **Resuelve** y **Soluciones** resuelven una ecuación o un sistema de ecuaciones cuyas soluciones sean números reales. Para resolver numéricamente de forma aproximada se utiliza el comando **SolucionesN** y para resolver ecuaciones con soluciones complejas se utilizan los comandos **SolucionesC** y **ResoluciónC**.
- Los comandos **Resuelve** y **Soluciones** también resuelven inecuaciones o sistema de inecuaciones reales.
- El símbolo \vee corresponde con el operador lógico **and** y el símbolo \wedge corresponde con el operador lógico **or**. Suelen aparecer en los resultados donde hay más de una solución.

Resuelve($x^4 - 3x^2 + 2x = 0$)

Resuelve($x^4 - 3x^2 + 2x = 0$)

$\rightarrow \{x = -2, x = 0, x = 1\}$

Resuelve($x + 2y = 0, x^2 - y = x$)

Resuelve($x + 2y = 0, x^2 - y = x$)

$\rightarrow \{x = -2y\}$

Resuelve($3x + 2y = 7, 5x - y = z, z - x^2 = y$)

Resuelve($3x + 2y = 7, 5x - y = z, z - x^2 = y$)

$\rightarrow \{\{x = 7, y = -7, z = 42\}, \{x = 1, y = 2, z = 3\}\}$

Soluciones($\{2a^2 + 5a + 3x = b, a + b = 3\}, \{a, b\}$)

Soluciones($\{2a^2 + 5a + 3x = b, a + b = 3\}, \{a, b\}$)

$\rightarrow \left\{ \left\{ \frac{\sqrt{-2x + 5\sqrt{3}} - 3}{2}, \frac{-\sqrt{-2x + 5\sqrt{3}} + 9}{2} \right\}, \left\{ \frac{-\sqrt{-2x + 5\sqrt{3}} - 3}{2}, \frac{\sqrt{-2x + 5\sqrt{3}} + 9}{2} \right\} \right\}$

ResuelveN($\cos(x) = x$)

ResuelveN($\cos(x) = x$)

$\rightarrow \{0.7390851332152\}$

ResuelveN(a⁴+34a³=34, a=3)
ResuelveN(a ⁴ + 34a ³ = 34, a = 3)
→ {0.9904738885574}
SolucionesC(x²=-1)
SolucionesC(x ² = -1)
→ {i, -i}
SolucionesC(t²=-1/t)
SolucionesC(t ² = - $\frac{1}{t}$)
→ $\left\{-1, \frac{i\sqrt{3}+1}{2}, \frac{-i\sqrt{3}+1}{2}\right\}$
Resuelve(x²+1<3, x>0)
Resuelve(x ² + 1 < 3, x > 0)
→ $\{x > 0 \wedge x < \sqrt{2}\}$

Sucesiones y Series

- Las *sucesiones*⁴⁵ se definen con el comando **Secuencia** que crea una lista a través de una expresión que es función de un parámetro que toma valores entre un valor inicial y otro final de la siguiente forma:
Secuencia(fun(parámetro) , parámetro, ini, fin , [incremento])
 donde el valor del incremento es optativo y por defecto vale 1. Se obtiene de esta forma una lista con los siguientes valores:
 $\{\text{fun}(\text{ini}) , \text{fun}(\text{ini}+\text{inc}) , \text{fun}(\text{ini}+2\text{inc}) , \text{fun}(\text{ini}+3\text{inc}) , \dots , \text{fun}(\text{ini}+\text{fin})\}$
- Las *series*⁴⁶ se definen con el comando **Suma** de la siguiente forma:
Suma(fun(parámetro) , parámetro, ini, fin)
 obteniéndose un valor de la siguiente forma:
 $\text{fun}(\text{ini}) + \text{fun}(\text{ini}+1) + \text{fun}(\text{ini}+2) + \text{fun}(\text{ini}+3) + \dots + \text{fun}(\text{ini}+\text{fin})$
 o bien en el caso de que sea posible una fórmula que depende del parámetro.
- El valor **fin** puede ser infinito, expresado como **Infinity**, así como también puede ser infinito el resultado de una suma.
- Los comandos **Suma** y **Secuencia** se pueden combinar para sumar los términos de una sucesión cualquiera.

