

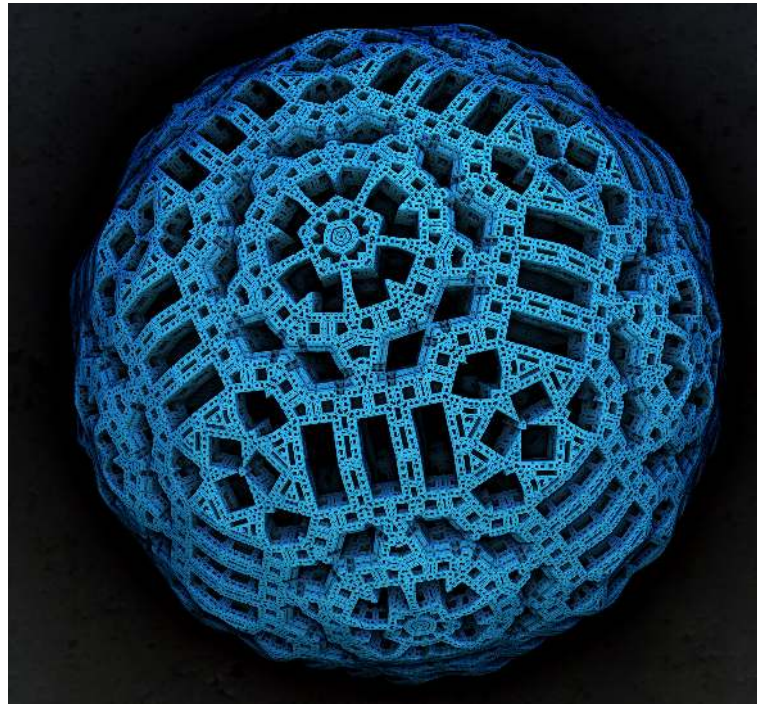
---

Clases de  
**Cálculo II**  
para Ingeniería

---

Teoría y 100 ejercicios resueltos

Versión 4.2 - Septiembre 2025



Pedro José Hernando Oter

© Pedro José Hernando Oter, 2025

[pedroj@math.uc3m.es](mailto:pedroj@math.uc3m.es)  
[www.clasesde.eu](http://www.clasesde.eu)

Departamento de Matemáticas  
Escuela Politécnica Superior  
UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID  
Avda de la Universidad, 30  
28911 Leganés  
SPAIN

ISBN: xxx-xx-xxx-xxxx-x

Versión 4.2 - Septiembre 2025  
Made by L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X - TeX Live

This is pdfTeX, Version 3.141592653-2.6-1.40.27 (TeX Live 2026/dev/Arch Linux) kpathsea version 6.4.2/dev

# Índice

Tema	Página
<b>1 Espacio Euclídeo <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>1</b>
1.1 El Espacio Euclídeo $\mathbb{R}^n$	3
1.1.1 Operaciones Vectoriales	4
Producto Vectorial	5
Producto Mixto	5
1.2 Topología en $\mathbb{R}^n$	6
1.3 Sistemas de Coordenadas	8
1.3.1 Coordenadas Cartesianas o Rectangulares	8
1.3.2 Coordenadas Polares	8
1.3.3 Coordenadas Cilíndricas	9
1.3.4 Coordenadas Esféricas (colatitud $\phi$ )	9
1.3.5 Coordenadas Esféricas (latitud $\varphi$ )	10
<b>2 Funciones de Varias Variables</b>	<b>11</b>
2.1 Funciones de Varias Variables	13
2.1.1 Tipos de Funciones	13
Funciones Reales y Complejas	13
Funciones Escalares y Vectoriales	13
2.1.2 Representación Gráfica de Funciones	14
2.1.3 Conjuntos de Nivel	14
2.2 Límites en $\mathbb{R}^n$	15
2.2.1 Propiedades Básicas de los Límites de Funciones Escalares	17
2.2.2 Límite Infinito y en el Infinito	17
2.2.3 Infinitésimos Equivalentes	19
2.2.4 Cálculo de Límites de Funciones de Varias Variables	20
2.2.5 Cálculo de Límites de Funciones Escalares de Varias Variables	20
Límites Reiterados	20
Límites a través de Rectas	21
Límites a través de Parábolas	22
Límites en Coordenadas Polares	23
2.3 Continuidad en Funciones de Varias Variables	24
2.4 Derivabilidad en $\mathbb{R}^n$	26
2.4.1 Derivada Parcial de Funciones Escalares	26
Interpretación Gráfica	26
2.4.2 Ecuación del Plano Tangente de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$	28
2.4.3 Derivadas Direccionales	29
Interpretación Gráfica	29
2.4.4 Derivada Parcial de Funciones Vectoriales. Matriz Jacobiana y Jacobiano	30
Matriz Jacobiana y Jacobiano	30
2.4.5 Vector Gradiente	31
Gradiente y Derivadas Direccionales	31
2.4.6 Significado Geométrico del Gradiente	32
2.5 Diferenciación	35
2.5.1 Diferenciación en $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$	35

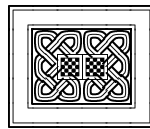
2.5.2	Diferenciación en $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . . . . .	36
2.5.3	Relación entre Derivabilidad, Diferenciabilidad y Continuidad . . . . .	39
	Propiedades de la Diferenciabilidad y Derivabilidad . . . . .	40
	Resumen: Diferenciabilidad en Funciones Escalares . . . . .	40
2.6	Regla de la Cadena . . . . .	43
2.6.1	Regla de la Cadena en Funciones Escalares de Una Variable . . . . .	43
2.6.2	Regla de la Cadena en Funciones de Varias Variables . . . . .	43
2.7	Derivadas Parciales de Orden Superior . . . . .	47
2.7.1	Funciones de Clase $C^n$ . . . . .	48
2.8	Operadores Diferenciales . . . . .	48
2.8.1	Operador Gradiente $\nabla$ . . . . .	48
2.8.2	Operador Divergencia <i>div</i> . . . . .	49
2.8.3	Operador Rotacional <i>rot</i> . . . . .	49
2.8.4	Operador Laplaciano $\Delta$ , $\nabla^2$ . . . . .	49
2.8.5	Aplicaciones en Campos Escalares y Vectoriales . . . . .	50
2.8.6	La Ecuación de Laplace . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Estudio Local de Funciones de Varias Variables</b> . . . . .	<b>53</b>
3.1	Introducción . . . . .	55
3.2	Teorema de Taylor . . . . .	55
3.2.1	Funciones de Una Variable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	55
3.2.2	Generalización a Funciones Escalares $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	57
3.2.3	Forma Alternativa del Desarrollo de Taylor . . . . .	58
3.3	Matriz Hessiana y Hessiano . . . . .	59
3.3.1	Forma Simplificada del Desarrollo de Taylor de Segundo Orden . . . . .	59
3.4	Extremos Relativos o Locales de Funciones en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	63
3.4.1	Determinación de Extremos Relativos . . . . .	64
	Formas Cuadráticas . . . . .	64
3.4.2	Resumen sobre Puntos Críticos en Funciones de Varias Variables . . . . .	66
3.5	Extremos Absolutos de Funciones en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	69
3.5.1	Extremos Sobre Conjuntos o Dominios . . . . .	71
3.6	Extremos Relativos Condicionados de Funciones en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	73
3.7	Teorema de la Función Implícita . . . . .	78
3.7.1	Funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	78
3.7.2	Funciones Escalares de Dos Variables . . . . .	80
3.7.3	Funciones Escalares de Varias Variables . . . . .	81
3.7.4	Funciones Vectoriales de Varias Variables . . . . .	82
3.8	Teorema de la Función Inversa . . . . .	83
3.9	Cambio de Variable . . . . .	84
<b>4</b>	<b>Integrales Múltiples</b> . . . . .	<b>87</b>
4.1	Introducción . . . . .	89
4.1.1	Propiedades de las Integrales . . . . .	90
4.1.2	Tabla de Integrales Indefinidas Básicas . . . . .	90
4.2	Integrales Dobles . . . . .	91
4.2.1	Propiedades de la Integral Doble . . . . .	91
4.2.2	Dominios Rectangulares . . . . .	92
	Interpretación Geométrica . . . . .	93
4.2.3	Características de las Integrales de Funciones de Varias Variables . . . . .	94
4.2.4	Dominios Proyectables o No Rectangulares . . . . .	94
	Dominios Generales . . . . .	95
4.2.5	Cambio de Variables en Integrales Dobles . . . . .	96
	Cambio de Variables Lineales . . . . .	97
	Cambio de Variables No Lineales . . . . .	98
	Cambio de Variables a Coordenadas Polares . . . . .	100
	Cambio de Variables a Coordenadas Elípticas . . . . .	101
4.2.6	Aplicaciones de la Integral Doble . . . . .	104

Cálculo de Áreas de Regiones Planas . . . . .	104
Cálculo de Volúmenes . . . . .	104
Valor Promedio de una Función de Dos Variables sobre un Dominio . . . . .	104
Cálculo de Propiedades Físicas de Figuras Planas . . . . .	105
Cálculo del Área de una Superficie . . . . .	106
4.3 Integrales Triples . . . . .	107
4.3.1 Integrales Triples Iteradas . . . . .	107
4.3.2 Cambio de Variables en Integrales Triples . . . . .	109
Cambio de Variables a Coordenadas Cilíndricas . . . . .	109
Cambio de Variables a Coordenadas Esféricas . . . . .	113
4.3.3 Aplicaciones de la Integral Triple . . . . .	118
Cálculo de Volúmenes . . . . .	118
Valor Promedio de una Función de Tres Variables sobre un Dominio . . . . .	118
Cálculo de Propiedades Físicas de Figuras Tridimensionales . . . . .	118
<b>5 Integrales de Línea y de Superficie . . . . .</b>	<b>121</b>
5.1 Introducción . . . . .	123
5.2 Curvas en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	123
5.3 Integral de Línea . . . . .	127
5.3.1 Integral de Línea de Funciones Escalares . . . . .	127
Propiedades de la Integral de Línea de Funciones Escalares . . . . .	127
Longitud de una Curva . . . . .	128
Valor Promedio de una Función Escalar sobre una Curva . . . . .	129
5.3.2 Integral de Línea de Funciones Vectoriales . . . . .	130
Propiedades de la Integral de Línea de Funciones Vectoriales . . . . .	130
Forma Diferencial de una Integral de Línea de una Función Vectorial . . . . .	131
5.3.3 Campos Conservativos . . . . .	132
5.3.4 Relación entre las Integrales de Línea Escalares y Vectoriales . . . . .	134
5.4 Superficies Parametrizadas . . . . .	135
5.4.1 Ecuación del Plano Tangente a una Superficie Parametrizada . . . . .	136
5.4.2 Área de una Superficie Parametrizada . . . . .	137
5.5 Integral de Superficie . . . . .	138
5.5.1 Integral de Superficie de Funciones Escalares . . . . .	138
Valor Promedio de una Función Escalar sobre una Superficie . . . . .	139
5.5.2 Integral de Superficie de Funciones Vectoriales . . . . .	140
5.6 Resumen de Fórmulas Integrales en Funciones de Varias Variables . . . . .	142
5.6.1 Funciones Escalares . . . . .	142
5.6.2 Funciones Vectoriales . . . . .	143
5.6.3 Comparación de Integrales de Línea y de Superficie . . . . .	143
5.7 Teoremas sobre Integrales de Funciones de Varias Variables . . . . .	144
5.7.1 Teorema de Green . . . . .	144
5.7.2 Teorema de Stokes . . . . .	145
5.7.3 Teorema de Gauss o de la Divergencia . . . . .	147

**APÉNDICES . . . . . 149**

<b>A Curvas y Superficies Elementales . . . . .</b>	<b>151</b>
A.1 Curvas en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	152
A.1.1 Cónicas . . . . .	152
Ecuación General . . . . .	152
Circunferencia . . . . .	153
Elipse . . . . .	154
Hipérbola . . . . .	155
Parábola . . . . .	156
A.2 Superficies en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	157
A.2.1 Superficies Cuadráticas o Cuádricas . . . . .	157

A.3	Curvas en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	159
A.3.1	Curvas sobre Superficies . . . . .	159
	Curvas Coordenadas . . . . .	159
	Curvas de Nivel . . . . .	159
	Curvas Implícitas . . . . .	160
<b>B</b>	<b>Software Matemático</b> . . . . .	<b>161</b>
B.0	Software Matemático . . . . .	162
B.1	Introducción a <i>SageMath</i> . . . . .	163
B.1.1	Formas de Ejecutar el Programa . . . . .	163
B.1.2	Gráficos 2D . . . . .	164
B.1.3	Gráficos 3D . . . . .	168
B.2	Aplicaciones de <i>SageMath</i> en Cálculo . . . . .	172
B.2.1	Programación Básica en <i>SageMath</i> . . . . .	172
B.2.2	Comandos <i>SageMath</i> útiles en Cálculo . . . . .	172
B.2.3	Ejemplos . . . . .	172
	<b>Bibliografía</b> . . . . .	<b>179</b>



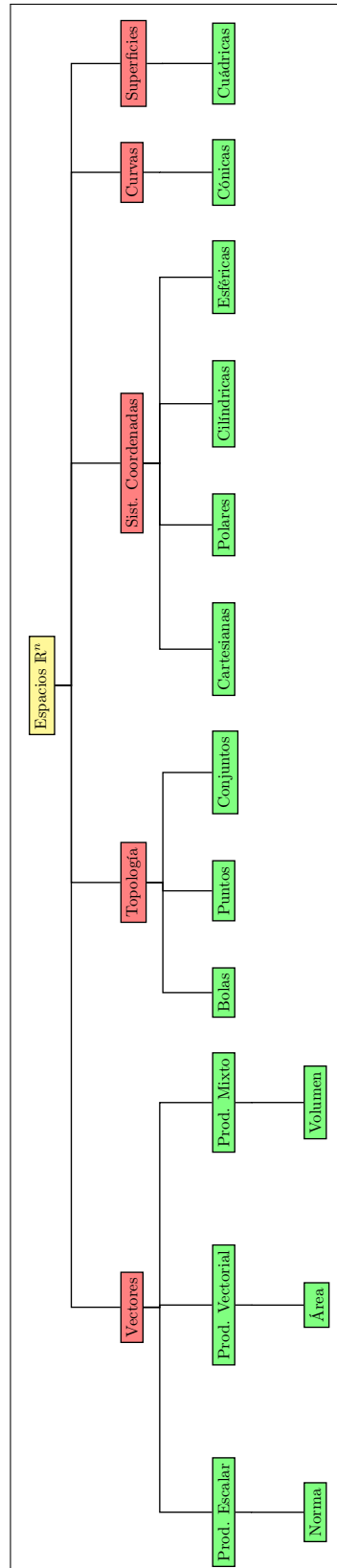
# Espacio Euclídeo $\mathbb{R}^n$

## Contenido

---

<b>1.1</b>	<b>El Espacio Euclídeo <math>\mathbb{R}^n</math></b> . . . . .	<b>3</b>
1.1.1	Operaciones Vectoriales . . . . .	4
<b>1.2</b>	<b>Topología en <math>\mathbb{R}^n</math></b> . . . . .	<b>6</b>
<b>1.3</b>	<b>Sistemas de Coordenadas</b> . . . . .	<b>8</b>
1.3.1	Coordenadas Cartesianas o Rectangulares . . . . .	8
1.3.2	Coordenadas Polares . . . . .	8
1.3.3	Coordenadas Cilíndricas . . . . .	9
1.3.4	Coordenadas Esféricas (colatitud $\phi$ ) . . . . .	9
1.3.5	Coordenadas Esféricas (latitud $\varphi$ ) . . . . .	10

---



## 1.1. El Espacio Euclídeo $\mathbb{R}^n$

### Definición 1.1. Espacio $\mathbb{R}^n$

El conjunto de todos los *puntos* de  $n$  componentes *reales* se representa por  $\mathbb{R}^n$ .

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}\}$$

### Ejemplo 1.1. Espacios $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &= \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} && \longrightarrow && (1, 0) \in \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^3 &= \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\} && \longrightarrow && (1, -1, 1/3) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

### Definición 1.2. Vector

Un *vector*  $\vec{v}$  de dimensión  $n$  es una colección ordenada de  $n$  números denominados *componentes* o *coordenadas*.

$$\vec{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n] \quad ; \quad v_i \in \mathbb{R}$$

A cada punto  $P = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  se le puede asociar un *vector*  $\vec{v} = [x_1, \dots, x_n]$  con punto inicial en el origen de coordenadas y extremo en el punto  $P$ . De forma que  $\mathbb{R}^n$  también representa el conjunto de todos los vectores de  $n$  componentes.

$\mathbb{R}^n$  es un **espacio vectorial**<sup>1</sup> con las operaciones usuales de *suma*<sup>2</sup> de vectores y *producto por un escalar*.

- $\vec{x} + \vec{y} = [x_1, \dots, x_n] + [y_1, \dots, y_n] = [x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n]$
- $\alpha \vec{x} = \alpha [x_1, \dots, x_n] = [\alpha x_1, \dots, \alpha x_n] \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R}$

### Definición 1.3. Producto Escalar en $\mathbb{R}^n$

Dados dos vectores  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ , se define el **producto escalar** de  $\vec{x}$  por  $\vec{y}$  y lo representamos por  $\vec{x} \cdot \vec{y}$  como el *escalar* resultante de la siguiente operación:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = [x_1, x_2, \dots, x_n] \cdot [y_1, y_2, \dots, y_n] = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

### Definición 1.4. Norma de un Vector en $\mathbb{R}^n$

La **norma euclídea**<sup>3</sup> de un vector  $\vec{x} = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$  inducida por el producto escalar se define como:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

La **norma** de un vector representa la **distancia** del origen al extremo del vector.

<sup>1</sup>Ver por ejemplo "Clases de Álgebra Lineal para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 179.

<sup>2</sup>La resta de vectores se define como una suma particular, de forma que  $\vec{x} - \vec{y}$  es la suma de  $\vec{x}$  más el opuesto de  $\vec{y}$ :  $\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-\vec{y})$ .

<sup>3</sup>Además de la *norma 2* o *euclídea* se definen otras *normas* muy utilizadas, como son la *norma 1*, la *norma n* y la *norma infinito*, las cuales tienen diferentes aplicaciones.

### Definición 1.5. Espacio Euclídeo

Un *espacio euclídeo* es un *espacio vectorial* normado sobre los números reales de dimensión finita, en cual la *norma* está asociada al *producto escalar* estándar.

La *recta real* ( $\mathbb{R}$ ), el *plano euclídeo* ( $\mathbb{R}^2$ ) y el *espacio tridimensional euclídeo* ( $\mathbb{R}^3$ ) son casos especiales de *espacios euclídeos* de dimensiones 1, 2 y 3 respectivamente. El concepto abstracto de *espacio euclídeo* generaliza estas construcciones a más dimensiones ( $\mathbb{R}^n$ ).

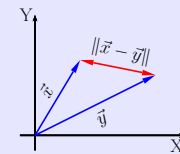
### 1.1.1. Operaciones Vectoriales

#### Definición 1.6. Distancia entre dos Vectores

Dados dos vectores  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  se define la distancia entre ellos como:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\vec{y} - \vec{x}\| = d(\vec{y}, \vec{x})$$

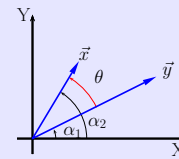
$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$



#### Definición 1.7. Ángulo entre dos Vectores

Dados dos vectores  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  se define el ángulo<sup>4</sup> entre ellos como:

$$\cos \theta = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} \implies \vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \theta$$



**Nota 1.1.** El ángulo  $\theta$  siempre se mide en *radianes*. La relación entre *grados sexagesimales* y *radianes* viene dada mediante la fórmula:  $\text{radianes} = (\text{grados} \times 2\pi)/360$

#### Definición 1.8. Vectores Ortogonales

Se dice que dos vectores  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  son **ortogonales** si su producto escalar es cero.

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \iff \vec{x}, \vec{y} \text{ ortogonales}$$

**Nota 1.2.** El vector nulo  $\vec{0} = [0, \dots, 0] \in \mathbb{R}^n$ , es *ortogonal* a cualquier vector ya que:  $\vec{x} \cdot \vec{0} = 0$  ;  $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

- En  $\mathbb{R}^n$  dos vectores no nulos  $\vec{x}$  y  $\vec{y}$  son *ortogonales* si el ángulo entre ellos es  $\pm \frac{\pi}{2} = \pm 90^\circ$ .
- En  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ , desde un punto de vista geométrico, los vectores *ortogonales* se dice que son *perpendiculares*.

<sup>4</sup>Desde un punto de vista geométrico, solo tiene sentido el ángulo entre vectores de  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ , aunque desde un punto de vista matemático, dicha expresión en  $\mathbb{R}^n$  tiene múltiples aplicaciones.

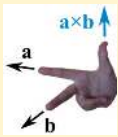
## Producto Vectorial

### Definición 1.9. Producto Vectorial en $\mathbb{R}^3$

Dados dos vectores  $\vec{x} = [x_1, x_2, x_3]$  e  $\vec{y} = [y_1, y_2, y_3]$  de  $\mathbb{R}^3$ , se define el **producto vectorial** de ambos, al vector de  $\mathbb{R}^3$  definido por el resultado del siguiente determinante<sup>5</sup>:

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{i} + (x_3y_1 - x_1y_3)\mathbf{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{k}$$

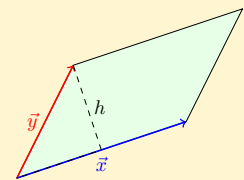
donde  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  son los vectores unitarios en las tres direcciones  $X, Y, Z$  de  $\mathbb{R}^3$ .



El vector  $\vec{a} \times \vec{b}$  tiene la **dirección perpendicular** al plano formado por los vectores  $\vec{x}$  y  $\vec{y}$  y **sentido** siguiendo la conocida como *regla de la mano derecha*<sup>6</sup>.

Área del paralelogramo

$$\text{Área} = \text{base} * \text{altura} = \|\vec{x}\| h = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin \theta = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin \theta = \|\vec{x} \times \vec{y}\|$$



## Producto Mixto

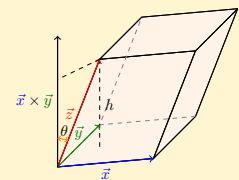
### Definición 1.10. Producto Mixto en $\mathbb{R}^3$

Dados tres vectores  $\vec{x} = [x_1, x_2, x_3]$ ,  $\vec{y} = [y_1, y_2, y_3]$  y  $\vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$  de  $\mathbb{R}^3$ , se define el producto mixto de ellos al escalar dado por el siguiente determinante:

$$\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = x_1y_2w_3 + y_1w_2x_3 + w_1x_2y_2 - x_3y_2w_1 - y_3w_2x_1 - w_3x_2y_1$$

Volumen del paralelepípedo

$$\text{Volumen} = \text{Área} * \text{altura} = \|\vec{x} \times \vec{y}\| h = \|\vec{z}\| \|\vec{x} \times \vec{y}\| |\cos \theta| = |\vec{z} \cdot (\vec{x} \times \vec{y})|$$



Tres vectores son *coplanarios*<sup>7</sup> si su *producto mixto* es nulo.

<sup>5</sup>Ver por ejemplo "Clases de Álgebra Lineal para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 179.

<sup>6</sup>Disponemos la mano derecha de forma que el dedo *índice* apunte en la dirección del primer vector y el dedo *corazón* en la dirección del segundo, entonces el dedo *pulgar* tendrá el sentido del resultado del producto vectorial.

<sup>7</sup>Se encuentran en el mismo plano.

## 1.2. Topología en $\mathbb{R}^n$




### Definición 1.11. Bolas en $\mathbb{R}^n$

Sea  $a \in \mathbb{R}^n$  un punto de  $\mathbb{R}^n$  y  $r \in \mathbb{R}$  con  $r > 0$ . Se denomina:

- **Bola Abierta** de centro  $a$  y radio  $r$  al conjunto  $B(a, r) = B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) < r\}$
- **Bola Cerrada** de centro  $a$  y radio  $r$  al conjunto  $\bar{B}(a, r) = \bar{B}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) \leq r\}$
- **Bola Reducida o Perforada** de centro  $a$  y radio  $r$  al conjunto  $B^*(a, r) = B_r^*(a) = B_r(a) - \{a\}$

### Ejemplo 1.2. Bolas en $\mathbb{R}^n$

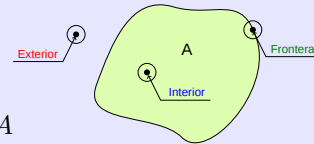
En función de la dimensión  $n$  de las bolas, éstas pueden ser:

$n = 1$	<b>Intervalo abierto o cerrado</b>	
$n = 2$	<b>Disco abierto o cerrado</b>	
$n = 3$	<b>Esfera abierta o cerrada</b>	

### Definición 1.12. Tipos de Puntos en $\mathbb{R}^n$

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto de puntos de  $\mathbb{R}^n$  y  $a \in \mathbb{R}^n$  un punto cualquiera. Se dice que  $a$  es:

- **Punto Interior** de  $A$  si  $\exists r > 0 : B_r(a) \subset A$
- **Punto Exterior** de  $A$  si  $\exists r > 0 : B_r(a) \cap A = \emptyset$
- **Punto Frontera** de  $A$  si  $\forall r > 0 : B_r(a) \cap A \neq \emptyset$  y  $B_r(a) \not\subset A$



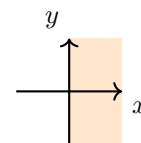
### Definición 1.13. Partes de un Conjunto de $\mathbb{R}^n$

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto de puntos de  $\mathbb{R}^n$ . Se pueden definir las siguientes partes de  $A$ :

- **Interior** de  $A$   $\overset{\circ}{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ es punto interior de } A\}$
- **Frontera** de  $A$   $\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ es punto frontera de } A\}$
- **Exterior** de  $A$   $Ext(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ es punto exterior de } A\}$
- La **clausura, cierre o adherencia**<sup>8</sup> de  $A$  es  $\bar{A} = A \cup \partial A$

### Ejemplo 1.3. Conjuntos en $\mathbb{R}^2$ y sus Partes

$$\text{Sea } A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \quad \begin{cases} \overset{\circ}{A} = A & = \{(x, y) : x > 0\} \\ \partial A & = \{(x, y) : x = 0\} \\ Ext(A) & = \{(x, y) : x < 0\} \\ \bar{A} & = \{(x, y) : x \geq 0\} \end{cases}$$



<sup>8</sup>Corresponde al *menor conjunto cerrado* que contiene a  $A$ .

**Definición 1.14. Tipos Básicos de Conjuntos en  $\mathbb{R}^n$**

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto de puntos de  $\mathbb{R}^n$ , entonces:

- $A$  es **Abierto** si todos sus puntos son *Interiores*.
- $A$  es **Cerrado** si su complementario es *Abierto*.
- $A$  es **Acotado** si  $\exists r > 0 : A \subset B_r(\bar{0})$  ( $\bar{0}$  es el punto  $(0, 0, \dots, 0)$  en  $\mathbb{R}^n$ )

Propiedades de los Conjuntos Abiertos y Cerrados:

- Conjuntos Abiertos  $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \text{ y } \emptyset \text{ son Abiertos.} \\ \text{La unión arbitraria de Abiertos es un Abierto.} \\ \text{La intersección finita de conjuntos Abiertos es un Abierto.} \end{array} \right.$
- Conjuntos Cerrados  $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \text{ y } \emptyset \text{ son Cerrados.} \\ \text{La unión finita de Cerrados es un Cerrado.} \\ \text{La intersección arbitraria de conjuntos Cerrados es un Cerrado.} \end{array} \right.$

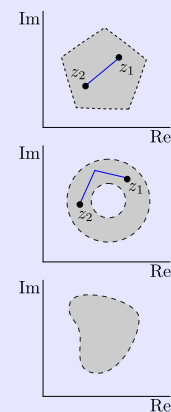
**Definición 1.15. Conjunto Convexo y Conexo**

Un conjunto es **convexo** si el segmento que une a cualquier pareja de puntos en el conjunto, está totalmente contenido en él. Un pentágono regular es convexo.

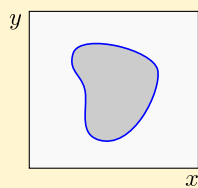
Un conjunto es **conexo** si todo par de puntos  $z_1$  y  $z_2$  de  $S$  se pueden unir por una línea poligonal formada por un número finito de segmentos rectos, contenida por completo en  $S$ .

Un conjunto *conexo* se dice que es **simplemente conexo** si todo camino cerrado simple contenido en él encierra solo puntos de él.

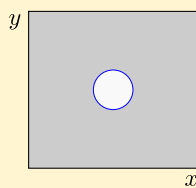
Un dominio que no es *simplemente conexo* se denomina **múltiplemente conexo**.



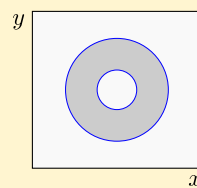
Los dominios *simplemente conexos* no tienen agujeros.



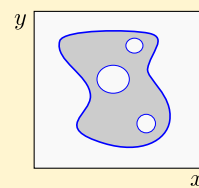
Simplemente C.



Múltiplemente C.



Múltiplemente C.



Múltiplemente C.

**Definición 1.16. Entorno, Compacto, Dominio y Región**

- Un **entorno** de un punto  $a \in \mathbb{R}^n$  es cualquier conjunto *abierto* que contenga a  $a$ .
- Un conjunto **compacto** es un conjunto *cerrado* y *acotado*.
- **Dominio** o **región**<sup>9</sup> es un conjunto *abierto* y *conexo*.

<sup>9</sup>También denominada *región abierta*. El *cierre* de una *región abierta* es una *región cerrada*.

### 1.3. Sistemas de Coordenadas

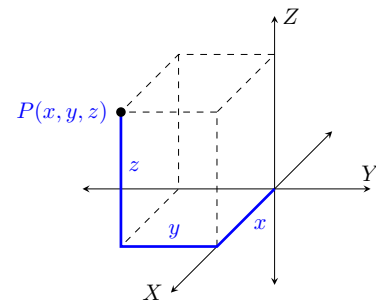
#### Definición 1.17. Sistema de Coordenadas

Un **sistema de coordenadas** es un conjunto de valores y puntos que permiten definir unívocamente la posición de cualquier punto de un espacio euclídeo.

- Un **sistema de referencia** viene dado por un *punto de referencia* denominado *origen* y un *sistema de coordenadas*.
- El **origen de coordenadas** es el *punto de referencia* de un *sistema de coordenadas* y en él el valor de todas las coordenadas del sistema es nulo.

#### 1.3.1. Coordenadas Cartesianas o Rectangulares

Las coordenadas cartesianas de un punto  $P = (x, y, z)$  se determinan a través de caminos rectos a través del origen: primero a lo largo de eje  $X$ , luego paralelo al eje  $Y$  y finalmente paralelo al eje  $Z$ .

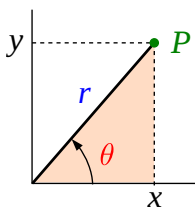


En los **sistemas de coordenadas curvilíneos**, los caminos pueden ser curvados. Los sistemas curvilíneos básicos son tres: *coordenadas polares* en  $\mathbb{R}^2$  y *coordenadas cilíndricas* y *esféricas* en  $\mathbb{R}^3$ .

#### 1.3.2. Coordenadas Polares

Las **coordenadas polares**<sup>10</sup> son un sistema de coordenadas bidimensional en el que cada punto del plano se determina por una distancia y un ángulo,  $P(r, \theta)$ .

- $r \geq 0$  es la **distancia**<sup>11</sup> del punto  $P$  al origen de coordenadas.
- $0 \leq \theta < 2\pi$  es el **ángulo** que forma con el eje  $X$  la recta que une  $P$  con el origen.



$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$$

$$r \geq 0$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

#### Ejemplo 1.4. Coordenadas Polares

- $r = a$  circunferencia de centro origen y radio  $a$ .
- $\theta = a$  recta que pasa por el origen y pendiente  $m = \tan \theta$ .
- $r(\theta) = a + b\theta$  espiral de Arquímedes.

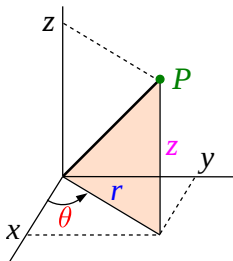
<sup>10</sup>En la [Sección 4.2.5, página 101](#) se explica una generalización conocido como **coordenadas elípticas**.

<sup>11</sup>A pesar de que  $r$  es una distancia y por tanto físicamente siempre es un valor mayor o igual que cero, en la práctica pueden aparecer valores negativos de  $r$ , lo cual indica que la distancia se toma en la misma dirección pero en sentido contrario, es decir con el mismo valor de  $r$  pero con un ángulo  $\theta + \pi$ . En estos casos se suelen denominar *coordenadas polares generalizadas*.

### 1.3.3. Coordenadas Cilíndricas

Las **coordenadas cilíndricas**<sup>12</sup> son un sistema de coordenadas tridimensional en el que cada punto del espacio se determina por dos distancias y un ángulo,  $P(r, \theta, z)$ .

- $r \geq 0$  es la coordenada radial, definida como la distancia<sup>13</sup> del punto  $P$  al eje  $Z$ .
- $0 \leq \theta < 2\pi$  es la coordenada *azimutal*, definida como el ángulo que forma con el eje  $X$  la recta que une  $P$  con el origen.
- $z$  coincide con la coordenada vertical o altura  $z$  de las coordenadas cartesianas tridimensionales.



$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \implies \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

$$r \geq 0$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

$$z \in \mathbb{R}$$

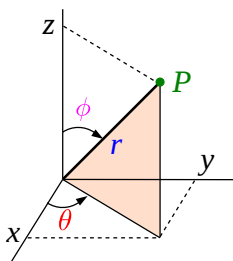
#### Ejemplo 1.5. Coordenadas Cilíndricas

- $r = a$  cilindro de radio  $a$  y eje el eje  $z$ .
- $\theta = a$  plano que contiene al eje  $z$ .
- $z = a$  plano paralelo al plano  $xy$ .

### 1.3.4. Coordenadas Esféricas (colatitud $\phi$ )

Las **coordenadas esféricas**<sup>14</sup> son un sistema de coordenadas tridimensional en el que cada punto del espacio se determina por una distancia y dos ángulos,  $P(r, \theta, \phi)$ .

- $r \geq 0$  es la coordenada radial, definida como la distancia del punto  $P$  al origen.
- $0 \leq \theta < 2\pi$  es la coordenada *azimutal*, definida como el ángulo que forma con el eje  $X$  la recta que une  $P$  con el origen.
- $0 \leq \phi \leq \pi$  coincide con la *colatitud*  $\phi$  correspondiente al ángulo que forma la recta que une el punto  $P$  con el origen y el eje  $Z$ .



$$\begin{cases} x = r \sin \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \phi \end{cases} \implies \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \\ \phi = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$

$$r \geq 0$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

$$\phi \in [0, \pi]$$

<sup>12</sup>Se pueden entender como una versión tridimensional de las coordenadas polares, al añadirle la variable altura  $z$ .

<sup>13</sup>Al igual que en el caso de polares y como también ocurre en coordenadas esféricas, este valor a veces puede ser negativo indicando que se mide en la misma dirección pero sentido contrario del segmento que une el origen con el punto en cuestión.

<sup>14</sup>Hay diferentes definiciones de las coordenadas esféricas, con diferentes nomenclaturas.

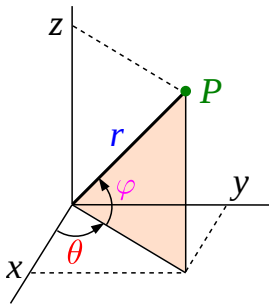
**Ejemplo 1.6.** Coordenadas Esféricas

- $r = a$  esfera de radio  $a$  y centro origen.
- $\theta = a$  plano que contiene al eje  $z$ .
- $\phi = a$  plano que pasa por el origen.

**1.3.5. Coordenadas Esféricas (latitud  $\varphi$ )**

Hay una segunda versión de las **coordenadas esféricas** donde en lugar del ángulo de la colatitud  $\phi$  se utiliza el ángulo de la latitud  $\varphi$ .

- $r \geq 0$  es la coordenada radial, definida como la distancia del punto  $P$  al origen.
- $0 \leq 2\pi$  es la coordenada *azimutal*, definida como el ángulo que forma con el eje  $X$  la recta que une  $P$  con el origen.
- $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$  coincide con la *latitud*  $\varphi$  correspondiente al ángulo que forma la recta que une el punto  $P$  con el origen y su proyección en el plano  $XY$ .



$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \theta \\ y = r \cos \varphi \sin \theta \\ z = r \sin \varphi \end{cases} \implies \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \\ \varphi = \arcsen \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$

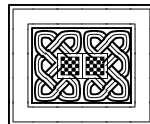
$$r \geq 0$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

**Ejemplo 1.7.** Coordenadas Esféricas (latitud)

- $r = a$  esfera de radio  $a$  y centro origen.
- $\theta = a$  plano que contiene al eje  $z$ .
- $\phi = a$  plano que pasa por el origen.



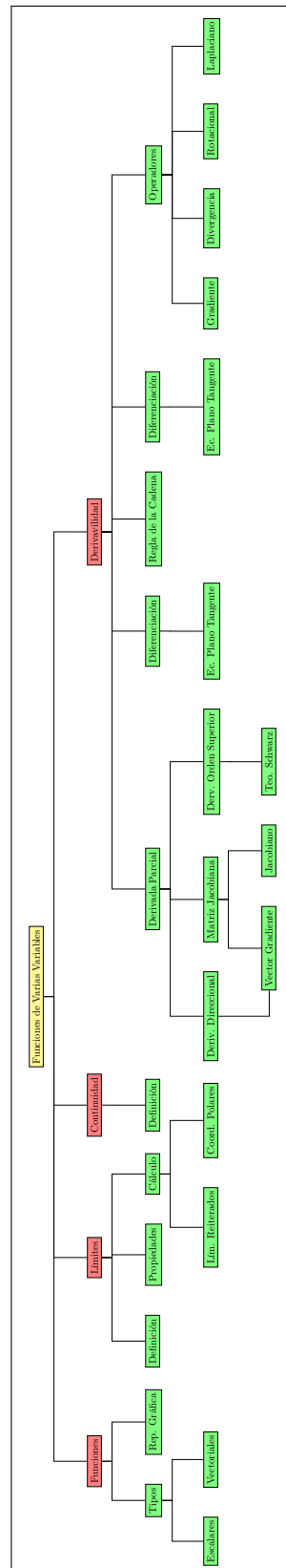
# Funciones de Varias Variables

## Contenido

---

<b>2.1</b>	<b>Funciones de Varias Variables</b>	<b>13</b>
2.1.1	Tipos de Funciones	13
2.1.2	Representación Gráfica de Funciones	14
2.1.3	Conjuntos de Nivel	14
<b>2.2</b>	<b>Límites en <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>15</b>
2.2.1	Propiedades Básicas de los Límites de Funciones Escalares	17
2.2.2	Límite Infinito y en el Infinito	17
2.2.3	Infinitesimos Equivalentes	19
2.2.4	Cálculo de Límites de Funciones de Varias Variables	20
2.2.5	Cálculo de Límites de Funciones Escalares de Varias Variables	20
<b>2.3</b>	<b>Continuidad en Funciones de Varias Variables</b>	<b>24</b>
<b>2.4</b>	<b>Derivabilidad en <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>26</b>
2.4.1	Derivada Parcial de Funciones Escalares	26
2.4.2	Ecuación del Plano Tangente de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$	28
2.4.3	Derivadas Direccionales	29
2.4.4	Derivada Parcial de Funciones Vectoriales. Matriz Jacobiana y Jacobiano	30
2.4.5	Vector Gradiente	31
2.4.6	Significado Geométrico del Gradiente	32
<b>2.5</b>	<b>Diferenciación</b>	<b>35</b>
2.5.1	Diferenciación en $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$	35
2.5.2	Diferenciación en $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$	36
2.5.3	Relación entre Derivabilidad, Diferenciabilidad y Continuidad	39
<b>2.6</b>	<b>Regla de la Cadena</b>	<b>43</b>
2.6.1	Regla de la Cadena en Funciones Escalares de Una Variable	43
2.6.2	Regla de la Cadena en Funciones de Varias Variables	43
<b>2.7</b>	<b>Derivadas Parciales de Orden Superior</b>	<b>47</b>
2.7.1	Funciones de Clase $C^n$	48
<b>2.8</b>	<b>Operadores Diferenciales</b>	<b>48</b>
2.8.1	Operador Gradiente $\nabla$	48
2.8.2	Operador Divergencia $div$	49
2.8.3	Operador Rotacional $rot$	49
2.8.4	Operador Laplaciano $\Delta, \nabla^2$	49
2.8.5	Aplicaciones en Campos Escalares y Vectoriales	50
2.8.6	La Ecuación de Laplace	51

---



## 2.1. Funciones de Varias Variables

### Definición 2.1. Función o Aplicación

Dados dos conjuntos  $X$  e  $Y$ , se denomina **función** o **aplicación** a toda regla que hace corresponder a cada elemento  $x$  del conjunto inicial  $X$  (**conjunto dominio**), un y solo un elemento  $y$  del conjunto final  $Y$  (**conjunto imagen**).

Se representa por:

$$f : X \mapsto Y \quad ; \quad x \xrightarrow{f} y$$

### Definición 2.2. Dominio e Imagen de una Función

Dada una función  $f : X \mapsto Y$ , se denomina:

- **Dominio** de  $f$  : al mayor conjunto  $D \subseteq X$  donde  $f$  está definida.
- **Imagen** de  $f$  : conjunto  $f(x) \subseteq Y \forall x \in D$ .

### 2.1.1. Tipos de Funciones

#### Funciones Reales y Complejas

- Si  $X \subseteq \mathbb{R}$  se habla de **variable real**.
- Si  $X \subseteq \mathbb{C}$  se habla de **variable compleja**.
- Si  $Y \subseteq \mathbb{R}$  se habla de **funciones reales**.
- Si  $Y \subseteq \mathbb{C}$  se habla de **funciones complejas**.

#### Ejemplo 2.1. Tipos de funciones.

$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$	Función Real de Variable Real.	Ej: $f(x) = x^2$	; $x \in \mathbb{R}$
$f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$	Función Real de Variable Compleja.	Ej: $f(x) =  x $	; $x \in \mathbb{C}$
$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$	Función Compleja de Variable Real.	Ej: $f(x) = ix$	; $x \in \mathbb{R}$
$f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$	Función Compleja de Variable Compleja.	Ej: $f(x) = x^2$	; $x \in \mathbb{C}$

En este curso solo se estudiarán funciones reales de variable real.

#### Funciones Escalares y Vectoriales

Las funciones reales de variable real<sup>1</sup>:

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

se clasifican en base a la dimensión de los conjuntos dominio e imagen de la siguiente forma:

- Si  $\begin{cases} n = 1 & \text{Función de una variable} \\ n > 1 & \text{Función de varias variables.} \end{cases}$
- Si  $\begin{cases} m = 1 & \text{Función Escalar} \\ m > 1 & \text{Función Vectorial.} \end{cases}$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = [ f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) ]$$

<sup>1</sup>En este texto se designarán a las *funciones escalares* con letras minúsculas y a las *funciones vectoriales* con letras mayúsculas.

**Ejemplo 2.2.** Ejemplos de Funciones Reales.

$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$	$F(x, y) = [x, \text{sen}(x, y)]$	Función Vectorial de varias variables.
$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$	$g(x, y, z) = x + yz$	Función Escalar de varias variables.
$H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$	$H(x) = [x, x^2, x^3]$	Función Vectorial de una variable, (curva <sup>2</sup> en $\mathbb{R}^3$ ).

**2.1.2. Representación Gráfica de Funciones**

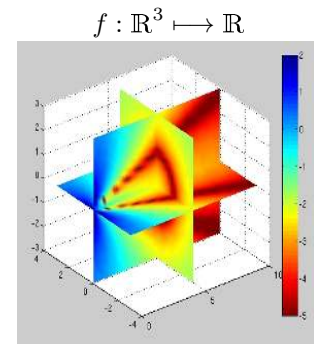
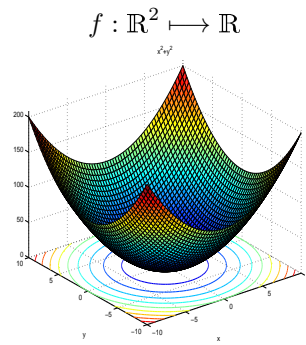
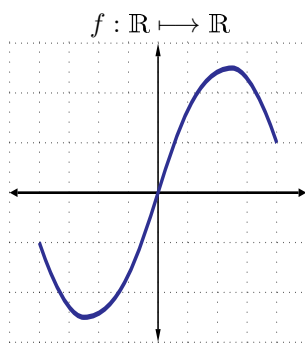
**Definición 2.3.** Gráfica de una Función

Sea  $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Se define la **gráfica** de  $F(x_1, \dots, x_n) = [f_1, \dots, f_m]$  como el subconjunto de  $\mathbb{R}^{n+m}$  de la forma:

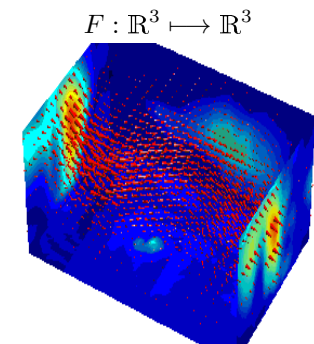
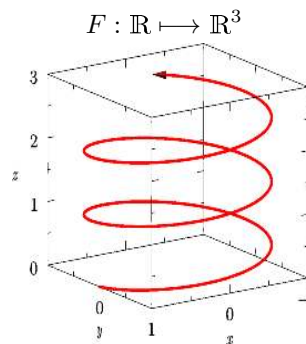
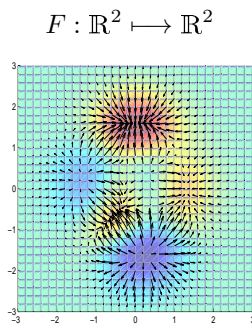
$$gr(F) = \{[x_1, x_2, \dots, x_n, f_1, f_2, \dots, f_m] \in \mathbb{R}^{n+m} : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A\}$$

- Para las *funciones escalares*:

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } n = 1 \implies \text{La gráfica es una } \textit{curva} \text{ en } \mathbb{R}^2. \\ \text{Si } n = 2 \implies \text{La gráfica es una } \textit{superficie} \text{ en } \mathbb{R}^3. \\ \text{Si } n \geq 3 \implies \text{La gráfica } \textit{no} \text{ se puede visualizar directamente.} \end{array} \right.$$



- Las *funciones vectoriales* típicas que se pueden dibujar son:



**2.1.3. Conjuntos de Nivel**

**Definición 2.4.** Conjunto de Nivel

Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una *función escalar* y sea  $k \in \mathbb{R}$ . Entonces el **conjunto de nivel** de valor  $k$  se define como el conjunto de los puntos:

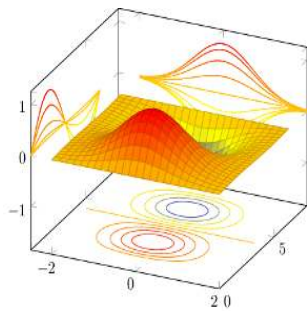
$$C_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A : f(x_1, x_2, \dots, x_n) = k\}$$

<sup>2</sup>Ver la Sección 5.2, página 123.

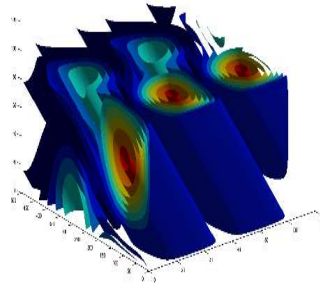
En función de la dimensión del espacio dominio se tienen los siguientes conjuntos de nivel:

- Si  $n = 2$  : *Curva de Nivel*<sup>3</sup>
- Si  $n = 3$  : *Superficie de Nivel*
- Si  $n = 4$  : *Volumen de Nivel*

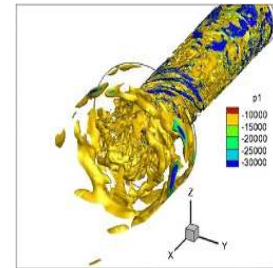
Curva de Nivel



Superficie de Nivel



Volumen de Nivel



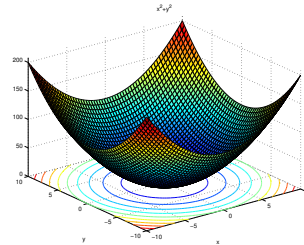
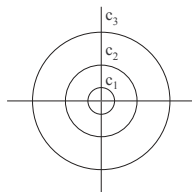
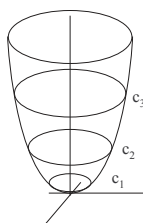
**Ejercicio 2.1.** Determinar las curvas de nivel de la función:

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Igualemos la función a una constante  $c \in \mathbb{R}$ :

$$f(x, y) = c \implies x^2 + y^2 = c$$

Las curvas de nivel de esta función son circunferencias de centro origen y radio  $\sqrt{c}$ .



En las siguientes secciones vamos a centrar fundamentalmente en *funciones escalares* del tipo:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{y} \quad f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

## 2.2. Límites en $\mathbb{R}^n$

Primeramente vamos a recordar la definición  $\epsilon - \delta$  de límite en funciones reales de una única variable real.

### Definición 2.5. Límite de Funciones Reales de Variable Real

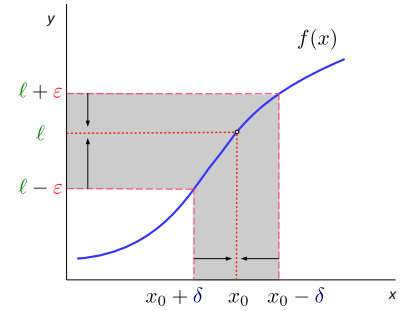
Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $x_0 \in A$ , entonces:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A \ 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$

<sup>3</sup>También denominadas *líneas de contorno*.

Básicamente la definición anterior nos dice que existe el límite  $\ell \in \mathbb{R}$  de una función cuando la variable independiente  $x$  tiende a un determinado valor  $x_0$  del dominio, si podemos obtener valores de  $f(x)$  tan cercanos a  $\ell$  como queramos (distancia  $\varepsilon$ ) correspondientes a puntos  $x$  cercanos a  $x_0$  (distancia  $\delta$ ).

Hay que tener muy en cuenta que el límite de una función estudia lo que ocurre en las *cercanías* de un punto del dominio, sin importar si la función está definida en ese punto o no.



Veamos ahora la generalización de la definición de límite a funciones vectoriales de varias variables.

**Definición 2.6. Límite de Funciones de Varias Variables**

Sea  $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y sea  $x_0 \in A$  ó  $\vec{x}_0 \in \partial A$ . Entonces:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} F(\vec{x}) = \ell \in \mathbb{R}^m \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} \in A \ 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta \implies \|F(\vec{x}) - \ell\| < \varepsilon$$

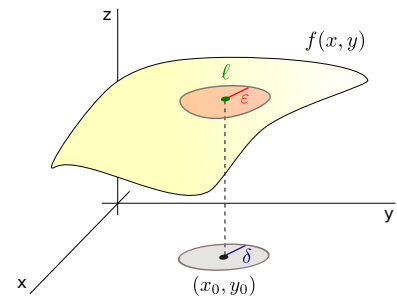
La definición es muy parecida, teniendo en cuenta que ahora el valor del límite  $\ell$  puede ser un vector (si  $m > 1$ ) y que las distancias se miden a través de la *norma euclídea*<sup>4</sup>.

En este caso, al ser el conjunto de funciones de varias variables muy variado, existen diferentes interpretaciones de la definición, pudiendo hacer una representación gráfica en algunos casos de dimensión baja.

- Funciones Escalares de dos variables (superficie)

En este caso la gráfica de la función corresponde con una superficie, estando el parámetro (distancia)  $\varepsilon$  en la imagen de la función y  $\delta$  en su dominio, como muestra la figura de la derecha.

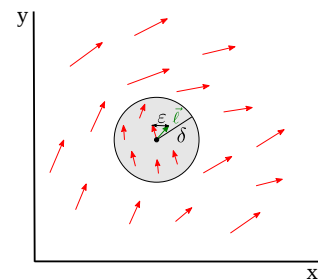
$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$



- Funciones Vectoriales de dos variables (campo vectorial en 2D)

En este caso la gráfica de la función corresponde con un campo vectorial en dos dimensiones, determinando  $\delta$  un radio de circunferencia en cuyo interior los vectores distan del límite (vector) menos que  $\varepsilon$ .

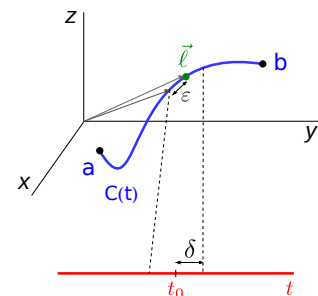
$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$



- Funciones Vectoriales de una variable (curva en 3D)

En este caso la gráfica de la función corresponde con una curva en 3D, estando el parámetro (distancia)  $\delta$  en el dominio unidimensional y  $\varepsilon$  en la imagen formada por una curva en el espacio, (cada punto de la curva viene dado por un vector 3D).

$$C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$



<sup>4</sup>Ver la Definición 1.6, página 4.

### 2.2.1. Propiedades Básicas de los Límites de Funciones Escalares

Los límites de funciones escalares de varias variables siguen las mismas reglas algebraicas que los límites de funciones de una sola variable.

Dadas dos funciones  $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\vec{x}_0 \in A$ , si existen los límites  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f$  y  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g$ , se cumple:

- $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} [f \pm g] = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f \pm \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g$
- $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} [cf] = c \left[ \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f \right] \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$
- $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} [fg] = \left[ \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f \right] \left[ \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g \right]$
- $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f}{\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g} \quad ; \quad \text{si } \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g \neq 0$
- $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} [f]^g = \left[ \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f \right]^{\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g} \quad ; \quad \text{si } \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f > 0$
- $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} [\log_u f] = \log_u \left[ \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f \right] \quad ; \quad \text{si } \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f > 0$

#### Ejemplo 2.3. Propiedades de los límites

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2 + y + 1) = \left[ \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} x^2 \right] + \left[ \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} y \right] + \left[ \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} 1 \right] = 1^2 + 2 + 1 = 4$
- $$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,-1)} \frac{e^{xy}}{\operatorname{sen} \frac{x}{y} - 1} &= \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,-1)} e^{xy}}{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,-1)} \left( \operatorname{sen} \frac{x}{y} - 1 \right)} = \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,-1)} xy}{\operatorname{sen} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,-1)} \frac{x}{y} - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,-1)} 1} = \\ &= \frac{e^0}{\operatorname{sen} 0 - 1} = \frac{1}{-1} = -1 \end{aligned}$$

### 2.2.2. Límite Infinito y en el Infinito

#### Definición 2.7. Límite Infinito y en el Infinito

- Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $\vec{x}_0 \in A$ . Entonces:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = +\infty \iff \forall M > 0 \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} \in A \ 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta \quad f(\vec{x}) > M$$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = -\infty \iff \forall M > 0 \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} \in A \ 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta \quad f(\vec{x}) < -M$$

- Sea  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ . y sea  $\vec{\ell} \in \mathbb{R}^m$ . Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \vec{\ell} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists K > 0 : \forall x > K \quad \|F(x) - \vec{\ell}\| < \varepsilon$$

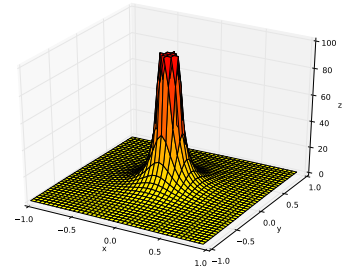
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \vec{\ell} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists K > 0 : \forall x < -K \quad \|F(x) - \vec{\ell}\| < \varepsilon$$

**Ejemplo 2.4.** Límite Infinito en una Superficie

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy}}{x^2 + y^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

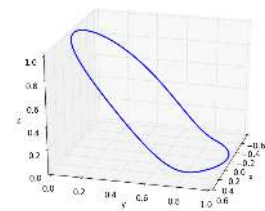
A medida que nos acercamos al origen  $(0, 0)$  en cualquier dirección el valor de la función crece de forma cuadrática tendiendo a infinito.

**Ejemplo 2.5.** Límite en el Infinito de una Curva en 3D

$$C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{t}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}, e^{-t^2} \right] = [0, 1, 0]$$

Notar que esta función para  $t = 0$  empieza en el punto  $(0, 0, 1)$  y cuando  $t \rightarrow \infty$  la función tiende al punto  $(0, 1, 0)$  por la derecha (valores positivos de  $x$ ). De igual forma ocurre cuando  $t \rightarrow -\infty$  pero por el lado izquierdo (valores negativos de  $x$ ).



Las propiedades algebraicas del límite son también válidas para el caso  $\pm\infty$ , siguiendo las siguientes reglas:

- $a + \infty = \infty$  ;  $a - \infty = -\infty$  , ( $\forall a \in \mathbb{R}$ )
- $\infty + \infty = \infty$  ;  $-\infty - \infty = -\infty$  ;  $\infty - \infty = \text{Indeterminado}$
- $a \cdot \infty = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$  ;  $\begin{cases} (+\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty) \\ (+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \\ (-\infty) \cdot (-\infty) = (+\infty) \end{cases}$  ;  $\infty \cdot 0 = \text{Indeterminado}$
- $\frac{a}{\infty} = 0$  , ( $\forall a \in \mathbb{R}$ ) ;  $\frac{0}{0} (= 0 \cdot \infty)$  ,  $\frac{\infty}{\infty} (= \infty \cdot 0) = \text{Indeterminado}$
- $\infty^a = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \text{ ó } a = +\infty \\ 0 & \text{si } a < 0 \text{ ó } a = -\infty \end{cases}$  ;  $\infty^\infty = \infty$  ;  $\infty^0 = \text{Indeterminado}$
- $a^\infty = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ 0 & \text{si } -1 < a < 1 \\ \# & \text{si } a \leq -1 \text{ (} \neq \text{ Indeterminado)} \end{cases}$  ;  $0^0$  ,  $1^\infty = \text{Indeterminado}$

**Nota 2.1.**

- *Indeterminado* : Algo que en principio, no se sabe su valor, (si lo tiene).
- *No existe*: Algo que no tiene ningún valor definido.

**Nota 2.2.**

$$\text{No son Indeterminaciones } \left\{ \begin{array}{l} 0^{+\infty} = 0 \\ 0^{-\infty} = +\infty \\ \infty^{+\infty} = +\infty \\ \infty^{-\infty} = 0 \end{array} \right\} \implies \text{se demuestra a partir de: } a^b = e^{b \log a}$$

## 2.2.3. Infinitésimos Equivalentes

## Definición 2.8. Infinitésimo

Se dice que una función escalar  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tiene un infinitésimo en un punto  $\vec{a} \in A$  si:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = 0$$

## Definición 2.9. Infinitésimos Equivalentes

Sean  $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dos infinitésimos en un punto  $\vec{a} \in A$ . Se dice que son **infinitésimos equivalentes** en  $a$  si:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = 0 \\ \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} g(\vec{x}) = 0 \end{array} \right\} \implies \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} = 1 \implies f \underset{\vec{a}}{\sim} g$$

Sea  $\varepsilon : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  un infinitésimo en un punto  $\vec{a} \in A$ , entonces también son infinitésimos equivalentes en  $a$  los siguientes:

$$\begin{array}{ll} \sin \varepsilon(\vec{x}) \sim \varepsilon(\vec{x}) \sim \arcsen \varepsilon(\vec{x}) & \tan \varepsilon(\vec{x}) \sim \varepsilon(\vec{x}) \sim \arctan \varepsilon(\vec{x}) \\ 1 - \cos \varepsilon(\vec{x}) \sim \frac{[\varepsilon(\vec{x})]^2}{2} & \ln[1 + \varepsilon(\vec{x})] \sim \varepsilon(\vec{x}) \\ [1 + \varepsilon(\vec{x})]^p - 1 \sim p\varepsilon(\vec{x}) & a^{\varepsilon(\vec{x})} - 1 \sim \varepsilon(\vec{x}) \ln a \quad (a > 0) \end{array}$$

## Teorema 2.1. Límites con Infinitésimos Equivalentes

Sean  $f, g, h : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  y  $g$  son infinitésimos equivalentes en  $\vec{a} \in A$ , entonces:

- $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) h(\vec{x}) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} g(\vec{x}) h(\vec{x})$
- $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{f(\vec{x})}{h(\vec{x})} = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{g(\vec{x})}{h(\vec{x})}$  y  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{h(\vec{x})}{f(\vec{x})} = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{h(\vec{x})}{g(\vec{x})}$

**Ejercicio 2.2.** Resolver los siguientes límites aplicando infinitésimos equivalentes.

$$\text{a) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin^2(xy)}{1 - \cos(x)} \quad \text{b) } \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{\ln(1+x-y)}{\tan(x-y)} \quad \text{c) } \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x-2y}{(1+x-2y)^3 - 1}$$

$$\text{a) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin^2(xy)}{1 - \cos(x)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(xy)^2}{\frac{1}{2}x^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2y^2 = \boxed{0}$$

$$\text{b) } \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{\ln(1+x-y)}{\tan(x-y)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x-y}{x-y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} 1 = \boxed{1}$$

$$\text{c) } \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x-2y}{(1+x-2y)^3 - 1} = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x-2y}{3(x-2y)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

### 2.2.4. Cálculo de Límites de Funciones de Varias Variables

#### Teorema 2.2. Límite de Funciones de Varias Variables

Sea  $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , siendo  $F(\vec{x}) = [f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})]$ , con  $f_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $\vec{x}_0 \in A$  entonces:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} F(\vec{x}) = \vec{\ell} = [\ell_1, \dots, \ell_m] \iff \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f_i(\vec{x}) = \ell_i \quad ; \quad 1 \leq i \leq m$$

Por tanto el cálculo del límite de una función **vectorial** de varias variables  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $F = [f_1, \dots, f_m]$ , se reduce a determinar  $m$  límites de funciones **escalares** de varias variables  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

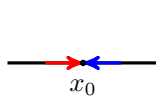
### 2.2.5. Cálculo de Límites de Funciones Escalares de Varias Variables

El elemento esencial en la determinación de límites de funciones de varias variables es el concepto de *aproximación a un punto*, expresado como  $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0$ .

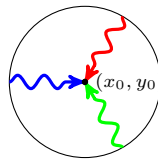
Formas de aproximarse a un punto en  $\mathbb{R}^n$ ;

- En las funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la sentencia  $x \rightarrow x_0$  significa que  $x$  se acerca a  $x_0$  en las dos direcciones posibles de la recta real<sup>5</sup>.
- En las funciones  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la sentencia  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  significa que nos acercamos al punto  $(x_0, y_0)$  siguiendo todos los **infinitos caminos** posibles<sup>6</sup> del *plano euclídeo*.
- En las funciones  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la sentencia  $(x, y, z) \rightarrow (x_0, y_0, z_0)$  significa que nos acercamos al punto  $(x_0, y_0, z_0)$  siguiendo todos los **infinitos caminos** posibles del *espacio euclídeo*<sup>7</sup>.

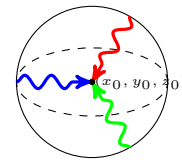
Las siguientes figuras esquematizan los posibles caminos que existen para acercarnos a un punto en  $\mathbb{R}$ , en  $\mathbb{R}^2$  y en  $\mathbb{R}^3$ . Las líneas zigzagueantes representan todas las diferentes formas de los caminos posibles en cada caso.



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$



$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$$



$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z)$$

El número de *caminos* para acercarse de  $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0$  en funciones  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  aumenta considerablemente al aumentar la dimensión  $n$ , por ello:

- Nos vamos a centrar en el estudio de distintos métodos de cálculo de límites para el caso particular de funciones  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . La mayoría de estos métodos son útiles para demostrar la inexistencia de un límite.
- Los conceptos y métodos para la determinación de funciones de  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  son fácilmente extensibles a funciones escalares generales  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

#### Límites Reiterados

Consiste en calcular el límite siguiendo caminos que son paralelos a los ejes  $x$  e  $y$ .

$$\text{Si } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = \ell \quad \implies \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) \right) = \ell$$

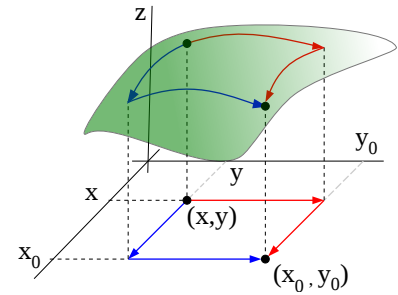
<sup>5</sup>Los denominados *límites laterales* por la derecha  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  y por la izquierda  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ .

<sup>6</sup>Éstos incluyen los caminos seguidos por todo tipo de curvas: rectas, parábolas, etc.

<sup>7</sup>Será una cantidad muchísimo más elevada que los posibles caminos que existen en el caso anterior del *plano euclídeo*.

Para ir de un punto cualquiera del plano euclídeo  $(x, y)$  al punto  $(x_0, y_0)$  podemos seguir diferentes caminos:

- $(x, y) \rightarrow (x_0, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  :  $\lim_{y \rightarrow y_0} \left[ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right]$
- $(x, y) \rightarrow (x, y_0) \rightarrow (x_0, y_0)$  :  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right]$



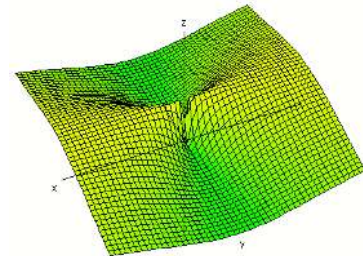
Correspondientes con los denominados **límites reiterados**.

Si los dos *límites reiterados* son distintos, el límite de la función en ese punto no existe, sin embargo si ambos son iguales, el límite puede existir o no, ya que solo hemos comprobado el límite siguiendo dos caminos en concreto, de los infinitos que existen.

**Ejercicio 2.3.** Probar que no existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$

Calculamos los límites reiterados:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \\ \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) &= \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0 \end{aligned} \right\}$$



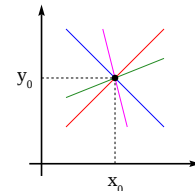
Como ambos límites son distintos el límite no existe

### Límites a través de Rectas

El haz de rectas que pasa por el punto  $(x_0, y_0)$  tiene por ecuación:

$$y = y_0 + m(x - x_0) \quad ; \quad m : \text{pendiente}$$

De forma que:



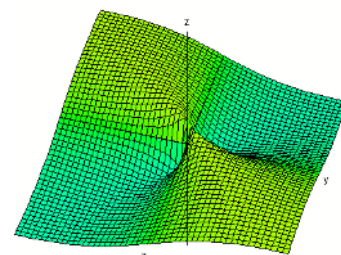
Si  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \ell \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \lim_{y \rightarrow y_0 + m(x-x_0)} f(x, y) \right] = \ell$  Independientemente del valor de  $m$

Si el valor de los límites a través de rectas depende de la pendiente  $m$ , el límite de la función en ese punto no existe, sin embargo si todos son iguales independientemente de  $m$ , el límite puede existir o no, ya que hay otros infinitas formas de para acercarse al punto por caminos que no corresponden con rectas.

**Ejercicio 2.4.** Probar que no existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

Calculamos primeramente los límites reiterados:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 \\ \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) &= \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0 \end{aligned} \right\}$$



Al ser iguales, no podemos determinar si este límite existe o no.

Calculamos entonces los límites a través de rectas:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow mx} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2(1 + m^2)} = \frac{m}{1 + m^2}$$

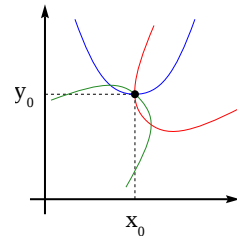
Como el valor de este límite depende del valor de la pendiente  $m$ , dicho límite no existe

### Límites a través de Parábolas

El haz de parábolas que pasa por el punto  $(x_0, y_0)$  tiene por ecuación:

$$y = y_0 + m(x - x_0)^2$$

De forma que:



Si  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = \ell \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{y \rightarrow y_0 + m(x-x_0)^2} f(x,y) \right) = \ell$  Independientemente del valor de  $m$

Al igual que en los casos anteriores, si el valor de los límites a través de parábolas depende del valor de  $m$ , el límite de la función en ese punto no existe. Sin embargo si todos son iguales independientemente de  $m$ , el límite puede existir o no, ya que existen otras infinitas formas de acercarse al punto.

**Ejercicio 2.5.** Probar que no existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 - y^2}$

Calculamos primeramente los límites reiterados:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^4 - y^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 \\ \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^4 - y^2} \right) &= \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0 \end{aligned} \right\}$$

Al ser iguales, no podemos determinar si este límite existe o no.

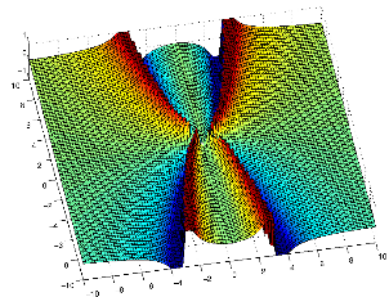
Determinamos entonces los límites a través de rectas:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow +mx} \frac{x^2 y}{x^4 - y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^3}{x^2(x^2 - m^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2 - m^2} = 0$$

El valor de este límite es independiente del valor de  $m$  y por tanto tampoco podemos asegurar la existencia del mismo. Probamos entonces los límites a través de parábolas:

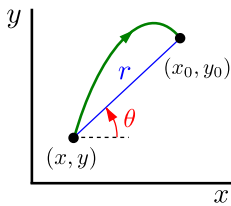
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow m^2 x} \frac{x^2 y}{x^4 - y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^4}{x^4(1 - m^2)} = \frac{m}{1 - m^2}$$

Como el valor de este límite depende del valor de  $m$ , podemos asegurar que dicho límite no existe



Necesitamos una forma general de especificar todas las posibles formas de acercarnos a un punto.

**Límites en Coordenadas Polares**



Cualquier curva en el plano euclídeo se puede expresar en coordenadas polares  $(r, \theta)$ , de forma que para encontrar el posible límite de una función  $f(x, y)$  en un punto  $(x_0, y_0)$  podemos hacer el cambio de variable:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) \implies \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + r \cos \theta \\ y = y_0 + r \operatorname{sen} \theta \end{array} \right\} \implies \lim_{r \rightarrow 0} f(r, \theta)$$

donde  $r > 0$  es la distancia del punto  $(x, y)$  al punto  $(x_0, y_0)$  y  $\theta \in [0, 2\pi)$  es el ángulo que forma el vector que une  $(x_0, y_0)$  con  $(x, y)$ , con el eje horizontal<sup>8</sup>. De esta forma podemos simular acercarnos al punto del límite siguiendo un camino general de cualquier forma.

El valor que se obtiene al utilizar coordenadas polares (al igual que por rectas, parábolas, etc.) es solo un **posible valor del límite de la función**, y para confirmarlo debemos demostrarlo, por ejemplo a través del siguiente teorema.

**Teorema 2.3. Existencia del Límite en Coordenadas Polares**

Sea  $f(x, y) = f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \operatorname{sen} \theta) = f(r, \theta)$ . Si se cumple:

1. Existe el  $\lim_{r \rightarrow 0} f(r, \theta) = \ell$  independiente del valor de  $\theta$ .
2. Es posible determinar una función  $g(r)$  tal que:  $|f(r, \theta) - \ell| \leq g(r) \quad \forall \theta \in [0, 2\pi)$
3.  $\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0$

Entonces en base a la definición de límite de una función escalar<sup>9</sup>, se tiene:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \ell$$

La existencia del límite se puede demostrar si se cumplen los puntos 2 y 3 del teorema. Las coordenadas polares nos ayudan, en determinados casos, a encontrar una función  $g(r)$  que verifique el teorema.

**Ejercicio 2.6.** En caso de existir, calcular el valor del siguiente límite:

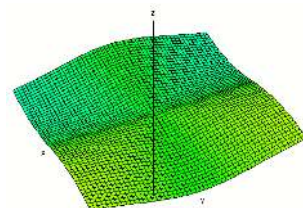
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{yx^2}{x^2 + y^2}$$

Calculamos el límite en coordenadas polares, verificando los tres puntos del teorema anterior:

1.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{yx^2}{x^2 + y^2} = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \end{array} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta}{r^2 (\underbrace{\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta}_1)} = \lim_{r \rightarrow 0} r \underbrace{(\cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta)}_{[-1,1]} = \boxed{0} \quad \forall \theta$
2.  $|r \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta - 0| = |r \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta| = |r| \underbrace{|\cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta|}_{[0,1]} \leq |r| = r \implies g(r) = r$
3.  $\lim_{r \rightarrow 0} r = 0$

Por tanto cumple los tres puntos del teorema y podemos asegurar:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{yx^2}{x^2 + y^2} = 0$$



<sup>8</sup>Se considera un giro positivo el contrario a las agujas del reloj.

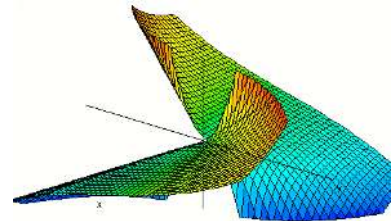
<sup>9</sup>Ver la **Definición 2.5**, página 15.

**Ejercicio 2.7.** En caso de existir, calcular el valor del siguiente límite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{x} \sqrt{x^2 + y^2}$$

Calculamos el límite en coordenadas polares:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{x} \sqrt{x^2 + y^2} &= \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r^2} \tan \theta = \lim_{r \rightarrow 0} |r| \tan \theta = \begin{cases} 0 & \theta \neq \{\pi/2, 3\pi/2\} \\ \pm 0 \cdot \infty & \theta = \{\pi/2, 3\pi/2\} \end{cases} \end{aligned}$$



El valor de este límite es cero en todas las direcciones excepto en la dirección del eje  $y$ , donde el límite no queda determinado en forma polar. Notar que en este caso la función  $g(r) = r \tan \theta$  no sirve para cumplir el teorema. Probamos a calcular el valor del límite pedido a través de una recta en la dirección del eje  $y$ , (donde queda indeterminado):

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{x} \sqrt{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x=0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{y}{x} \sqrt{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y|y|}{0} = \begin{cases} +\infty & y > 0 \\ -\infty & y < 0 \end{cases} = \#$$

Como este límite no existe, el valor del límite pedido tampoco existe

Notar que si este último límite hubiera quedado indeterminado o su valor hubiera sido 0, no podríamos decir nada sobre el valor del límite pedido de la función.

## 2.3. Continuidad en Funciones de Varias Variables

### Definición 2.10. Continuidad de Funciones de Varias Variables

Sea  $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $\vec{x}_0 \in A$ . Se dice que  $F(\vec{x})$  es **continua** en  $\vec{x} = \vec{x}_0$  si:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} F(\vec{x}) = F(\vec{x}_0)$$

Una función es *continua* en  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  si es *continua* en cada punto de  $A$ .

Las siguientes **funciones escalares** son *continuas* en su dominio:

- Funciones constantes. Ej:  $f(x, y) = 2$
- Funciones polinómicas. Ej:  $f(x, y, z) = 2x^2y + 2x - yz^3 + 1$
- Funciones exponenciales. Ej:  $f(x, y, z) = e^{xy-z}$
- Logaritmos. Ej:  $f(x, y) = \log(x - y)$
- Seno, coseno, tangente, ... Ej:  $f(x, y) = \text{sen}(x^2 + y)$

### Teorema 2.4. Propiedades de las Funciones Continuas

Sean las *funciones vectoriales*  $F, G : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y la *función escalar*  $h : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $F, G$  y  $h$  son *continuas* en  $\vec{a} \in A$ , entonces:

- $\|F\|$  es continua en  $a$ .
- $\alpha F + \beta G, F \cdot G$  y  $hF$  son continuas en  $a, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
- $\frac{1}{h}$  es continua  $\forall \vec{x} \in A : h(\vec{x}) \neq 0$ .

**Teorema 2.5. Composición de Funciones Continuas**

Sea  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Si  $F$  es continua en  $a$  y  $G$  es continua en  $F(a)$  entonces:

$$(G \circ F) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p \quad \text{es continua en } a$$

**Ejercicio 2.8.** Estudiar la continuidad de las siguientes funciones de varias variables.

a)  $f(x, y) = x^2y + x$

b)  $f(x, y) = \frac{\text{sen}(xy)}{xy}$

c)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(xy)}{xy} & xy \neq 0 \\ 1 & xy = 0 \end{cases}$

d)  $F(x, y, z) = \left[ \frac{1}{x+y}, \cos(xyz), \sqrt{x+y+z} \right]$

e)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

f)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

a) Como esta función es de tipo polinómico, es continua en todo  $\mathbb{R}^2$

b) Como el numerador es una composición de funciones continuas (seno y polinomio) y el denominador es un polinomio, ambas partes por separado son continuas en todo  $\mathbb{R}^2$ . La función, cociente de ambas, será continua en todos los puntos donde no se anula el denominador. Por tanto:

$$f(x, y) \text{ es continua en } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$$

Notar que los puntos del plano donde  $xy = 0$  son los puntos que forman el eje  $x$ , (donde  $y = 0$ ), y el eje  $y$ , (donde  $x = 0$ ).

c) Como:  $\lim_{xy \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(xy)}{xy} = 1 \implies f(x, y) \text{ es continua en } \mathbb{R}^2$

d) La continuidad de esta función vectorial dependerá de la continuidad de cada una de las funciones escalares componentes.

- $f_1(x, y, z) = \frac{1}{x+y} \implies$  continua en  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y \neq 0\}$ .
- $f_2(x, y, z) = \cos(xyz) \implies$  continua en  $\mathbb{R}^3$ .
- $f_3(x, y, z) = \sqrt{x+y+z} \implies$  continua en  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z \geq 0\}$ .

$$F(x, y, z) \text{ es continua en } \mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y=0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$$

e)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos(\theta) \text{sen}^2(\theta)}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos(\theta) \text{sen}^2(\theta) = 0 \implies |f(x, y) - 0| \leq r, \quad \lim_{r \rightarrow 0} r = 0$$

Por tanto:  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0) \implies f(x, y) \text{ continua en } \mathbb{R}^2$

f)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos(\theta) \text{sen}(\theta)}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \cos(\theta) \text{sen}(\theta) = \nexists \implies f(x, y) \text{ continua en } \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

## 2.4. Derivabilidad en $\mathbb{R}^n$

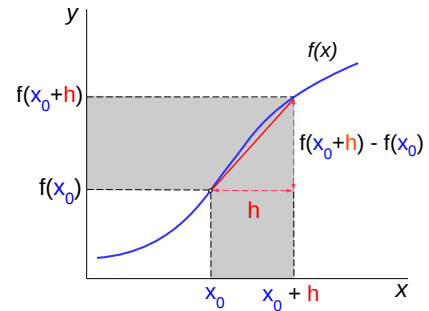
Empezamos recordando el concepto de derivada de una función de una única variable.

### Definición 2.11. Derivada de una Función de Una Variable

Sea  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $D$  con  $x_0 \in D$ . Se dice que  $f(x)$  es **derivable** en  $x = x_0$  si existe y es **finito** el siguiente límite:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

En el caso de que exista la derivada de una función en un punto, su valor nos da la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto.



### 2.4.1. Derivada Parcial de Funciones Escalares

#### Definición 2.12. Derivada Parcial de Funciones Escalares

Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un *abierto*<sup>10</sup> y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Se define la **derivada parcial** de  $f(\vec{x})$  con respecto a la variable  $x_i$  en el punto  $\vec{x}_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , si existe y es finito el límite<sup>11</sup>:

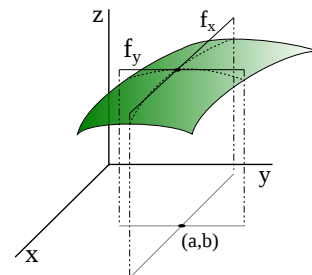
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) &= f_{x_i}(\vec{x}_0) = D_{x_i} f(\vec{x}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{e}_i) - f(\vec{x}_0)}{h} \quad \text{donde} \quad \vec{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0) \end{aligned}$$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$  es la derivada de  $f$  con respecto a la variable  $x_i$ , manteniendo constante el resto de las variables.

#### Interpretación Gráfica

Las dos derivadas parciales en una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  son:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = f_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = f_y(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h} \end{cases}$$



Estos valores representan las derivadas de la función  $f(x, y)$  en el punto  $(a, b)$  del dominio, en las direcciones del eje  $x$  e  $y$  respectivamente, y representan las pendientes de las rectas tangentes en ese punto y según esas direcciones.

<sup>10</sup>Ver la Sección 1.2, página 6.

<sup>11</sup>El símbolo utilizado para designar la *derivada parcial* es  $\partial$ , la cual no es ninguna letra griega, (no confundir con *delta*,  $\delta$ ). Fue utilizada por primera vez en el siglo XVIII por diferentes matemáticos. Recibe diferentes nombres, siendo los más habituales *parcial*, *del* o *d* de *Jacobi*.

Notar que que de forma general una función  $f(x, y)$  tiene infinitas derivadas parciales en un punto, en función de la dirección elegida<sup>12</sup>.

### Definición 2.13. Función Derivada Parcial

Si una función  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable con respecto a una variable  $x_i$  en todo punto  $\vec{x} \in A$ , se puede definir la **función derivada parcial** como aquella que a cada punto  $\vec{x}_0$  le hace corresponder el valor de  $f_{x_i}(\vec{x}_0)$ .

Las *funciones derivadas parciales*, siempre que queden perfectamente definidas<sup>13</sup>, se pueden obtener siguiendo las mismas **reglas de derivación** de las funciones de una variable, aplicadas a la variable sobre la que se deriva, y manteniendo constante el resto de variables.

**Ejercicio 2.9.** Calcular las dos funciones derivadas parciales de  $f(x, y) = x^4y + y^3$ .

Aplicando las reglas conocidas de derivación se obtiene fácilmente:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3y \quad ; \quad f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = x^4 + 3y^2$$

Notamos que ambas funciones están definidas para todo  $\mathbb{R}^2$ .

**Ejercicio 2.10.** Calcular, en caso de existir, las dos funciones derivadas parciales de la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^3 + y^3} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Aplicando las reglas de derivación para la función en todo punto distinto del origen se tiene:

$$f_x(x, y) = \frac{y(x^3 + y^3) - xy^2(3x^2)}{(x^3 + y^3)^2} = \frac{y(x^3 + y^3 - 3x^3y)}{(x^3 + y^3)^2} \quad ; \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

$$f_y(x, y) = \frac{2xy(x^3 + y^3) - xy^2(3y^2)}{(x^3 + y^3)^2} = \frac{xy(x^3 + y^3 - 3y^3)}{(x^3 + y^3)^2} \quad ; \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

Notamos que ambas funciones no están definidas en el punto  $(0, 0)$  a través de una indeterminación del tipo  $0/0$ . Calculamos el valor de las derivadas parciales en este punto a través de la definición:

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h0^2}{h^3 + 0^3} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^3} = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0h^2}{h^3 + 0^3} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^2} = 0$$

Por tanto:

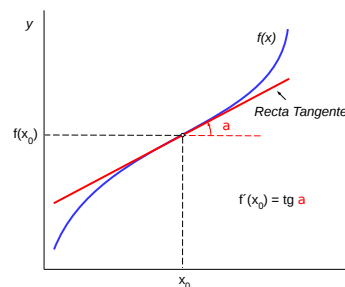
$$f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^3 + y^3 - 3x^3y)}{(x^3 + y^3)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad ; \quad f_y(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^3 + y^3 - 3y^3)}{(x^3 + y^3)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

<sup>12</sup>Ver la Sección 2.4.3, página 29.

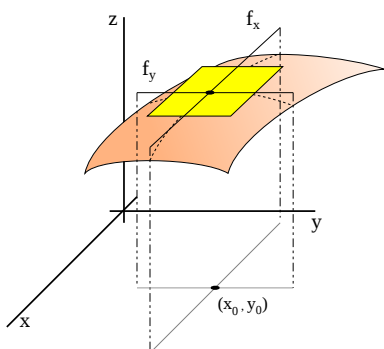
<sup>13</sup>En caso de que la función derivada parcial quede indeterminado en un punto dado, habrá que determinar su posible valor siguiendo la definición de derivada parcial en un punto, dada a través del límite expresado en Definición 2.12, página 26.

### 2.4.2. Ecuación del Plano Tangente de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

En las funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la idea de *suavidad* en un punto viene dada por la existencia de una recta tangente a ese punto que aproxima a la función en las cercanías del punto.



De forma similar, la idea de *suavidad* en un punto de una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  viene dada por la existencia de un plano tangente, de forma que sea una buena aproximación local a la función en las cercanías de ese punto. Veamos las condiciones que se tienen que cumplir:



$$\text{Ecuación de un plano en } \mathbb{R}^3 \implies z = c + ax + by$$

Las pendientes del plano a lo largo de los ejes  $x$  e  $y$  deben corresponder con el valor de las derivadas parciales de la función en ese punto:  $a = f_x(\vec{x}_0)$  y  $b = f_y(\vec{x}_0)$ . Así, la ecuación del plano tangente de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  será:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) (y - y_0)$$

En general, en funciones escalares  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se puede definir<sup>14</sup> un hiperplano de dimensión  $n$  que es el que mejor aproxima a la función en las cercanías de un punto  $\vec{x}_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$  y que tiene por ecuación:

$$x_{n+1} = f(\vec{x}_0) + f_{x_1}(\vec{x}_0)(x_1 - x_{01}) + \dots + f_{x_n}(\vec{x}_0)(x_n - x_{0n})$$

Las condiciones de existencia del (hiper) plano tangente a una función escalar en un punto se estudiarán en la **Sección 2.5, página 35**, a través del importante concepto de *diferenciación*.

**Ejercicio 2.11.** Determinar la ecuación del plano tangente de la siguiente función en el punto  $(-1, 1)$ .

$$f(x, y) = \frac{x + y^2}{1 - xy}$$

Empezamos determinando las derivadas parciales de la función y las evaluamos en el punto  $(-1, 1)$ :

$$f_x(x, y) = \frac{1 - xy + y(x + y^2)}{(1 - xy)^2} = \frac{1 + y^3}{(1 - xy)^2} \implies f_x(-1, 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$f_y(x, y) = \frac{2y(1 - xy) + x(x + y^2)}{(1 - xy)^2} = \frac{2y - xy^2 + x^2}{(1 - xy)^2} \implies f_y(-1, 1) = \frac{4}{4} = 1$$

Teniendo en cuenta que  $f(-1, 1) = 0$ , la ecuación del plano tangente en este punto es:

$$z = f(-1, 1) + f_x(-1, 1)[x - (-1)] + f_y(-1, 1)(y - 1) = 0 + \frac{1}{2}(x + 1) + y - 1$$

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} + y$$

<sup>14</sup>En caso de que exista.

### 2.4.3. Derivadas Direccionales

Como hemos visto, las derivadas parciales se calculan siguiendo las direcciones de los ejes de las variables independientes. De forma general se puede calcular una derivada con respecto a cualquier variable siguiendo una dirección arbitraria, dando lugar al concepto de *derivada direccional*.