⁴⁵Ver la [Definición 8.1, página 183](#).

⁴⁶Ver la [Definición 9.4, página 229](#).

Secuencia($a+n^2, 2, 5$)
Secuencia($a + n^2, n, 2, 5$) $\rightarrow \{a + 4, a + 9, a + 16, a + 25\}$
Secuencia($x^k, k, 1, 10, 2$)
Secuencia($x^k, k, 1, 10, 2$) $\rightarrow \{x, x^3, x^5, x^7, x^9\}$
Suma($n^2, n, 1, 100$)
$\sum_{n=1}^{100} n^2$ $\rightarrow 338350$
Suma($r^k, k, 0, n$)
$\sum_{k=1}^n r^k$ $\rightarrow \frac{r^{n+1}}{r-1} - \frac{r}{r-1}$
Suma($(1/3)^n, n, 0, \text{Infinity}$)
$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ $\rightarrow \frac{3}{2}$
Suma(Secuencia($n^2, n, 0, 1, 0.1$))
$\rightarrow \frac{77}{20}$

Cálculo de Límites, Derivadas, Integrales y Desarrollos de Taylor de Funciones

- El comando `Límite`⁴⁷ permite calcular, en caso de que exista, el *límite de una función*⁴⁸ para el valor fijado de su variable dependiente, de la siguiente forma:

`Límite(fun(var) , [var], valor)`

La especificación de la variable `var` solo es necesario en caso de confusión, por ejemplo en algunos casos cuando la función dependa de varias variables o parámetros.

- El valor al que tiende la variable en el límite puede ser un número o bien $\pm\infty$ a través del comando `±Infinity`.
- Si el límite no existe o no puede ser determinado se devuelve como resultado un signo de interrogación (?).
- Los *límites laterales*⁴⁹ se pueden calcular de la misma forma a través de los comandos `LímiteIzquierda` y `LímiteDerecha`.

- La *derivada*⁵⁰ de una función se puede calcular con el comando `Derivada` de la siguiente forma:

`Derivada(fun(var) , [var], [orden])`

donde la especificación de la variable es opcional y el orden en caso de no darse es 1.

- La función a derivar puede ser de tipo paramétrico⁵¹ definida mediante el comando `Curva`.
- El comando `DerivadaImplícita` permite calcular la derivada de una función definida de forma implícita⁵² de la siguiente forma:

`DerivadaImplícita(fun(var1,var2) , [var1], [var2])`

donde `var1` es la variable dependiente y `var2` la variable independiente. En caso de no indicarse, por defecto `x` es la independiente e `y` la dependiente.

- La *integral*⁵³ de una función puede calcularse con el comando `Integral` de la siguiente forma:
`Integral(fun(var) , [var], [ini], [fin])`
donde la variable independiente `var` es opcional. Si los valores `ini` y `fin` no se dan, se obtiene como resultado una función correspondiente a la *integral indefinida*⁵⁴ de la función, mientras que si se especifican ambos (`ini` y `fin`) se obtiene el valor de la *integral definida*⁵⁵.
- Algunas *integrales impropias*⁵⁶ también pueden calcularse con este comando.

- El *desarrollo de Taylor*⁵⁷ de una función se puede calcular mediante el comando `PolinomioTaylor` de la siguiente forma:

`PolinomioTaylor(fun(var) , [var], pto, orden)`

donde indicar la variable es opcional, `pto` es el valor del punto de desarrollo y `orden` es el orden del mismo.

⁴⁷Puede utilizarse el comando en inglés `Limit`.

⁴⁸Ver la [Definición 3.1](#), página 75.

⁴⁹Ver la [Sección 3.1.1](#), página 77.

⁵⁰Ver la [Sección 5.1](#), página 111.

⁵¹Ver la [Sección 2.9.3](#), página 67.

⁵²Ver la [Sección 2.9.2](#), página 67.

⁵³Ver la [Sección 10.2](#), página 252.

⁵⁴Ver la [Definición 10.4](#), página 255.

⁵⁵Ver la [Definición 10.1](#), página 252.

⁵⁶Ver la [Definición 11.1](#), página 276.

⁵⁷Ver el [Teorema 6.1](#), página 147.