#### Definición 2.14. Derivada Direccional

Sea  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $A$  abierto. Se llama *derivada* de  $f$  en  $\vec{x}_0 \in A$  a lo largo del vector no nulo  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ , si existe y es finito el límite:

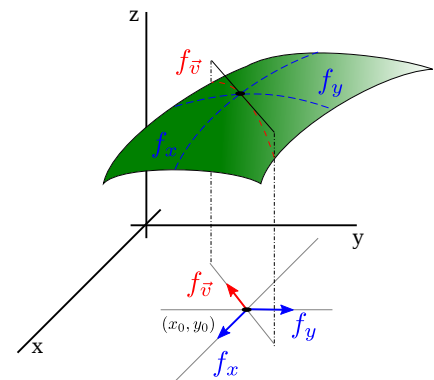
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) = D_{\vec{v}}f(\vec{x}_0) = f_{\vec{v}}(\vec{x}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{h}$$

Si  $\|\vec{v}\| = 1$  se denomina **derivada direccional** con respecto al vector  $\vec{v}$ .

Si  $\vec{v}$  es alguno de los vectores de la base canónica  $[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n]$ , por ejemplo  $\vec{e}_i$ , la derivada direccional coincide con la *derivada parcial* con respecto a la variable  $i$ -ésima.

#### Interpretación Gráfica

En el caso de funciones  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , podemos interpretar la derivada direccional  $f_{\vec{v}}(\vec{x}_0)$  como el valor de la pendiente de la recta tangente a la función en el punto  $\vec{x}_0$ , siguiendo la dirección dada por el vector  $\vec{v}$ .



$$D_{\vec{v}}f = f_{\vec{v}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{h} \quad \begin{cases} f_x & \rightarrow \vec{v} = [1, 0] \\ f_y & \rightarrow \vec{v} = [0, 1] \\ f_{\vec{v}} & \rightarrow \vec{v} = [v_x, v_y] \end{cases}$$

Notar que si el vector  $\vec{v}$  coincide con las direcciones de los ejes, el valor de la derivada direccional coincide con la correspondiente derivada parcial.

**Ejercicio 2.12.** Determinar el valor de la derivada direccional de la siguiente función en el punto  $(-1, 1)$  en la dirección del vector  $\vec{v} = [2, -1]$ .

$$f(x, y) = \frac{x + y^2}{1 - xy}$$

Primeramente normalizamos el vector:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}[2, -1]$$

Ahora aplicamos la definición de la derivada direccional en un punto:

$$\begin{aligned} f_{\vec{v}}(-1, 1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(-1, 1\right) + \frac{h}{\sqrt{5}}[2, -1] - f(-1, 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(-1 + \frac{2h}{\sqrt{5}}, 1 - \frac{h}{\sqrt{5}}\right) - f(-1, 1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-1 + \frac{2h}{\sqrt{5}} + \left(1 - \frac{h}{\sqrt{5}}\right)^2}{1 - \left(-1 + \frac{2h}{\sqrt{5}}\right)\left(1 - \frac{h}{\sqrt{5}}\right)} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1 + \frac{2h}{\sqrt{5}} + 1 + \frac{h^2}{5} - \frac{2h}{\sqrt{5}}}{h \left[1 - \left(-1 + \frac{h}{\sqrt{5}} + \frac{2h}{\sqrt{5}} - \frac{2h^2}{5}\right)\right]} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{5h \left(2 - \frac{3h}{\sqrt{5}} + \frac{2h^2}{5}\right)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{5 \left(2 - \frac{3h}{\sqrt{5}} + \frac{2h^2}{5}\right)} = \boxed{0} \end{aligned}$$

### 2.4.4. Derivada Parcial de Funciones Vectoriales. Matriz Jacobiana y Jacobiano

#### Matriz Jacobiana y Jacobiano

##### Definición 2.15. Matriz Jacobiana

Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto y  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Las derivadas parciales de  $F(\vec{x}) = [f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})]$  con respecto a cada variable  $x_i$  en un punto  $\vec{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ , se calculan sobre cada una de las componentes de la función  $f_1, \dots, f_m$ , y se disponen en forma matricial denominada **matriz jacobiana**<sup>15</sup>:

$$DF(\vec{x}) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

##### Definición 2.16. Jacobiano

El determinante de la *matriz jacobiana* de una matriz  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  recibe el nombre de **jacobiano**<sup>16</sup>.

$$J_F(\vec{x}) = |DF(\vec{x})| = \left| \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right|$$

**Ejercicio 2.13.** Calcular las derivadas parciales, la matriz jacobiana y el jacobiano de la siguiente función  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

$$F(x, y) = [f_1(x, y), f_2(x, y)] = [x + y^2, \log(x^2 + y)]$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2y \quad ; \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y} \quad ; \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{2x}{x^2 + y}$$

$$DF(x, y) = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)} = \begin{bmatrix} 1 & 2y \\ \frac{2x}{x^2 + y} & \frac{1}{x^2 + y} \end{bmatrix} \quad ; \quad J_F(x, y) = |DF(x, y)| = \frac{1 - 4xy}{x^2 + y}$$

**Ejercicio 2.14.** Calcular la matriz jacobiana de la siguiente función vectorial:

$$F(x, y) = [xe^{x+y^2}, \text{sen}(x - y)]$$

$$DF(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x+1)e^{x+y^2} & 2xye^{x+y^2} \\ \cos(x-y) & -\cos(x-y) \end{bmatrix}$$

<sup>15</sup>En honor al matemático Prusiano (ahora Alemania) Karl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851). Notar que en algunos textos se define la matriz jacobiana como la inversa de la dada aquí.

<sup>16</sup>La nomenclatura utilizada para denotar la matriz jacobiana y el jacobiano es variada y a veces confusa. En este texto se utilizará la letra jota mayúscula  $J$  para definir el jacobiano, es decir el determinante de la matriz jacobiana.

### 2.4.5. Vector Gradiente

Una forma alternativa de expresar la matriz jacobiana de una función de varias variables es de la forma<sup>17</sup>:

$$DF(\vec{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\vec{x}_0) \end{bmatrix}$$

donde cada uno de los *vectores fila* de la *matriz jacobiana* se denominan **vector gradiente** de la función escalar  $f_i$ , y vienen dados por:

$$\nabla f_i = \text{grad}(f_i) = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right]$$

En las *funciones escalares*  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la matriz jacobiana coincide con el *vector gradiente* de la función:

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \Longrightarrow \quad Df(\vec{x}) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right] = \nabla f(\vec{x})$$

**Ejercicio 2.15.** Calcular la matriz jacobiana y el vector gradiente de la función escalar:

$$f(x, y, z) = xyz$$

En este caso, al ser una función escalar, la matriz jacobiana y el gradiente coinciden:

$$Df = \nabla f = [f_x, f_y, f_z] = [yz, xz, xy]$$

### Gradiente y Derivadas Direccionales

#### Teorema 2.6. Existencia de la Derivada Direccional

Si  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es *diferenciable*<sup>18</sup>, entonces todas las derivadas direccionales existen y pueden determinarse a través del *gradiente* de la función de la siguiente forma:

$$D_{\vec{v}}f(\vec{x}) = Df(\vec{x}) \cdot \vec{v} = \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{v} = \frac{\partial f}{\partial x_1}v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}v_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}v_n$$

donde  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|\vec{v}\| = 1$ .

**Ejercicio 2.16.** Calcular la derivada direccional de la siguiente función en el punto  $(1, 0, 0)$ , siguiendo la dirección dada por el vector  $\vec{v} = [1, 1, 1]$ .

$$f(x, y, z) = x^2e^{-yz}$$

Primeramente normalizamos el vector:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1, 1, 1]$$

<sup>17</sup>El símbolo  $\nabla$  se denomina **nabla** o **del** y corresponde con la letra griega delta mayúscula  $\Delta$  invertida.

<sup>18</sup>Ver la [Sección 2.5](#), página 35.

Por otra parte:

$$\nabla f = [2xe^{-yz}, -x^2ze^{-yz}, -x^2ye^{-yz}] \implies \nabla f(1, 0, 0) = (2, 0, 0)$$

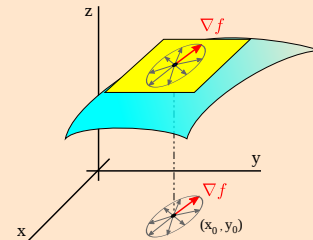
Por tanto:

$$D_{\vec{v}}f(1, 0, 0) = \nabla f(1, 0, 0) \cdot \vec{v} = [2, 0, 0] \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}[1, 1, 1] = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

## 2.4.6. Significado Geométrico del Gradiente

### Teorema 2.7. Significado Geométrico del Gradiente

Si  $\nabla f(x) \neq \vec{0}$ , el vector  $\nabla f(x)$  apunta en la dirección a lo largo de la cual  $f$  crece más rápido.



### Demostración 2.7.

Dado un punto  $\vec{x}_0$  vamos a calcular cual es la dirección de máximo crecimiento de la función en ese punto. La dirección de máximo crecimiento será aquella en la cual la derivada direccional sea máxima. Sean  $v$  un vector unitario, entonces:

$$D_{\vec{v}}f(\vec{x}_0) = \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{v} = \|\nabla f(\vec{x}_0)\| \|\vec{v}\| \cos \theta = \|\nabla f(\vec{x}_0)\| \cos \theta$$

Donde  $\theta$  es el ángulo que forman los vectores  $\nabla f(\vec{x}_0)$  y  $\vec{v}$ . Para que este valor sea máximo,  $\theta = 0$ , y por tanto  $\nabla f(\vec{x}_0)$  y  $\vec{v}$  son paralelos.

- El vector gradiente tiene una dimensión menos que la gráfica de la función.
- Si  $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$  la derivada direccional en cualquier dirección es cero.
- La dirección de mínimo crecimiento, (máximo decrecimiento), es  $-\nabla f(\vec{x}_0)$ .

**Ejercicio 2.17.** Determinar la dirección de máximo crecimiento y máximo decrecimiento de la siguiente función desde el punto  $(0, 1)$ .

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

$$\nabla f(x) = (2x, -2y) \implies \begin{cases} \nabla f(0, 1) = [0, -2] & \text{dirección de máximo crecimiento} \\ -\nabla f(0, 1) = [0, 2] & \text{dirección de máximo decrecimiento} \end{cases}$$

### Teorema 2.8. Relación entre el Gradiente y los Conjuntos de Nivel

Sea  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Si existe  $\nabla f(\vec{x}_0)$ , este vector es normal (perpendicular) al conjunto de nivel<sup>19</sup> que pasa por  $\vec{x}_0$ .

<sup>19</sup>Ver la Sección 2.1.3, página 14.

**Demostración 2.8.**

Vamos a verlo en funciones  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , para  $n = \{2, 3\}$ .

Caso:  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

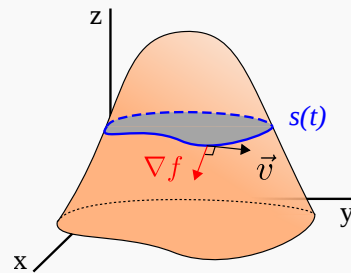
$f(x, y) = c$  es una curva de nivel en el espacio  $\mathbb{R}^3$ , para determinados valores de  $c$  constante. La curva de nivel puede definirse de forma paramétrica en  $\mathbb{R}^3$  como:

$$s(t) = \begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) = f[x(t), y(t)] \end{cases}$$

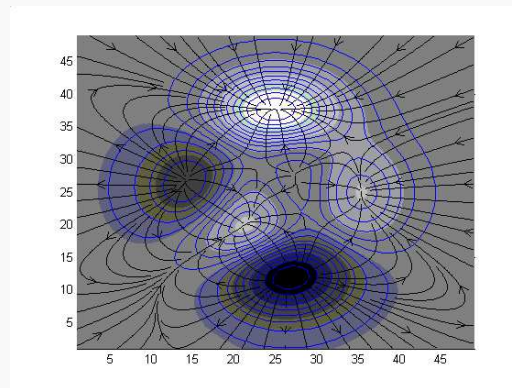
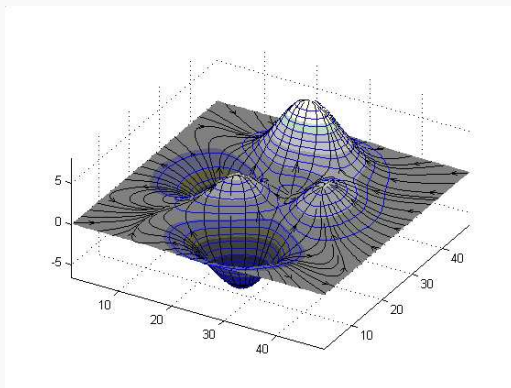
Al ser  $s(t)$  una curva de nivel debe verificar la ecuación:  $f[s(t)] = f[x(t), y(t)] = c$ . Derivando entonces con respecto al parámetro  $t$ , (a través de la Regla de la Cadena), se tiene:

$$\frac{df[s(t)]}{dt} = \frac{dc}{dt} ; \nabla f \cdot \vec{v} = 0 ; \text{ donde : } \vec{v} = \frac{ds(t)}{dt} = [x'(t), y'(t)]$$

El vector  $\vec{v}$  es tangente a cada punto de la curva de nivel y como hemos visto el vector gradiente es perpendicular a él, como queríamos demostrar.



Las curvas de nivel y los vectores gradientes son familias de curvas ortogonales.



Caso:  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x, y, z) = c$  es una superficie de nivel en el espacio  $\mathbb{R}^3$ .

Dada una curva en  $\mathbb{R}^3$  en forma paramétrica :  $s(t) = \begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{cases}$

Si  $s(t)$  está contenida en la superficie de nivel debe verificar la ecuación:

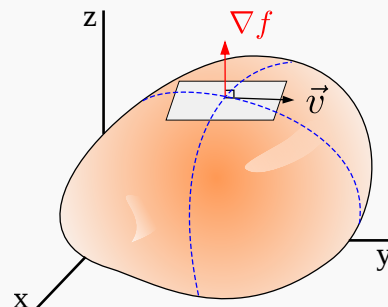
$$f[s(t)] = f[x(t), y(t), z(t)] = c$$

Derivando con respecto al parámetro  $t$  (a través de la Regla de la Cadena) :

$$\frac{df[s(t)]}{dt} = \frac{dc}{dt} ; \nabla f \cdot \vec{v} = 0 ; \vec{v} = \frac{ds(t)}{dt} = [x'(t), y'(t), z'(t)]$$

Por tanto, los vectores  $\nabla f$  y  $\vec{v}$  son perpendiculares, como queríamos demostrar.

De forma análoga se puede demostrar para cualquier conjunto de nivel de una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .



**Ejercicio 2.18.** Dada la siguiente función definida en el dominio  $D$ :

$$f(x, y) = (1 - x^2) \operatorname{sen} y \quad ; \quad D = [0, 1] \times [0, \pi]$$

- a) Determinar la dirección  $\vec{v} = [v_x, v_y]$  en la cual tenemos que movernos en cada punto  $(x, y)$  para alcanzar el máximo de  $f$  tan rápido como sea posible.
- b) Determinar la dirección a lo largo de la cual el valor de  $f$  no cambia.

- a) Como establece el **Teorema 2.7, página 32**, la función  $f(x, y)$  crece más rápidamente en la dirección de su vector gradiente, por tanto la dirección pedida  $\vec{v}$  en cada punto  $(x, y)$  del dominio  $D$  viene dada por:

$$\vec{v} = \nabla f = [-2x \operatorname{sen} y, (1 - x^2) \cos y]$$

- b) Las curvas de nivel<sup>20</sup> de  $f(x, y)$  son los conjuntos de puntos  $(x, y)$  donde la función tiene un valor constante, por tanto en este apartado nos están pidiendo la dirección de la curva de nivel en cada punto  $(x, y)$  del dominio. Esta dirección corresponde a la dada por el vector tangente a la curva de nivel en cada punto.

El **Teorema 2.8, página 32**, establece que el vector gradiente de la función en un punto siempre es perpendicular a las curvas de nivel, por tanto la dirección  $\vec{v}$  pedida en este caso debe verificar:

$$\vec{v} \cdot \nabla f = 0 \quad \implies \quad \vec{v} = [(1 - x^2) \cos y, 2x \operatorname{sen} y]$$

Notar que para su cálculo ha bastado intercambiar las componentes del vector gradiente y cambiar el signo a una de ellas.

### Teorema 2.9. Plano Tangente a una Superficie de Nivel

Sea  $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  y sea una superficie de nivel  $S$  definida por  $f(x, y, z) = c$ , con  $c$  constante. El plano tangente de  $S$  en un punto  $(x_0, y_0, z_0)$  de la superficie de nivel está definido por la ecuación<sup>21</sup>:

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot [(x - x_0), (y - y_0), (z - z_0)] = 0$$

**Ejercicio 2.19.** Calcular la ecuación del plano tangente en el punto  $(1, 1, 1)$  de la superficie definida por:

$$3xy + z^2 = 4$$

Definimos primeramente una función  $f(x, y, z)$  a través de la ecuación dada y calculamos el valor del gradiente de la función en el punto  $(1, 1, 1)$ :

$$3xy + z^2 - 4 = 0 \quad \implies \quad f(x, y, z) = 3xy + z^2 - 4 \quad ; \quad \nabla f = [3y, 3x, 2z] \quad ; \quad \nabla f(1, 1, 1) = [3, 3, 2]$$

Por tanto, la ecuación del plano tangente a la superficie en este punto es :

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot [(x - x_0), (y - y_0), (z - z_0)] = [3, 3, 2] \cdot [x - 1, y - 1, z - 1] = 3(x - 1) + 3(y - 1) + 2(z - 1) = 0$$

$$3x + 3y + 2z = 8$$

<sup>20</sup>Ver la **Sección 2.1.3, página 14**.

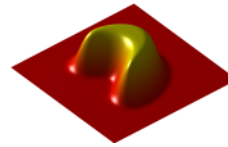
<sup>21</sup>Corresponde con la ecuación normal de un plano en  $\mathbb{R}^3$ .

## 2.5. Diferenciación

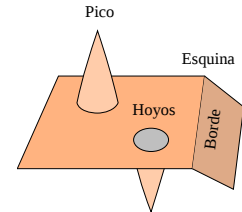
En funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se sabe de forma intuitiva que:

- Una función es **continua** si no tiene *grietas* en su gráfica.
- Una función es **derivable** si es además de *continua* es *suave*, sin esquinas ni picos.

En funciones de varias variables la continuidad y derivabilidad tienen un comportamiento similar, sin embargo, la existencia de derivadas parciales no asegura la *suavidad* en un punto.



Función Suave



Problemas de suavidad

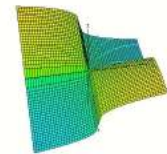
### Ejemplo 2.6. Suavidad de las Funciones de Varias Variables

La función  $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$  es continua en todo  $\mathbb{R}^2$  y además sus derivadas parciales existen en todos los puntos, incluido el origen  $(0, 0)$ .

- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$  ;  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 * h^{\frac{1}{3}} - 0}{h} = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$  ;  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 * h^{\frac{1}{3}} - 0}{h} = 0$

A pesar de todo ello la función no es suave en  $(0, 0)$ , presentando una especie de esquina en ese punto, como muestra la siguiente gráfica.

La explicación está en que las derivadas direccionales de la función en el punto  $(0, 0)$  no varían de forma suave, es decir, no están todas contenidas en un único plano, que correspondería con el plano tangente a la función en dicho punto.



### 2.5.1. Diferenciación en $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Recordamos que una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es *derivable* en un punto  $x_0$  si existe y es finito el siguiente límite:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

Es decir, existe una recta tangente  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  que mejor aproxima a la función cerca de  $x_0$ . Vamos a generalizar este concepto a funciones  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

#### Definición 2.17. Diferenciación en $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Se dice que una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es **diferenciable** en un punto  $(x_0, y_0)$  si existen las derivadas parciales  $f_x(x_0, y_0)$  y  $f_y(x_0, y_0)$ , y además:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0$$

El plano tangente a una función en punto existe si y solo si la función es diferenciable en ese punto.

**Ejercicio 2.20.** Calcular, en caso de existir, la ecuación del plano tangente de la función:

$$f(x, y) = x^2 + y^3 + e^{xy}$$

en el punto  $(1, 0)$ .

Calculamos primero las derivadas parciales de la función:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + ye^{xy} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + xe^{xy}$$

Entonces determinamos si es diferenciable en el punto  $(1, 0)$ .

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{f(x, y) - f(1, 0) - f_x(1, 0)(x - 1) - f_y(1, 0)(y - 0)}{\|(x, y) - (1, 0)\|} = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x^2 + y^3 + e^{xy} - 2 - 2(x - 1) - 1(y - 0)}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 0)^2}} = \begin{cases} x = 1 + r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(1 + r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^3 + e^{r(1+r \cos \theta) \sin \theta} - 2 - 2(1 + r \cos \theta - 1) - r \sin \theta}{\sqrt{(1 + r \cos \theta - 1)^2 + (r \sin \theta)^2}} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(1 + r \cos \theta)^2 + r^3 \sin^3 \theta + e^{r(1+r \cos \theta) \sin \theta} - 2 - 2r \cos \theta - r \sin \theta}{r} \stackrel{0/0}{\hat{=}} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} 2(1 + r \cos \theta) \cos \theta + 3r^2 \sin^3 \theta + e^{r(1+r \cos \theta) \sin \theta} (1 + r \cos \theta) \sin \theta - 2 \cos \theta - \sin \theta = \\ &= 2 \cos \theta + \sin \theta - 2 \cos \theta - \sin \theta = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, la función sí es diferenciable en  $(1, 0)$  y por tanto existe la ecuación del plano tangente en ese punto, siendo su ecuación:

$$z = f(1, 0) + f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)(y - 0) = 2 + 2(x - 1) + 1(y) = \boxed{2x + y}$$

### 2.5.2. Diferenciación en $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Vamos a generalizar el concepto de diferenciación a **funciones vectoriales** de varias variables  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Para entender el proceso de generalización vamos a expresar la diferenciación en *funciones escalares*  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  visto en la [Sección 2.5.1, página 35](#), de forma más apropiada. La *matriz Jacobiana*<sup>22</sup> de  $f$  viene dada por:

$$Df(x_0, y_0) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right]$$

La *ecuación del plano tangente*<sup>23</sup> se puede expresar entonces como<sup>24</sup>:

$$z = f(x_0, y_0) + Df(x_0, y_0) \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

y la *condición de diferenciabilidad*<sup>25</sup> se puede expresar entonces como:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - Df(x_0, y_0) \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0$$

En base a esto vamos a generalizar el concepto de *diferenciabilidad* a funciones vectoriales.

<sup>22</sup>Ver la [Definición 2.15, página 30](#).

<sup>23</sup>Ver la [Sección 2.4.2, página 28](#).

<sup>24</sup>Notar que en este caso la matriz jacobiana es un vector fila mientras que el vector  $[x - x_0, y - y_0]$  está dispuesto en forma de columna, de forma que definen un *producto matricial* de ambos vectores (matrices).

<sup>25</sup>Ver la [Definición 2.17, página 35](#).

**Definición 2.18.** Diferenciación en  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Se dice que  $F$  es **diferenciable** en  $\vec{x}_0 \in A$  si existen las derivadas parciales de  $F$  en  $\vec{x}_0$  y además:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{\|F(\vec{x}) - F(\vec{x}_0) - DF(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)\|}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0$$

Donde:

$$F(\vec{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{bmatrix} \quad ; \quad F(\vec{x}_0) = \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}_0) \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{x} - \vec{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1 - x_{01} \\ \vdots \\ x_n - x_{0n} \end{bmatrix}$$

$$DF(\vec{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{bmatrix}$$

Estudiar la diferenciabilidad de una función vectorial de varias variables a través de la definición anterior suele ser bastante complicado<sup>26</sup>. Por ello, desde un punto de vista práctico se suele utilizar el siguiente teorema.

**Teorema 2.10.** Diferenciabilidad en Funciones Vectoriales

Una función vectorial  $F(x_1, \dots, x_n) = [f_1, \dots, f_m]$  es *diferenciable* en un punto  $\vec{x}_0$  si y solo si cada una de las funciones componentes  $f_i$  es *diferenciable* en ese punto.

**Ejercicio 2.21.** Estudiar la diferenciabilidad de la siguiente función  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  :

$$F(x, y, z) = \left[ x^2 + yz, \sqrt{x + y + z}, \frac{y}{xz} \right]$$

Analizamos la diferenciabilidad cada una de las tres componentes de la función vectorial:

- $x^2 + yz$  es una función de tipo polinómica por tanto diferenciable en todo punto de  $\mathbb{R}^3$ .
- $\sqrt{x + y + z}$  es diferenciable para  $\mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) : x + y + z \leq 0\}$ .
- $y/xz$  es diferenciable para  $\mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) : xz = 0\}$ .

Por tanto:

$$F \text{ es diferenciable en } \mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) : x + y + z \leq 0\} \cup \{(x, y, z) : xz = 0\}$$

<sup>26</sup>Ver el [Ejercicio 2.22](#), página 38.

**Ejercicio 2.22.** Estudiar la diferenciabilidad de la siguiente función vectorial en el punto  $(1, 2)$ , utilizando para ello la definición de diferenciabilidad.

$$F(x, y) = [1 + x, -y, xy]$$

Notar que aplicando el **Teorema 2.10** se demuestra fácilmente que  $F(x, y)$  es diferenciable en todo  $\mathbb{R}^2$ , pero el ejercicio pide demostrarlo a través de la definición, por tanto, según la definición de diferenciabilidad se tiene que cumplir:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\left\| F(x, y) - F(1, 2) - DF(1, 2) \begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \end{bmatrix} \right\|}{\| [x-1, y-2] \|} = 0$$

donde:

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} 1+x \\ -y \\ xy \end{bmatrix} \quad ; \quad F(1, 2) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$DF(x, y) = \begin{bmatrix} f_{1x} & f_{1y} \\ f_{2x} & f_{2y} \\ f_{3x} & f_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ y & x \end{bmatrix} \quad ; \quad DF(1, 2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\left\| \begin{bmatrix} 1+x \\ -y \\ xy \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \end{bmatrix} \right\|}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\left\| \begin{bmatrix} x-1 \\ 2-y \\ xy-2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x-1 \\ 2-y \\ 2x+y-4 \end{bmatrix} \right\|}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ xy-2x-y+2 \end{bmatrix} \right\|}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sqrt{(xy-2x-y+2)^2}}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} = \sqrt{\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{(xy-2x-y+2)^2}{(x-1)^2 + (y-2)^2}} \end{aligned}$$

Resolvemos la indeterminación  $0/0$  del límite, y para ello podemos hacer el cambio de variable a polares:  $x = 1 + r \cos \theta$  e  $y = 2 + r \sin \theta$ .

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{(xy-2x-y+2)^2}{(x-1)^2 + (y-2)^2} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{[(1+r \cos \theta)(2+r \sin \theta) - 2r \cos \theta - r \sin \theta - 2]^2}{r^2} = \\ &= \left( \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(1+r \cos \theta)(2+r \sin \theta) - 2r \cos \theta - r \sin \theta - 2}{r} \right)^2 \end{aligned}$$

Resolviendo el límite del interior de la potencia:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(1+r \cos \theta)(2+r \sin \theta) - 2r \cos \theta - r \sin \theta - 2}{r} &\stackrel{0/0}{=} \underset{\hat{H}}{\lim_{r \rightarrow 0}} \frac{0}{0} \\ &\stackrel{0/0}{=} \underset{\hat{H}}{\lim_{r \rightarrow 0}} [(2+r \sin \theta) \cos \theta + (1+r \cos \theta) \sin \theta - 2 \cos \theta - \sin \theta] = 0 \end{aligned}$$

Por tanto:

Esta función es diferenciable en el punto  $(1, 2)$

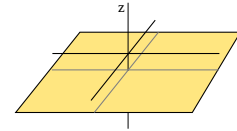
### 2.5.3. Relación entre Derivabilidad, Diferenciabilidad y Continuidad

- En funciones de una variable, si  $f(x)$  es derivable implica que es continua.
- En funciones de varias variables, el hecho de que existan las derivadas parciales no implica *diferenciabilidad* y tampoco implica continuidad de la función.

**Ejercicio 2.23.** Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de la siguiente función:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \text{ ó } y = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0 \\ \bullet \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = 0 \end{aligned}$$



Las derivadas parciales en el origen existen, sin embargo no existe el límite de la función cuando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  ya que en las direcciones de los ejes  $x$  e  $y$  vale 1 y por otro camino vale 0. Por tanto esta función no es continua en  $(0, 0)$  y por tanto tampoco puede ser diferenciable en el origen.

#### Teorema 2.11. Diferenciabilidad y Continuidad

Sea  $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciable en  $\vec{x}_0 \in A \implies F$  es continua en  $\vec{x}_0$ .

La determinación de la *diferenciabilidad* de una función es fundamental, pero puede llegar a ser complicado su cálculo a partir de la definición<sup>27</sup>, por ello es necesario utilizar un método alternativo más útil.

#### Teorema 2.12. Condición Suficiente de Diferenciabilidad

Sea  $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $F(\vec{x}) = [f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})]$ . Si existen todas las derivadas parciales de todas las funciones componente  $f_i(\vec{x})$  y son continuas<sup>28</sup> en  $\vec{x}_0 \in A$ , entonces  $F$  es diferenciable en  $\vec{x}_0$ .

Notar que es solo una condición *suficiente*, de forma que:

- Si una función cumple la condición en un punto, será diferenciable en ese punto.
- Si no cumple las hipótesis del teorema, no podemos saber si es diferenciable o no en un punto<sup>29</sup>.

Derivadas Parciales Continuas  $\implies$  Diferenciable  $\implies$  Existen las derivadas parciales

Las afirmaciones recíprocas **no** tienen porqué ser ciertas.

**Ejercicio 2.24.** Estudiar la diferenciabilidad de la siguiente función:

$$f(x, y, z) = x e^z$$

Calculamos las tres derivadas parciales:  $\frac{\partial f}{\partial x} = e^z$  ;  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$  ;  $\frac{\partial f}{\partial z} = x e^z$

Como todas existen y son continuas en  $\mathbb{R}^3$ , la función es diferenciable en  $\mathbb{R}^3$ .

<sup>27</sup>Ver la **Definición 2.18**, página 37.

<sup>28</sup>Este tipo de funciones vectoriales  $F(\vec{x})$  se dice que son de **clase**  $C^1$  en  $\vec{x}_0$ . Ver la definición para funciones escalares en la **Definición 2.20**, página 48.

<sup>29</sup>Naturalmente si alguna derivada parcial no existe la función no puede ser diferenciable en ese punto, pero si existen todas las derivadas parciales y alguna de ellas no es continua en un punto, este teorema no decide sobre la diferenciabilidad en dicho punto.

## Propiedades de la Diferenciabilidad y Derivabilidad

Una función es *diferenciable* en  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  si es *diferenciable* en cada punto de  $A$ .

Las siguientes **funciones escalares** son **diferenciables** en su dominio:

- Funciones constantes. Ej:  $f(x, y) = 2$
- Funciones polinómicas. Ej:  $f(x, y, z) = 2x^2y + 2x - yz^3 + 1$
- Funciones exponenciales. Ej:  $f(x, y, z) = e^{xy-z}$
- Logaritmos. Ej:  $f(x, y) = \log(x - y)$
- Seno, coseno, tangente, ... Ej:  $f(x, y) = \text{sen}(x^2 + y)$

Sean  $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $G : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  **diferenciables** en  $\vec{x}_0$ . Entonces:

1.  $H(\vec{x}) = cF(\vec{x})$  es **diferenciable** en  $\vec{x}_0$  y  $DH(\vec{x}_0) = cDF(\vec{x}_0)$  ;  $c \in \mathbb{R}$

2.  $H(\vec{x}) = F(\vec{x}) + G(\vec{x})$  es **diferenciable** en  $\vec{x}_0$  y  $DH(\vec{x}_0) = DF(\vec{x}_0) + DG(\vec{x}_0)$

3. Si  $m = 1$

$h(\vec{x}) = f(\vec{x}) g(\vec{x})$  es **diferenciable** en  $\vec{x}_0$  y  $Dh(\vec{x}_0) = g(\vec{x}_0) Df(\vec{x}_0) + f(\vec{x}_0) Dg(\vec{x}_0)$

4. Si  $m = 1$  y  $g(\vec{x}) \neq 0$

$h(\vec{x}) = \frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})}$  es **diferenciable** en  $\vec{x}_0$  y  $Dh(\vec{x}_0) = \frac{g(\vec{x}_0) Df(\vec{x}_0) - f(\vec{x}_0) Dg(\vec{x}_0)}{[g(\vec{x}_0)]^2}$

**Ejercicio 2.25.** Verificar la propiedad 4 anterior con las funciones:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad ; \quad g(x, y, z) = x^2 + 1$$

$$h(x) = \frac{f(x, y, z)}{g(x, y, z)} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + 1}$$

- Por derivación directa:  $Dh(x, y, z) = (h_x, h_y, h_z) = \left[ \frac{2x(1 - y^2 - z^2)}{(x^2 + 1)^2}, \frac{2y}{x^2 + 1}, \frac{2z}{x^2 + 1} \right]$
- Por la propiedad 4.:

$$\begin{aligned} Dh(x, y, z) &= \frac{gDf - fDg}{g^2} = \frac{(x^2 + 1)[2x, 2y, 2z] - (x^2 + y^2 + z^2)[2x, 0, 0]}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \left[ \frac{2x(1 - y^2 - z^2)}{(x^2 + 1)^2}, \frac{2y}{x^2 + 1}, \frac{2z}{x^2 + 1} \right] \end{aligned}$$

## Resumen: Diferenciabilidad en Funciones Escalares

Para que una función sea *diferenciable* en un punto es necesario que antes se cumplan una serie de condiciones que se muestran en la siguiente tabla.

Diferenciabilidad	←	Todas las derivadas direccionales en el pto están contenidas en un (hiper)plano
Derivabilidad	←	Existen todas las derivadas direccionales en el pto
Continuidad	←	El límite coincide con el valor de la función en el pto
Existencia	←	Existe el valor de la función en un pto (está definida y pertenece al dominio)

**Ejercicio 2.26.** Dada la función,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{yx^2 - y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a) Estudiar la continuidad de la función.  
 b) Estudiar la continuidad de las derivadas parciales de  $f$ .  
 c) Estudiar la diferenciabilidad de  $f$ .

- a) Como la función es de tipo racional, es continua, derivable y diferenciable para todo punto que no anule el denominador, que ocurre en el origen:  $x = y = 0$ . Analizamos entonces la continuidad de la función en el origen, utilizando para ello coordenadas polares:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{yx^2 - y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \operatorname{sen}(\theta) [\cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta)]}{r^2} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} r \underbrace{\operatorname{sen}(\theta) [\cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta)]}_{[-1,1]} = 0 \end{aligned}$$

Si definimos  $g(r) = r$ , entonces se cumplen las tres condiciones del [Teorema 2.3, página 23](#) y por tanto podemos asegurar que dicho límite es 0. Por tanto:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0) \implies f(x, y) \text{ es continua en } (0, 0)$$

Y finalmente:

La función  $f(x, y)$  es continua en  $\mathbb{R}^2$

- b) Primeramente determinamos las funciones derivadas parciales:

$$f_x(x, y) = \frac{2xy(x^2 + y^2) - y(x^2 - y^2)2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{4xy^3}{(x^2 + y^2)^2} \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

$$f_y(x, y) = \frac{(x^2 - 3y^2)(x^2 + y^2) - y(x^2 - y^2)2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 - y^4 - 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

Como estas funciones no están definidas en el origen, tenemos que determinar su valor a través de la definición de derivada parcial en un punto (ver la [Definición 2.12, página 26](#)):

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^3} = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h^3}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{h^3}{h^3} = -1$$

Por tanto:

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{4xy^3}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} ; \quad f_y(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4 - 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ -1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Analizamos la continuidad de ambas funciones:

- $f_x(x, y)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4xy^3}{(x^2 + y^2)^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{4r^4 \cos(\theta) \operatorname{sen}^3(\theta)}{r^4} = \lim_{r \rightarrow 0} 4 \cos(\theta) \operatorname{sen}^3(\theta) = \neq$$

Por tanto la función  $f_x(x, y)$  es continua  $\forall \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

- $f_y(x, y)$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_y(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4 - 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4[\cos^4(\theta) - \text{sen}^4(\theta) - 4\cos^2(\theta)\text{sen}^2(\theta)]}{r^4} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \cos^4(\theta) - \text{sen}^4(\theta) - 4\cos^2(\theta)\text{sen}^2(\theta) = \nexists \end{aligned}$$

Por tanto la función  $f_y(x, y)$  es continua  $\forall \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

c) Como hemos visto en el apartado a) la función es claramente diferenciable en todo punto del plano euclídeo distinto del origen, por tanto tenemos que estudiar la diferenciability en el punto  $(0, 0)$ .

Como las funciones derivadas parciales de  $f(x, y)$  existen pero no son continuas<sup>30</sup> en  $(0, 0)$ , no podemos aplicar el **Teorema 2.12, página 39** para confirmar la diferenciability de la función en el origen<sup>31</sup>.

Por tanto, no queda más remedio que determinar la diferenciación de la función  $f(x, y)$  en el origen a través de la definición de diferenciability<sup>32</sup>. Para ello tenemos que determinar que se cumple:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0$$

Calculamos dicho límite en nuestro caso:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\frac{yx^2 - y^3}{x^2 + y^2} - 0 - 0(x - 0) - (-1)(y - 0)}{\|(x, y) - (0, 0)\|} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\frac{yx^2 - y^3}{x^2 + y^2} + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{2yx^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

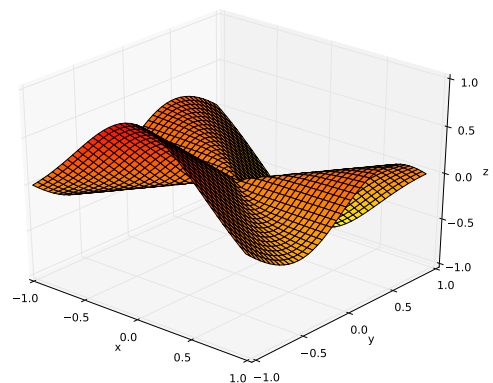
Utilizamos coordenadas polares para resolver dicho límite:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{2r^3 \text{sen}(\theta) \cos^2(\theta)}{(r^2)^{3/2}} = \lim_{r \rightarrow 0} 2 \text{sen}(\theta) \cos^2(\theta) = \nexists$$

Como este límite no es cero, la función **no** es diferenciable en el origen y por tanto:

La función  $f(x, y)$  es diferenciable  $\forall \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

Si representamos gráficamente la función, vemos que es continua en el origen pero presenta una serie de ondulaciones en torno a él, de forma que no existe el plano tangente a la función en ese punto<sup>33</sup>, y por tanto la función no es diferenciable en el origen.



<sup>30</sup>Bastaría con que una de ellas no fuera continua en un punto.

<sup>31</sup>Como el teorema da condiciones suficientes de diferenciability, si no se cumple el teorema no podemos afirmar nada sobre la misma.

<sup>32</sup>Ver la **Definición 2.17, página 35**.

<sup>33</sup>El conjunto de las rectas tangentes a la función en el punto  $(0, 0)$  no están contenidas en un único plano, ya que forma una especie de *tiovivo*.

## 2.6. Regla de la Cadena

### 2.6.1. Regla de la Cadena en Funciones Escalares de Una Variable

Recordamos la *regla de la cadena* en funciones escalares de una variable,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , que explica el mecanismo de derivación de las funciones compuestas:

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

Dada dos funciones  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de forma que  $g(x)$  es derivable en  $x = a$  y  $f(x)$  es derivable en  $x = g(a)$ , entonces:

$$(f \circ g)' = f'[g(a)] g'(a)$$

Este proceso de derivación, consistente en el producto de derivadas de las *funciones externas* por las derivadas de las *funciones internas*, se puede extender a composiciones de tres o más funciones.

**Ejercicio 2.27.** Determinar el valor de la derivada de la siguiente función.

$$f(x) = \text{sen}[\ln(x^3 + 1)]^2$$

Esta función se puede considerar una composición de cuatro funciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} a(x) = \text{sen } x \\ b(x) = x^2 \\ c(x) = \ln x \\ d(x) = x^3 + 1 \end{array} \right\} \implies f(x) = (a \circ b \circ c \circ d)(x)$$

Aplicando la regla de la cadena se tiene:

$$f'(x) = a'\{b(c[d(x)])\}b'\{c[d(x)]\}c'\{d(x)\}d'(x) = \cos[\ln(x^3 + 1)]^2 \ln(x^3 + 1) \frac{1}{x^3 + 1} 3x^2$$

### 2.6.2. Regla de la Cadena en Funciones de Varias Variables

Vamos a extender el concepto de la regla de la cadena a funciones vectoriales de varias variables, a través del siguiente teorema.

#### Teorema 2.13. Regla de la Cadena

Sean  $A \subset \mathbb{R}^n$  y  $B \subset \mathbb{R}^m$  abiertos, y sean  $G : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $F : B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  de tal forma que  $(F \circ G)$  está definida. Si  $G$  es *diferenciable* en  $\vec{x}_0 \in A$  y  $F$  es *diferenciable* en  $G(\vec{x}_0)$ , entonces  $(F \circ G)$  es *diferenciable* en  $\vec{x}_0$ , y:

$$D(F \circ G)(\vec{x}_0) = DF[G(\vec{x}_0)] DG(\vec{x}_0)$$

- Notar que de forma general el producto  $DF[G(\vec{x}_0)] DG(\vec{x}_0)$  corresponde con un *producto matricial*.
- De igual forma que en el caso de funciones de una sola variable, el proceso de la *regla de la cadena* se puede extender a composiciones de tres o más funciones<sup>34</sup>.

**Ejemplo 2.7.** Ejemplos de aplicación de la regla de la cadena

Sean funciones de varias variables  $f, g, F$  y  $G$  *diferenciables* en sus dominios.

<sup>34</sup>Las funciones compuestas deben cumplir las apropiadas reglas de la composición de funciones de varias variables para que estén bien definidas, es decir que la imagen de la función más interna esté contenida en el dominio de la función más externa.

$$1. \left\{ \begin{array}{l} G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \end{array} \quad \begin{array}{l} G(t) = [x(t), y(t), z(t)] \\ f = f(x, y, z) \end{array} \right\}$$

$$\implies \left\{ \begin{array}{l} h(t) = (f \circ G)(t) = f[G(t)] = f[x(t), y(t), z(t)] \\ h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$$Dh(t) = \frac{dh}{dt} = \frac{d(f \circ G)}{dt} = D(f \circ G) = \nabla f DG = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{bmatrix} = \boxed{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}}$$

$$2. \left\{ \begin{array}{l} G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \end{array} \quad \begin{array}{l} G(x, y, z) = [u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)] \\ f = f(u, v, w) \end{array} \right\}$$

$$\implies \left\{ \begin{array}{l} h(x, y, z) = (f \circ G)(x, y, z) = f[G(x, y, z)] = f[u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)] \\ h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$$Dh(x, y, z) = \nabla h(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} = D(f \circ G) = \nabla f DG = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} =$$

$$= \boxed{\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}}$$

$$3. \left\{ \begin{array}{l} G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \end{array} \quad \begin{array}{l} G(x, y) = [u(x, y), v(x, y), w(x, y)] \\ F(u, v, w) = [f_1(u, v, w), f_2(u, v, w), f_3(u, v, w)] \end{array} \right\}$$

$$\implies \left\{ \begin{array}{l} H(x, y) = (F \circ G)(x, y) = F[G(x, y)] = F[u(x, y), v(x, y), w(x, y)] \\ H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 ; H(x, y) = [h_1(x, y), h_2(x, y), h_3(x, y)] \end{array} \right.$$

$$DH(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} \\ \frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial y} \end{bmatrix} = D(F \circ G) = DF DG = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial w} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_3}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f_3}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}}$$

Se puede sistematizar la aplicación de la regla de la cadena en funciones de varias variables, de forma que se puede obtener su resultado sin necesidad de realizar la multiplicación matricial descrita en el [Teorema 2.13](#), [página 43](#).

A continuación resumimos la forma de realizar la regla de la cadena de forma fácil en diferentes tipos de funciones.

Una función compuesta general de varias variables:

$$H = F \circ G \implies \left\{ \begin{array}{l} G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p \end{array} \right\} \implies H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$$

tiene como *variables independientes* de entrada las de la función interna  $G$  y como *funciones componentes* de salida las de la función externa  $F$ .

- Si  $h = f \circ G$  es una *función escalar*  $p = 1$  de  $n = 1$  variable independiente, su derivada viene dada por:

$$h = f \circ G \implies \left\{ \begin{array}{l} G(x) = [u_1(x), \dots, u_m(x)] \\ f = f(u_1, \dots, u_m) \end{array} \right\} \implies \boxed{\frac{dh}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{du_1}{dx} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_m} \frac{du_m}{dx}}$$

- Si  $h = f \circ G$  es una *función escalar*  $p = 1$  de  $n$  variables independientes, su *gradiente*<sup>35</sup> viene dado por:

$$h = f \circ G \implies \left\{ \begin{array}{l} G(x_1, \dots, x_n) = [u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_m(x_1, \dots, x_n)] \\ f = f(u_1, \dots, u_m) \end{array} \right\}$$

$$\nabla h = \left[ \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_m} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_m} \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \right]$$

- Si  $H = F \circ G$  es una función vectorial de  $p$  componentes con  $n$  variables, su matriz jacobiana viene dada por:

$$H = F \circ G \implies \left\{ \begin{array}{l} G(x_1, \dots, x_n) = [u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_m(x_1, \dots, x_n)] \\ F(u_1, \dots, u_m) = [f_1(u_1, \dots, u_m), \dots, f_p(u_1, \dots, u_m)] \end{array} \right\}$$

$$DH = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_p}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_p}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_p}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial f_p}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

- Si las funciones que forman parte de la composición de funciones son conocidas, es preferible obtener primeramente la función resultante y posteriormente obtener su matriz jacobiana, que aplicar la regla de la cadena utilizando el producto de las matrices jacobianas de las funciones componentes, (ver el [Ejercicio 2.28](#), [página 46](#)).

- La regla de la cadena será imprescindible cuando alguna de las funciones componente no se conocen, ya que no hay otra forma de calcular la matriz jacobiana de la función composición, (ver el [Ejercicio 2.29](#), [página 46](#)).

<sup>35</sup>Que corresponde con su *matriz jacobiana*, ver la [Sección 2.4.5](#), [página 31](#).

**Ejercicio 2.28.** Verificar la regla de la cadena en la función  $h(x, y, z) = (f \circ G)$ , siendo:

$$f(u, v, w) = u^2 + v^2 - w \quad ; \quad G(x, y, z) = [u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)]$$

$$u(x, y, z) = x^2y \quad ; \quad v(x, y, z) = y^2 \quad ; \quad w(x, y, z) = e^{-xz}$$

Como  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  y  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  entonces  $h = (f \circ G) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$h(x, y, z) = f[u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)] = x^4y^2 + y^4 - e^{-xz}$$

Vamos a calcular  $Dh(x, y, z)$  de forma directa y a través de la regla de la cadena.

- De forma directa: Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 4x^3y^2 + ze^{-xz} \quad ; \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 2x^4y + 4y^3 \quad ; \quad \frac{\partial h}{\partial z} = xe^{-xz}$$

Por tanto:

$$Dh(x, y, z) = \nabla h(x, y, z) = \begin{bmatrix} 4x^3y^2 + ze^{-xz} & 2x^4y + 4y^3 & xe^{-xz} \end{bmatrix}$$

- Usando la Regla de la cadena:

$$\begin{aligned} Dh(x, y, z) &= D(f \circ G) = \nabla f DG = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2u & 2v & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ -ze^{-xz} & 0 & -xe^{-xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x^2y & 2y^2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ -ze^{-xz} & 0 & -xe^{-xz} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 4x^3y^2 + ze^{-xz} & 2x^4y + 4y^3 & xe^{-xz} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Ejercicio 2.29.** Dada una función escalar  $f(u, v, w)$  donde se hace el cambio de variable:

$$u = x + y \quad ; \quad v = x^2 + z \quad ; \quad w = xyz$$

Encontrar el valor de la derivada parcial  $f_x$  en el punto  $(x, y, z) = (1, 1, -1)$  sabiendo que:

$$f_u(2, 0, -1) = f_v(2, 0, -1) = f_w(2, 0, -1) = 1$$

Este cambio de variable se puede pensar como una composición de funciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(u, v, w) \implies f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x, y, z) = [x + y, x^2 + z, xyz] \implies g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \end{array} \right\} \implies h = f \circ g$$

$$\begin{aligned} Dh &= DfDg = \begin{bmatrix} f_u & f_v & f_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \underbrace{f_u u_x + f_v v_x + f_w w_x}_{f_x} & \underbrace{f_u u_y + f_v v_y + f_w w_y}_{f_y} & \underbrace{f_u u_z + f_v v_z + f_w w_z}_{f_z} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto:  $f(u, v, w) = f(x + y, x^2 + z, xyz) = f(x, y, z)$

$$f_x(x, y, z) = f_u u_x + f_v v_x + f_w w_x = f_u(1) + f_v(2x) + f_w(yz) = 1 * 1 + 1 * 2 + 1 * (-1) = \boxed{2}$$

## 2.7. Derivadas Parciales de Orden Superior

### Definición 2.19. Derivada Parcial de Orden Superior

Sea  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  abierto.

- Si existe la derivada parcial con respecto a  $y$  de la función  $\frac{\partial f}{\partial x}$  se la denomina **derivada parcial segunda de  $f$  respecto a las variables  $x$  e  $y$**  y se denota como:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = D_{xy} f$$

- Reiterando el proceso anterior, si existe la derivada parcial de orden  $r$   $D_{xy\dots w} f$ , derivando de nuevo y si existe, se dice que  $D_z[D_{xy\dots w} f] = D_{xy\dots wz}$  es la derivada de orden  $r + 1$  de  $f$  con respecto a las variables  $xy\dots wz$ .

Cuando en una derivada parcial intervienen *variables distintas*, es decir no es de la forma  $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ , se suele denominar **derivada parcial mixta o cruzada**.

### Ejemplo 2.8. Derivadas Parciales de Orden Superior para el caso: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

#### Derivada de Primer Orden

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad ; \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

#### Derivada de Segundo Orden

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad ; \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad ; \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

#### Derivada de Tercer Orden

$$f_{xxx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \quad ; \quad f_{yyx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \quad ; \quad f_{xxy} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)$$

$$f_{yyy} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \quad ; \quad f_{xxy} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \quad ; \quad f_{xyy} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)$$

### Ejercicio 2.30. Hallar las derivadas parciales segundas de la función: $f(x, y) = x^2 y^3$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 \quad ; \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 y^2$$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^3 \quad ; \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6xy^2 \quad ; \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2 \quad ; \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2 y$$

### 2.7.1. Funciones de Clase $C^n$

#### Definición 2.20. Funciones de Clase $C^n$

Sea  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  abierto y  $\vec{x}_0 \in A$ .

- Se dice que  $f$  es **de clase  $C^n$** , con  $n \geq 1$ , en  $\vec{x}_0$  si existen todas las funciones derivadas parciales de orden  $n$  de  $f$  y son continuas en  $\vec{x}_0$ .
- Se dice que  $f$  es **continuamente derivable** o **de clase  $C^\infty$**  en  $\vec{x}_0$ , si es de clase  $C^n$  para todo valor de  $n$ .

Las funciones de tipo polinómico, exponenciales, seno y coseno, entre otras, son de clase  $C^\infty$ .

#### Teorema 2.14. Teorema de Schwarz

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^p$  en un punto  $\vec{x}_0 \in A$ . Entonces el valor de cualquiera de las derivadas parciales mixtas  $p$ -ésimas de  $f$  en  $\vec{x}_0$  no depende del orden en el que se tomen las  $p$  variables que intervienen en la derivación. Esto es:

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^p f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}$$

donde  $(j_1, \dots, j_k)$  es una permutación cualquiera de  $(i_1, \dots, i_k)$ .

**Ejemplo 2.9.** Derivadas Parciales Mixtas,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 3$

$$\text{Si } f \in C^3 : \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}$$

## 2.8. Operadores Diferenciales

#### Definición 2.21. Operador

Un **operador**  $\mathcal{L} : f \rightarrow g$  es una *aplicación* entre dos espacios de funciones, de forma que asigna a cada función  $f$  una nueva función  $g = \mathcal{L}(f)$ .

Vamos a ver algunos de los operadores más importantes en  $\mathbb{R}^3$ .

### 2.8.1. Operador Gradiente $\nabla$

#### Definición 2.22. Operador Gradiente

El operador **gradiente** de una función *escalar*  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f = f(x, y, z)$ , se define como<sup>36</sup>:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \nabla f = \text{grad} f = \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z}$$

El **gradiente** de una función *escalar* es una nueva función *vectorial*.

<sup>36</sup>Esta definición coincide con la dada en la Sección 2.4.5, página 31.

### 2.8.2. Operador Divergencia *div*

#### Definición 2.23. Operador Divergencia

El operador **divergencia** de una función *vectorial*  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $F(x, y, z) = [f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)]$ , se define como el *producto escalar* entre el *operador gradiente*  $\nabla$  y la función  $F$ :

$$\boxed{\text{div} = \nabla \cdot} \quad \Rightarrow \quad \text{div} F = \nabla \cdot F = \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{i} f_1 + \mathbf{j} f_2 + \mathbf{k} f_3) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

La **divergencia** de una función *vectorial* es una nueva función *escalar*.

### 2.8.3. Operador Rotacional *rot*

#### Definición 2.24. Operador Rotacional

El operador **rotacional**<sup>37</sup> de una función *vectorial*  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  se define como el *producto vectorial* entre el operador gradiente  $\nabla$  y la función  $F$ :

$$\boxed{\text{rot} = \nabla \times} \quad \Rightarrow \quad \text{rot} F = \nabla \times F = \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\mathbf{i} f_1 + \mathbf{j} f_2 + \mathbf{k} f_3) =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

El **rotacional** de una función *vectorial* es una nueva función *vectorial*.

### 2.8.4. Operador Laplaciano $\Delta$ , $\nabla^2$

#### Definición 2.25. Operador Laplaciano

El operador **laplaciano**<sup>38</sup> de una función *escalar*  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  se define como el *producto escalar* entre el operador gradiente  $\nabla$  y el vector gradiente de la función  $\nabla f$ :

$$\boxed{\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla}$$

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

El **laplaciano** de una función *escalar* es una nueva función *escalar*.

<sup>37</sup>En terminología anglófona se suele utilizar la palabra *curl* (rizo) en lugar de *rot*.

<sup>38</sup>Para representar el operador *laplaciano* se puede utilizar de forma indistinta la letra  $\Delta$ , (delta máyúscula), o el símbolo  $\nabla^2$ , (nabla cuadrado), sin embargo debido a su simplicidad se acostumbra a utilizar  $\Delta$ .

En el siguiente cuadro se muestra un resumen de las características de los operadores diferenciales mencionados, teniendo en cuenta el tipo de funciones sobre las que se aplica (escalares o vectoriales) y el correspondiente tipo de función resultante de su aplicación.

$$\begin{array}{l}
 \text{F. Escalar} \implies \left\{ \begin{array}{l} \text{Gradiente } (\nabla) \implies \text{F. Vectorial} \\ \text{Laplaciano } (\Delta, \nabla^2) \implies \text{F. Escalar} \end{array} \right. \\
 \\
 \text{F. Vectorial} \implies \left\{ \begin{array}{l} \text{Divergencia } (div) \implies \text{F. Escalar} \\ \text{Rotacional } (rot) \implies \text{F. Vectorial} \end{array} \right.
 \end{array}$$

**Ejercicio 2.31.** Determinar el gradiente y el laplaciano de la función  $f(x, y, z) = xy - z^2$  y la divergencia y el rotacional de la función  $F(x, y, z) = [xy, yz, \cos x^2]$ .

$$\text{grad}(f) = \nabla f = [f_x, f_y, f_z] = [y, x, -2z] \quad ; \quad \Delta f = \nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0 + 0 - 2 = -2$$

$$\text{div}(F) = \nabla \cdot F = F_{1x} + F_{2y} + F_{3z} = y + z + 0 = y + z$$

$$\text{rot } F = [F_{3y} - F_{2z}, F_{1z} - F_{3x}, F_{2x} - F_{1y}] = [0 - y, 0 - (-2x \text{ sen } x^2), 0 - x] = [-y, 2x \text{ sen } x^2, -x]$$

### 2.8.5. Aplicaciones en Campos Escalares y Vectoriales

#### Definición 2.26. Campos Escalares y Vectoriales

- Un **campo escalar** en  $\mathbb{R}^n$  es una *función escalar*  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .
- Un **campo vectorial** en  $\mathbb{R}^n$  es una *función vectorial*  $\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

#### Ejemplo 2.10. Campos Escalares y Vectoriales

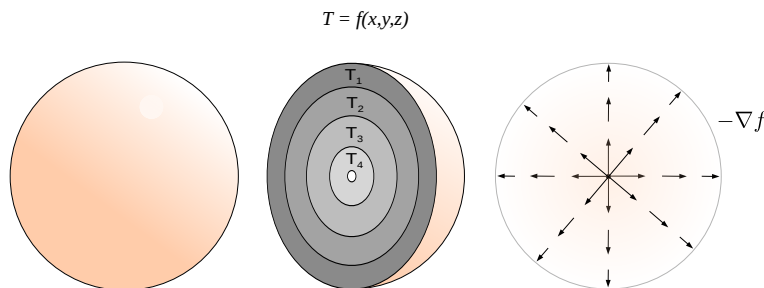
Algunos ejemplos físicos de campos escalares y vectoriales.

- Campos Escalares
  - Densidad,  $\rho(x, y, z)$
  - Temperatura,  $T(x, y, z)$
  - Altura,  $h(x, y)$
- Campos Vectoriales
  - Campos de fuerzas: campos eléctricos, gravitatorios, etc.
  - Campos de velocidades y de aceleraciones de fluidos, etc.
  - Campos flujo: de calor, de cargas eléctricas (corriente eléctrica), etc.

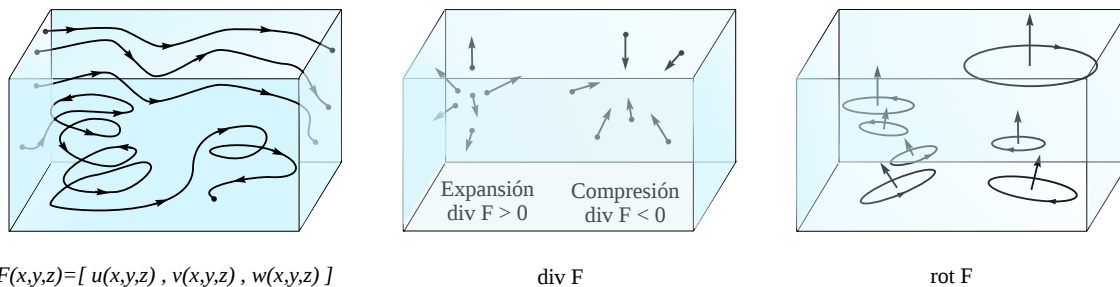
**Ejemplo 2.11.** Ejemplos Físicos de Campos

- La distribución de temperaturas en una pieza de material conductor del calor viene expresada a través de una campo escalar  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , del tipo  $T(x, y, z)$ .

El *flujo de calor* viene dado por la función  $\mathbf{J} = -k\nabla T$ , donde  $k > 0$  es la conductividad del material. Notar que  $-\nabla T$  apunta a la dirección de máximo decrecimiento, de las zonas calientes (temperatura alta) a las zonas frías (zonas de baja temperatura).



- Sea un fluido en movimiento en el interior de un tanque. La distribución de velocidades, es decir el *flujo del fluido*, dentro del sistema viene dado por un campo vectorial  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de la forma  $F(x, y, z) = [u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)]$ , donde  $u, v$  y  $w$  son las componentes de la velocidad en las direcciones  $x, y$  y  $z$ . En cada punto de fluido existe un vector con un módulo, sentido y dirección que indica el *movimiento* de dicho punto.



El campo escalar  $\text{div}F$  nos da la razón de expansión ( $\text{div}F > 0$ ) o compresión ( $\text{div}F < 0$ ) del fluido por unidad de volumen. Por ejemplo si  $\text{div}F = 3$ , significa que el fluido (gas) se expande a razón de 3 unidades de volumen por unidad de tiempo. Si  $\text{div}F = 0$ , se dice que el fluido es *incompresible*.

El campo vectorial  $\text{rot}\vec{F}$  nos da la posible rotación de cada punto del fluido. El vector rotacional es perpendicular al plano de la rotación, el módulo de dicho vector es proporcional a la velocidad angular de dicho punto y su sentido nos indica el sentido de giro. Si  $\text{rot}F = 0$ , se dice que el fluido es *irrotacional*.

**2.8.6. La Ecuación de Laplace**

**Definición 2.27.** Ecuación de Laplace

Se denomina **ecuación de Laplace** a la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$\Delta u = 0 \implies \begin{cases} 2D : & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ 3D : & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \end{cases}$$

La *ecuación de Laplace* aparece en muchas ramas de la física como astronomía, electrostática, mecánica de fluidos, mecánica cuántica, etc., así como es una pieza esencial en el estudio de las funciones de variable compleja<sup>39</sup>.

### Definición 2.28. Función Armónica

Se dice que una función escalar es **armónica** si cumple<sup>40</sup> la *ecuación de Laplace*.

**Ejercicio 2.32.** Determinar cuáles de las siguientes funciones escalares son armónicas en  $\mathbb{R}^2$ .

a)  $f(x, y) = xy$       b)  $f(x, y) = xy + 2x^2y - y^3$       c)  $f(x, y) = x^2 - y^2$

Serán armónicas en  $\mathbb{R}^2$  si cumplen la ecuación de Laplace en 2D:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

a)

$$f(x, y) = xy \implies \begin{cases} f_x = y & f_{xx} = 0 \\ f_y = x & f_{yy} = 0 \end{cases} \implies \Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 0 + 0 = 0$$

Sí es armónica en  $\mathbb{R}^2$

b)

$$f(x, y) = xy + 2x^2y - y^3 \implies \begin{cases} f_x = y + 4xy & f_{xx} = 4y \\ f_y = x + 2x^2 - 3y^2 & f_{yy} = -6y \end{cases}$$

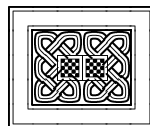
$$\implies \Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 4y - 6y = -2y \neq 0$$

No es armónica en  $\mathbb{R}^2$

c)

$$f(x, y) = x^2 - y^2 \implies \begin{cases} f_x = 2x & f_{xx} = 2 \\ f_y = -2y & f_{yy} = -2 \end{cases} \implies \Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 2 - 2 = 0$$

Sí es armónica en  $\mathbb{R}^2$



<sup>39</sup>Ver por ejemplo "Clases de Ampliación de Matemáticas para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 179.

<sup>40</sup>Es decir, es solución de la ecuación en derivadas parciales que define la ecuación de Laplace.

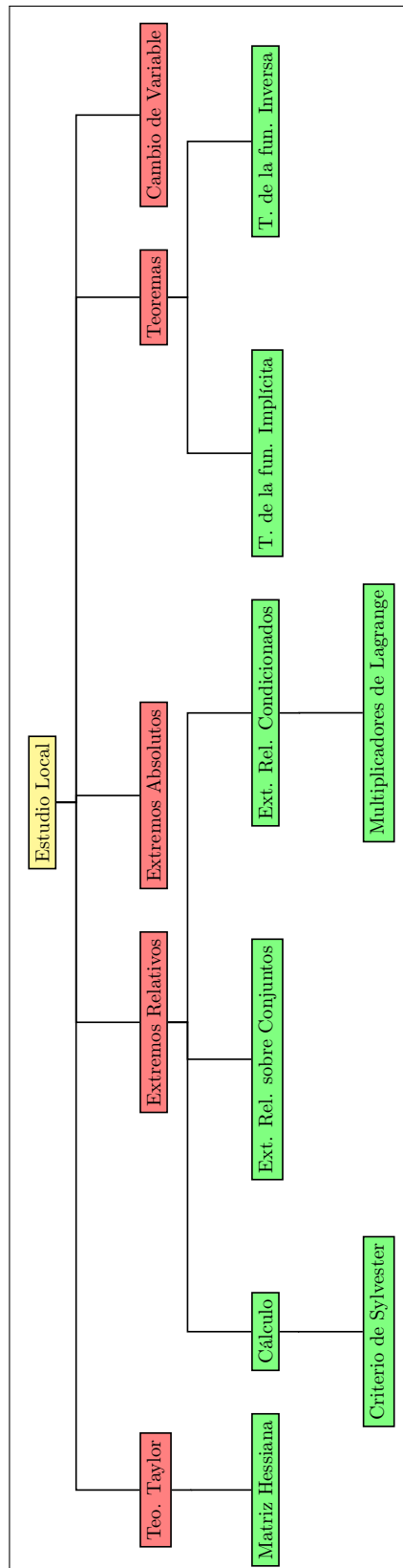
# Estudio Local de Funciones de Varias Variables

## Contenido

---

<b>3.1</b>	<b>Introducción</b>	<b>55</b>
<b>3.2</b>	<b>Teorema de Taylor</b>	<b>55</b>
3.2.1	Funciones de Una Variable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	55
3.2.2	Generalización a Funciones Escalares $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$	57
3.2.3	Forma Alternativa del Desarrollo de Taylor	58
<b>3.3</b>	<b>Matriz Hessiana y Hessiano</b>	<b>59</b>
3.3.1	Forma Simplificada del Desarrollo de Taylor de Segundo Orden	59
<b>3.4</b>	<b>Extremos Relativos o Locales de Funciones en <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>63</b>
3.4.1	Determinación de Extremos Relativos	64
3.4.2	Resumen sobre Puntos Críticos en Funciones de Varias Variables	66
<b>3.5</b>	<b>Extremos Absolutos de Funciones en <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>69</b>
3.5.1	Extremos Sobre Conjuntos o Dominios	71
<b>3.6</b>	<b>Extremos Relativos Condicionados de Funciones en <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>73</b>
<b>3.7</b>	<b>Teorema de la Función Implícita</b>	<b>78</b>
3.7.1	Funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	78
3.7.2	Funciones Escalares de Dos Variables	80
3.7.3	Funciones Escalares de Varias Variables	81
3.7.4	Funciones Vectoriales de Varias Variables	82
<b>3.8</b>	<b>Teorema de la Función Inversa</b>	<b>83</b>
<b>3.9</b>	<b>Cambio de Variable</b>	<b>84</b>

---



## 3.1. Introducción

Empezaremos este tema estudiando las condiciones bajo las cuales se producen los extremos relativos en funciones  $\mathbb{R}^n$ . Para ello se verá primero el *teorema de Taylor* para varias variables, que se usará posteriormente en la deducción de los criterios para detectar *máximos*, *mínimos* y *puntos silla*<sup>1</sup>. Seguidamente veremos el problema de *maximizar* una función de valores reales sujeta a condiciones adicionales, llamadas *restricciones*, a través de los *multiplicadores de Lagrange*, y finalmente se verán los teoremas de la *función inversa* y de la *función implícita* para funciones  $\mathbb{R}^n$ , la dependencia funcional y los temas relacionados con cambios de variable.

## 3.2. Teorema de Taylor

### 3.2.1. Funciones de Una Variable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Recordamos que para funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de *clase*<sup>2</sup>  $\mathcal{C}^{k+1}$ , el **teorema de Taylor** nos dice que pueden expresarse en forma polinómica (**polinomio de Taylor**) de la forma:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n,x_0}(x)$$

donde el *resto*  $R_{n,x_0}(x)$  viene dado por:

$$R_{n,x_0}(x) = o[(x - x_0)^n] \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_{n,x_0}(x)}{(x - x_0)^n} = 0 \quad ; \quad R_{n,x_0}(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

$$R_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad ; \quad c \in (x_0, x) \quad (\text{Resto de Lagrange})$$

Llamando  $h = x - x_0$ , el **desarrollo de Taylor** se puede expresar como:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_{n,x_0}(x)$$

**Ejercicio 3.1.** Calcular los desarrollos de Taylor hasta orden 16 de la siguiente función en torno al origen  $x = 0$ .

$$f(x) = \text{sen}(x)$$

El desarrollo de Taylor de una función en torno al origen (desarrollo de McLaurin) es:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

Teniendo en cuenta que para esta función:

$$\begin{aligned} f(x) = \text{sen}(x) &\implies f(0) = 0 \\ f'(x) = \text{cos}(x) &\implies f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\text{sen}(x) &\implies f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\text{cos}(x) &\implies f'''(0) = -1 \\ f^4(x) = \text{sen}(x) &\implies f^4(0) = 0 \end{aligned}$$

y así de forma sucesiva, ya que se vuelve a obtener la función original, se tiene:

$$f(x) = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + 0 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

A continuación se dan la expresión matemática de los desarrollos de Taylor y una representación gráfica de los mismos.

<sup>1</sup> Forma de designar a los puntos de inflexión en  $\mathbb{R}^n$ .

<sup>2</sup>Ver la [Definición 2.20](#), página 48.

**Orden 0:**  $f(x) = 0$

**Orden 1,2:**  $f(x) = x$

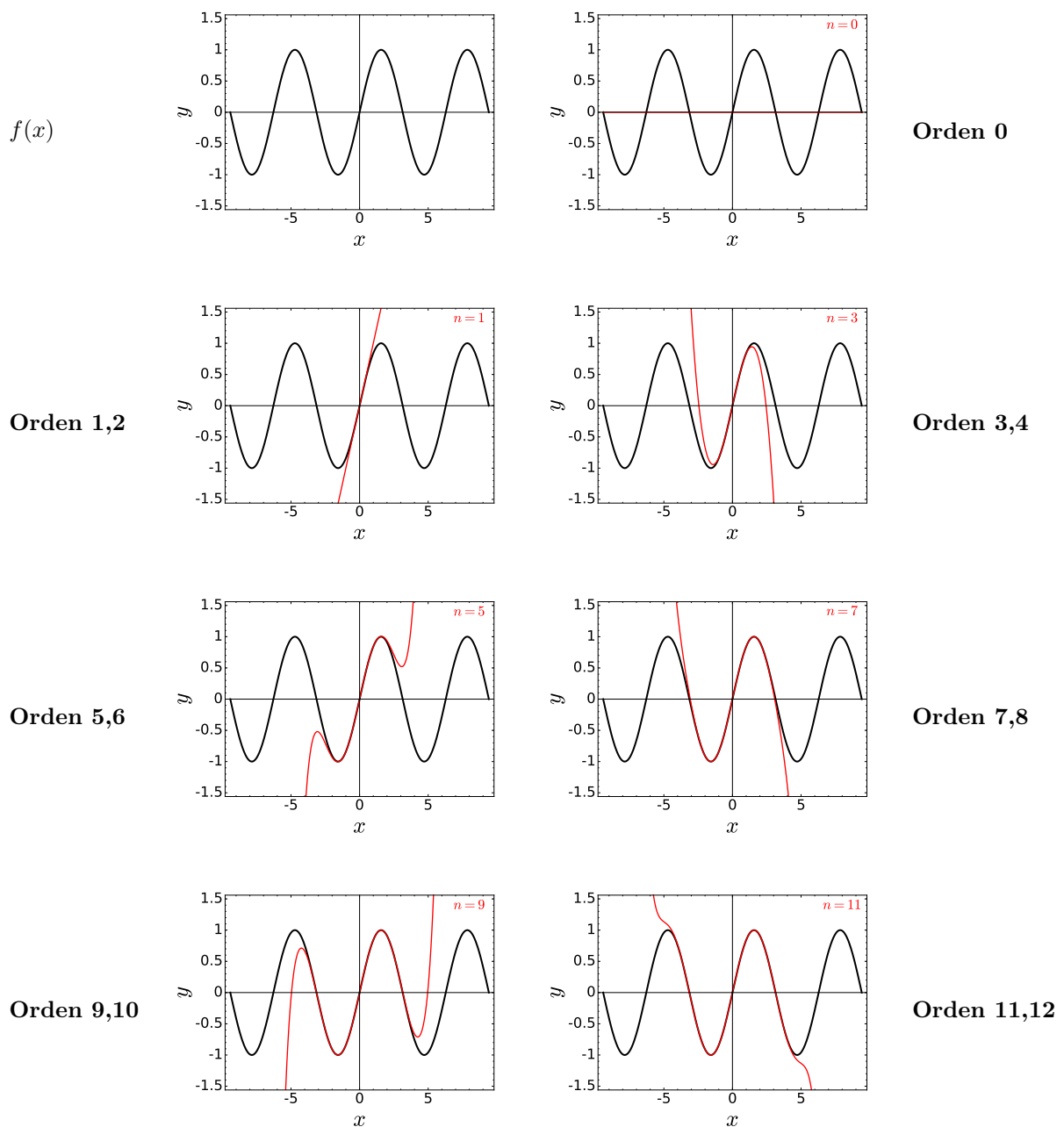
**Orden 3,4:**  $f(x) = x - \frac{x^3}{3!}$

**Orden 5,6:**  $f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

**Orden 7,8:**  $f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$

**Orden 9,10:**  $f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$

**Orden 11,12:**  $f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}$



### 3.2.2. Generalización a Funciones Escalares $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Como hemos visto, si una función escalar:

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

es *diferenciable*<sup>3</sup> en un punto de su dominio  $\vec{x}_0 \in A$ , se cumple:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - Df(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0$$

Por tanto se verifica:

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + Df(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) + R_{1,\vec{x}_0}(\vec{x})$$

que corresponde con el **desarrollo de Taylor** de primer orden de la función, donde:

- $R_{1,\vec{x}_0}(\vec{x}) = f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - Df(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) \implies \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{R_{1,\vec{x}_0}(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0$
- $Df(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) = \left[ \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} x_1 - x_{01} \\ \vdots \\ x_n - x_{0n} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) (x_i - x_{0i})$

Este desarrollo se puede generalizar teniendo en cuenta todas las derivadas parciales de distintos órdenes, dando lugar al siguiente teorema.

#### Teorema 3.1. Teorema de Taylor

Dada una función  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^{n+1}$ , se define el *desarrollo de Taylor de orden*<sup>4</sup>  $m$  de  $f(\vec{v})$  en el punto  $\vec{x}_0 \in A$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(\vec{x}_0) + \frac{1}{1!} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) (x_i - x_{0i}) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0) (x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) + \\ &+ \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\vec{x}_0) (x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j})(x_k - x_{0k}) + \dots + \\ &+ \frac{1}{m!} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}}(\vec{x}_0) (x_{i_1} - x_{i_1}^0)(x_{i_2} - x_{i_2}^0) \dots (x_{i_m} - x_{i_m}^0) + R_{m,\vec{x}_0}(\vec{x}) \end{aligned}$$

donde:  $R_{m,\vec{x}_0}(\vec{x}) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{R_{m,\vec{x}_0}(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|^m} = 0$

**Nota 3.1.** Ejemplos de los sumatorios dobles y triples que aparecen en el desarrollo anterior son los siguientes:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_{ij} &= \sum_{i=1}^3 (x_{i1} + x_{i2} + x_{i3}) = (x_{11} + x_{12} + x_{13}) + (x_{21} + x_{22} + x_{23}) + (x_{31} + x_{32} + x_{33}) \\ \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 x_{ijk} &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (x_{ij1} + x_{ij2}) = \sum_{i=1}^2 (x_{i11} + x_{i12}) + (x_{i21} + x_{i22}) = (x_{111} + x_{112}) + (x_{121} + x_{122}) + (x_{211} + x_{212}) + (x_{221} + x_{222}) \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Ver la [Sección 2.5, página 35](#).

<sup>4</sup>Notar que aquí  $n$  es la dimensión del espacio dominio de la función,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , y  $m$  es el orden del desarrollo de Taylor.

### 3.2.3. Forma Alternativa del Desarrollo de Taylor

Vamos a utilizar una determinada notación que nos permitirá<sup>5</sup> simplificar el desarrollo de Taylor visto anteriormente. Llamando:

- $\vec{h} = \vec{x} - \vec{x}_0$  ;  $h_i = (x_i - x_{0i})$
- $\sum_{i=1}^n D_{x_i} f(\vec{x}_0) h_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) (x_i - x_{0i})$
- $\sum_{i,j=1}^n D_{x_i x_j}^2 f(\vec{x}_0) h_i h_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0) (x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j})$
- $\sum_{i,j,k,\dots,w=1}^n D_{x_i x_j x_k \dots w}^m f(\vec{x}_0) h_i h_j h_k \dots h_w = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}}(\vec{x}_0) (x_{i_1} - x_{i_1}^0) \dots (x_{i_m} - x_{i_m}^0)$

El desarrollo de Taylor de orden  $m$  en el punto  $\vec{x}_0$  que aparece en el teorema de Taylor<sup>6</sup> se puede expresar de la siguiente forma alternativa:

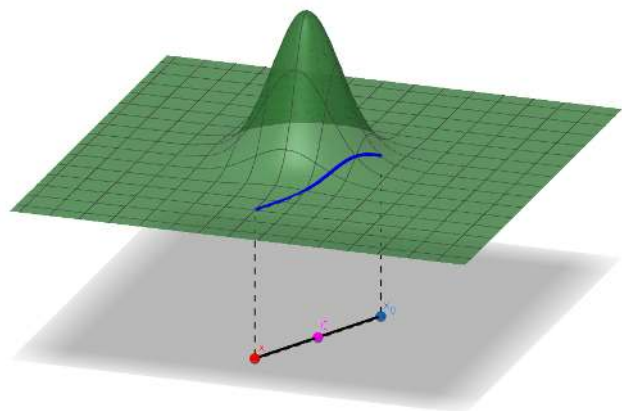
$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^n D_{x_i} f(\vec{x}_0) h_i + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n D_{x_i x_j}^2 f(\vec{x}_0) h_i h_j + \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^n D_{x_i x_j x_k}^3 f(\vec{x}_0) h_i h_j h_k + \dots + \frac{1}{m!} \sum_{i,j,k,\dots,w=1}^n D_{x_i x_j x_k \dots w}^m f(\vec{x}_0) h_i h_j h_k \dots h_w + R_{m,\vec{x}_0}(\vec{x})$$

Siendo:

$$R_{m,\vec{x}_0}(\vec{x}) = \sum_{i,j,k,\dots,w=1}^n \int_0^1 \frac{(t-1)^m}{m} D_{x_i x_j x_k \dots w}^{m+1} f(\vec{x}_0 + t\vec{h}) h_i h_j h_k \dots h_w dt = \sum_{i,j,k,\dots,w=1}^m D_{x_i x_j x_k \dots w}^{m+1} f(\vec{c}) h_i h_j h_k \dots h_w ; \quad \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{R_{m,\vec{x}_0}(\vec{x})}{\|\vec{h}\|^m} = 0$$

donde el punto desconocido  $\vec{c}$  está en la recta<sup>7</sup> que une  $\vec{x}_0$  con  $\vec{x}$ .

En la siguiente figura se muestra una función escalar de dos variables  $z = f(x, y)$  (en verde), el punto de desarrollo  $\vec{x}_0$  (en azul) y el punto de evaluación  $\vec{x}$  (en rojo). El punto  $\vec{c}$  (en rosa) se encuentra en la recta del plano  $\mathbb{R}^2$  que une  $\vec{x}_0$  con  $\vec{x}$  (en negro).



<sup>5</sup>Ver la Sección 3.3.1, página 59.

<sup>6</sup>Ver el Teorema 3.1, página 57.

<sup>7</sup>Esta recta se encuentra de forma general en un espacio  $\mathbb{R}^n$ .

### 3.3. Matriz Hessiana y Hessiano

#### Definición 3.1. Matriz Hessiana

Sea  $A$  abierto,  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , con derivadas parciales de segundo orden  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0)$  para  $i, j = 1, \dots, n$  en un punto en  $\vec{x}_0 \in A$ . Se define la **matriz hessiana** de  $f(\vec{x})$  en  $\vec{x} = \vec{x}_0$ , a la matriz cuadrada  $n \times n$ :

$$Hf(\vec{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\vec{x}_0) \end{bmatrix}$$

#### Definición 3.2. Hessiano

Se denomina **hessiano** al determinante de la *matriz hessiana*.

Casos particulares de *matrices hessianas*.

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad z = f(x, y)$$

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad w = f(x, y, z)$$

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

$$Hf(x, y, z) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}$$

#### 3.3.1. Forma Simplificada del Desarrollo de Taylor de Segundo Orden

Teniendo en cuenta que:

$$\vec{h}^T Hf \vec{h} = [h_1 \quad \cdots \quad h_n] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$$

El *desarrollo de Taylor*<sup>8</sup> de segundo orden se puede escribir de la forma:

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + Df(\vec{x}_0) \vec{h} + \frac{1}{2} \vec{h}^T Hf(\vec{x}_0) \vec{h} + R_{2, \vec{x}_0}(\vec{x})$$

<sup>8</sup>Ver el Teorema 3.1, página 57.

**Ejercicio 3.2.** Calcular el desarrollo de Taylor de segundo orden de la siguiente función alrededor del punto  $(0, 0)$ .

$$f(x, y) = e^x \cos y$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad f(0, 0) = 1$$

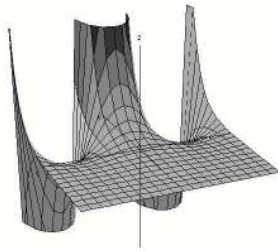
$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin y \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x \cos y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \cos y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = -1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -e^x \sin y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0$$

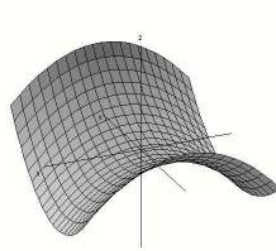
Por tanto:

$$\begin{aligned} f(\vec{h}) = f(h_1, h_2) &= f(0, 0) + \left( \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) h_2 \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) h_2^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) h_1 h_2 \right) + R_{2, \vec{0}}(\vec{h}) \end{aligned}$$

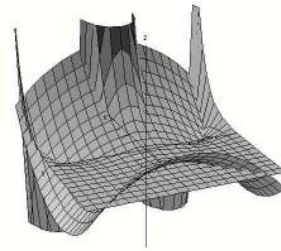
$$f(\vec{h}) = f(h_1, h_2) = 1 + h_1 + \frac{1}{2}(h_1^2 - h_2^2) + R_{2, \vec{0}}(\vec{h}) \quad \vec{x}_0 = (0, 0) \Rightarrow h_i = x_i \quad \boxed{f(x, y) = 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + R_{2, (0, 0)}(x, y)}$$



$f(x, y) = e^x \cos y$



Aprx. Taylor



Los dos

**Ejercicio 3.3.** Calcular los desarrollos de Taylor hasta orden 16 de la siguiente función en torno al punto  $(0, 0)$ .

$$f(x, y) = \text{sen}(x + y)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} f &= \text{sen}(x + y) && \implies f(0, 0) = 0 \\ f_x &= f_y = \cos(x + y) && \implies f_i(0, 0) = 1 \\ f_{xx} &= f_{xy} = f_{yy} = -\text{sen}(x + y) && \implies f_{ij}(0, 0) = 0 \\ f_{xxx} &= f_{xxy} = f_{xyy} = f_{yyy} = -\cos(x + y) && \implies f_{ijk}(0, 0) = -1 \\ f_{xxxx} &= f_{xxx}y = f_{xxyy} = f_{xyyy} = f_{yyyy} = \text{sen}(x + y) && \implies f_{ijkl}(0, 0) = 0 \end{aligned}$$

y así de forma sucesiva, ya que se vuelve a obtener la función original.

Por tanto, para órdenes mayores que cero, los desarrollos de Taylor de orden impar de esta función coinciden con los desarrollos del orden par siguiente, (el desarrollo de orden 1 coincide con el de orden 2, el de orden 3 con el de orden 4, etc.). A continuación se dan la expresión matemática de los desarrollos de Taylor y una representación gráfica de los mismos.

**Orden 0:**  $f(x, y) = 0$

**Orden 1,2:**  $f(x, y) = x + y$

**Orden 3,4:**  $f(x, y) = -\frac{1}{2}[x^2y + x(y^2 - 2) - 2y]$

**Orden 5,6:**  $f(x, y) = \frac{1}{12}[x^3(y^2 - 2) + x^2y(y^2 - 6) + 6x(2 - y^2) - 2y^3 + 12y]$

**Orden 7,8:**

$$f(x, y) = -\frac{1}{144}[x^4y(y^2 - 6) + x^3(y^4 - 12y^2 + 24) + 12x^2y(6 - y^2) - 6x(y^4 - 12y^2 + 24) + 24y(y^2 - 6)]$$

**Orden 9,10:**

$$f(x, y) = \frac{1}{2880}[(x^5(y^4 - 12y^2 + 24) + x^4y(y^4 - 20y^2 + 120) - 20x^3(y^4 - 12y^2 + 24) - 12x^2y(y^4 - 20y^2 + 120) + 120x(y^4 - 12y^2 + 24) + 24y(y^4 - 20y^2 + 120)]$$

**Orden 11,12:**

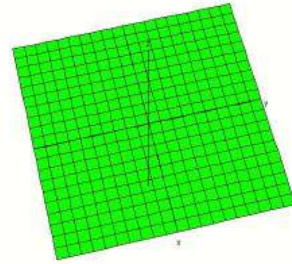
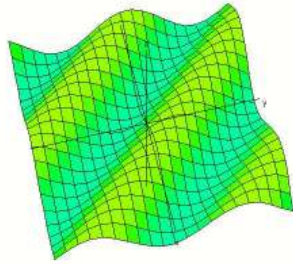
$$f(x, y) = -\frac{1}{86400}[(x^6y(y^4 - 20y^2 + 120) + x^5(y^6 - 30y^4 + 360y^2 - 720) - 30x^4y(y^4 - 20y^2 + 120) - 20x^3(y^6 - 30y^4 + 360y^2 - 720) + 360x^2y(y^4 - 20y^2 + 120) + 120x(y^6 - 30y^4 + 360y^2 - 720) - 720y(y^4 - 20y^2 + 120)]$$

**Orden 13,14:**

$$f(x, y) = \frac{1}{3628800}[(x^7(y^6 - 30y^4 + 360y^2 - 720) + x^6y(y^6 - 42y^4 + 840y^2 - 5040) - 42x^5(y^6 - 30y^4 + 360y^2 - 720) - 30x^4y(y^6 - 42y^4 + 840y^2 - 5040) + 840x^3(y^6 - 30y^4 + 360y^2 - 720) + 360x^2y(y^6 - 42y^4 + 840y^2 - 5040) - 5040x(y^6 - 30y^4 + 360y^2 - 720) - 720y(y^6 - 42y^4 + 840y^2 - 5040)]$$

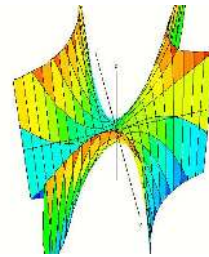
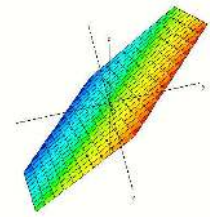
**Orden 15,16:**

$$f(x, y) = -\frac{1}{203212800}[-(x^8y(y^6 - 42y^4 + 840y^2 - 5040) + x^7(y^8 - 56y^6 + 1680y^4 - 20160y^2 + 40320) - 56x^6y(y^6 - 42y^4 + 840y^2 - 5040) - 42x^5(y^8 - 56y^6 + 1680y^4 - 20160y^2 + 40320) + 1680x^4y(y^6 - 42y^4 + 840y^2 - 5040) + 840x^3(y^8 - 56y^6 + 1680y^4 - 20160y^2 + 40320) - 20160x^2y(y^6 - 42y^4 + 840y^2 - 5040) - 5040x(y^8 - 56y^6 + 1680y^4 - 20160y^2 + 40320) + 40320y(y^6 - 42y^4 + 840y^2 - 5040)]$$

$f(x, y)$ 

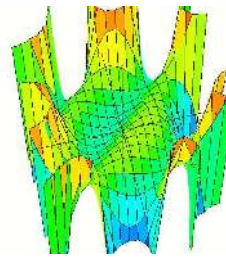
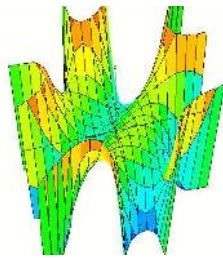
Orden 0

Orden 1,2



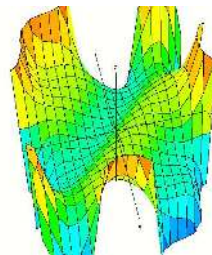
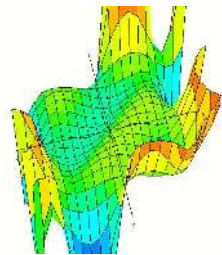
Orden 3,4

Orden 5,6



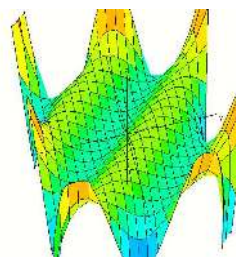
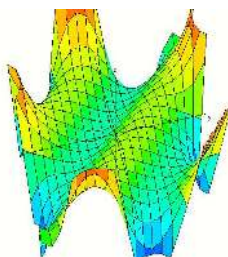
Orden 7,8

Orden 9,10



Orden 11,12

Orden 13,14



Orden 15,16

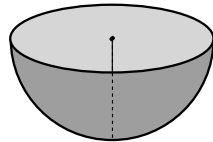
### 3.4. Extremos Relativos o Locales de Funciones en $\mathbb{R}^n$

#### Definición 3.3. Puntos Característicos de una Función

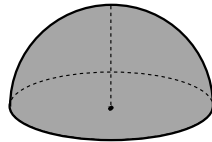
Sea  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\vec{x}_0 \in A$ .