Límite((x²+x)/x,Infinity)

$$\text{Límite}\left(\frac{x^2 + x}{x^2}, \infty\right)$$

→ 1

Límite((a*b(1-cos(x))/x²+a,0)

$$\text{Límite}\left(\frac{ab(1 - \cos(x))}{x^2} + a, 0\right)$$

→ $\frac{1}{2}ab + a$

Límite((w*sen(x)/x,w,0)

$$\text{Límite}\left(w \frac{\text{sen}(x)}{x}, w, 0\right)$$

→ 0

LímiteIzquierda(Si(x<1,x², -2x),1)

Límitelzquierdo(Si(x < 1, x², -2x), 1)

→ 1

Derivada(x³+x²+x)

Derivada(x³ + x² + x)

→ 3x² + 2x + 1

Derivada(a²b³c,b,2)

Derivada(a²b³c, b, 2)

→ 6a²bc

Derivada(Curva(cos(t),t*sen(t),t,0,pi))

Derivada(Curva(cos(t), t sen(t), t, 0, π)

→ 2x + 2y - 2 = 0

DerivadaImplícita(x+2y)

→ $-\frac{1}{2}$

DerivadaImplícita(u²+v,u,v)

DerivadaImplicita($u^2 + v, u, v$)

$$\rightarrow -\frac{1}{2u}$$

DerivadaImplicita(u^2+v, v, u)

DerivadaImplicita($u^2 + v, v, u$)

$$\rightarrow -2u$$

Integral(x^3)

$$\int x^3 dx$$

$$\rightarrow \frac{1}{4}x^4 + c_1$$

Integral($\cos(t), t, a, b$)

$$\int_a^b \cos(t) dt$$

$$\rightarrow -\operatorname{sen}(a) + \operatorname{sen}(b)$$

Integral($\ln(x), 0, 1$)

$$\int_0^1 \ln(x) dx$$

$$\rightarrow -1$$

PolinomioTaylor($x^2, 3, 1$)

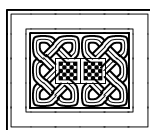
PolinomioTaylor($x^2, 3, 1$)

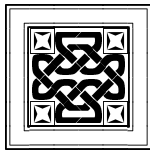
$$\rightarrow 9 + 6(x - 3)$$

Simplifica(PolinomioTaylor($x^3 \operatorname{sen}(y), y, 3, 2$))

Simplifica(PolinomioTaylor($x^3 \operatorname{sen}(y), 3, 2$))

$$\rightarrow -x^3 \cdot \frac{\operatorname{sen}(3)y^2 - 6 \operatorname{sen}(3)y + 7 \operatorname{sen}(3) - 2y \cos(3) + 6 \cos(3)}{2}$$





Bibliografía

- JUAN DE BURGOS, **Cálculo Infinitesimal de Una Variable**, Segunda Edición, (McGraw-Hill, 2007).
- LARSON RON, BRUCE EDWARDS, **Cálculo I de Una Variable**, Novena Edición, (McGraw-Hill, 2010).
- P. J. HERNANDO, **Clases de Álgebra Lineal para Ingeniería**, Versión 6.6, (Septiembre 2025).
- P. J. HERNANDO, **Clases de Cálculo II para Ingeniería**, Versión 4.2, (Septiembre 2025).
- P. J. HERNANDO, **Clases de Cálculo III para Ingeniería**, Versión 2.2, (Septiembre 2025).
- P. J. HERNANDO, **Clases de Ampliación de Matemáticas para Ingeniería**, Versión 6.0, (Septiembre 2025).
- SATURNINO L. SALAS, ELNAR HILLE, GARRET J. ETGEN, **Calculus. Una y Varias Variables - Volumen 1**, Cuarta Edición, (Reverte, 2006).
- JAMES STEWART, **Cálculo. Transcendentes Tempranas**, Octava Edición, (Cengage Learning, 2013).
- GEORGE B. THOMAS, **Cálculo. Una Variables**, Decimotercera Edición, (Grupo Anaya Educacion, 2015).
- DENNIS G. ZILL, WARREN S. WRIGHT, **Cálculo de Una Variable**, Cuarta Edición, (McGraw-Hill, 2011).