- $\vec{x}_0$  es un **mínimo local** o **relativo** de  $f$  si existe un *entorno reducido*<sup>9</sup>  $U^*$  de  $\vec{x}_0$  tal que<sup>10</sup>  $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0), \forall \vec{x} \in U^*$ .
- $\vec{x}_0$  es un **máximo local** o **relativo** de  $f$  si existe un *entorno reducido*  $U^*$  de  $\vec{x}_0$  tal que<sup>11</sup>  $f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0), \forall \vec{x} \in U^*$ .
- $\vec{x}_0$  es un **extremo relativo** o **local** de  $f$  si es un *mínimo* o *máximo local*.
- $\vec{x}_0$  es un **punto crítico** o **estacionario** de  $f$ , si  $f$  no es diferenciable en  $\vec{x}_0$  o si  $Df(\vec{x}_0) = \vec{0}$ .
- Un **punto crítico** que no es un *extremo local* se llama **punto silla**<sup>12</sup>.

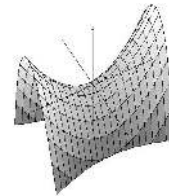
En la siguiente gráfica se muestran de forma esquemática la forma del *mínimo*, *máximo* y *punto silla* de una función escalar  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .



Mínimo Local



Máximo Local



Punto Silla

#### Teorema 3.2. Condición Necesaria para la Existencia de Extremos Relativos

Sea  $A$  abierto,  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , diferenciable en  $x_0 \in A$ . Entonces:

$$\text{Si } x_0 \text{ es un extremo local} \implies Df(x_0) = \nabla f(x_0) = [0, \dots, 0] = \vec{0} \implies x_0 \text{ es un punto crítico de } f$$

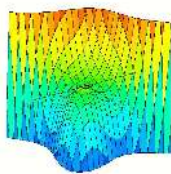
Si  $f$  es diferenciable, la condición  $\nabla f(x_0) = 0$  es necesaria pero no suficiente para que se produzca un *extremo relativo*, ya que puede darse un *punto silla*.

**Nota 3.2.** En un **punto crítico** de una función *diferenciable*, el plano tangente es horizontal de forma que todas las derivadas direccionales son cero, indicando que no hay crecimiento ni decrecimiento en ese punto.

**Ejercicio 3.4.** Encontrar los puntos críticos de la función  $f(x, y) = x^3 - 2xy - y^3 + y - x$ .

$$\nabla f(x, y) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right] = [3x^2 - 2y - 1, -2x - 3y^2 + 1] = 0 \implies \begin{cases} 3x^2 - 2y - 1 = 0 \\ -2x - 3y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$y = (3x^2 - 1)/2 \implies -2x - 3(3x^2 - 1)^2/4 + 1 = 0 \quad ; \quad 27x^4 - 18x^2 + 2x + 2 = 0$$



$$\text{Sol. Reales} \begin{cases} (x_1, y_1) = (-1, 1) \\ (x_2, y_2) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \end{cases}$$

<sup>9</sup>Ver la Sección 1.2, página 6.

<sup>10</sup>Se dice que el mínimo local es **estricto** si  $f(\vec{x}) > f(\vec{x}_0)$ .

<sup>11</sup>Se dice que el máximo local es **estricto** si  $f(\vec{x}) < f(\vec{x}_0)$ .

<sup>12</sup>También se le conoce con el nombre de *punto de ensilladura* o *punto puerto*.

### 3.4.1. Determinación de Extremos Relativos

Recordamos que en el caso de funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la condición necesaria para la existencia de un extremo relativo (máximo o mínimo) en un punto  $x_0$  es que se anule la derivada de la función en ese punto<sup>13</sup>,  $f'(x_0) = 0$ . El desarrollo de Taylor de segundo orden en ese punto es entonces:

$$f(x) \approx f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_0(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 \implies f(x) - f(x_0) \approx \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Un criterio para determinar el tipo de extremo relativo está basado en el signo de  $f''(x_0)$ , de forma que:

- Si  $f''(x_0) < 0 \implies f(x) - f(x_0) < 0 \implies f(x) < f(x_0) \implies f(x_0)$  es un máximo local.
- Si  $f''(x_0) > 0 \implies f(x) - f(x_0) > 0 \implies f(x) > f(x_0) \implies f(x_0)$  es un mínimo local.
- Si  $f''(x_0) = 0 \implies$  este método no decide.

Veamos un criterio similar para determinar el tipo de extremo relativo que hay en un *punto crítico*<sup>14</sup>  $\vec{x}_0$  de una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$ . El desarrollo de Taylor de segundo orden de  $f$  en torno a  $\vec{x}_0$  es:

$$f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}_0) + \underbrace{\nabla f(\vec{x}_0)}_{\vec{0}} \vec{h} + \frac{1}{2} \vec{h}^T Hf(\vec{x}_0) \vec{h} \implies f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) \approx \frac{1}{2} \vec{h}^T Hf(\vec{x}_0) \vec{h}$$

El tipo de extremo relativo dependerá del signo del término del hessiano:

- Si  $\vec{h}^T Hf(\vec{x}_0) \vec{h} < 0 \implies f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) < 0 \implies f(\vec{x}) < f(\vec{x}_0) \implies f(\vec{x}_0)$  es un máximo local.
- Si  $\vec{h}^T Hf(\vec{x}_0) \vec{h} > 0 \implies f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) > 0 \implies f(\vec{x}) > f(\vec{x}_0) \implies f(\vec{x}_0)$  es un mínimo local.
- Si  $\vec{h}^T Hf(\vec{x}_0) \vec{h} = 0 \implies$  este método no decide.

Vamos a analizar las condiciones que determinan el signo del término del hessiano.

### Formas Cuadráticas

#### Definición 3.4. Forma Cuadrática

Una **forma cuadrática** es una función  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que tiene la forma<sup>15</sup>:

$$g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + \dots + a_{22} x_2^2 + a_{23} x_2 x_3 + \dots$$

Una forma cuadrática se puede expresar de forma matricial como:

$$g(x_1, \dots, x_n) = [x_1, \dots, x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \vec{x}^T A \vec{x}$$

#### Ejemplo 3.1. Forma Cuadrática en $\mathbb{R}^3$

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_3^2 = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

<sup>13</sup>Lo que indica que la recta tangente a la función en ese punto es horizontal.

<sup>14</sup>Ver la [Definición 3.3](#), página 63.

<sup>15</sup>El nombre de *cuadrática* viene de que todos los términos son de segundo orden, de forma que:  $g(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^2 g(x_1, \dots, x_n)$ .

**Definición 3.5. Forma Cuadrática Definida y Semidefinida**

Una forma cuadrática  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es:

- **Definida positiva** si  $g(\vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq \vec{0}$
- **Semidefinida positiva** si  $g(\vec{x}) \geq 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$
- **Definida negativa** si  $g(\vec{x}) \leq 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq \vec{0}$
- **Semidefinida negativa** si  $g(\vec{x}) \leq 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

**Teorema 3.3. Formas Cuadráticas Definidas**

Sea una forma cuadrática  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con matriz asociada<sup>16</sup>  $A$ , entonces:

- $g$  es **definida positiva** si todos sus *autovalores son positivos*.
- $g$  es **definida negativa** si todos sus *autovalores son negativos*.

Hay una forma alternativa más sencilla para determinar si una forma cuadrática es defina.

**Teorema 3.4. Criterio de Sylvester**

Sea una forma cuadrática  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con matriz asociada  $A$ , y sea  $\Delta_k$  el determinante de orden  $k$  que forman los elementos de las  $k$  primeras filas y las  $k$  primeras columnas de la matriz  $A$ , para  $k = 1, 2, \dots, n$ . Entonces se verifica:

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 & \Delta_5 \\ \left[ \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{array} \right] \end{array}$$

- $g$  es **definida positiva** si todos los determinantes  $\Delta_k$  son positivos.
- $g$  es **definida negativa** si los determinantes  $\Delta_k$  tienen signos alternos empezando por negativo.
- $g$  es **semidefinida** si alguno de los determinantes  $\Delta_k = 0$ .
- $g$  **no es definida ni semidefinida** en cualquier otro caso.

En base a esto se puede estudiar el tipo de puntos críticos de una función escalar de varias variables.

**Teorema 3.5. Condición Suficiente para la Existencia de Extremos Relativos**

Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto,  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , de clase<sup>17</sup>  $\mathcal{C}^2$  en  $\vec{x}_0 \in A$ . Si  $\vec{x}_0$  es un **punto crítico** de  $f$ , de forma que  $\nabla f(\vec{x}_0) = 0$ , entonces si  $Hf(\vec{x}_0)$  es la **matriz hessiana**<sup>18</sup> de  $f$  en  $\vec{x}_0$  se tiene:

- Si todos los determinantes  $\Delta_k$  de  $Hf(\vec{x}_0)$  son positivos entonces  $f$  tiene un **mínimo local** en  $\vec{x}_0$ .
- Si los determinantes  $\Delta_k$  de  $Hf(\vec{x}_0)$  tienen signos alternos, empezando por un valor negativo,  $f_{x_1 x_1} < 0$ , entonces  $f$  tiene un **máximo local** en  $\vec{x}_0$ .
- Si alguno de los determinantes  $\Delta_k$  de  $Hf(\vec{x}_0)$  es nulo, este método no decide<sup>19</sup>.
- En cualquier otro caso, la función tiene un **punto silla** en  $\vec{x}_0$ .

<sup>16</sup>Las matrices asociadas a las formas cuadráticas son siempre simétricas y por tanto sus autovalores son siempre números reales, pudiéndose hacer siempre una diagonalización ortogonal.

<sup>17</sup>Ver la [Definición 2.20, página 48](#).

<sup>18</sup>Ver la [Definición 3.1, página 59](#).

<sup>19</sup>Sería necesario realizar otro tipo de estudios adicionales para determinar el tipo de punto. Alguno de ellos se utiliza en el [Ejercicio 3.9, página 70](#).

El estudio de los extremos relativos se simplifica para el caso particular de funciones escalares de **dos** variables. Sea  $(x_0, y_0)$  un **punto crítico** diferenciable donde  $\nabla f(x_0, y_0) = [0, 0]$ . Llamando  $A = f_{xx}(x_0, y_0)$ ,  $B = f_{xy}(x_0, y_0)$ ,  $C = f_{yy}(x_0, y_0)$  y  $H = |Hf(x_0, y_0)|$  se tiene:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad z = f(x, y) \quad ; \quad Hf(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \quad ; \quad H = AC - B^2$$

- Si  $H > 0$ 
  - Si  $A > 0$   $f(x, y)$  tiene un **mínimo local** en  $(x_0, y_0)$
  - Si  $A < 0$   $f(x, y)$  tiene un **máximo local** en  $(x_0, y_0)$
- Si  $H < 0$   $f(x, y)$  tiene un **punto silla** en  $(x_0, y_0)$
- Si  $H = 0$  este método **no decide**

### 3.4.2. Resumen sobre Puntos Críticos en Funciones de Varias Variables

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

<b>Pto Crítico</b> $(\vec{x}_0 \in A)$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ptos No Diferenciables} \\ \text{Ptos Diferenciables : } \nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0} \end{array} \right\} \Rightarrow$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Extremo Rel} \\ \text{Pto Silla} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Mínimo} \\ \text{Máximo} \end{array} \right.$
---	--	--

• **Ptos Diferenciables :**  $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0} \implies$  **Matriz Hessiana**

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad z = f(x, y)$$

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad w = f(x, y, z)$$

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

$$Hf(x, y, z) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}$$

$$Hf(\vec{x}_0) = \begin{bmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 & \Delta_5 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

- |                                |                   |
|--------------------------------|-------------------|
| $\Delta_i > 0$                 | <b>Mín. Local</b> |
| $+/-$ alternos, $\Delta_1 < 0$ | <b>Máx. Local</b> |
| $\Delta_i = 0$                 | Mét. No Decide    |
| Otro Caso                      | <b>Pto Silla</b>  |

**Ejercicio 3.5.** Estudiar los extremos relativos de la siguiente función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) = 2(x - 1)^2 + 3(y - 2)^2$$

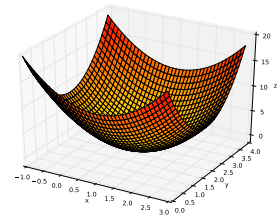
Esta función claramente corresponde con un paraboloide elíptico. Determinamos primero los puntos críticos:

$$\nabla f(x, y) = [f_x, f_y] = [0, 0] \implies \left\{ \begin{array}{l} f_x = 4(x - 1) = 0 \implies x = 1 \\ f_y = 6(y - 2) = 0 \implies y = 2 \end{array} \right\} \implies \vec{x}_0 = (1, 2)$$

Por tanto solo tiene un punto crítico en  $(1, 2)$  que puede ser un máximo, mínimo o punto silla. Determinamos entonces la matriz hessiana en ese punto:

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \implies \left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 = |4| = 4 > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 24 > 0 \end{array} \right.$$

Como los dos determinantes son positivos, el punto  $(1, 2)$  es un **mínimo local**. Notar que en este caso, al ser una matriz diagonal, los autovalores son 4 y 6, ambos positivos.



**Ejercicio 3.6.** Analizar el tipo de punto crítico que es  $(\pi/2, \pi/2, \pi/2)$  en la siguiente función  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y, z) = \text{sen}(x) + \text{sen}(y) + \text{sen}(z) - \text{sen}(x + y + z)$$

Comprobamos que  $(\pi/2, \pi/2, \pi/2)$  es un punto crítico de la función:

$$\nabla f(x, y, z) = [f_x, f_y, f_z] = [0, 0, 0] \implies \left\{ \begin{array}{l} f_x = \cos(x) - \cos(x + y + z) \implies f_x(\pi/2, \pi/2, \pi/2) = 0 \\ f_y = \cos(y) - \cos(x + y + z) \implies f_y(\pi/2, \pi/2, \pi/2) = 0 \\ f_z = \cos(z) - \cos(x + y + z) \implies f_z(\pi/2, \pi/2, \pi/2) = 0 \end{array} \right.$$

Por tanto es un punto crítico. Determinamos entonces la matriz hessiana en ese punto:

$$Hf(x, y, z) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\text{sen}(x) + \text{sen}(x + y + z) & \text{sen}(x + y + z) & \text{sen}(x + y + z) \\ \text{sen}(x + y + z) & -\text{sen}(y) + \text{sen}(x + y + z) & \text{sen}(x + y + z) \\ \text{sen}(x + y + z) & \text{sen}(x + y + z) & -\text{sen}(z) + \text{sen}(x + y + z) \end{bmatrix}$$

$$Hf(\pi/2, \pi/2, \pi/2) = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \implies \left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 = |-2| = -2 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \end{array} \right.$$

Como los dos determinantes son alternos empezando con un valor negativo, el punto es un **máximo local**. Notar que si se calculan los autovalores de esta matriz se obtiene  $-4$  y  $-1$  (doble), todos negativos.

**Ejercicio 3.7.** Estudiar los extremos relativos de la siguiente función  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y, z) = e^{-x^2} + e^{-y^2} + z^2$$

Determinamos los puntos críticos:

$$\nabla f(x, y, z) = [f_x, f_y, f_z] = [0, 0] \implies \left\{ \begin{array}{l} f_x = -2xe^{-x^2} = 0 \implies x = 0 \\ f_y = -2ye^{-y^2} = 0 \implies y = 0 \\ f_z = 2z = 0 \implies z = 0 \end{array} \right\} \implies \vec{x}_0 = (0, 0, 0)$$

Por tanto solo tiene un punto crítico en  $(0, 0, 0)$ . Determinamos la matriz hessiana en ese punto:

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-x^2}(-2 + 4x^2) & 0 & 0 \\ 0 & e^{-y^2}(-2 + 4y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Hf(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Como la matriz hessiana es diagonal, sus autovalores son  $-2$  (doble) y  $2$ , que al ser positivos y negativos indica que el único punto crítico es un **punto silla**.

Un punto crítico de tipo *punto silla* no significa siempre que la forma de la gráfica de la función en las cercanías del punto crítico tenga forma de *silla de montar*<sup>20</sup>, ya que esto solo ocurre para funciones  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Para funciones generales  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $n > 2$ , que un punto crítico sea un *punto silla* indica que siguiendo direcciones distintas el punto presenta comportamiento tanto de máximo como de mínimo local en las cercanías del punto crítico.

**Ejercicio 3.8.** Estudiar los extremos relativos de la siguiente función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$z(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

Determinamos primero los puntos críticos:

$$\nabla z(x, y) = [z_x, z_y] = [0, 0] \implies \left\{ \begin{array}{l} z_x = 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ z_y = 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{array} \right\}$$

Resolvemos el sistema no lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, para ello primero sumamos ambas ecuaciones:

$$x^3 + y^3 = 0 \implies y = \sqrt[3]{-x^3} = \sqrt[3]{-1} \sqrt[3]{x^3} = -x$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$x^3 - x + y = x^3 - x - x = x(x^2 - 2) = 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \implies y = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \implies y = \mp\sqrt{2} \end{array} \right.$$

Por tanto tiene tres puntos críticos que pueden ser máximos, mínimos y/o puntos sillars:

$$\vec{x}_1 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \quad ; \quad \vec{x}_2 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \quad ; \quad \vec{x}_3 = (0, 0)$$

Determinamos entonces la matriz hessiana:

$$Hz(x, y) = \begin{bmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{bmatrix}$$

Particularizando en cada punto críticos tenemos:

<sup>20</sup>Ver la gráfica de la [Sección 3.4, página 63](#).

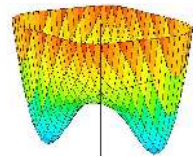
$$\begin{aligned}
 \bullet H_z(\vec{x}_1) = \begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{bmatrix} &\implies \left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 = |20| = 20 > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 392 > 0 \end{array} \right\} \implies \text{mínimo} \\
 \bullet H_z(\vec{x}_2) = \begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{bmatrix} &\implies \left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 = |20| = 20 > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 392 > 0 \end{array} \right\} \implies \text{mínimo} \\
 \bullet H_z(\vec{x}_3) = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} &\implies \left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 = |-4| = -4 < 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 0 \end{array} \right\} \implies \text{este método no decide}
 \end{aligned}$$

Para determinar este caso se puede por ejemplo determinar que ocurre en dos direcciones direcciones distintas, por ejemplo  $y = x$  e  $y = -x$ .

- $z(x, y) = z(x, x) = 2x^4 \implies$  curva que tiene un **mínimo** en  $x = 0$ .
- $z(x, y) = z(x, -x) = 2x^4 - 8x^2 = 2x^2(x^2 - 4) \implies$  curva que tiene un **máximo** en  $x = 0$ .

Por tanto, la función  $z(x, y)$  tiene un **punto silla** en  $(0, 0)$

En la siguiente figura se muestra una gráfica de esta función donde se puede observar los tres puntos críticos analizados.



### 3.5. Extremos Absolutos de Funciones en $\mathbb{R}^n$

#### Definición 3.6. Extremos Absolutos de una Función

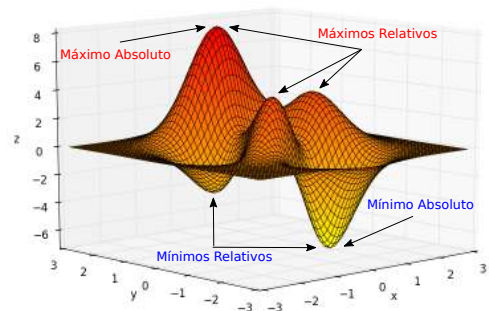
Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $\vec{x}_0 \in A$ .

- $\vec{x}_0$  es un **mínimo absoluto** de  $f$  si<sup>21</sup>  $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0) \forall \vec{x} \in A$ .
- $\vec{x}_0$  es un **máximo absoluto** de  $f$  si<sup>22</sup>  $f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0) \forall \vec{x} \in A$ .

Los máximos absolutos son los mayores de todos los máximos relativos y los mínimos absolutos son los menores de todos los mínimos relativos.

Los puntos máximos y mínimos relativos lo son con respecto a un determinado entorno de dicho punto, mientras que los máximos y mínimos absolutos lo son con respecto a la totalidad del dominio.

Notar que todos los extremos absolutos son también extremos relativos, pero no necesariamente se cumple al contrario.



<sup>21</sup>Se dice que el mínimo absoluto es **estricto** si  $f(\vec{x}) > f(\vec{x}_0)$ .

<sup>22</sup>Se dice que el máximo absoluto es **estricto** si  $f(\vec{x}) < f(\vec{x}_0)$ .

**Teorema 3.6. Teorema de Weierstrass o de los Valores Extremos**

Toda función real y continua en un *compacto* (cerrado y acotado) alcanza su máximo y mínimo absolutos.

Como consecuencia directa del teorema anterior se concluye que toda función real, continua, **no negativa** y con límite cero en el infinito tiene **máximo absoluto**.

**Ejercicio 3.9.** Estudiar los extremos relativos y absolutos de la siguiente función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(x^2 + y^2 - 1)^2$$

$$\nabla f = [f_x, f_y] = e^{-x^2-y^2}[2x(x^2 + y^2 - 1)(-x^2 - y^2 + 3), 2y(-x^2 - y^2 - 1)(-x^2 - y^2 + 3)] = \vec{0}$$

$$\begin{cases} 2x(x^2 + y^2 - 1)(-x^2 - y^2 + 3) = 0 \\ 2y(x^2 + y^2 - 1)(-x^2 - y^2 + 3) = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 3 \\ y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$$

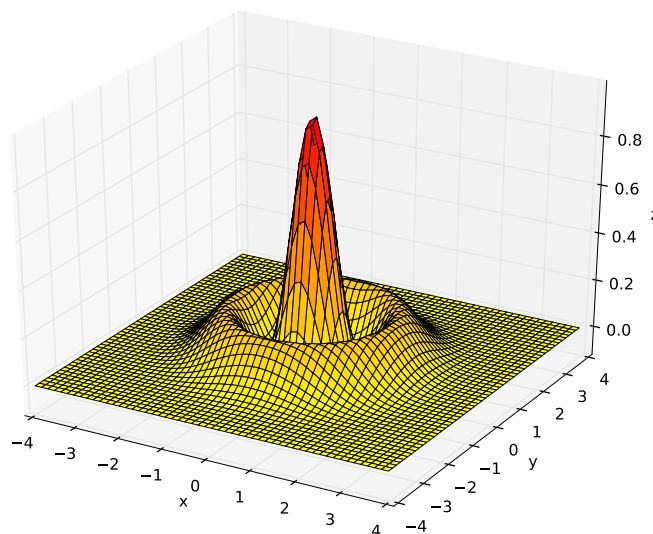
Por tanto tiene puntos críticos en el origen y en los puntos de las circunferencias centradas en el origen y de radio 1 y  $\sqrt{3}$ .

Ya que la matriz hessiana resulta complicada en este caso, para determinar el tipo de puntos críticos es más sencillo analizar el comportamiento de la función. El término  $e^{-x^2-y^2}$  hace que la función tienda a cero rápidamente a medida que nos alejamos del origen.

Por tanto:

- En el  $(0, 0)$  la función tiene un **máximo absoluto** con valor 1
- En los puntos de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  tiene **mínimos absolutos** con valor 0
- En los puntos de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 3$  tiene máximos relativos con valor  $4e^{-3}$ .

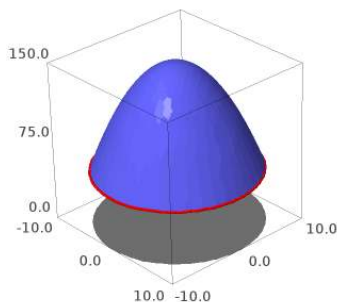
En la siguiente figura se muestra una representación gráfica de la función  $f(x, y)$  del ejercicio.



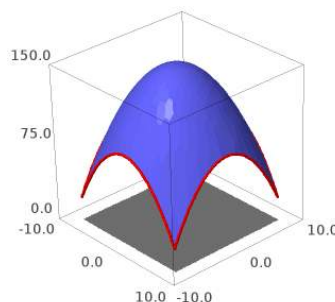
### 3.5.1. Extremos Sobre Conjuntos o Dominios

La cantidad y disposición de los extremos relativos y absolutos de una función, dependen fuertemente del dominio sobre el que se estudia.

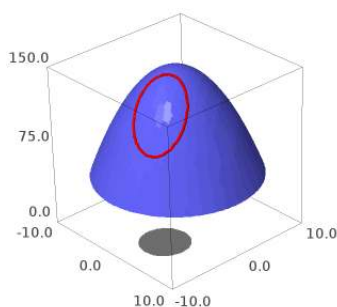
Como ejemplo ilustrativo, vamos a estudiar los extremos de una función escalar  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , correspondiente a una superficie definida sobre distintos dominios o conjuntos  $D$ .



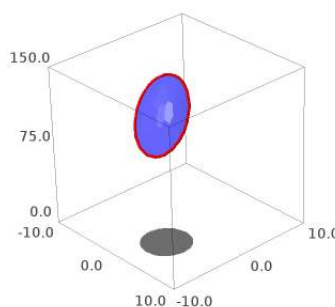
a)  $D = \{x^2 + y^2 \leq 8^2\}$



b)  $D = \{|x| \leq 8, |y| \leq 8\}$



c)  $D = \{(x - 3)^2 + (y + 4)^2 \leq 3^2\}$



d)  $D = \{(x - 3)^2 + (y + 4)^2 \leq 3^2\}$

- En la figura **a)** estudiamos los extremos de la función en un dominio  $D$  circular de centro origen y radio 8, (representado en color gris). En este caso tenemos un único máximo relativo en el origen, que también es absoluto, y un conjunto infinito de mínimos relativos, (que también son absolutos), en la frontera de la superficie, (representada con un borde rojo en la figura).
- En la figura **b)** estudiamos los extremos de la misma función, pero en este caso en un dominio  $D$  formado por un cuadrado de centro origen y de lados (paralelos a los ejes) 16. Ahora seguimos teniendo un único máximo relativo y absoluto, pero aparecen 4 nuevos máximos relativos en los centros de los lados del dominio y 4 mínimos relativos y absolutos en las cuatro esquinas del conjunto.
- En la figura **c)** estudiamos los extremos de la función en un dominio  $D$  circular de centro  $(3, -4)$  y radio 3. En la figura aparece el dominio  $D$  en gris y marcado en rojo la función correspondiente a  $D$ , donde apreciamos que el extremo superior de la superficie no entra a formar parte del estudio.
- La figura **d)** es el mismo caso de **c)** en el que se ha aislado la superficie correspondiente al dominio  $D$  de estudio. Observamos que aparece un único máximo y un único mínimo, ambos relativos y absolutos, correspondientes al punto más alto y al punto más bajo.

El proceso de determinación de extremos relativos y absolutos de una función escalar  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  restringida a un dominio  $D$  es el siguiente:

1. Encontrar los puntos críticos de la función en todo<sup>23</sup>  $\mathbb{R}^n$ , analizando sus puntos no diferenciables y sus puntos diferenciales con gradiente nulo.
2. De ellos nos quedamos unicamente con aquellos que se encuentran dentro del dominio de estudio de la función.
3. Clasificar los puntos críticos encontrados, analizando la función en los puntos no diferenciables y aplicando el **Teorema 3.5, página 65** en los puntos diferenciables.
4. Determinar y clasificar los extremos relativos de los puntos pertenecientes a la frontera de  $D$ , (en caso de que exista).
5. Determinar los extremos absolutos entre todos los extremos relativos del interior y de la frontera del dominio.

**Ejercicio 3.10.** Determinar los extremos absolutos de la siguiente función escalar en el dominio indicado.

$$z(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy \quad ; \quad 0 \leq x \leq 2 \quad , \quad -1 \leq y \leq 2$$

En este caso el dominio es un rectángulo. La función es un polinomio y por tanto es claramente diferenciable en todos los puntos de  $\mathbb{R}^2$ . Determinamos los puntos críticos de la función completa:

$$\nabla z = [z_x, z_y] = [3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x] \quad ; \quad \nabla z = 0 \implies \begin{cases} (0, 0) \\ (1, 1) \end{cases}$$

Fácilmente comprobamos que ambos se encuentran dentro del dominio. Clasificamos los puntos críticos a través de la matriz hessiana:

$$Hz = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix} \implies \begin{cases} Hz(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \implies \text{El mét. no decide} \\ Hz(1, 1) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \implies \text{Mínimo relativo } z(1, 1) = -1 \end{cases}$$

Para determinar el tipo de punto crítico en  $(0, 0)$  examinamos su comportamiento en todas las direcciones  $y = mx$ :

$$z(x, mx) = z(x) = 2x^3 + m^3x^3 - 3mx^2 \quad ; \quad z'(x) = 3x^2(2 + m^3) - 6m \quad ; \quad z''(x) = 6x(2 + m^3) - 6m$$

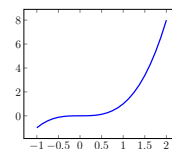
$$\implies \begin{cases} \text{Máx. en } (0, 0) \text{ si } m > 0 \\ \text{Mín. en } (0, 0) \text{ si } m < 0 \end{cases}$$

Por tanto en el punto  $(0, 0)$  hay un punto silla y no es un extremo relativo.

Ahora hay que analizar lo que ocurre en los puntos de la frontera, correspondiente en este caso a los cuatro lados del rectángulo:

$$\bullet \quad x = 0, -1 \leq y \leq 2 \implies z(0, y) = y^3 \quad \left\{ \begin{array}{l} z' = 3y^2 = 0 \implies y = 0 \\ z'' = 6y \quad (\text{convx/concv}) \end{array} \right\} \quad \boxed{\text{Pto Inf en } y = 0}$$

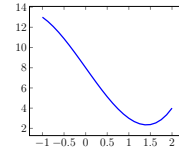
$$\begin{cases} z(0, -1) = -1 \\ z(0, 0) = 0 \\ z(0, 2) = 8 \end{cases}$$



<sup>23</sup>O en su defecto, en todo su dominio de definición.

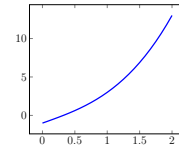
•  $x = 2, -1 \leq y \leq 2 \implies z(2, y) = 8 + y^3 - 6y \left\{ \begin{array}{l} z' = 3y^2 - 6 = 0 \implies y = \sqrt{2} \\ z'' = 6y > 0 \end{array} \right\}$  Mín en  $y = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} z(2, -1) = 13 \\ z(2, \sqrt{2}) = 8 - 4\sqrt{2} \\ z(2, 2) = 4 \end{cases}$$



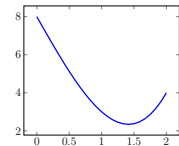
•  $y = -1, 0 \leq x \leq 2 \implies z(x, -1) = x^3 - 1 + 3x \left\{ z' = 3x^2 + 3 = 0 \implies \text{Nunca} \right\}$

$$\begin{cases} z(0, -1) = -1 \\ z(2, -1) = 13 \end{cases}$$



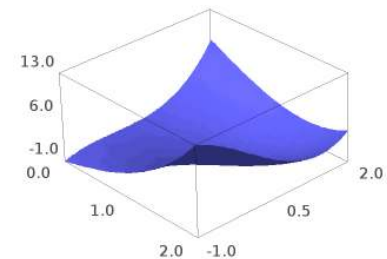
•  $y = 2, 0 \leq x \leq 2 \implies z(x, 2) = x^3 + 8 - 6x \left\{ \begin{array}{l} z' = 3x^2 - 6 = 0 \implies x = \sqrt{2} \\ z'' = 6x > 0 \end{array} \right\}$  Mín en  $x = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} z(0, 2) = 8 \\ z(\sqrt{2}, 2) = 8 - 4\sqrt{2} \\ z(2, 2) = 4 \end{cases}$$



Comparando todos los resultados y teniendo en cuenta el **Teorema 3.6, página 70**, concluimos:

- Mínimos Absolutos en  $(1, 1)$  y  $(0, -1)$  de valor ambos  $z = -1$
- Máximo Absoluto en  $(2, -1)$  de valor  $z = 13$



### 3.6. Extremos Relativos Condicionados de Funciones en $\mathbb{R}^n$

En los extremos relativos que se han calculado hasta ahora de funciones escalares  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  no se ha impuesto ninguna *restricción*<sup>24</sup> sobre las  $n$  variables independientes, y por tanto se dice que es un sistema con  $n$  *grados de libertad*. Estudiaremos ahora el caso de un sistema con ciertas *restricciones* o *ligaduras*.

**Definición 3.7. Ligadura y Variedad**

Sea  $\varphi : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  (con<sup>25</sup>  $m < n$ ) una función vectorial con componentes  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ .

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi(x_1, \dots, x_n) = [\varphi_1(\vec{x}), \dots, \varphi_m(\vec{x})]$$

- Se denomina **ligadura**, al sistema de ecuaciones  $\varphi(\vec{x}) = \vec{0} \implies \begin{cases} \varphi_1(\vec{x}) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_m(\vec{x}) = 0 \end{cases}$
- Se dice que el conjunto  $S = \{x \in A : \varphi(\vec{x}) = \vec{0}\}$  es la **variedad**<sup>26</sup> de  $\mathbb{R}^m$  que tiene por ecuación  $\varphi(\vec{x}) = \vec{0}$ .

<sup>24</sup>En el estudio de los *extremos absolutos*, (Sección 3.5, página 69), sí se ha puesto una restricción que es la que determina el dominio. En este apartado generalizaremos el tema de las restricciones.

<sup>25</sup>Si en un problema de optimización de una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  imponemos  $n$  condiciones (ecuaciones con solución), el dominio de estudio resultante tiene dimensión cero (un punto en  $\mathbb{R}^n$ ) y en ese punto se da el máximo y mínimo condicionado, careciendo el problema de interés matemático.

<sup>26</sup>La *variedad* corresponde a la solución del sistema de ecuaciones (normalmente no lineal) definido por la *ligadura* en el dominio.

### Definición 3.8. Extremo Relativo Condicionado

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $\varphi : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  (con  $m < n$ ) una función vectorial  $\varphi(\vec{x}) = [\varphi_1(\vec{x}), \dots, \varphi_m(\vec{x})]$ , formando la **variedad**  $S = \{\vec{x} \in A : \varphi(\vec{x}) = \vec{0}\}$ .

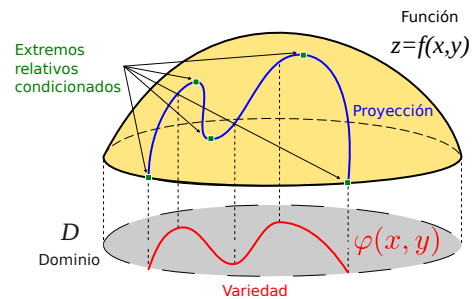
Se dice que  $f$  tiene en  $\vec{x}_0 \in A$  un **extremo relativo condicionado** (máximo o mínimo) por la *ligadura*  $\varphi(\vec{x}) = \vec{0}$ , si existe un *entorno reducido*<sup>27</sup>  $U^*$  de  $\vec{x}_0$  tal que, se cumple<sup>28</sup>:

- **Máximo Relativo Condicionado:** Si  $f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x})$ ,  $\forall x \in U^* \cap S$ .
- **Mínimo Relativo Condicionado:** Si  $f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x})$ ,  $\forall x \in U^* \cap S$ .

### Ejemplo 3.2. Extremos Relativos Condicionados

En la siguiente figura se muestra de forma gráfica los **extremos relativos** de una función  $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  **condicionados** por la **ligadura**  $\varphi(x, y) = 0$  que en este caso corresponde a una curva (**variedad**) en un determinado dominio  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ .

La parte de la superficie *condicionada* por la **ligadura** corresponde a la **proyección** de la **variedad** sobre la superficie en el dominio dado.



Notar que los extremos relativos condicionados del sistema no tiene porqué coincidir con los extremos relativos de la función original, ni darse tampoco en los puntos donde se producen los extremos relativos de la *variedad*.

El siguiente teorema establece la condición necesaria para para que se produzca un extremo relativo condicionado.

### Teorema 3.7. Condición Necesaria para la Existencia de Extremos Relativos Condicionados

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  abierto y sean  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $\varphi(\vec{x}) = [\varphi_1(\vec{x}), \dots, \varphi_m(\vec{x})]$  y  $m < n$ , donde  $f$  y  $\varphi$  son de clase<sup>29</sup>  $\mathcal{C}^1$  en  $\vec{x}_0 \in A$  y cumpliéndose que  $\varphi(\vec{x}_0) = \vec{0}$  y el rango<sup>30</sup> de  $D\varphi(\vec{x}_0) = m$ .

Para que la función  $f(\vec{x})$  tenga un extremo relativo en un punto  $\vec{x}_0 \in A$  condicionado por la ligadura  $\varphi(\vec{x}) = \vec{0}$ , es necesario que existan  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  (denominados **multiplicadores de Lagrange**) únicos, tales que la función:

$$g = f - \lambda_1 \varphi_1 + \dots - \lambda_m \varphi_m$$

denominada **función de Lagrange**, tenga un *punto crítico* en  $x_0$ , es decir:

$$\nabla g(\vec{x}_0) = 0 \quad \implies \quad \nabla f(\vec{x}_0) = \lambda_1 \nabla \varphi_1(\vec{x}_0) + \dots + \lambda_m \nabla \varphi_m(\vec{x}_0)$$

El teorema establece que podemos encontrar los extremos relativos condicionados de un problema, encontrando los extremos relativos de la *función de Lagrange* asociada al problema.

<sup>27</sup>Ver la **Sección 1.2, página 6.**

<sup>28</sup>Los puntos de  $\mathbb{R}^n$  del conjunto  $U^* \cap S$  son aquellos que perteneciendo al dominio  $A$  de la función, están en un entorno  $U^*$  de  $x_0$  y además forman parte de la variedad  $S$ .

<sup>29</sup>Ver la **Definición 2.20, página 48.**

<sup>30</sup>Si el rango de la matriz jacobiana  $D\varphi(x_0)$  coincide con el número de componentes (filas)  $m < n$  (columnas), indica que hay  $m$  variables independientes de las  $n$  que tiene el sistema.

**Demostración 3.7.**

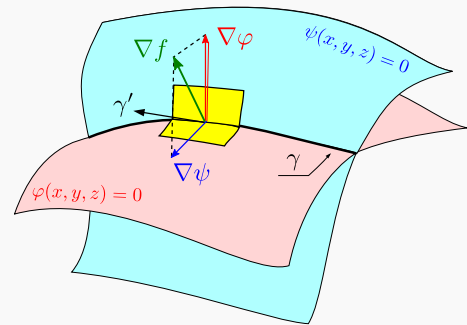
Estudiaremos el caso de una función  $f(x, y, z)$  y dos ligaduras  $\varphi(x, y, z) = 0$  y  $\psi(x, y, z) = 0$ , llamando  $\gamma(x, y, z)$  a la curva solución del sistema:

$$\gamma(x, y, z) : \begin{cases} \varphi(x, y, z) = 0 \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{cases} \implies \gamma(t) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

donde  $\gamma(t)$  es la misma curva pero de forma parametrizada. Si en un cierto punto  $P$  de la curva  $\gamma(t)$  hay un extremo relativo, entonces la derivada de  $f$  con respecto a  $t$  en  $P$  debe ser igual a cero. Por la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = \nabla f \cdot \gamma'(t) = 0 \implies \nabla f \perp \gamma'(t)$$

A su vez como  $\gamma(t)$  es solución de  $\varphi(x, y, z) = 0$  y  $\psi(x, y, z) = 0$ , por tanto es una *curva de nivel* de ambas superficies y por ello el vector  $\gamma'(t)$  debe ser ortogonal<sup>31</sup> al gradiente de las ligaduras en cada punto  $P$  de la curva. Como conclusión, los vectores  $\nabla f$ ,  $\nabla \varphi$  y  $\nabla \psi$ , evaluados en un extremo relativo  $P$  de la curva  $\gamma(t)$ , se encuentran en un mismo plano y por tanto  $\nabla f$  puede expresarse como una combinación lineal de  $\nabla \varphi$  y  $\nabla \psi$ . Los multiplicadores de Lagrange corresponden con los coeficientes de dicha combinación lineal.



Procedimiento de la determinación de extremos relativos de una función  $f$  condicionados por un conjunto de condiciones  $\varphi(\vec{x}) = \vec{0}$ , mediante el método de los **multiplicadores de Lagrange**.

1. Formamos la función de Lagrange:  $g = f - \lambda_1 \varphi_1 - \dots - \lambda_m \varphi_m$

2. Determinamos su gradiente e igualamos a cero:

$$\nabla g = \nabla f - \lambda_1 \nabla \varphi_1 - \dots - \lambda_m \nabla \varphi_m = \vec{0} \implies \nabla f = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla \varphi_i \implies \begin{cases} f_{x_1} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_{ix_1} \\ \vdots \\ f_{x_n} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_{ix_n} \end{cases}$$

3. Con estas  $n$  ecuaciones y junto con las  $m$  condiciones se forma un sistema, generalmente no lineal, de  $m + n$  ecuaciones e incógnitas, cuya solución determina los *puntos críticos*  $(x_0, y_0, z_0)$  del problema, junto con los valores de los multiplicadores de Lagrange  $\lambda_i$ . Estos últimos no tienen ningún valor práctico, pero suele ser necesario obtener su valor para determinar los *puntos críticos*.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Sist. no lineal de} \\ (n + m) \times (n + m) \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} f_{x_1} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_{ix_1} \\ \vdots \\ f_{x_n} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_{ix_n} \end{array} \right\} n \\ \left. \begin{array}{l} \varphi_1(\vec{x}) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_m(\vec{x}) = 0 \end{array} \right\} m \end{array} \right\}$$

**Ejercicio 3.11.** Hallar los extremos relativos de  $f(x, y) = xy$  condicionados por  $x^2 + y^2 + xy = 4$ .

Formamos la función de Lagrange, encontramos su gradiente y formamos el sistema de ecuaciones no lineal:

$$g(x, y) = xy - \lambda(x^2 + y^2 + xy - 4) ; \quad \left. \begin{array}{l} \nabla f = (y, x) \\ \nabla \varphi = (2x + y, 2y + x) \end{array} \right\} \implies \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 4 \\ y = \lambda(2x + y) \\ x = \lambda(2y + x) \end{cases}$$

Resolvemos el sistema, para ello despejamos  $\lambda$  de las dos últimas ecuaciones e igualamos.

$$\frac{y}{2x + y} = \frac{x}{2y + x} \implies 2y^2 + xy = 2x^2 + xy \implies x = \pm y$$

Sustituyendo en la primera ecuación, encontramos los valores de los puntos críticos y de los multiplicadores de Lagrange, (cuyo valor no tiene ninguna aplicación):

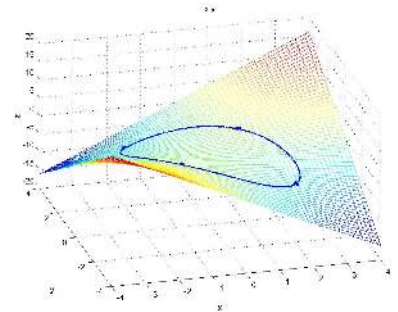
$$\implies \begin{cases} y^2 + y^2 + y^2 = 4 \implies y = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \\ y^2 + y^2 - y^2 = 4 \implies y = \pm 2 \end{cases} \implies \text{Sol : } \begin{cases} (x_1, y_1, \lambda_1) = (2, -2, -1) \\ (x_2, y_2, \lambda_2) = (-2, 2, -1) \\ (x_3, y_3, \lambda_3) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3}\right) \\ (x_4, y_4, \lambda_4) = \left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3}\right) \end{cases}$$

Para determinar el carácter de los puntos estacionarios, se podría estudiar el hessiano de la función de Lagrange  $g(x, y)$ , pero en este caso sencillo, al ser  $f$  un polinomio de segundo grado y la condición una elipse, basta con ver los valores de  $f(x, y)$  en cada punto:

$$f(x_1, y_1) = -4 ; f(x_2, y_2) = -4 ; f(x_3, y_3) = 4/3 ; f(x_4, y_4) = 4/3$$

Por tanto los dos primeros son mínimos y los dos segundos son máximos.

En la siguiente figura se muestra el problema de forma gráfica.



**Ejercicio 3.12.** Calcular los máximos y mínimos absolutos de la siguiente función en el dominio dado.

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 6x - 8y + 25, \quad \text{en } D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 16\}$$

Empezamos encontrando los extremos relativos de la función completa:

$$\nabla f = [2x + 6, 2y - 8] = \vec{0} \implies \begin{cases} 2x + 6 = 0 \implies x = -3 \\ 2y - 8 = 0 \implies y = 4 \end{cases}$$

Como  $(-3)^2 + 4^2 = 25 > 16$ , el punto  $(-3, 4)$  no pertenece al dominio  $D$  que nos interesa y por tanto no lo tenemos en cuenta.

<sup>31</sup>Ver el Teorema 2.8, página 32.

Estudiamos ahora que ocurre en la frontera de  $D$ , dada por la ecuación  $x^2 + y^2 = 16$  que corresponde con una circunferencia centrada en el origen y de radio 4. Utilizando los multiplicadores de Lagrange se tiene:

$$g = f - \lambda\varphi = x^2 + y^2 + 6x - 8y + 25 - \lambda(x^2 + y^2 - 16) \implies \nabla g = [2x + 6 - 2\lambda x, 2y - 8 - 2\lambda y]$$

Resolvemos el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 6 - 2\lambda x = 0 \implies \lambda = \frac{2x+6}{2x} \\ 2y - 8 - 2\lambda y = 0 \implies \lambda = \frac{2y-8}{2y} \\ x^2 + y^2 = 16 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \frac{2x+6}{2x} = \frac{2y-8}{2y} \implies 12y = -16x \implies y = \frac{4}{3}x \\ x^2 + y^2 = 16 \end{array} \right.$$

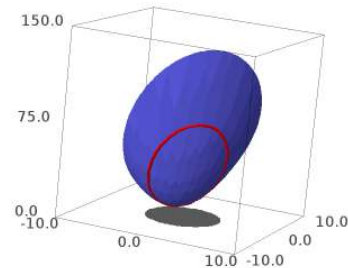
$$x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 16 \ ; \ x^2 = \frac{16 \cdot 9}{25} \implies x = \pm \frac{12}{5} \implies y = \pm \frac{16}{5} \implies \left\{ \begin{array}{l} (x_1, y_1, \lambda_1) = \left(\frac{12}{5}, -\frac{16}{5}, \frac{9}{4}\right) \\ (x_2, y_2, \lambda_2) = \left(-\frac{12}{5}, \frac{16}{5}, -\frac{1}{4}\right) \end{array} \right.$$

Para determinar el tipo de punto crítico analizamos la matriz jacobiana de la función de Lagrange:

$$Hg = \begin{bmatrix} 2 - 2\lambda & 0 \\ 0 & 2 - 2\lambda \end{bmatrix} \implies \left\{ \begin{array}{l} Hg\left(\frac{12}{5}, -\frac{16}{5}, \frac{9}{4}\right) = \begin{bmatrix} -5/2 & 0 \\ 0 & -5/2 \end{bmatrix} \implies \text{Máximo} \\ Hg\left(-\frac{12}{5}, \frac{16}{5}, -\frac{1}{4}\right) = \begin{bmatrix} 5/2 & 0 \\ 0 & 5/2 \end{bmatrix} \implies \text{Mínimo} \end{array} \right.$$

En la siguiente figura se muestra una representación gráfica del problema. En azul aparece la función  $f(x, y)$  a optimizar, en gris aparece el dominio  $x^2 + y^2 \leq 16$ , correspondiente a la restricción (ligadura), y en rojo aparece la proyección de la ligadura sobre la función (variedad).

A través de la gráfica podemos intuir como el mínimo de la función cae fuera del dominio y como la zona de estudio solo tiene dos puntos críticos uno máximo absoluto y el otro mínimo absoluto.



**Ejercicio 3.13.** Encontrar los extremos absolutos de la función  $f(x, y, z) = x + y + z$  con las restricciones  $x^2 + y^2 = 2$  y  $z = 2$ .

Formamos la función de Lagrange, obtenemos su gradiente y formamos el sistema no lineal de 3+2 ecuaciones e incógnitas correspondiente al método de los multiplicadores de Lagrange.

$$g = x + y + z - \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) - \lambda_2(z - 2) \implies \left\{ \begin{array}{l} 1 - 2x\lambda_1 = 0 \implies \lambda_1 = 1/2x \\ 1 - 2y\lambda_1 = 0 \implies \lambda_1 = 1/2y \implies x = y \\ 1 - \lambda_2 = 0 \implies \lambda_2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \implies 2x^2 = 2 \implies x = y = \pm 1 \\ z = 2 \end{array} \right.$$

Por tanto los puntos críticos son  $(1, 1, 2)$  y  $(-1, -1, 2)$ . Para clasificar los puntos críticos podemos hacerlo a través de la matriz hessiana de la función de Lagrange  $g$ , pero en este caso, al ser funciones sencillas, podemos pasar a polares para obtener una función de una sola variable, y entonces analizarla.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{2} \cos t \\ y = \sqrt{2} \sin t \\ z = 2 \end{array} \right\} f(x, y, z) = f(t) = \sqrt{2} \cos t + \sqrt{2} \sin t + 2 \implies f'(t) = -\sqrt{2} \sin t + \sqrt{2} \cos t$$

$$f''(t) = -\sqrt{2} \cos t - \sqrt{2} \sin t \implies \left\{ \begin{array}{l} x = y = 1 \implies t = \pi/4 \implies f''(\pi/4) = -2 < 0 \implies \text{Máx} \\ x = y = -1 \implies t = 5\pi/4 \implies f''(5\pi/4) = 2 > 0 \implies \text{Mín} \end{array} \right.$$

## 3.7. Teorema de la Función Implícita

### 3.7.1. Funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Recordamos que en el caso de funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada una función en forma implícita:

$$f(x, y) = 0$$

la condición suficiente para exista una función  $y = f(x)$  en torno a un punto  $x_0$  es que tenga derivadas parciales continuas en el punto y cumpla:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) \neq 0 \end{array} \right\}$$

En este caso, la derivada  $y'(x)$  es única y continua en las cercanías de  $x_0$  y vale<sup>32</sup> :

$$Df(x, y) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \quad ; \quad y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x, y(x))}{f_y(x, y(x))}$$

Hay tres motivos por los que una curva definida de forma implícita no defina una función en un punto<sup>33</sup>:

- Por que no exista la curva en ese punto. Por ejemplo  $f(x, y) = x/y$  en  $(0, 0)$ .
- La curva esté definida en el punto pero no tenga un comportamiento *suave*. Por ejemplo la función  $x^2 - y^3 = 0$  en  $(0, 0)$  tiene una esquina.
- El valor de la función en un punto no sea único. Por ejemplo la curva  $x^2 - y^2 = 0$ , equivalente a  $y = \pm x$ , está formada por dos rectas que se cruzan en  $(0, 0)$  y a cada punto del dominio, distinto del origen, le corresponden dos imágenes.

#### Nota 3.3.

- En una función  $f(x, y) = 0$  se puede expresar cualquiera de las dos variables en función de la otra, siempre que cumpla las condiciones del teorema de la función implícita.
- Si  $f(x, y)$  tiene derivadas parciales de orden  $n$  continuas en algún intervalo  $I$ , entonces la función  $y(x)$  tiene derivadas de orden  $n$  continuas en  $I$ .

**Ejercicio 3.14.** Sea la ecuación:

$$x^3 - y^3 + 2xy - x + y = 0$$

- Determinar si se puede definir de forma implícita una función  $y = f(x)$  en las cercanías del punto  $(0, 1)$ .
- En caso de ser posible determinar la ecuación de la recta tangente a la función  $y(x)$  en el punto  $(0, 1)$ .
- En caso de ser posible determinar el polinomio de Taylor de orden 2 de la función  $y(x)$  en el punto  $(0, 1)$ .
- Determinar de forma gráfica con algún software matemático los puntos en los cuales no se puede definir una función implícita  $y(x)$ .
- Determinar los puntos  $(x, y)$  en cuyas cercanías se puede definir tanto  $x$  como función implícita de  $y$  como también  $y$  como función implícita de  $x$ .

<sup>32</sup>Generalmente solo se podrá determinar el valor de la derivada  $y'(x)$  en el punto  $(x_0, y_0)$ , ya para otro punto  $x_1$  se necesita conocer el correspondiente  $y_1$  tal que  $f(x_1, y_1) = 0$ .

<sup>33</sup>Consecuencia de no cumplir las condiciones del teorema de la función implícita.

a) Definimos la función:

$$f(x, y) = x^3 - y^3 + 2xy - x + y$$

y comprobamos las condiciones de la función implícita en el punto  $(0, 1)$ :

$$\begin{cases} f(0, 1) = -1 + 1 = 0 \\ f_x = 3x^2 + 2y - 1 \quad ; \quad f_y = -3y^2 + 2x + 1 = 0 \\ f_y(0, 1) = -3 + 1 = -2 \neq 0 \end{cases} \quad \text{funciones continuas en } (0, 1)$$

Como se cumplen, podemos afirmar que se puede definir una función implícita  $y(x)$  en las cercanías del punto  $(0, 1)$ .

b) La ecuación de la recta tangente de una función  $y = f(x)$  en un punto  $x_0$  viene dada por:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

En nuestro caso determinamos el valor de la derivada de la función implícita  $y(x)$  en el punto  $(0, 1)$ :

$$y'(0) = -\frac{f_x(0, 1)}{f_y(0, 1)} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es:

$$y_t = y(0) + y'(0)(x - 0) = 1 + \frac{1}{2}x$$

c) El desarrollo de Taylor de segundo orden de una función en un punto  $x_0$  viene dado por:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

Determinamos la segunda derivada de la función implícita en nuestro caso:

$$f(x, y) = 0 \quad ; \quad f_x + f_y y' = 0 \quad ; \quad f_{xx} + f_{xy} y' + f_y y'' + f_{xy} y' + f_{yy} (y')^2 = 0$$

$$y'' = -\frac{f_{xx} + 2f_{xy} y' + f_{yy} (y')^2}{f_y}$$

Determinamos las derivadas parciales correspondientes de  $f(x, y)$ :

$$\begin{cases} f_{xx} = 6x \quad ; \quad f_{xx}(0, 1) = 0 \\ f_{xy} = 2 \quad ; \quad f_{xy} = 2 \\ f_{yy} = -6y \quad ; \quad f_{yy}(0, 1) = -6 \end{cases}$$

como son funciones continuas se tiene:

$$y''(0) = -\frac{0 + 2 - 6/4}{-2} = \frac{1}{4}$$

Finalmente el desarrollo de Taylor de segundo orden de la función implícita  $y(x)$  en el punto  $(0, 1)$  es:

$$y(x) \approx 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2$$

d) La función implícita no podrá definirse si en un punto  $f_y = 0$ , por tanto:

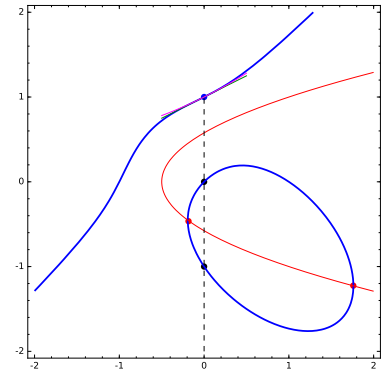
$$f_y = -3y^2 + 2x + 1 = 0$$

Además tiene que ser un punto de la función  $f(x, y)$ , por tanto, los puntos en los cuales no se puede definir de forma implícita una función son la solución del siguiente sistema no lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} -3y^2 + 2x + 1 = 0 \\ x^3 - y^3 + 2xy - x + y = 0 \end{cases}$$

El la siguiente gráfica se muestra en azul la representación gráfica de la función  $f(x, y) = 0$  y en rojo la función  $f_y$ . Los puntos de corte de ambas representan los puntos en los cuales no se puede definir la función implícita (puntos rojos). En ellos se observa que la derivada de la función implícita con respecto a la variable  $x$  sería infinito, de ahí que no se pueda definir.

Además se muestra el punto  $(0, 1)$  (punto azul) junto con su recta tangente (en verde) y el polinomio de segundo orden (en magenta).



Por otra parte, la gráfica muestra que para  $x = 0$  la función  $f(x, y)$  tiene tres puntos: además del  $(0, 1)$  están los puntos  $(0, 0)$  y  $(0, -1)$ . En cada uno de ellos se pueden definir una función implícita distinta, por tanto cuando se refiere a la función implícita en un punto es necesario especificar los valores  $x$  e  $y$  ya que, como en este caso, es posible que existan varios valores de  $y$  para un único valor de  $x$ .

- e) Para que se puedan definir ambas funciones  $y = y(x)$  y  $x = x(y)$  es necesario que ambas derivadas parciales no sean nulas, por tanto:

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 + 2y - 1 = 0 & \implies y = (1 - 3x^2)/2 \\ f_y = -3y^2 + 2x + 1 = 0 & \implies -3(1 - 3x^2)^2/4 + 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

En la gráfica anterior se observa que ningún punto cumple estas dos condiciones, ya que solo hay dos puntos donde  $f_y = 0$  y gráficamente se ve que en ninguno de ellos  $f_x = 0$ . Por tanto, para todo punto de la curva  $f(x, y)$ , excepto los dos donde  $f_y = 0$ , se pueden definir de forma implícita ambas funciones  $y = y(x)$  y  $x = x(y)$ .

### 3.7.2. Funciones Escalares de Dos Variables

De forma análoga a lo que ocurre en las funciones de una variable<sup>34</sup>, una función expresada como  $f(x, y, z) = 0$  puede representar una *superficie*<sup>35</sup>  $z = z(x, y)$  de forma *implícita* en las cercanías de un punto  $(x_0, y_0)$  siempre que tenga derivadas continuas en dicho punto y:

$$\begin{cases} f(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ f_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0 \end{cases}$$

en este caso, las derivadas parciales  $z_x(x, y)$  y  $z_y(x, y)$  son únicas y continuas en las cercanías de  $(x_0, y_0)$  y valen:

$$Df(x, y, z) = 0 \quad ; \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 & ; \quad z_x = -\frac{f_x(x, y, z(x, y))}{f_z(x, y, z(x, y))} \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0 & ; \quad z_y = -\frac{f_y(x, y, z(x, y))}{f_z(x, y, z(x, y))} \end{cases}$$

<sup>34</sup>Ver la Sección 3.7.1, página 78.

<sup>35</sup>Ver la Sección A.2, página 157.

### 3.7.3. Funciones Escalares de Varias Variables

Vamos a ver la generalización del teorema para funciones escalares de varias variables.

#### Teorema 3.8. Teorema de la Función Implícita

Sea una función  $f : A \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}^1$ . Vamos a representar un punto general de  $\mathbb{R}^{n+1}$  de la forma  $(\vec{x}, y)$  con  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}$  y en particular un punto dado  $(\vec{a}, b)$  con  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ . Si se verifica que:

$$\begin{cases} f(\vec{a}, b) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}, b) \neq 0 \end{cases}$$

Entonces, existe una bola<sup>36</sup>  $B(\vec{a}, r) \subset \mathbb{R}^n$  para algún  $r > 0$  donde está definida una función única  $y = y(\vec{x})$ , denominada **función implícita**, que satisface  $f[\vec{x}, y(\vec{x})] = 0$  y donde sus derivadas parciales, a través de la regla de la cadena<sup>37</sup> vienen dadas por:

$$D_{x_i} f = \vec{0} \implies f_{x_i} + f_y \frac{\partial y}{\partial x_i} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial x_i} = - \frac{f_{x_i}[\vec{x}, f(x)]}{f_y[\vec{x}, f(x)]} \quad ; \quad \forall i = 1, \dots, n$$

**Nota 3.4.** El teorema de la función implícita da una condición suficiente de existencia, pero no necesaria.

**Ejercicio 3.15.** ¿Cerca de qué puntos es posible representar la superficie  $x^2 + y^2 + xz = 1$  como gráfica de una función diferenciable  $z = z(x, y)$ ?

Definimos:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + xz - 1 \implies \begin{cases} f_x = 2x + z \\ f_y = 2y \\ f_z = x \end{cases}$$

Como  $f \in \mathcal{C}^1$ , por el teorema de la función implícita, para todo  $(x, y)$  con  $x \neq 0$  existe una función  $z = z(x, y)$ . En este caso particular, esa función puede obtenerse despejando  $z$  de la ecuación  $f(x, y, z) = 0$ :

$$z(x, y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{x} \quad (3.1)$$

comprobándose que efectivamente es válida  $\forall x \neq 0$ . Además aplicando el *teorema de la función implícita* se puede obtener la derivada de dicha función sin conocerla:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= - \frac{f_x[x, y, z(x, y)]}{f_z[(x, y, z(x, y))]} = - \frac{2x + z}{x} = - \frac{2x + \frac{1 - x^2 - y^2}{x}}{x} = - \frac{1 + x^2 - y^2}{x^2} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= - \frac{f_y[x, y, z(x, y)]}{f_z[(x, y, z(x, y))]} = - \frac{2y}{x} \end{aligned}$$

En este caso podemos comprobar la veracidad de esta función, derivando de forma directa la función obtenida (3.1):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2xx - (1 - x^2 - y^2)}{x^2} = \frac{-1 - x^2 + y^2}{x^2} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{2y}{x}$$

que coincide con la obtenida anteriormente.

<sup>36</sup>Ver la [Definición 1.11](#), página 6.

<sup>37</sup>Ver la [Sección 2.6](#), página 43.

### 3.7.4. Funciones Vectoriales de Varias Variables

Vamos a ver la generalización del *teorema de la función implícita* para funciones vectoriales de varias variables.

#### Teorema 3.9. Teorema de la Función Implícita

Sea una función  $F : A \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  de clase  $\mathcal{C}^1$ , de la forma:

$$F(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = [f_1(x_1, \dots, y_m), \dots, f_m(x_1, \dots, y_m)]$$

donde su matriz jacobiana viene dada por<sup>38</sup> :

$$DF = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} & \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{bmatrix} = [DF_{\vec{x}}, DF_{\vec{y}}]$$

Vamos a representar un punto general de  $\mathbb{R}^{n+m}$  de la forma  $(\vec{x}, \vec{y})$  con  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  e  $\vec{y} = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$  y un punto en particular  $(\vec{a}, \vec{b}) \in A$  con  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$  y  $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)$ .

Si  $F$  se verifica que:

$$\bullet F(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{0} \iff \begin{cases} f_1(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \\ \vdots \\ f_m(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \end{cases}$$

$$\bullet J_{F, \vec{y}}(\vec{a}, \vec{b}) = \left| \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (\text{El jacobiano}^{39} \text{ distinto de cero}).$$

Entonces, existe una bola<sup>40</sup>  $B(\vec{a}, r) \subset \mathbb{R}^n$  para algún  $r > 0$  donde está definida una única **función vectorial de varias variables implícita**  $Y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  de la forma:

$$\vec{y} = Y(\vec{x}) = [y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)]$$

que satisface  $F[\vec{x}, Y(\vec{x})] = \vec{0}$  en los puntos  $\vec{x} \in B(\vec{a}, r)$  y con derivadas parciales dadas a través de la regla de la cadena de la forma:

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0} \implies D_{\vec{x}}F(\vec{x}, Y(\vec{x})) + D_{\vec{y}}F(\vec{x}, Y(\vec{x}))D_{\vec{x}}Y(\vec{x}) = 0_{m \times n}$$

$$D_{\vec{x}}Y(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = -[D_{\vec{y}}F(\vec{x}, Y(\vec{x}))]^{-1} D_{\vec{x}}F(\vec{x}, Y(\vec{x})) \quad ; \quad D_{\vec{x}}Y(\vec{x}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

<sup>38</sup>A la parte izquierda de la matriz jacobiana  $DF \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$  la denominamos  $DF_{\vec{x}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y a la parte derecha la denominamos  $DF_{\vec{y}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .

<sup>39</sup>Ver la [Definición 2.16](#), página 30.

<sup>40</sup>Ver la [Definición 1.11](#), página 6.

**Ejercicio 3.16.** Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} xu^2 + yv^2 + z = 5 \\ xyz + uv = 0 \end{cases}$$

Analizar si dicho sistema define implícitamente a las variables  $u$  y  $v$  como funciones de  $(x, y, z)$  en torno al punto  $(x, y, z, u, v) = (0, 1, 1, 0, 2)$ .

Definimos la función  $F : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de la forma:

$$F(x, y, z, u, v) = [f_1(x, y, z, u, v), f_2(x, y, z, u, v)] = [xu^2 + yv^2 + z - 5, xyz + uv]$$

Comprobamos las condiciones del teorema de la función implícita:

- $F(0, 1, 1, 0, 2) = [0, 0]$
- El jacobiano en  $(0, 1, 1, 0, 2)$  es:

$$J_{F,u,v}(x, y, z, u, v) = \left| \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2xu & 2yv \\ v & u \end{vmatrix} = 2xu^2 - 2yv^2$$

$$J_{F,u,v}(0, 1, 1, 0, 2) = -8 \neq 0$$

Por tanto el teorema de la función implícita asegura que existen las funciones buscadas, las cuales son, al menos, de clase  $\mathcal{C}^1$  en un entorno del punto  $(x, y, z) = (0, 1, 1)$ .

### 3.8. Teorema de la Función Inversa

Recordamos que para que una función  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , del tipo  $y = f(x)$  tenga *inversa*<sup>41</sup>  $x = f^{-1}(y)$  es necesario que la  $f(x)$  sea *inyectiva*<sup>42</sup>, cumpliéndose:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \text{y} \quad (f \circ f^{-1})(y) = y$$

Entonces aplicando la *regla de la cadena*:

$$D_x(f^{-1} \circ f)(x) = D_x x \implies (f^{-1})'(x_0)f'(x_0) = 1 \implies (f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \forall x_0 \in A : f'(x_0) \neq 0$$

Vamos a ver la versión general para funciones vectoriales de varias variables.

#### Teorema 3.10. Teorema de la Función Inversa

Sea una función  $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $\mathcal{C}^1$  y sea  $\vec{a} \in A$ . Si el *jacobiano*  $J_F(\vec{a}) \neq 0$  entonces  $F$  admite **función inversa**  $F^{-1}$  local en  $\vec{a}$ .

Además,  $F^{-1}$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  y la matriz jacobiana de  $F^{-1}$  en el punto  $\vec{y} = F(\vec{x})$  es la inversa de la matriz jacobiana de  $F$  :

$$DF^{-1}(\vec{y}) = [DF(\vec{x})]^{-1}$$

<sup>41</sup>Nos referimos a la función inversa, no a la inversa de la función  $[f(x)]^{-1} = 1/f(x)$ .

<sup>42</sup>Una función es *inyectiva* si elementos distintos del dominio tienen siempre imágenes distintas. Esto obliga a que en el dominio la función sea siempre creciente o decreciente, sin derivada nula en ningún punto.

**Ejercicio 3.17.** Sea la función  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por:

$$F(x, y) = [u, v] \begin{cases} u = -3x + y^3 \\ v = -3y + x^3 \end{cases}$$

Analizar si  $F$  admite inversa local en torno del punto  $(x, y) = (1, 0)$  y en el caso que exista y sea derivable, hallar sus derivadas parciales respecto de  $u$  en el punto  $(u, v) = f(1, 0)$ .

$$J_F(x, y) = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3y^2 \\ 3x^2 & -3 \end{vmatrix} = 9(1 - x^2y^2)$$

Como  $J_F(1, 0) = 9 \neq 0$  por tanto  $F$  admite inversa local en torno del punto  $(1, 0)$ , la cual es de clase  $C^1$  al menos, en un entorno de dicho punto.

Para calcular las derivadas parciales  $x'_u(1, 0)$  e  $y'_u(1, 0)$ , derivamos el sistema original con respecto a  $u$ :

$$\begin{cases} 1 = -3x'_u + 3y'^2y'_u \\ 0 = -3y'_u + 3x'^2x'_u \end{cases} \implies (x, y) = (1, 0) \implies \begin{cases} 1 = -3x'_u \\ 0 = -3y'_u + 3x'^2x'_u \end{cases} \implies \begin{cases} x'_u(1, 0) = -\frac{1}{3} \\ y'_u(1, 0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

### 3.9. Cambio de Variable

En ocasiones, para resolver determinados problemas, como ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, se recurre a la técnica de los *cambios de variable*, pudiéndose reducir el problema original a otro más sencillo de resolver. Por ejemplo en una función  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  del tipo  $z = z(x, y)$  de clase  $C^r$  (con  $r$  suficientemente alto), se tiene la siguiente *ecuación diferencial en derivadas parciales*<sup>43</sup> (EDP):

$$F[x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy}, z_{xy}, z_{xxx}, \dots] = 0$$

Se desea saber la forma que adquiere dicha ecuación cuando se expresa en términos de unas nuevas variables:

$$u = \phi(x, y, z) \quad ; \quad v = \varphi(x, y, z) \quad ; \quad w = \psi(x, y, z) \quad \implies \quad w = w(u, v)$$

Por tanto, hay que expresar las derivadas parciales  $z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy}, \dots$  en función de las derivadas  $w_u, w_v, w_{uu}, w_{vv}, \dots$ , que dan lugar a una nueva ecuación diferencial que queremos determinar:

$$G[u, v, w, w_u, w_v, w_{uu}, w_{vv}, w_{uv}, w_{uuu}, \dots] = 0$$

Para ello se parte del sistema:

$$\begin{cases} w(x, y) = w[u(x, y), v(x, y)] \\ w(x, y) = \psi[x, y, z(x, y)] \\ u(x, y) = \phi[x, y, z(x, y)] \\ v(x, y) = \varphi[x, y, z(x, y)] \end{cases}$$

Derivando entonces con respecto a  $x$  (igual se podría hacer con la variable  $y$ ) se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_x = w_u u_x + w_v v_x \\ w_x = \psi_x + \psi_z z_x \\ u_x = \phi_x + \phi_z z_x \\ v_x = \varphi_x + \varphi_z z_x \end{array} \right\} \implies \psi_x + \psi_z z_x = w_u(\phi_x + \phi_z z_x) + w_v(\varphi_x + \varphi_z z_x)$$

Si el *jacobiano* de este sistema es distinto de cero, se puede obtener  $z_x, w_x, u_x$  y  $v_x$  en función de  $w_u$  y  $w_v$  (y de las derivadas de las funciones  $\psi, \phi$  y  $\varphi$ ). En particular para  $z_x$  se obtiene:

$$z_x = \frac{\psi_x - \phi_x w_u - \varphi_x w_v}{-\psi_z + \phi_z w_u + \varphi_z w_v}$$

<sup>43</sup>Ver por ejemplo "Clases de Ampliación de Matemáticas para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 179.

Para obtener las derivadas segundas  $z_{xx}$ ,  $z_{xy}$  y  $z_{yy}$  se deriva respecto a  $x$  y respecto a  $y$  el sistema anterior, y así de forma sucesiva para las derivadas parciales de cualquier orden, pudiéndose obtener todas las derivadas parciales de  $z(x, y)$  en función de las derivadas parciales de  $w(u, v)$ .

**Ejercicio 3.18.** Expresar la ecuación diferencial:

$$u \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - v \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{v}{u} \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

de una función  $z(u, v)$  de clase  $\mathcal{C}^2$  con respecto a las variables  $x$  e  $y$  dadas a través del siguiente cambio de variable:

$$u = x \quad ; \quad v = \frac{y}{x}$$

El sistema que define  $z = z(u, v)$  es: 
$$\begin{cases} z = z(x, y) \\ x = u \\ y = uv \end{cases}$$

Derivando con respecto a  $u$  y  $v$ :

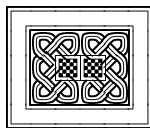
$$\begin{cases} z_u = z_x x_u + z_y y_u = z_x + v z_y \\ z_v = z_x x_v + z_y y_v = u z_y \\ z_{uu} = (z_{xx} + v z_{xy}) + (z_{xy} + v z_{yy})v = z_{xx} + 2v z_{xy} + v^2 z_{yy} \\ z_{uv} = z_y + (z_{xy} + v z_{yy})u = z_y + u z_{xy} + uv z_{yy} \end{cases}$$

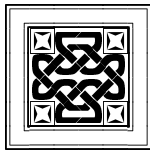
Sustituyendo en la ecuación:

$$u \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - v \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{v}{u} \frac{\partial z}{\partial v} = u(z_{xx} + 2v z_{xy} + v^2 z_{yy}) - v(z_y + u z_{xy} + uv z_{yy}) + \frac{v}{u}(u z_y) = u z_{xx} + uv z_{xy} = x z_{xx} + y z_{xy}$$

La ecuación diferencial en las nuevas variables  $x$  e  $y$  queda de la forma:

$$x z_{xx} + y z_{xy} = 0$$





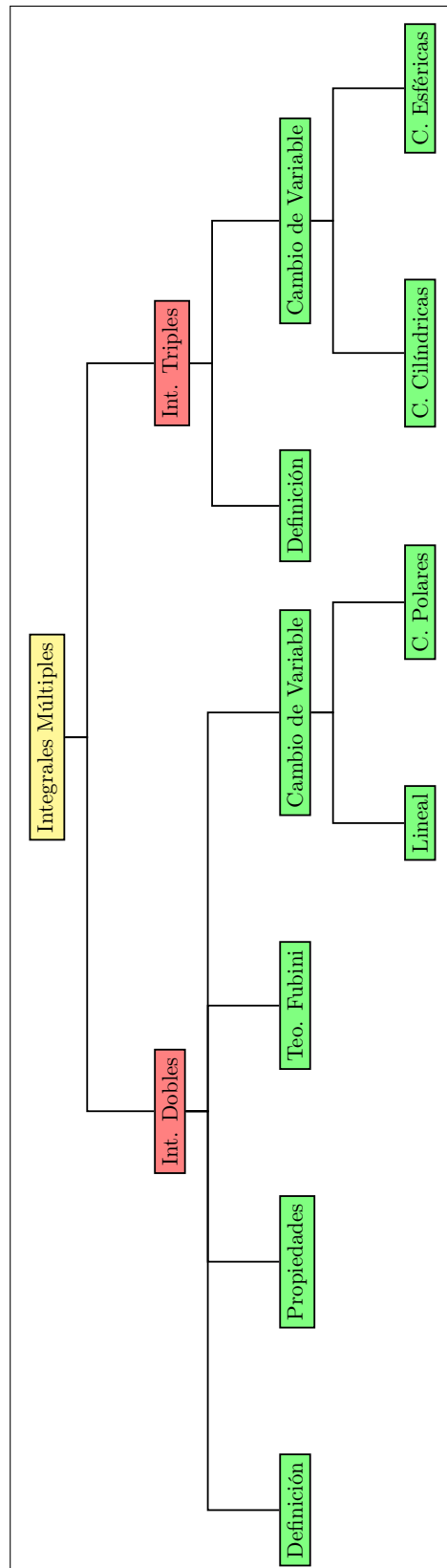
# Integrales Múltiples

## Contenido

---

<b>4.1</b>	<b>Introducción</b>	<b>89</b>
4.1.1	Propiedades de las Integrales	90
4.1.2	Tabla de Integrales Indefinidas Básicas	90
<b>4.2</b>	<b>Integrales Dobles</b>	<b>91</b>
4.2.1	Propiedades de la Integral Doble	91
4.2.2	Dominios Rectangulares	92
4.2.3	Características de las Integrales de Funciones de Varias Variables	94
4.2.4	Dominios Proyectables o No Rectangulares	94
4.2.5	Cambio de Variables en Integrales Dobles	96
4.2.6	Aplicaciones de la Integral Doble	104
<b>4.3</b>	<b>Integrales Triples</b>	<b>107</b>
4.3.1	Integrales Triples Iteradas	107
4.3.2	Cambio de Variables en Integrales Triples	109
4.3.3	Aplicaciones de la Integral Triple	118

---

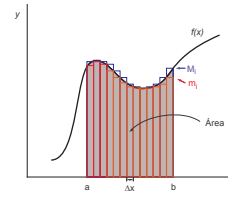


## 4.1. Introducción

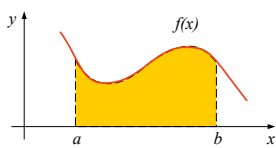
Vamos a recordar de forma esquemática algunos puntos clave del concepto de integral de una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Definición **Integral Definida** de Riemann

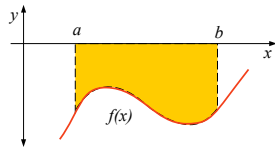
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$



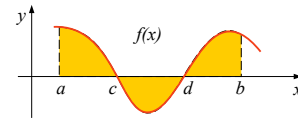
- **Integral y Área** debajo de una curva



$$A = \int_a^b f(x) dx$$



$$A = - \int_a^b f(x) dx$$



$$A = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$$

- **Función Primitiva** de una Función

$$\text{si } F'(x) = \frac{dF}{dx} = f(x) \quad \implies \quad F(x) \text{ función primitiva de } f(x)$$

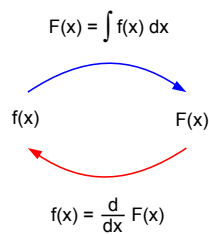
- **Regla de Barrow** para la Integral Definida

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b \quad F(x) \text{ primitiva de } f(x)$$

- **Integral Indefinida:** Conjunto de todas las primitivas de una función

$$\int f(x) dx = F(x) + c \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

- **Teorema Fundamental del Cálculo (TFC)**



$$\int f(x) dx = F(x) \quad \iff \quad \frac{d}{dx} F(x) = f(x) \quad ; \quad F(x): \text{ función primitiva de } f(x)$$

- **Fórmula General del TFC**

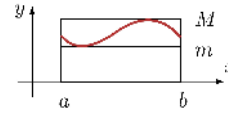
$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) \text{ continua} \\ g(x), h(x) \text{ derivables} \end{array} \right. \implies \frac{dF(x)}{dx} = f[h(x)] \cdot h'(x) - f[g(x)] \cdot g'(x)$$

### 4.1.1. Propiedades de las Integrales

$$\bullet \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\bullet \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\bullet m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$



$$\bullet \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad ; \quad a \leq c \leq b$$

$$\bullet \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\bullet \int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

$$\bullet f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b] \implies \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$\bullet f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b] \implies \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

### 4.1.2. Tabla de Integrales Indefinidas Básicas

$$\int dx = x + c$$

$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + c$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c$$

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = -\ln|\cos(x)| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c$$

$$\int \sec^2(x) dx = \operatorname{tg}(x) + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \operatorname{cosec}^2(x) dx = -\operatorname{cotg}(x) + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \operatorname{senh}(x) dx = \operatorname{cosh}(x) + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$$

$$\int \operatorname{cosh}(x) dx = \operatorname{senh}(x) + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg}(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2(x)} dx = \operatorname{tanh}(x) + c$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{senh}^2(x)} dx = \operatorname{coth}(x) + c$$

$$\int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c$$

$$\int \operatorname{cotg}(x) dx = \ln|\operatorname{sen}(x)| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen}(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + c$$

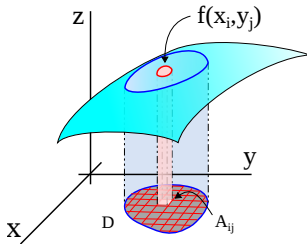
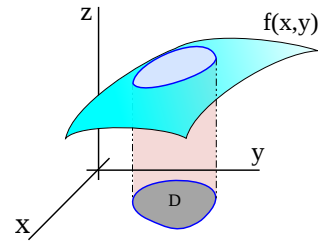
$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x + c$$

$$\int \ln^2(x) dx = x \ln^2(x) - 2x \ln(x) + 2x + c$$

## 4.2. Integrales Dobles

El concepto de integral para funciones escalares  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , de la forma  $z = f(x, y)$ , es similar al de funciones de una variable, con las siguientes características:

- En este caso la gráfica de la función  $z = f(x, y)$  es una superficie en  $\mathbb{R}^3$  y por tanto entre ella y plano  $xy$  hay un determinado volumen.
- El dominio  $D$  de integración es una región 2D del plano  $XY$ .



Al igual que en el caso de una variable, el dominio  $D$  de integración se puede seccionar en  $n$  elementos rectangulares más pequeños con área  $A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$  al que corresponde un valor de la función  $f(x_i, y_j)$ , de forma que se puede obtener un volumen elemental  $V_{ij} = f(x_i, y_j) A_{ij}$ . Llevando este proceso al límite  $n \rightarrow \infty$  y por tanto  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$  se define la integral doble, correspondiente al volumen encerrado entre la gráfica de  $f(x, y)$  en el dominio  $D$  y el plano  $XY$ .

### Definición 4.1. Integral Doble de Riemann

Sea una función  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  acotada en el compacto<sup>1</sup>  $D$ . Se dice que  $f$  es integrable Riemman en  $D$  si existe y es finito el siguiente límite:

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

### Teorema 4.1. Integrabilidad

Sea  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $D$  un compacto. Si  $f$  está acotada y es continua en  $D$  a excepción de en un número finito de curvas suaves, entonces  $f$  es integrable Riemann en  $D$ .

### 4.2.1. Propiedades de la Integral Doble

Sea  $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  funciones integrables Riemann en el compacto  $D$  de área  $A_D$ . Entonces se cumple:

- $\iint_D [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) dx dy + \beta \iint_D g(x, y) dx dy \quad ; \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $m A_D \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq M A_D \quad$  si  $m \leq f(x, y) \leq M$  en cualquier punto  $(x, y) \in D$
- $\iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy \quad$  si  $f(x, y) \leq g(x, y)$  en cualquier punto  $(x, y) \in D$
- $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy \quad$  si  $D = D_1 \cup D_2$
- La función  $|f(x, y)|$  también es integrable Riemann cumpliéndose:

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy$$

<sup>1</sup>Ver la Sección 1.2, página 6.

- El volumen encerrado por la gráfica de  $f(x, y)$  sobre la región  $D$  se obtiene como:

$$V = \iint_D |f| dx dy$$

- El área encerrada por la región  $D$  se obtiene como<sup>2</sup>:

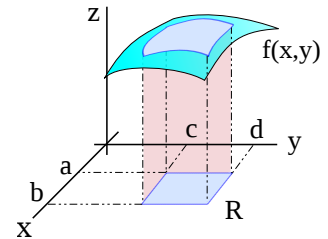
$$A = \iint_D dx dy$$

### 4.2.2. Dominios Rectangulares

Vamos a empezar a estudiar el cálculo de la integral doble en dominios  $D \subset \mathbb{R}^2$  sencillos con forma rectangular y posteriormente extenderemos nuestro estudio a dominios no necesariamente rectangulares.

Sea  $R$  un rectángulo que constituye el dominio en  $\mathbb{R}^2$  de integración de una función  $f(x, y)$  de la siguiente forma<sup>3</sup>:

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$



#### Definición 4.2. Integrales Iteradas

Las **integrales iteradas** corresponden a integrar dos veces, cada una de ellas sobre una única variable.

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

;

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

#### Teorema 4.2. Teorema de Fubini

Sea  $f : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  función integrable en el rectángulo  $R = [a, b] \times [c, d]$ , entonces la integral doble de  $f$  sobre  $R$  es igual al valor de las siguientes **integrales iteradas** siguientes<sup>4</sup>:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

Notar que al igual que se puede derivar una función de varias variables con respecto a una sola, manteniendo constantes el resto de variables<sup>5</sup>, de la misma forma se puede integrar una función de varias variables con respecto a una única variable, teniendo en cuenta que la **constante** de integración de la integral indefinida en este caso es cualquier **función** que depende de todas las variables sobre las que **no** se integra.

**Ejercicio 4.1.** Encontrar los posibles valores de la función  $f(x, y)$  sabiendo que el valor de la derivada parcial  $f_x$  de una función escalar  $f(x, y)$  es  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ .

Como es la derivada parcial con respecto a la variable  $x$  podemos integrar sobre esta misma variable para recuperar la función original:

$$f_x(x, y) = 2xy \quad \implies \quad \int f_x(x, y) dx = \int 2xy dx = x^2 y + C(y)$$

donde  $C(y)$  es cualquier función que dependa a lo sumo de la variable  $y$  en este caso, ya que se ha integrado sobre la otra variable  $x$ .

<sup>2</sup>Ya que corresponde con el volumen de un sólido de área de la base  $A$  y altura 1. Ver la [Sección 4.2.6, página 104](#).

<sup>3</sup>Un rectángulo definido de esta forma se denomina *cerrado*.

<sup>4</sup>El *teorema de Fubini* se puede extender a  $n$  dimensiones. Ver la [Sección 4.3.1, página 107](#).

<sup>5</sup>Ver la [Definición 2.13, página 27](#).

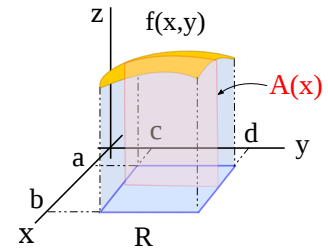
### Interpretación Geométrica

Las dos *integrales iteradas*<sup>6</sup> sobre un rectángulo se pueden interpretar geoméricamente de la siguiente forma:

$$\bullet \int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x,y) dy \right] dx$$

Suponiendo que  $f(x,y) \geq 0$ , el valor de esta integral es el volumen de la región  $R$  bajo la gráfica de la función. Si tomamos este volumen y cortamos una rodaja a través de un plano paralelo al plano  $yz$  a una distancia  $x$  del origen, se tiene una región plana cuyo área viene dada por:

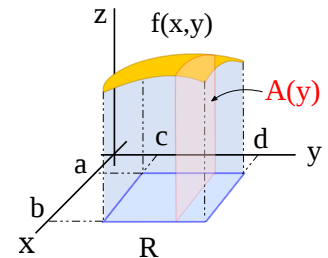
$$\int_a^b \underbrace{\int_c^d f(x,y) dy}_{A(x)} dx = \int_a^b A(x) dx$$



$$\bullet \int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x,y) dx \right] dy$$

Al igual que en el caso anterior, si  $f(x,y) \geq 0$ , el valor de esta integral es el volumen de la región  $R$  bajo la gráfica de la función. Si tomamos este volumen y cortamos una rodaja a través de un plano paralelo, en este caso, al plano  $xz$  a una distancia  $y$  del origen, se tiene una región plana cuyo área viene dada por:

$$\int_c^d \underbrace{\int_a^b f(x,y) dx}_{A(y)} dy = \int_c^d A(y) dy$$



Estos dos resultados están basados en el conocido como **principio de Cavalieri**.

**Ejercicio 4.2.** Determinar el valor de las siguientes integrales dobles:

a)  $\int_0^1 \int_2^3 x^2 y dx dy$

b)  $\int_0^1 \int_2^3 x^2 y dy dx$

Notar que ambas integrales solo difieren en el orden de los diferenciales y por tanto del orden de integración. Como los límites de integración son distintos, en principio estas dos integrales tienen que tener valores distintos, ya que los dominios rectangulares de integración son distintos en cada caso.

a)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_2^3 x^2 y dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_2^3 x^2 y dx \right] dy = \int_0^1 \left[ \frac{1}{3} x^3 y \Big|_{x=2}^{x=3} \right] dy = \int_0^1 \frac{1}{3} y (3^3 - 2^3) dy = \\ &= \frac{19}{3} \int_0^1 y dy = \frac{19}{3} \frac{1}{2} y^2 \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{19}{6} (1^2 - 0^2) = \boxed{\frac{19}{6}} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_2^3 x^2 y dy dx &= \int_0^1 \left[ \int_2^3 x^2 y dy \right] dx = \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} x^2 y^2 \Big|_{y=2}^{y=3} \right] dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 (3^2 - 2^2) dx = \\ &= \frac{5}{2} \int_0^1 x^2 dx = \frac{5}{2} \frac{1}{3} x^3 \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{5}{6} (1^3 - 0^3) = \boxed{\frac{5}{6}} \end{aligned}$$

<sup>6</sup>Ver la **Definición 4.2**, página 92.

### 4.2.3. Características de las Integrales de Funciones de Varias Variables

Vamos a ver dos características de las integrales de funciones de varias variables.

- En las *integrales indefinidas* de funciones de variables variables, la constante de integración depende de las variables sobre las que **no** se integra.

$$\int f(x, y, z) \, dx = F(x, y, z) + c(y, z)$$

- Los límites de integración en las *integrales definidas* pueden depender de las variables sobre las que **no** se integra<sup>7</sup>:

$$\int_{a(y)}^{b(y)} f_x(x, y) \, dx = f(x, y)|_{a(y)}^{b(y)} = f[b(y), y] - f[a(y), y] = F(y)$$

**Ejercicio 4.3.** Encontrar el valor de las siguientes integrales de funciones de varias variables.

a)  $\int \left[ x^2 + \frac{y}{x} \right] dx$

b)  $\int_{1-2x}^{x^2} (xy - e^y) dy$

a)  $\int \left[ x^2 + \frac{y}{x} \right] dx = \frac{x^3}{3} + y \ln(x) + c(y)$

b)  $\int_{1-2x}^{x^2} (xy - e^y) dy = \frac{xy^2}{2} - e^y \Big|_{1-2x}^{x^2} = \frac{x^5}{2} - e^{x^2} - \frac{x(1-2x)^2}{2} - e^{1-2x}$

### 4.2.4. Dominios Proyectables o No Rectangulares

Vamos a ver dos tipos de dominios no necesariamente rectangulares:

- Una región  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  es de **tipo I** o **x-proyectable**<sup>8</sup> si existe un intervalo  $[a, b]$  y dos funciones  $c(x)$  y  $d(x)$  continuas en ese intervalo tales que:

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x) \}$$

Entonces si  $f(x, y)$  es una función integrable en  $D$  se tiene:

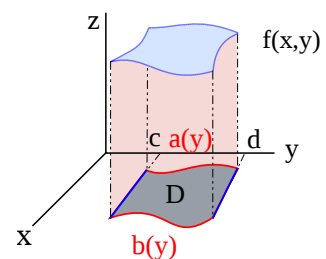
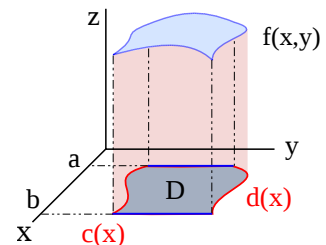
$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) \, dy \, dx$$

- Una región  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  es de **tipo II** o **y-proyectable**<sup>9</sup> si existe un intervalo  $[c, d]$  y dos funciones  $a(y)$  y  $b(y)$  continuas en ese intervalo tales que:

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a(y) \leq x \leq b(y), c \leq y \leq d \}$$

Entonces si  $f(x, y)$  es una función integrable en  $D$  se tiene:

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) \, dx \, dy$$



Estos dos resultados son conocidos como **teorema fuerte de Fubini**.

<sup>7</sup>Notar que en este caso no aparece ninguna constante de integración al ser una integral definida y por tanto las constantes se anula en la resta.

<sup>8</sup>Algunos textos lo denominan también *x-simple* o *verticalmente simple*.

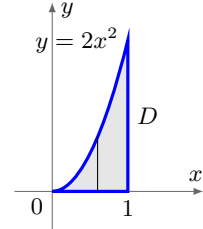
<sup>9</sup>Algunos textos lo denominan *y-simple* u *horizontalmente simple*.

**Ejercicio 4.4.** Encontrar el volumen debajo del plano  $z = 8x + 5y$  comprendido en la región  $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x^2\}$ .

Podemos resolverlo de dos formas posibles, considerando el dominio  $x$ -proyectable o bien  $y$ -proyectable.

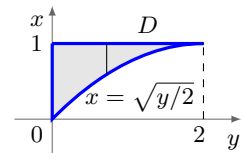
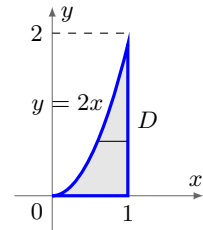
- Dominio  $x$ -proyectable

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_R (8x+6y) dA = \int_0^1 \left[ \int_0^{2x^2} (8x+6y) dy \right] dx = \int_0^1 8xy+3y^2 \Big|_0^{2x^2} dx \\
 &= \int_0^1 (16x^3 + 12x^4) dx = 4x^4 + \frac{12}{5}x^5 \Big|_0^1 = 4 + \frac{12}{5} = \boxed{\frac{32}{5}}
 \end{aligned}$$



- Dominio  $y$ -proyectable

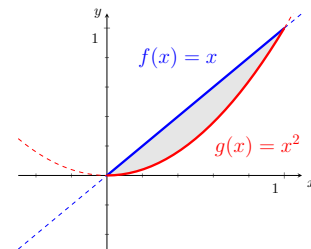
$$\begin{aligned}
 V &= \iint_R (8x+6y) dA = \int_0^2 \left[ \int_{\sqrt{y/2}}^1 (8x+6y) dx \right] dy = \\
 &= \int_0^2 \left( 4x^2 + 6xy \Big|_{x=\sqrt{y/2}}^{x=1} \right) dy = \int_0^2 \left[ 4 + 6y - \left( 2y + \frac{6}{\sqrt{2}}y\sqrt{y} \right) \right] dy = \\
 &= \int_0^2 \left( 4 + 4y - 3\sqrt{2}y^{3/2} \right) dy = 4y + 2y^2 - \frac{6\sqrt{2}}{5}y^{5/2} \Big|_0^2 = \\
 &= 8 + 8 - \frac{6\sqrt{2}\sqrt{32}}{5} = 16 - \frac{48}{5} = \boxed{\frac{32}{5}}
 \end{aligned}$$



**Ejercicio 4.5.** Encontrar el área comprendida entre las curvas  $f(x) = 2x$  e  $g(x) = x^2$ .

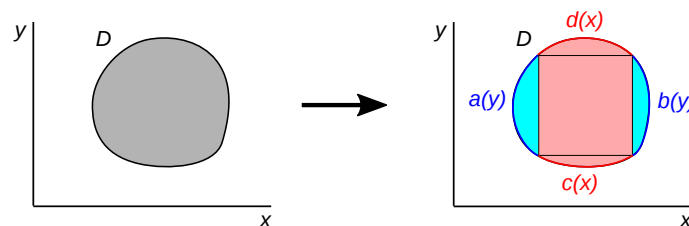
Podemos calcular el área utilizando una integral doble<sup>10</sup> sobre una función unidad  $f(x, y) = 1$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 A &= \iint_D 1 dy dx = \int_0^1 \int_{x^2}^x dy dx = \int_0^1 y \Big|_{x^2}^x dx = \\
 &= \int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6}}
 \end{aligned}$$



### Dominios Generales

Para dominios más generales siempre se pueden descomponer en dominios de los tipos vistos anteriormente y calcular el volumen sobre cada uno de ellos y finalmente sumar los valores obtenidos.



<sup>10</sup>Ver la última propiedad de la Sección 4.2.1, página 91.

### 4.2.5. Cambio de Variables en Integrales Dobles

Los cambios de variable apropiados en una integral pueden facilitar o incluso permitir el cálculo de integrales en casos que resulten difícil o imposible su cálculo de forma directa.

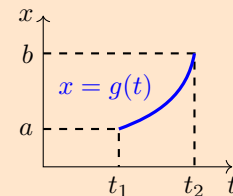
Vamos a recordar como se realiza el cambio de variable en una integral de una función de una variable.

$$\int_a^b f(x)dx \implies \left\{ \begin{array}{l} x = g(t) \\ dx = g'(t)dt \\ t_1 = g^{-1}(a) \\ t_2 = g^{-1}(b) \end{array} \right\} \implies \int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f[g(t)]g'(t)dt$$

#### Teorema 4.3. Condición Necesaria y Suficiente para Cambio de Variable

La condición necesaria y suficiente para que se pueda realizar un cambio de variable  $x \rightarrow t$  es que la función  $x = g(t)$  sea *inyectiva*<sup>11</sup> en el intervalo  $[t_1, t_2]$ , lo que obliga a que en ese intervalo:

$$g'(t) \neq 0$$



Un cambio de variable posible será apropiado siempre que la nueva integral en la variable  $t$  sea más sencilla de calcular que la original en la variable  $x$ .

Vamos a ver una generalización del proceso de cambio de variable para integrales dobles.

#### Teorema 4.4. Cambio de Variable en Integrales Dobles

Sea un cambio de variable  $(x, y) \rightarrow (u, v)$  dada por  $x = x(u, v)$  e  $y = y(u, v)$  de forma que se establezca una relación *uno a uno*<sup>12</sup> entre la región  $D$  en el plano  $xy$  y la región  $D'$  en el plano  $uv$ , de tal forma que el *jacobiano de la transformación*:

$$J(u, v) = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall (u, v) \in D'$$

Entonces:

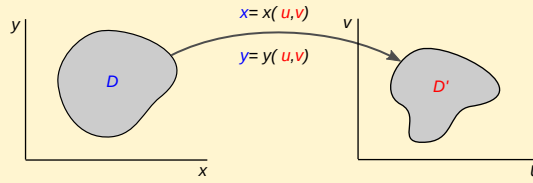
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f[x(u, v), y(u, v)] |J(u, v)| du dv$$

donde  $|J(u, v)|$  es el **valor absoluto** del jacobiano de la transformación.

<sup>11</sup>Es decir que haya una correspondencia uno a uno entre  $x$  y  $t$ , de forma que para cada  $x \in [a, b]$  le corresponda un y solo un  $t \in [t_1, t_2]$ .

<sup>12</sup>Es decir, que sea una función *inyectiva*.

- En esta expresión el término  $dx dy = |J(u, v)| du dv$  es el equivalente a la relación  $dx = g'(t)dt$  en el caso de una única variable.
- El jacobiano del cambio  $|J(u, v)|$  actúa como factor de dilatación o compresión de las áreas al pasar de  $D$  a  $D'$  mediante el cambio de variables.



Vamos a ver algunos de los cambios de variable más utilizados y su correspondiente jacobiano.

### Cambio de Variables Lineales

Este cambio de variables  $(x, y) \rightarrow (u, v)$  es el más sencillo y produce valores constantes del jacobiano de la transformación. De forma general se puede expresar como:

$$\begin{cases} x = au + bv \\ y = cu + dv \end{cases} \implies \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det(A)$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f[x(u, v), y(u, v)] |\det(A)| du dv$$

**Ejercicio 4.6.** Evaluar la siguiente integral en el dominio dado:

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy \quad ; \quad D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

Notar que la solución analítica de esta integral de forma directa, sin un cambio de variable, es probablemente imposible. En base a la forma de la función, probamos a hacer un cambio de variable simple:

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \tag{4.1}$$

Para comprobar su validez necesitamos expresar las variables  $x$  e  $y$  en función de  $u$  y  $v$ . Para ello resolvemos el sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas (por ejemplo por reducción) y determinamos el jacobiano de la transformación:

$$\begin{cases} x = (u + v)/2 \\ y = (v - u)/2 \end{cases} \implies J = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0 \quad \forall(u, v)$$

Por tanto es un cambio de variable válido. Probamos su utilidad:

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy = \iint_{D'} f[x(u, v), y(u, v)] |J(u, v)| du dv = \iint_{D'} e^{\frac{u}{v}} \frac{1}{2} du dv$$

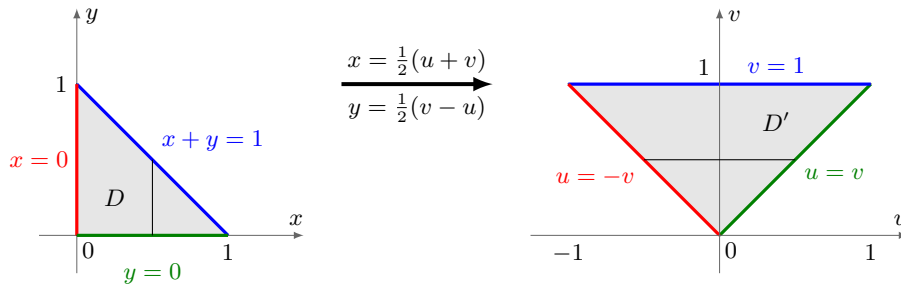
Ahora tenemos que determinar los nuevos límites de integración en las nuevas variables  $u$  y  $v$ , para ello estudiamos la transformación de los dominios  $(x, y) \rightarrow (u, v)$  mediante el cambio de variable (4.1). Los límites del dominio en el plano  $xy$  vienen establecidas por tres rectas establecidas en el enunciado:  $x = 0$ ,  $y = 0$  y  $x + y = 1$ . Vamos a ver cómo quedan transformadas estas rectas en el plano  $uv$  cuando hacemos el cambio de variable propuesto.

$$x = 0 \implies \begin{cases} u = -y \\ v = y \end{cases} \implies v = -u$$

$$y = 0 \implies \begin{cases} u = x \\ v = x \end{cases} \implies v = u$$

$$\boxed{x + y = 1} \implies \left\{ \begin{array}{l} u = x - (1 - x) = -1 + 2x \\ v = x + (1 - x) = 1 \end{array} \right\} \implies \boxed{v = 1, \forall u}$$

La modificación de los dominios en base al cambio de variables se muestra en la siguiente gráfica:



Por tanto, aplicando el cambio de variable propuesto.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{1-x} e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy &= \int_0^1 \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} \frac{1}{2} du dv = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ v e^{\frac{u}{v}} \Big|_{u=-v}^{u=v} \right] dv = \frac{1}{2} \int_0^1 v(e - e^{-1}) dv = \\ &= \frac{1}{2} (e - e^{-1}) \frac{v^2}{2} \Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{4} (e - e^{-1})} \end{aligned}$$

Notar que en este caso, a pesar de ser un cambio de variables válido, no es nada apropiado, ya que complica el dominio con respecto al original y en consecuencia, complica el cálculo de la integral.

### Cambio de Variables No Lineales

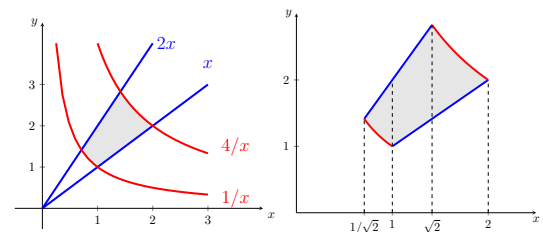
De forma general el jacobiano de una transformación dependerá de las nuevas variables. En el siguiente ejemplo vemos un caso de cambio de variables de este tipo.

**Ejercicio 4.7.** Encontrar el valor de la siguiente integral doble:

$$\int_D (1 + xy) dS$$

donde el dominio  $D$  es el área encerrada por las curvas  $xy = 1$ ,  $xy = 4$ ,  $y = x$  e  $y = 2x$ .

Si representamos gráficamente las cuatro funciones que delimitan el dominio de integración se obtiene el correspondiente dominio mostrado en la zona sombreada de la figura de la izquierda, y que ha sido ampliado y aislado en la figura de la derecha.



Para poder realizar esta integral de forma directa utilizando integrales de tipo I o  $x$ -proyectables, es necesario particionar el dominio en tres partes, como indica la figura de la derecha, dando lugar a:

$$\int_D (1 + xy) dS = \int_{1/\sqrt{2}}^1 \int_{1/x}^{2x} (1 + xy) dy dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_x^{2x} (1 + xy) dy dx + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_x^{4/x} (1 + xy) dy dx$$

Lo cual resulta costoso. Una forma alternativa es aplicar un cambio de variable apropiado. En este caso como tenemos valores constantes para las relaciones entre las variables  $y/x$  y  $xy$ , podemos tomar el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = y/x \\ v = xy \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} y = ux \\ y = v/x \end{array} \right\} \implies ux = \frac{v}{x} \implies \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{v/u} \\ y = \sqrt{uv} \end{array} \right.$$

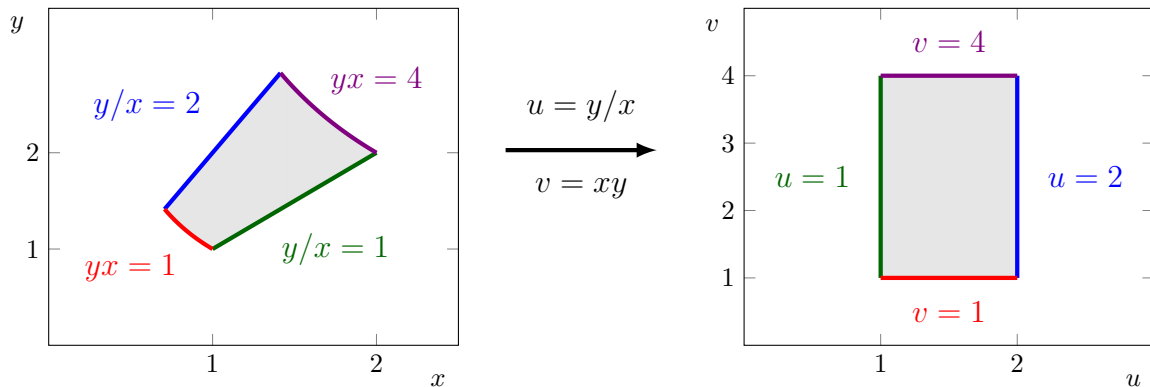
El correspondiente jacobiano de esta transformación es:

$$J = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sqrt{v} & \frac{1}{2\sqrt{uv}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4u} - \frac{1}{4u} = -\frac{1}{2u} \implies |J| = \frac{1}{2u}$$

Notar varias cosas:

- Al ser un cambio de variables no lineal, el valor del jacobiano depende de forma general de las nuevas variables del sistema (en este caso particular solo de  $u$ ).
- El jacobiano de la transformación siempre se toma en valor absoluto<sup>a</sup>.

El siguiente paso es la determinación de los nuevos límites de integración en las nuevas variables. Para ello es necesario conocer la forma del nuevo dominio en que queda transformado por el cambio de variable. En la siguiente figura se muestran ambos dominios, delimitados por las correspondientes curvas en los planos de las viejas variables  $x$  e  $y$  (figura de la izquierda) y en el plano de las nuevas variables  $u$  y  $v$  (figura de la derecha).



Comprobamos que en este caso el dominio complejo inicial se ha transformado en un dominio simple consistente en un rectángulo, de forma que ya no es necesario utilizar integrales de tipo I, al tener valores constantes en los límites de integración<sup>b</sup>.

Conociendo el jacobiano y los límites de integración, basta ahora transformar la función a integrar en términos de las nuevas variables:

$$f(x,y) = 1 + xy \quad \begin{matrix} u=y/x \\ v=ux \end{matrix} \rightarrow f(u,v) = 1 + v$$

Como vemos en este caso, la función también se ha simplificado con el cambio de variable, de forma, que salvo por la complejidad añadida que presenta la inclusión del jacobiano, vemos que este cambio de variables puede resultar ventajoso para la determinación de esta integral.

Con todos los elementos determinamos la correspondiente nueva integral en las variables  $u$  y  $v$ :

$$\begin{aligned} \int_D (1+xy) dS &= \int_1^2 \int_1^4 (1+v) \frac{1}{2u} dudv = \frac{1}{2} \int_1^2 (1+v) \ln u \Big|_1^4 dv = \frac{1}{2} \ln 4 \int_1^2 (1+v) dv = \ln 2 \left[ v + \frac{v^2}{2} \right]_1^2 = \\ &= \boxed{\frac{5}{2} \ln 2} \end{aligned}$$

<sup>a</sup>Ver el Teorema 4.4, página 96.

<sup>b</sup>Ver la Sección 4.2.2, página 92.

### Cambio de Variables a Coordenadas Polares

Este cambio de variables es muy común en muchas de las integrales con una geometría circular, simplificándose generalmente la integral a realizar.

Las variables originales  $(x, y)$  se cambian por unas nuevas variables  $(r, t)$ , con  $r > 0$ ,  $t \in [0, 2\pi)$  y  $x_0, y_0$  constantes, de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos t \\ y = y_0 + r \sin t \end{cases} \implies \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, t)} \right| = \begin{vmatrix} x_r & x_t \\ y_r & y_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos t & -r \sin t \\ \sin t & r \cos t \end{vmatrix} = |r \cos^2 t + r \sin^2 t| = r > 0$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r, t) r dr dt$$

**Ejercicio 4.8.** Encontrar el volumen que hay debajo del plano  $z = 4 - x - 2y$  e interior a la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$ .

El volumen se puede determinar de forma directa calculando la siguiente integral doble:

$$V = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (4 - x - 2y) dy dx = \int_{-1}^1 \left[ (4 - x)y - y^2 \Big|_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} \right] dx = \int_{-1}^1 2(4 - x)\sqrt{1 - x^2} dx$$

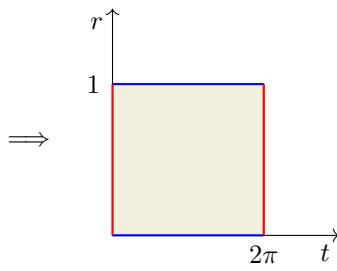
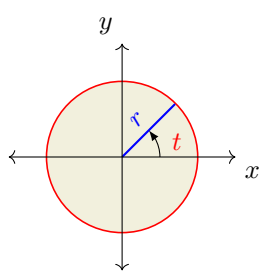
Esta integral no es trivial pero puede hacerse con un cambio de variable apropiado obteniéndose:

$$V = \int_{-1}^1 2(4 - x)\sqrt{1 - x^2} dx = \frac{2}{3}(1 - x^2)^{3/2} + 4x\sqrt{1 - x^2} + 4 \arcsen x \Big|_{-1}^1 = 4\pi$$

Una forma alternativa de calcular el valor de la integral es pasarla a coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases} \implies f(x, y) = 4 - x - 2y = 4 - r \cos t - 2r \sin t = f(r, t)$$

Determinamos el nuevo dominio de integración:



$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$$

Como  $x^2 + y^2 = 1$  se tiene:

$$x^2 + y^2 = r^2 = 1 \implies r = 1 \text{ (cte)}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4 - r \cos t - 2r \sin t) r dr dt = \int_0^{2\pi} \left[ 2r^2 - \frac{1}{3}r^3(\cos t - 2 \sin t) \Big|_{r=0}^{r=1} \right] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ 2 - \frac{1}{3}(\cos t - 2 \sin t) \right] dt = 2t - \frac{1}{3}(-\sin t - 2 \cos t) \Big|_0^{2\pi} = 4\pi \end{aligned}$$

En este caso claramente, el cambio de variables a polares simplifica bastante el cálculo de la integral doble.

### Cambio de Variables a Coordenadas Elípticas

Una elipse de centro  $(x_0, y_0)$  y semiejes  $a, b > 0$  con  $a \neq b$ , tiene por ecuación:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

En este caso las variables originales  $(x, y)$  se cambian por unas nuevas variables  $(r, t)$  con  $r \in [0, 1]$ ,  $t \in [0, 2\pi)$  y  $x_0, y_0$  constantes, de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x = x_0 + ar \cos t \\ y = y_0 + br \sin t \end{cases} \implies \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, t)} \right| = \begin{vmatrix} x_r & x_t \\ y_r & y_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos t & -ar \sin t \\ b \sin t & br \cos t \end{vmatrix} = |abr \cos^2 t + abr \sin^2 t| = abr > 0$$

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_{D'} f(r, t) \, \boxed{abr} \, dr dt$$

**Ejercicio 4.9.** Utilizando una integral doble, calcular el área de una elipse general centrada en el origen.

La ecuación general de una elipse centrada en el origen es:

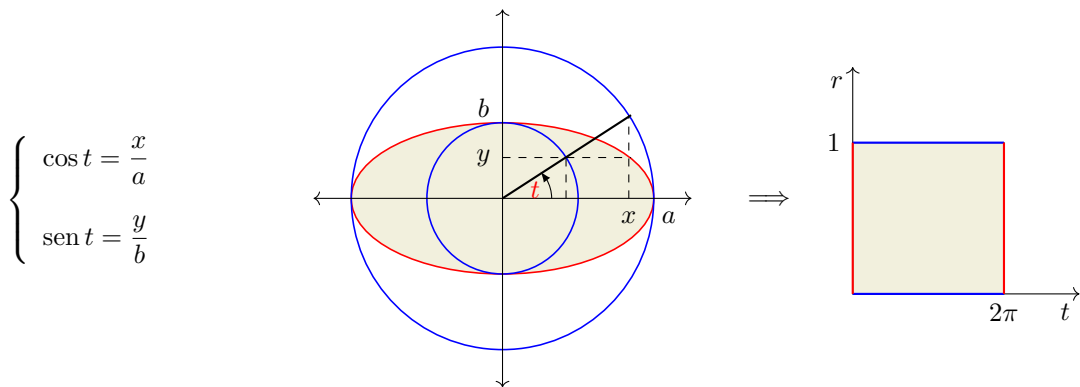
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \implies y = \sqrt{a^2 b^2 - b^2 x^2}$$

En coordenadas rectangulares, y teniendo en cuenta la simetría de la figura, el área se puede calcular como:

$$A = 4 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 b^2 - b^2 x^2}} 1 \, dy dx$$

Podemos cambiar a **coordenadas elípticas**<sup>13</sup>:

$$\begin{cases} x = ar \cos t \\ y = br \sin t \end{cases} \implies \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t = r^2 = 1 \implies r = 1$$



Calculamos el jacobiano de la transformación:

$$J(r, t) = \begin{vmatrix} x_r & x_t \\ y_r & y_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos t & -ar \sin t \\ b \sin t & br \cos t \end{vmatrix} = abr \cos^2 t + abr \sin^2 t = abr$$

Por tanto:

$$A = \int_0^1 \int_0^{2\pi} abr \, dt dr = 2ab\pi \int_0^1 r \, dr = 2ab\pi \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^1 = \boxed{ab\pi}$$

<sup>13</sup>Notar que a diferencia de las *coordenadas polares* (ver la [Sección 1.3.2, página 8](#)), en este caso la variable  $r$  no representa ningún radio, sino un factor de escala que hace variar los radios de las dos circunferencias que generan la elipse (en azul en la figura) desde cero hasta alcanzar los valores de los semiejes  $a$  y  $b$  para  $r = 1$ .

**Ejercicio 4.10.** Hallar la integral de la función  $f(x, y) = \frac{\sqrt{2y^2 + x^2}}{y}$  sobre el dominio:

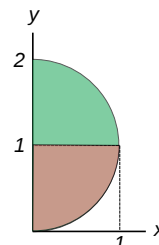
$$D = \{x^2 + (y - 1)^2 \leq 1, x \geq 0\}$$

El dominio es la mitad derecha de un círculo de centro  $(0, 1)$  y radio 1. En principio hay varias formas de resolverlo:

a) Si intentamos hacerla de forma directa necesitamos dos integrales:

$$\int_0^1 \int_1^{1+\sqrt{1-x^2}} \frac{\sqrt{2y^2 + x^2}}{y} dy dx + \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^1 \frac{\sqrt{2y^2 + x^2}}{y} dy dx$$

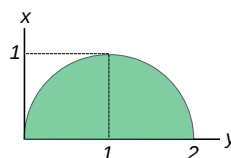
siendo ambas complicadas de realizar.



También lo podemos intentar cambiando el orden de las variables, integrando primeramente con respecto a la variable  $x$  y después con respecto a  $y$ . De esta forma se obtiene una única integral:

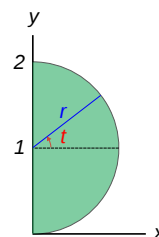
$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}} \frac{\sqrt{2y^2 + x^2}}{y} dx dy$$

lo cual es también una integral complicada.



b) Haciendo el cambio de variables a polares, trasladando el origen al centro de la circunferencia, de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = 1 + r \sin t \end{cases} \quad ; \quad r \in [0, 1] \quad ; \quad t \in [-\pi/2, \pi/2]$$



Hay que encontrar la relación entre  $r$  y  $t$  en este caso. Metiendo el cambio de variables en la ecuación de la circunferencia se tiene:

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1 \quad \implies \quad r^2 \cos^2 t + (1 + r \sin t - 1)^2 = 1 \quad , \quad r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t = 1$$

$$r^2 = 1 \quad \implies \quad r = 1$$

La función a integrar en estas nuevas variables es ahora:

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{2y^2 + x^2}}{y} \quad \implies \quad f(r, t) = \frac{\sqrt{2(1 + r \sin t)^2 + r^2 \cos^2 t}}{1 + \sin t}$$

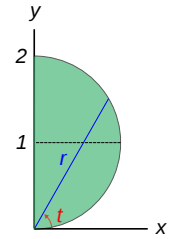
Con este procedimiento se obtiene una sola integral, que teniendo en cuenta que el jacobiano de esta transformación es  $|J(r, t)| = r$ , tiene la siguiente forma:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 r \frac{\sqrt{2(1 + r \sin t)^2 + r^2 \cos^2 t}}{1 + \sin t} dr dt$$

en la cual hemos conseguido con la transformación unos límites de integración sencillos, pero el integrando es incluso más complicado que los anteriores, de forma que no resulta útil.

- c) Haciendo un cambio de variables a polares normales, es decir considerando el origen en el pto  $(0, 0)$ , de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases} ; \quad r \in [0, 2] ; \quad t \in [0, \pi/2]$$



En este caso hay que encontrar la relación entre  $r$  y  $t$ . Metiendo el cambio de variables en la ecuación de la circunferencia se tiene:

$$\begin{aligned} x^2 + (y - 1)^2 = 1 &\implies r^2 \cos^2 t + (r \sin t - 1)^2 = 1, \quad r^2 \cos^2 t + 1 + r^2 \sin^2 t - 2r \sin t = 1 \\ &\implies r^2 = 2r \sin t \implies r = 2 \sin t \end{aligned}$$

De igual forma, la función a integrar queda con esta transformación:

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{2y^2 + x^2}}{y} \implies f(r, t) = \frac{\sqrt{2r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t}}{r \sin t} = \frac{\sqrt{r^2 + r^2 \sin^2 t}}{r \sin t} = \frac{\sqrt{1 + \sin^2 t}}{\sin t}$$

Por tanto, teniendo en cuenta en este caso el jacobiano en polares<sup>14</sup>  $|J(r, t)| = r$  se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \sin t} r \frac{\sqrt{1 + \sin^2 t}}{\sin t} dr dt &= \int_0^{\pi/2} \left. \frac{r^2}{2} \frac{\sqrt{1 + \sin^2 t}}{\sin t} \right|_0^{2 \sin t} dt = 2 \int_0^{\pi/2} \sin t \sqrt{1 + \sin^2 t} dt = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \sin t \sqrt{2 - \cos^2 t} dt \end{aligned}$$

Para resolver esta integral podemos hacer el siguiente cambio de variable:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ dx = -\sin t dt \end{cases} \implies \begin{cases} t = 0 & \rightarrow x = \cos 0 = 1 \\ t = \pi/2 & \rightarrow x = \cos \pi/2 = 0 \end{cases}$$

Por tanto:

$$2 \int_0^{\pi/2} \sin t \sqrt{2 - \cos^2 t} dt = -2 \int_1^0 \sqrt{2 - x^2} dx = 2 \int_0^1 \sqrt{2 - x^2} dx$$

Teniendo en cuenta que:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + c$$

Se tiene:

$$2 \int_0^1 \sqrt{2 - x^2} dx = 2 \left[ \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{2} \sqrt{2 - x^2} \right]_0^1 = 2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - 0 - 0 \right) = \boxed{1 + \frac{\pi}{2}}$$

<sup>14</sup>Coincide con el anterior al ser una circunferencia de radio 1. Ver la [Sección 4.2.5, página 101](#).

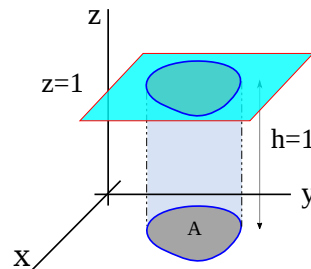
### 4.2.6. Aplicaciones de la Integral Doble

Vamos a ver algunas de las aplicaciones más usuales de las integrales dobles.

#### Cálculo de Áreas de Regiones Planas

En la Sección 4.2, página 91 se motivó el concepto de integral doble como herramienta de cálculo de volúmenes comprendidos entre una superficie<sup>15</sup>  $z = f(x, y)$  y el plano  $xy$ . Si esa superficie es el plano  $z = 1$ , el volumen calculado corresponde con el área del dominio de la integral doble, ya que  $V = A_D * h = A_D$  y siendo la altura  $h$  en este caso la unidad. Por tanto la integral doble puede ser un buen método de cálculo del área de regiones planas comprendida entre una o varias curvas<sup>16</sup>.

$$A_D = \iint_D dx dy$$

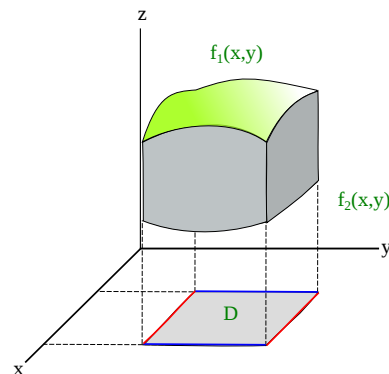


#### Cálculo de Volúmenes

De forma general la integral doble se suele utilizar para la determinación del volumen comprendido entre dos superficies<sup>17</sup>  $f_1(x, y)$  y  $f_2(x, y)$  definidas en un dominio determinado  $D$ .

$$V = \iint_D [f_1(x, y) - f_2(x, y)] dx dy$$

Notar que cuando  $f_2(x, y) = 0$  el volumen que se obtiene es el comprendido entre la superficie y el plano  $xy$  (correspondiente a  $z = 0$ ).



#### Valor Promedio de una Función de Dos Variables sobre un Dominio

Si  $z = f(x, y)$  es una función continua en un dominio  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , el valor promedio de  $f(x, y)$  en dicho dominio viene dado por la siguiente expresión:

$$\text{Valor Medio de } f(x, y) = \frac{\iint_D f(x, y) dA}{\iint_D dA}$$

**Ejercicio 4.11.** Determinar el valor medio de la función  $f(x, y) = e^{x+y}$  en la región del plano  $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$ .

Llamando  $f_D$  al valor promedio de la función en  $D$ , se tiene:

$$f_D = \frac{\iint_D f(x, y) dA}{\iint_D dA}$$

Calculamos cada una de estas integrales:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_0^2 \int_0^x e^{x+y} dy dx = \int_0^2 e^{x+y} \Big|_0^x dx = \int_0^2 (e^{2x} - e^x) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - e^x \Big|_0^2 = \frac{1}{2} e^4 - e^2 + \frac{1}{2}$$

<sup>15</sup>De forma general suponemos que  $f(x, y) > 0$ , de otra forma habría que tener en cuenta que el volumen de las partes negativas es menos el valor de la integral doble.

<sup>16</sup>Por supuesto también se puede utilizar la integral simple, pero en muchos casos el planteamiento y la resolución del problema resulta más sencillo a través de la integral doble.

<sup>17</sup>Suponiendo ambas positivas.

Como el dominio tiene forma triangular su área se puede determinar fácilmente como  $A_D = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$ , comprobándose que a través de una integral doble se obtiene el mismo resultado:

$$\iint_D dA = \int_0^2 \int_0^x dy dx = \int_0^2 y|_0^x dx = \int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 2$$

Por tanto, el valor promedio de la función en el dominio será:

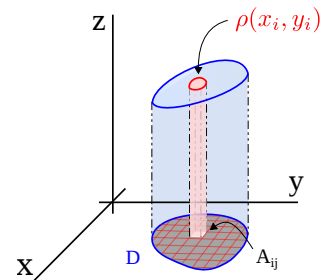
$$f_D = \frac{\iint_D f(x,y) dA}{\iint_D dA} = \frac{\frac{1}{2}e^4 - e^2 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{e^4 - 2e^2 + 1}{4}$$

### Cálculo de Propiedades Físicas de Figuras Planas

- **Masa**

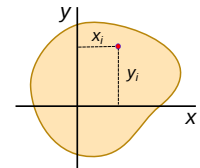
Sea una lámina plana comprendida en un dominio  $D$  dado y sea  $\rho(x, y)$  una función que define la **densidad superficial**<sup>18</sup> en cada uno de los puntos  $(x_i, y_i)$  de la placa en  $D$  con área  $A_{ij}$ . Entonces la masa de la lámina puede ser determinada de la siguiente forma:

$$dm = \rho(x, y) dA \quad \Rightarrow \quad m = \iint_D \rho(x, y) dx dy$$



- **Momentos Estáticos y de Inercia**

Consideremos una lámina plana definida en un dominio  $D$ , con área  $A_D$  y densidad superficial variable  $\rho(x, y)$ . Sea  $(x_i, y_i)$  cada uno de los puntos que componen la placa.



- El **momento estático**<sup>19</sup> de una partícula con posición  $(x_i, y_i)$  alrededor de un eje es el producto de su masa por la distancia que la separa a ese eje. En base a esta definición, los *momentos estáticos* de una figura plana completa con respecto al eje  $x$  y con respecto al eje  $y$  vienen dados por las siguientes expresiones:

$$M_x = \iint_D y \rho(x, y) dx dy \quad ; \quad M_y = \iint_D x \rho(x, y) dx dy$$

donde  $\rho(x, y)$  es la densidad superficial de la placa, definida en el punto anterior.

Los *momentos estáticos* aparecen en el contexto del cálculo de vigas (tensión cortante) en ingeniería estructural y también se utilizan en el cálculo del centro de masas, como veremos a continuación.

- El **momento de inercia** de una partícula alrededor de un eje es el producto de su masa por el cuadrado de la distancia que la separa a ese eje. En base a esta definición, los *momentos de inercia* de una figura plana completa con respecto al eje  $x$ , con respecto al eje  $y$  y con respecto al origen de coordenadas, vienen dados por las siguientes expresiones:

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dx dy \quad ; \quad I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dx dy \quad ; \quad I_o = I_x + I_y$$

Los momentos de inercia representan una medida de la oposición que presenta un cuerpo a girar respecto a un determinado eje o punto.

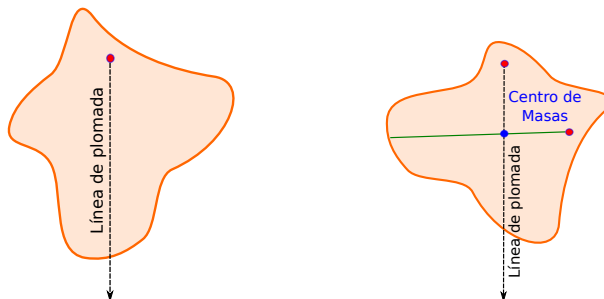
<sup>18</sup>La densidad superficial de una región plana es la relación entre su masa y su área.

<sup>19</sup>También denominado *primer momento de área* o *momento de primer orden*.

### • Centro de Masas

El **centro de masas**<sup>20</sup> de una lámina plana es el punto geométrico que dinámicamente se comporta como si en él estuviera aplicada la resultante de las fuerzas externas al sistema.

De forma práctica, el *centro de masas* de la placa se puede determinar colgando la lámina sobre un par de sus puntos (en color rojo en la figura de abajo) y disponiendo en ellos una plomada<sup>21</sup> que defina dos líneas verticales. El punto de corte de ambas (en color azul en la figura) corresponde con el *centro de masas*.



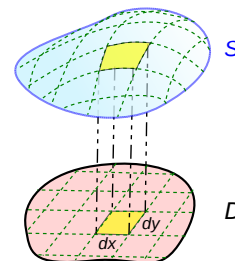
De forma matemática, las coordenadas del *centro de masas*  $(x_c, y_c)$  de una lámina plana vienen dadas por el cociente entre los correspondientes *momentos estáticos* con respecto a cada eje (ver punto anterior) y la densidad de la figura, de la siguiente forma:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint_D x\rho(x, y) dA}{\iint_D \rho(x, y) dA} \quad ; \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_D y\rho(x, y) dA}{\iint_D \rho(x, y) dA}$$

### Cálculo del Área de una Superficie

La integral doble puede ser utilizada para la determinación del área  $A_S$  de una superficie definida por una función  $z = f(x, y)$  sobre un dominio  $D$ , que viene dada por la siguiente fórmula:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2} dx dy$$



Si la ecuación de la superficie está dada en forma implícita de la forma  $f(x, y, z) = 0$ , la fórmula anterior se transforma en:

$$A(S) = \iint_D \frac{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}{|f_z|} dx dy$$

Puede verse una explicación de estas fórmulas en la [Sección 5.4.2, página 137](#).

<sup>20</sup>En física, el *centro de masas*, el *centroide* y el *centro de gravedad* son conceptos distintos, pero bajo ciertas circunstancias, pueden coincidir entre sí. El *centro de masas* depende de la distribución de materia, el *centroide* es un concepto puramente geométrico que depende de la forma del sistema, mientras que el *centro de gravedad* depende también del campo gravitatorio. De esta forma, se tiene que:

- El *centro de masas* coincide con el *centroide* cuando la densidad es uniforme o cuando la distribución de materia en el sistema tiene ciertas propiedades, tales como simetría.
- El *centro de masas* coincide con el *centro de gravedad*, cuando el sistema se encuentra en un campo gravitatorio uniforme (el módulo y la dirección de la fuerza de gravedad son constantes).

<sup>21</sup>Una *plomada* es una pesa normalmente de plomo, que mediante la cuerda de la que pende marca una línea vertical.

### 4.3. Integrales Triples

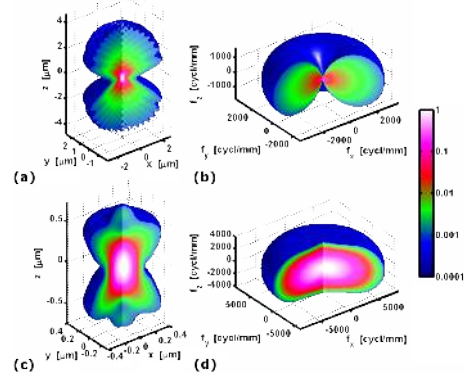
La definición de la integral doble<sup>22</sup> de una función escalar  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sobre una superficie  $D \in \mathbb{R}^2$  se puede extender para definir las integrales triples de funciones escalares  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sobre sólidos  $S \in \mathbb{R}^3$ .

**Definición 4.3. Integral Triple de Riemann**

Sea una función  $f : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  acotada en el compacto  $S$ . Se dice que  $f$  es integrable Riemann en  $S$  si existe y es finito el siguiente límite:

$$\iiint_S f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \rightarrow (0,0,0)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r f(x_i, y_j, z_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

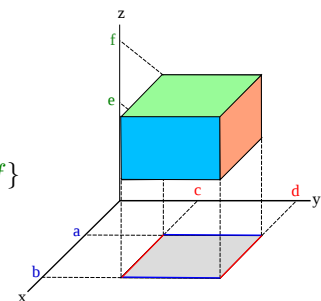
Geoméricamente la integral triple se puede interpretar como el hipervolumen de  $\mathbb{R}^4$  que se encuentra *debajo* de un sólido de  $\mathbb{R}^3$  dado por la función  $w = f(x, y, z)$  en un dominio determinado. Sin embargo físicamente es más sencillo de entender, suponiendo que la función  $f(x, y, z)$  define una distribución espacial de una propiedad escalar como por ejemplo densidad, temperatura, presión, etc., de forma que la integral triple representa una suma infinita del valor de la propiedad en cada punto de un diferencial de volumen.



#### 4.3.1. Integrales Triples Iteradas

- En el caso de que el dominio  $S$  sea un paralelepípedo rectangular de la forma:

$$S = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}$$



la integral triple se define como una secuencia de tres integrales iteradas de la forma:

$$\iiint_S f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x, y, z) dz dy dx$$

donde por la extensión del **teorema de Fubini**<sup>23</sup> a  $n$  dimensiones, no importa el orden de integración.

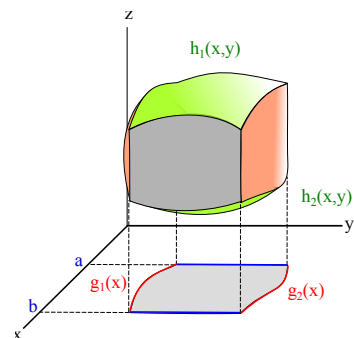
- Un caso más general es cuando  $S$  es un sólido acotado<sup>24</sup>:
  - La dimensión  $x$  varía entre los valores fijos  $x = a$  (inferior) y  $x = b$  (superior).
  - La dimensión  $y$  está acotada entre dos curvas que dependen de la variable  $x$ , inferiormente por  $y = h_1(x)$  y superiormente por  $y = h_2(x)$ .
  - La dimensión  $z$  está acotada por dos superficies dependiente de las variables  $(x, y)$ , inferiormente por  $z = h_1(x, y)$  y superiormente por  $z = h_2(x, y)$ .

<sup>22</sup>Ver la **Definición 4.1**, página 91.

<sup>23</sup>Ver el **Teorema 4.2**, página 92.

<sup>24</sup>Aquí las variables  $x, y$  y  $z$  pueden referirse a cualquiera de las tres variables de la función.

$$\iiint_S f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx$$



Notar que en este caso se integra primero sobre la variable  $z$  resultando una función que dependerá de  $x$  e  $y$ , (ya que sus límites de integración dependen de ellas), quedando una integral doble del tipo visto en la sección anterior. Por supuesto, que el *teorema de Fubini* permite que existan diferentes opciones en el orden de integración.

Las propiedades de la integral triple son similares a las propiedades de las integrales dobles<sup>25</sup>, teniendo en cuenta que ahora el volumen encerrado en un determinado sólido  $S$  puede definirse por:

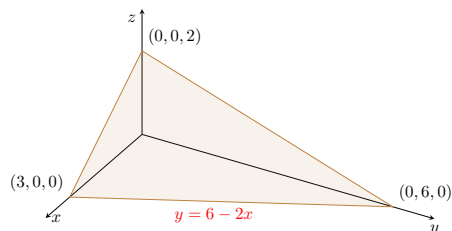
$$V = \iiint_S 1 dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} dz dy dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} [h_2(x,y) - h_1(x,y)] dy dx$$

**Ejercicio 4.12.** Encontrar el volumen comprendido en el primer octante del espacio euclídeo acotado por el plano:

$$z = 2 - y/3 - 2x/3$$

En la siguiente gráfica se muestra el corte del plano en el primer octante. Primeramente determinamos la recta de corte en el plano  $xy$  haciendo  $z = 0$ :

$$y = 6 - 2x$$



El volumen puede determinarse mediante una integral doble o una integral triple:

- Integral doble

$$\begin{aligned} \int_0^3 \int_0^{6-2x} \left(2 - \frac{y}{3} - \frac{2x}{3}\right) dy dx &= \int_0^3 \left[2y - \frac{1}{6}y^2 - \frac{2}{3}xy \Big|_{y=0}^{y=6-2x}\right] dx = \\ &= \int_0^3 \left[2(6-2x) - \frac{1}{6}(6-2x)^2 - \frac{2}{3}x(6-2x)\right] dx = \int_0^3 \left[\frac{2}{3}x^2 - 4x + 6\right] dx = \frac{2}{9}x^3 - 2x^2 + 6x \Big|_0^3 = \boxed{6} \end{aligned}$$

- Integral triple

$$\begin{aligned} \int_0^3 \int_0^{6-2x} \int_0^{2-y/3-2x/3} 1 dz dy dx &= \int_0^3 \int_0^{6-2x} \left[ z \Big|_{z=0}^{z=2-y/3-2x/3} \right] dy dx = \\ &= \int_0^3 \int_0^{6-2x} \left(2 - \frac{y}{3} - \frac{2x}{3}\right) dy dx \end{aligned}$$

Que corresponde con la integral doble anterior.

<sup>25</sup>Ver la Sección 4.2.1, página 91.

**Ejercicio 4.13.** Evaluar:  $\int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 (xy + z) dx dy dz$ .

$$\begin{aligned} \int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 (xy + z) dx dy dz &= \int_0^3 \int_0^2 \left[ \frac{1}{2}x^2y + xz \Big|_{x=0}^{x=1} \right] dy dz = \int_0^3 \int_0^2 \left[ \frac{1}{2}y + z \right] dy dz = \\ &= \int_0^3 \left[ \frac{1}{4}y^2 + yz \Big|_{y=0}^{y=2} \right] dz = \int_0^3 (1 + 2z) dz = z + z^2 \Big|_0^3 = \boxed{12} \end{aligned}$$

**Ejercicio 4.14.** Evaluar:  $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-x-y} (x + y + z) dz dy dx$ .

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-x-y} (x + y + z) dz dy dx &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[ (x + y)z + \frac{1}{2}z^2 \Big|_{z=0}^{z=2-x-y} \right] dy dx = \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[ (x + y)(2 - x - y) + \frac{1}{2}(2 - x - y)^2 \right] dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left( 2 - \frac{1}{2}x^2 - xy - \frac{1}{2}y^2 \right) dy dx = \\ &= \int_0^1 \left[ 2y - \frac{1}{2}x^2y - xy - \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{6}y^3 \Big|_{y=0}^{y=1-x} \right] dx = \int_0^1 \left( \frac{11}{6} - 2x + \frac{1}{6}x^3 \right) dx = \frac{11}{6}x - x^2 + \frac{1}{24}x^4 \Big|_0^1 = \boxed{\frac{7}{8}} \end{aligned}$$

### 4.3.2. Cambio de Variables en Integrales Triples

#### Teorema 4.5. Cambio de Variable en Integrales Triples

Sea un cambio de variable:  $x = x(u, v, w)$ ,  $y = y(u, v, w)$  y  $z = z(u, v, w)$  de forma que se establezca una relación uno a uno entre el sólido  $S$  en el plano  $xyz$  y el sólido  $S'$  en el plano  $uvw$ , de tal forma que el *jacobiano de la transformación*:

$$J(u, v, w) = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall (u, v, w) \in S'$$

Entonces:

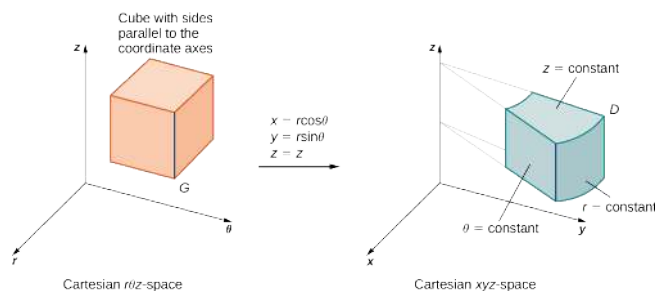
$$\iiint_S f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{S'} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] |J(u, v, w)| du dv dw$$

donde  $|J(u, v, w)|$  es el **valor absoluto** del jacobiano de la transformación.

Vamos a ver dos de los cambios de variable más utilizados y su correspondiente jacobiano.

#### Cambio de Variables a Coordenadas Cilíndricas

Este cambio  $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, z)$  con  $r > 0$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$  y  $z \in \mathbb{R}$  puede utilizarse cuando el dominio tiene una geometría cilíndrica.



El jacobiano de esta transformación es:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sen \theta \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_z \\ y_r & y_\theta & y_z \\ z_r & z_\theta & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sen \theta & 0 \\ \sen \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sen^2 \theta = r > 0$$

$$\iiint_S f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{S'} f[x(r, \theta, z), y(r, \theta, z), z(r, \theta, z)] r dr d\theta dz$$

De forma general si el cilindro es de tipo elíptico de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

el cambio de variables correspondiente y su jacobiano asociado son:

$$\begin{cases} x = ar \cos t \\ y = br \sen t \\ z = z \end{cases}, \quad r \in [0, 1], \quad t \in [0, 2\pi] \quad \Rightarrow \quad |J(r, t, z)| = abr$$

Ver la [Sección 4.2.5](#), página 101.

**Ejercicio 4.15.** Calcular la integral:

$$\iiint_D x^2 y z dV$$

extendida a la región del espacio:  $D = \{(x, y, z) : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16, x, y \geq 0, 0 \leq z \leq 3\}$ .

El dominio corresponde con el volumen entre dos cilindros, de radios 2 y 4, que se encuentra en el primer octante y con altura 3. Utilizando coordenadas rectangulares  $(x, y, z)$  hay que dividir el dominio en dos partes:



La integral se puede calcular de forma directa en las variables  $(x, y, z)$  a través de dos integrales de la forma:

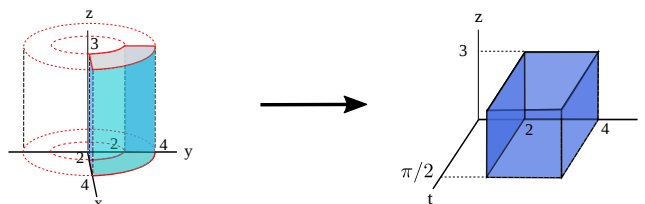
$$\int_0^2 \int_{\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} \int_0^3 x^2 y z dz dy dx + \int_2^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \int_0^3 x^2 y z dz dy dx$$

La vamos a resolver en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sen t \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(r \cos t, r \sen t, z) = r^2 \cos^2(t) r \sen(t) z = z r^3 \cos^2 t \sen t \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

La proyección de la región  $S$  en el plano  $xy$  queda:

$$4 \leq r^2 \leq 16 \quad \Rightarrow \quad r \in [2, 4], \quad t \in [0, \pi/2]$$



Por tanto, teniendo en cuenta que el jacobiano de la transformación en coordenadas cilíndricas es  $r$ , se tiene<sup>a</sup>:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} \int_2^4 \int_0^3 zr^4 \operatorname{sen}(t) \cos^2(t) dz dr dt = \int_0^{\pi/2} \int_2^4 \frac{z^2}{2} r^3 \operatorname{sen}(t) \cos^2(t) \Big|_0^3 dr dt = \\ & = \frac{9}{2} \int_0^{\pi/2} \int_2^4 r^4 \operatorname{sen}(t) \cos^2(t) dr dt = \frac{9}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{4^5 - 2^5}{5} \operatorname{sen}(t) \cos^2(t) dt = \frac{4464}{5} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(t) \cos^2(t) dt = \\ & = \frac{4464}{5} \frac{-1}{3} \cos^3 t \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1488}{5} (0 - 1) = \boxed{\frac{1488}{5}} \end{aligned}$$

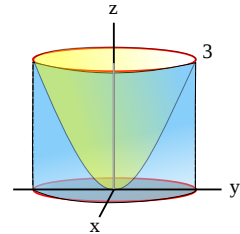
**Ejercicio 4.16.** Calcular la siguiente integral:

$$\iiint_D \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dV$$

donde  $D$  está limitado por las superficies  $x^2 + y^2 = 2z$  y  $z = 3$ .

El dominio corresponde con un paraboloide con vértice en el origen y altura 3. A esa altura el radio de la circunferencia es  $\sqrt{6}$ . La integral se puede calcular de forma directa en las variables  $(x, y, z)$  como:

$$\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \int_{-\sqrt{6-x^2}}^{\sqrt{6-x^2}} \int_{(x^2+y^2)/2}^3 \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dz dy dx$$

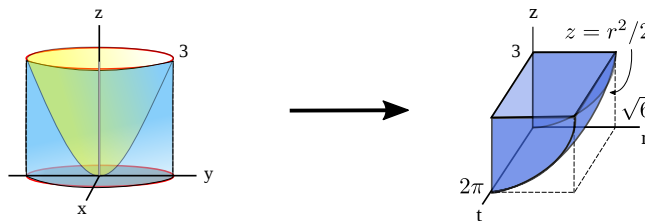


Resulta más sencillo hacer la integral en coordenadas cilíndricas de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \cos t \\ y = r \operatorname{sen} t \\ z = z \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} f(r \cos t, r \operatorname{sen} t, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{z}{r} \\ z = (x^2 + y^2)/2 = \frac{1}{2}r^2 \end{array} \right.$$

La proyección de la región  $S$  en el plano  $xy$  queda:

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 t + r^2 \operatorname{sen}^2 t \leq 6 \implies r^2 \leq 6 \implies r \in [0, \sqrt{6}], t \in [0, 2\pi]$$



Por tanto, teniendo en cuenta que el jacobiano de la transformación en coordenadas cilíndricas es  $r$ , se tiene:

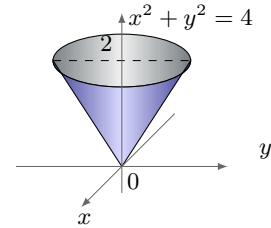
$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{6}} \int_{r^2/2}^3 \frac{z}{r} r dz dr dt = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{6}} \int_{r^2/2}^3 z dz dr dt = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{6}} \frac{z^2}{2} \Big|_{r^2/2}^3 dr dt = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{6}} \left( 3^2 - \frac{r^4}{2^2} \right) dr dt = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left( 9r - \frac{r^5}{4 \cdot 5} \Big|_0^{\sqrt{6}} \right) dt = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left( 9\sqrt{6} - \frac{36\sqrt{6}}{4 \cdot 5} \right) dt = \frac{37\sqrt{6}}{20} \int_0^{2\pi} dt = \\ & = \boxed{\frac{37\pi\sqrt{6}}{10}} \end{aligned}$$

<sup>a</sup>Como en este caso el dominio del problema en coordenadas cilíndricas tiene forma de paralelepípedo, el orden en las variables de integración pueden intercambiarse libremente.

**Ejercicio 4.17.** Calcular la integral triple de la función  $f(x, y, z) = 1 + (x^2 + y^2)^2$  sobre la región  $S \subset \mathbb{R}^3$  limitada por el cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  y el plano  $z = 2$ .

Esta integral se puede calcular de forma directa en las variables  $(x, y, z)$  de la forma:

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 [1 + (x^2 + y^2)] dz dy dx$$

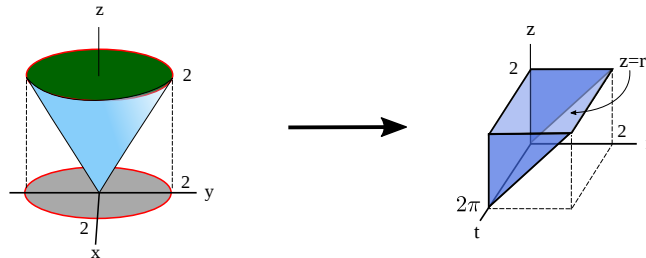


Resulta más sencillo hacer la integral en coordenadas cilíndricas de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \\ z = z \end{cases} \implies \begin{cases} f(r \cos t, r \sin t, z) = 1 + (r^2)^2 = 1 + r^4 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} = r \end{cases}$$

La proyección de la región  $S$  en el plano  $xy$  queda:

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t \leq 4 \implies r^2 \leq 4 \implies r \in [0, 2], t \in [0, 2\pi]$$



Por tanto:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 (1 + r^4) r dz dr dt &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (1 + r^4) r (2 - r) dr dt = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (2r - r^2 + 2r^5 - r^6) dr dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ r^2 - \frac{1}{3}r^3 + \frac{1}{3}r^6 - \frac{1}{7}r^7 \right]_0^2 dt = \int_0^{2\pi} \frac{92}{21} dt = \boxed{\frac{184}{21} \pi} \end{aligned}$$

**Ejercicio 4.18.** Calcular el volumen del sólido limitado por el cilindro  $x^2 + y^2 = 2y$ , el paraboloide  $x^2 + y^2 = 2z$  y el plano  $xy$ .

El cilindro tiene su centro desplazado del origen en la variable  $y$ . Buscamos su ecuación canónica:

$$\begin{aligned} x^2 + (y - y_0)^2 &= R^2 ; \quad x^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 = R^2 ; \quad x^2 + y^2 = 2yy_0 + (R^2 - y_0^2) \\ \implies \left\{ \begin{array}{l} 2y_0 = 2 \implies y_0 = 1 \\ R^2 - y_0^2 = 0 \implies R = 1 \end{array} \right\} &\implies x^2 + (y - 1)^2 = 1 \end{aligned}$$

La base del cilindro en el plano  $xy$  tiene su centro en  $(0, 1)$  y su radio es 1. Por su parte el paraboloide tiene el vértice en el origen, cumpliéndose:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 2y \\ x^2 + y^2 = 2z \end{array} \right\} \implies z = y$$

Por tanto el paraboloide corta a corresponde con una circunferencia de radio 2 a una altura  $z = 2$ .

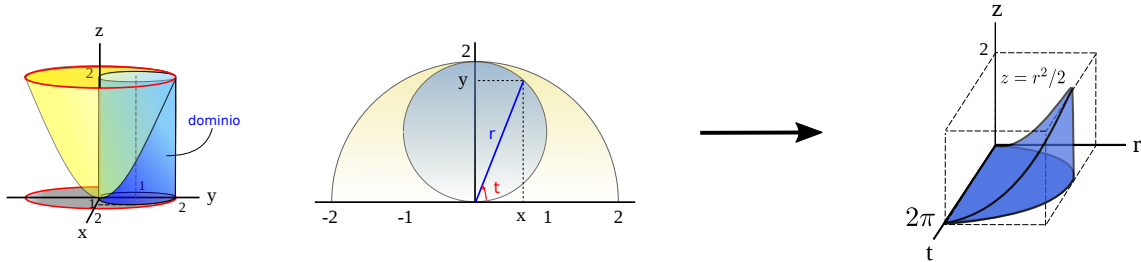


El volumen pedido se puede obtener calculando la integral en las variables  $(x, y, z)$  de la siguiente forma:

$$\int_{-1}^1 \int_{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}^{1+\sqrt{1-x^2}} \int_0^{(x^2+y^2)/2} 1 \, dz \, dy \, dx$$

Vamos a calcular la integral en coordenadas cilíndricas:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \cos t \\ y = r \sin t \\ z = z \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 2y \Rightarrow r^2 = 2r \sin t \Rightarrow r = 2 \sin t \\ z = (x^2 + y^2)/2 = \frac{1}{2}r^2 \end{array} \right\} \quad t \in [0, \pi], \quad r \in [0, 2]$$



Por tanto, teniendo en cuenta que el jacobiano de la transformación en coordenadas cilíndricas es  $r$ , se tiene:

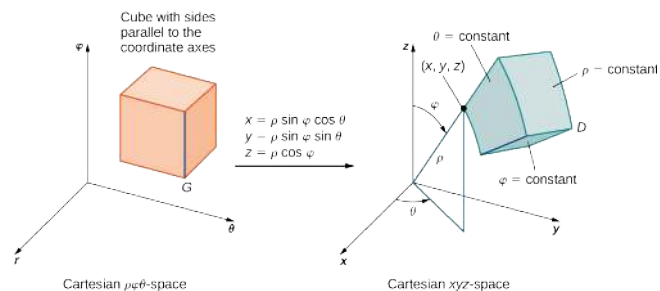
$$\begin{aligned} \int_0^\pi \int_0^{2 \sin t} \int_0^{r^2/2} r \, dz \, dr \, dt &= \int_0^\pi \int_0^{2 \sin t} r z \Big|_0^{r^2/2} \, dr \, dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi \int_0^{2 \sin t} r^3 \, dr \, dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{r^4}{4} \Big|_0^{2 \sin t} \, dt = \\ &= 2 \frac{1}{8} \int_0^\pi 2^4 \sin^4 t \, dt = 2 \left[ \frac{3}{8}t + \frac{1}{32} \sin(4t) - \frac{1}{4} \sin(2t) \right]_0^\pi = \boxed{\frac{3}{4}\pi} \end{aligned}$$

Donde hemos tenido en cuenta:

$$\int \sin^4 x \, dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{32} \sin(4x) - \frac{1}{4} \sin(2x) + c$$

### Cambio de Variables a Coordenadas Esféricas

Se puede utilizar cuando el dominio tiene una geometría esférica.



Este cambio  $(x, y, z) \rightarrow (\rho, \phi, \theta)$  presenta un punto mediante su distancia al origen  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , el ángulo polar  $\theta$  de su proyección sobre el plano  $XY$  y el ángulo  $\phi$  que forma su radio vector con la parte positiva de eje  $z$ , con  $r > 0$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$  y  $\phi \in [0, \pi]$ . El correspondiente jacobiano de esta transformación es:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x = r \sin \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \phi \end{array} \right\} &\Rightarrow \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} \right| = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\phi \\ y_r & y_\theta & y_\phi \\ z_r & z_\theta & z_\phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & -r \sin \phi \sin \theta & r \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & r \sin \phi \cos \theta & \\ \cos \phi & 0 & -r \sin \phi \end{vmatrix} = \\ &= -r^2 \sin \phi \Rightarrow \boxed{|J(r, \theta, \phi)| = r^2 \sin \phi} \end{aligned}$$

$$\iiint_S f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{S'} f[x(r, \theta, \phi), y(r, \theta, \phi), z(r, \theta, \phi)] \boxed{r^2 \sin \phi} \, dr \, d\theta \, d\phi$$

Para el caso de un elipsoide<sup>26</sup> centrado en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$  de la forma:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

el cambio de variables a **coordenadas elipsoidales**<sup>27</sup> y su correspondiente jacobiano asociado son:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + ar \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y = y_0 + br \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z = z_0 + cr \cos \phi \end{array} \right\}, \quad r \in [0, 1], \quad \phi \in [0, \pi], \quad \theta \in [0, 2\pi] \implies |J(r, \phi, \theta)| = abc r^2 \operatorname{sen} \phi$$

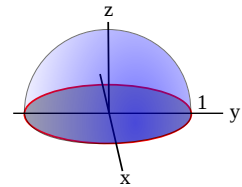
**Ejercicio 4.19.** Evaluar la siguiente integral:

$$\iiint_V 4z \, dV$$

donde  $V$  es la mitad superior de la esfera unidad.

La esfera unidad tiene el centro en el origen y radio 1, por tanto:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \implies z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$



mientras que la proyección de la misma en el plano  $xy$  viene dada por la siguiente circunferencia:

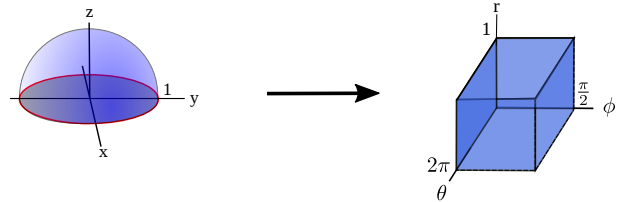
$$x^2 + y^2 = 1 \implies y = \sqrt{1 - (x - 2)^2}$$

La integral se puede calcular de forma directa en las variables  $(x, y, z)$  como:

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 4z \, dz \, dy \, dx$$

Resulta más sencillo hacer la integral en coordenadas esféricas de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z = r \cos \phi \end{array} \right\} \implies f(r, \phi, \theta) = 4r \cos \phi$$



Teniendo en cuenta que el jacobiano de la transformación en coordenadas esféricas es  $r^2 \operatorname{sen} \phi$ , se tiene:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 4r \cos \phi r^2 \operatorname{sen} \phi \, dr \, d\phi \, d\theta = 4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^3 \cos \phi \operatorname{sen} \phi \, dr \, d\phi \, d\theta = \\ & = 4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{r^4}{4} \cos \phi \operatorname{sen} \phi \Big|_0^1 \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \phi \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \phi \Big|_0^{\pi/2} \, d\theta = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \boxed{\pi} \end{aligned}$$

<sup>26</sup>Ver la Sección A.2.1, página 157.

<sup>27</sup>Generalización de las *coordenadas elípticas* (ver el Ejercicio 4.10, página 102) en el espacio  $\mathbb{R}^3$ .

**Ejercicio 4.20.** Calcular el volumen del sólido que se encuentra comprendido entre el cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  y la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = z$ .

La esfera está desplazada en el eje  $z$ . Vamos a encontrar el valor del desplazamiento  $z_0$  y de su radio  $R$ :

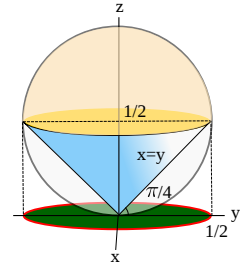
$$x^2 + y^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \implies x^2 + y^2 + z^2 = 2z_0z + R^2 - z_0^2 \implies \begin{cases} 2z_0 = 1 \implies z_0 = 1/2 \\ R^2 - z_0^2 = 0 \implies R = 1/2 \end{cases}$$

Por tanto es una esfera de centro  $(0, 0, 1/2)$  y radio  $R = 1/2$ .

El punto de corte del cono con la esfera viene dado por:

$$\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = z \end{cases} \implies 2z^2 = z \begin{cases} z = 0 \\ 2z = 1 \end{cases}; z = 1/2$$

Por tanto la circunferencia en la parte superior del cono a una altura  $z = 1/2$ , tiene por radio  $1/2$  al cumplirse la ecuación:  $x^2 + y^2 = (1/2)^2$ , que coincide con la proyección en el plano  $xy$ .



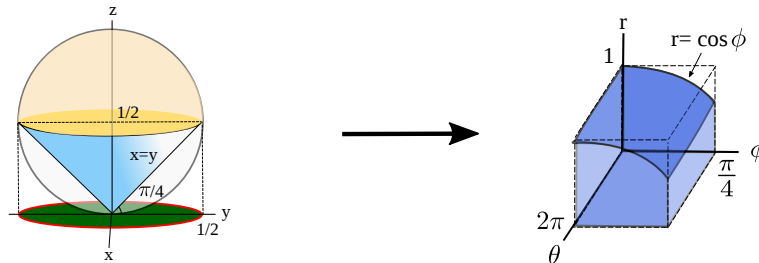
Teniendo en cuenta la simetría del problema, la integral se puede calcular de forma directa en las variables  $(x, y, z)$  como:

$$4 \int_0^{1/2} \int_0^{\sqrt{1/4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1/2+\sqrt{1/4-x^2-y^2}} dz dy dx$$

Resulta más sencillo hacer la integral en coordenadas esféricas. Las ecuaciones de la esfera y del cono en estas coordenadas quedan de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z = r \cos \phi \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = z \implies r^2 = r \cos \phi \implies r = \cos \phi \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \implies r \cos \phi = r \operatorname{sen} \phi \implies \cos \phi = \operatorname{sen} \phi \implies \phi = \pi/4 \end{cases}$$

De forma gráfica, los dominios en los dos sistemas de coordenadas quedan de la siguiente forma:



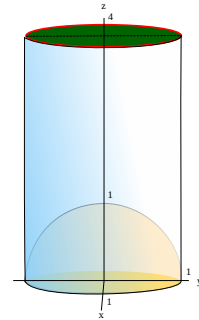
Teniendo en cuenta que el jacobiano de la transformación en coordenadas esféricas es  $r^2 \operatorname{sen} \phi$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos \phi} r^2 \operatorname{sen} \phi dr d\phi d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \frac{r^3}{3} \operatorname{sen} \phi \Big|_0^{\cos \phi} d\phi d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \cos^3 \phi \operatorname{sen} \phi d\phi d\theta = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} -\frac{1}{4} \cos^4 \phi \Big|_0^{\pi/4} d\theta = \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} \frac{3}{4} d\theta = \frac{1}{16} \int_0^{2\pi} d\theta = \boxed{\frac{\pi}{8}} \end{aligned}$$

**Ejercicio 4.21.** Encontrar la masa de un sólido  $S$  comprendido en el interior del cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ , debajo del plano  $z = 4$  y arriba de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , si la densidad de cada punto del mismo es proporcional a su distancia al eje del cilindro.

La densidad se puede expresar como  $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$  con  $k > 0$ . La masa se puede calcular entonces en coordenadas cartesianas como:

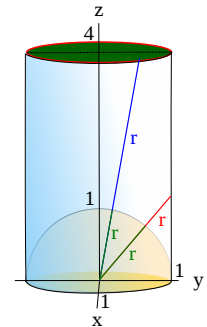
$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^4 k\sqrt{x^2 + y^2} dz dy dx$$



Podemos intentar hacer la integral en coordenadas esféricas<sup>28</sup>, quedando las ecuaciones del plano, el cilindro y la esfera en estas coordenadas como:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \phi \cos \theta \\ y = r \cos \phi \sin \theta \\ z = r \sin \phi \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} z = 4 \implies r \sin \phi = 4 \implies r = \frac{4}{\sin \phi} \\ x^2 + y^2 = 1 \implies r^2 \cos^2 \phi = 1 \implies r = \frac{1}{\cos \phi} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \implies r = 1 \end{array} \right.$$

En estas coordenadas la integral se transformaría en dos al barrer el ángulo  $\phi$ : desde 0 hasta  $\arctan(1/4)$  (borde del plano) le corresponde al plano superior y desde  $\arctan(1/4)$  hasta  $\pi/2$  le corresponde a la pared del cilindro.



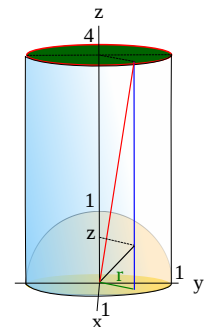
Teniendo en cuenta que la función densidad en coordenadas esféricas se transforma en  $\rho = k\sqrt{x^2 + y^2} = kr \cos \phi$  y considerando el jacobiano de la transformación  $r^2 \sin \phi$  se tiene:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\arctan(1/4)} \int_1^{4/\cos \phi} kr \cos \phi r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\arctan(1/4)}^{\pi/2} \int_1^{1/\sin \phi} kr \cos \phi r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta$$

Si utilizamos coordenadas cilíndricas<sup>29</sup> para este caso se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \cos t \\ y = r \sin t \\ z = z \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} z = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \implies r = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \implies z = \sqrt{1 - r^2} \end{array} \right.$$

teniendo en cuenta que  $r$  es la distancia del origen a la proyección del punto en el plano  $xy$ .



La función densidad en coordenadas cilíndricas es  $\rho = k\sqrt{x^2 + y^2} = kr$  y por tanto la integral en estas coordenadas, considerando que el jacobiano es  $r$ , queda:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\sqrt{1-r^2}}^4 kr r dz dr dt$$

de forma que claramente este cambio de variables es más apropiado en este caso. Calculamos el valor de esta integral:

$$k \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\sqrt{1-r^2}}^4 r^2 dz dr dt = k \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 (4 - \sqrt{1-r^2}) dr dt$$

Teniendo en cuenta que:

$$\int x^2 \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{x}{4}(1-x^2)^{3/2} + \frac{x}{8}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{8} \arcsen(x) + c$$

se tiene:

$$\begin{aligned} k \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 (4 - \sqrt{1-r^2}) dr dt &= k \int_0^{2\pi} \left[ \frac{4}{3} r^3 + \frac{r}{4} (1-r^2)^{3/2} - \frac{r}{8} \sqrt{1-r^2} - \frac{1}{8} \arcsen(r) \right]_0^1 dt = \\ &= k \int_0^{2\pi} \left( \frac{4}{3} - \frac{1}{8} \frac{\pi}{2} \right) dt = \boxed{k \left( \frac{4}{3} - \frac{\pi}{16} \right) 2\pi} \end{aligned}$$

**Ejercicio 4.22.** Encontrar el volumen de la región encerrada entre las superficies  $z = x^2 + y^2$  y  $z = 10 - x^2 - 2y^2$ .

La superficie  $z = x^2 + y^2$  es un paraboloides circular con vértice en el origen y la superficie  $z = 10 - x^2 - 2y^2$  es un paraboloides elíptico invertido con vértice en  $z = 10$ . La proyección en el plano  $xy$  de la curva de corte entre ambas viene dada por:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 10 - x^2 - 2y^2 \end{cases} \implies x^2 + y^2 = 10 - x^2 - 2y^2 \implies 2x^2 + 3y^2 = 10$$

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{10/3} = 1$$

que corresponde con una elipse centrada en el origen y semiejes  $a = \sqrt{5}$  y  $b = \sqrt{10/3}$ .

En coordenadas cartesianas este volumen se puede calcular como:

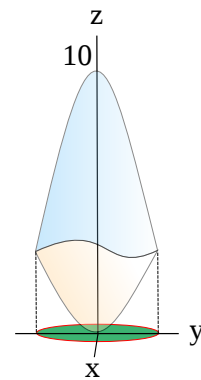
$$V = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \int_{-\sqrt{10/3-2/3x^2}}^{\sqrt{10/3-2/3x^2}} \int_{x^2+y^2}^{10-x^2-2y^2} dz dy dx$$

En este caso el problema no tiene una geometría esférica y lo más conveniente es utilizar coordenadas cilíndricas generales<sup>30</sup> de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x = \sqrt{5}r \cos t \\ y = \sqrt{\frac{10}{3}}r \sin t \\ z = z \end{cases} \implies \begin{cases} z = x^2 + y^2 \implies z = \left( 5 \cos^2 t + \frac{10}{3} \sin^2 t \right) r^2 \\ z = 10 - x^2 - 2y^2 \implies z = 10 - \left( 5 \cos^2 t + \frac{20}{3} \sin^2 t \right) r^2 \end{cases}$$

Por tanto, la integral, teniendo en cuenta que el jacobiano en estas variables es  $|J(r, t, z)| = r\sqrt{\frac{50}{3}}$ , queda:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{(5 \cos^2 t + \frac{20}{3} \sin^2 t)r^2}^{10 - (5 \cos^2 t + \frac{20}{3} \sin^2 t)r^2} r \sqrt{\frac{50}{3}} dz dr dt = \\ &= \sqrt{\frac{50}{3}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \left( 10 - 5r^2 \cos^2 t - \frac{20}{3} r^2 \sin^2 t - 5r^2 \cos^2 t - \frac{10}{3} r^2 \sin^2 t \right) dr dt = \\ &= \sqrt{\frac{50}{3}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r (10 - 10r^2 \cos^2 t - 10r^2 \sin^2 t) dr dt = 10\sqrt{\frac{50}{3}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r - r^3) dr dt = \\ &= 10\sqrt{\frac{50}{3}} \int_0^{2\pi} \left. \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right|_0^1 dt = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{50}{3}} \int_0^{2\pi} dt = 5\pi\sqrt{\frac{50}{3}} = \boxed{25\pi\sqrt{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$



<sup>28</sup>Ver la Sección 4.3.2, página 113.

<sup>29</sup>Ver la Sección 4.3.2, página 109.

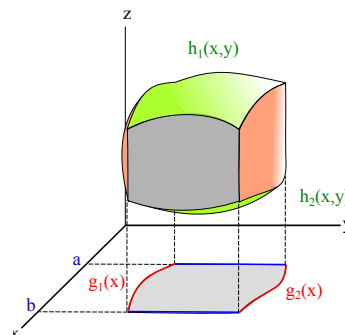
<sup>30</sup>Ver la Sección 4.3.2, página 109.

### 4.3.3. Aplicaciones de la Integral Triple

El concepto de integral triple permite extender las aplicaciones de la integral doble<sup>31</sup> a sólidos tridimensionales.

#### Cálculo de Volúmenes

Como se ha visto en la [Sección 4.3.1, página 107](#), la integral triple nos permite calcular volumen encerrado en un espacio tridimensional limitado por dos superficies  $h_1(x, y)$  y  $h_2(x, y)$  y dos curvas  $g_1(x)$  y  $g_2(x)$  de la siguiente, dispuestas como indica la siguiente figura, de la siguiente forma:



$$V = \iiint_S 1 \, dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} dz \, dy \, dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} (h_2(x, y) - h_1(x, y)) \, dy \, dx$$

#### Valor Promedio de una Función de Tres Variables sobre un Dominio

Si  $f = f(x, y, z)$  es una función continua en un dominio  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ , el valor promedio de  $f(x, y, z)$  en dicho dominio viene dado por la siguiente expresión:

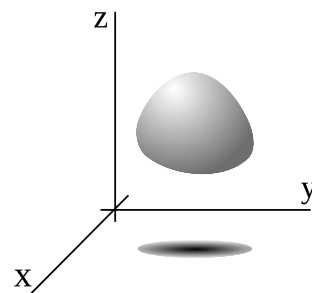
$$\text{Valor Medio de } f(x, y, z) = \frac{\iiint_D f(x, y, z) \, dV}{\iiint_D dV}$$

#### Cálculo de Propiedades Físicas de Figuras Tridimensionales

- **Masa**

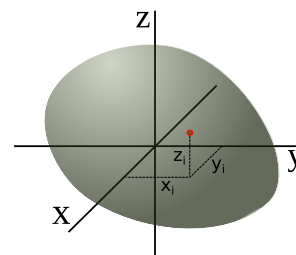
Sea un sólido tridimensional comprendido en un dominio  $D$  dado y sea  $\rho(x, y, z)$  una función que define la **densidad**<sup>32</sup> en cada uno de los puntos  $(x_i, y_i, z_i)$  en  $D$  con volumen  $V_i$ . Entonces la masa de la lámina puede ser determinada de la siguiente forma:

$$dm = \rho(x, y, z) \, dV \quad \Rightarrow \quad m = \iiint_D \rho(x, y, z) \, dV$$



- **Momentos Estáticos y de Inercia**

Consideremos un sólido tridimensional definido en un dominio  $D$ , con volumen  $V_D$  y densidad variable  $\rho(x, y, z)$ . Sea  $(x_i, y_i, z_i)$  cada uno de los puntos que componen sólido.



<sup>31</sup>Ver la [Sección 4.2.6, página 104](#).

<sup>32</sup>La densidad de una partícula es la relación entre su masa y su volumen.

- Los **momentos estáticos**<sup>33</sup> de una partícula con posición  $(x_i, y_i, z_i)$  con respecto a un plano viene dado por el producto de su masa por la distancia que la separa a ese plano. En base a esta definición, los *momentos estáticos* de una figura tridimensional con respecto a los planos  $xy$ ,  $yz$  y  $xz$  vienen dados por las siguientes expresiones:

$$M_{xy} = \iiint_D z\rho(x, y, z) dV$$

$$M_{yz} = \iiint_D x\rho(x, y, z) dV$$

$$M_{xz} = \iiint_D y\rho(x, y, z) dV$$

- Los *momentos de inercia*<sup>34</sup> alrededor de los ejes coordenados, denotados por  $I_x$ ,  $I_y$  de un sólido definido en un dominio  $D$  con respecto a los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  y con respecto al origen de coordenadas, vienen dados por las siguientes expresiones:

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2)\rho(x, y, z) dV$$

$$I_y = \iiint_D (x^2 + z^2)\rho(x, y, z) dV$$

$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y, z) dV$$

De igual forma, el momento de inercia respecto al origen de coordenadas,  $I_o$  viene dado:

$$I_o = \iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x, y, z) dV = I_x + I_y + I_z$$

Los momentos de inercia representan una medida de la oposición que presenta un cuerpo a girar respecto a un determinado eje o punto.

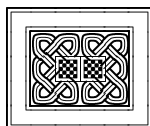
#### • Centro de Masas

Las coordenadas  $(x_c, y_c, z_c)$  del **centro de masas**<sup>35</sup> de un sólido tridimensional vienen dadas por:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\iiint_D x\rho(x, y, z) dV}{\iiint_D \rho(x, y, z) dV}$$

$$y_c = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{\iiint_D y\rho(x, y, z) dV}{\iiint_D \rho(x, y, z) dV}$$

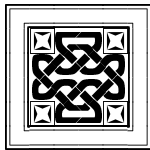
$$z_c = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\iiint_D z\rho(x, y, z) dV}{\iiint_D \rho(x, y, z) dV}$$



<sup>33</sup>También denominado *primeros momentos* o *momentos de primer orden*.

<sup>34</sup>Ver la [Sección 4.2.6](#), página 104.

<sup>35</sup>Ver la [Sección 4.2.6](#), página 104.



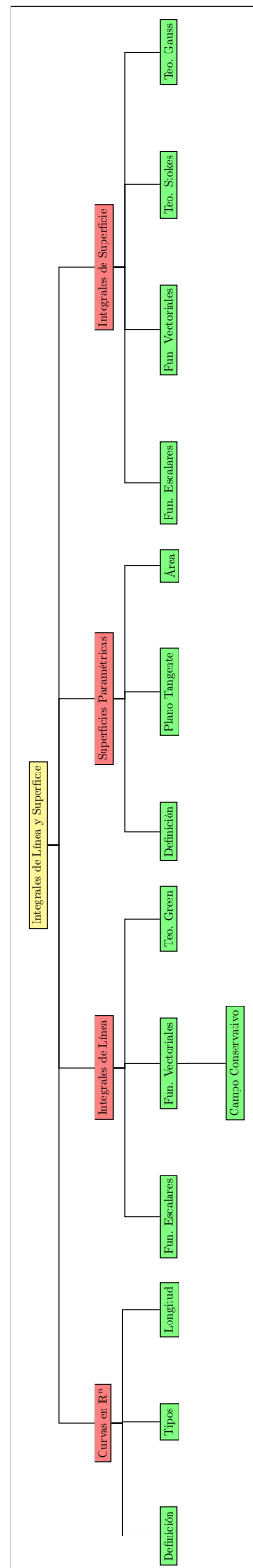
# Integrales de Línea y de Superficie

## Contenido

---

<b>5.1</b>	<b>Introducción</b>	<b>123</b>
<b>5.2</b>	<b>Curvas en <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>123</b>
<b>5.3</b>	<b>Integral de Línea</b>	<b>127</b>
5.3.1	Integral de Línea de Funciones Escalares	127
5.3.2	Integral de Línea de Funciones Vectoriales	130
5.3.3	Campos Conservativos	132
5.3.4	Relación entre las Integrales de Línea Escalares y Vectoriales	134
<b>5.4</b>	<b>Superficies Parametrizadas</b>	<b>135</b>
5.4.1	Ecuación del Plano Tangente a una Superficie Parametrizada	136
5.4.2	Área de una Superficie Parametrizada	137
<b>5.5</b>	<b>Integral de Superficie</b>	<b>138</b>
5.5.1	Integral de Superficie de Funciones Escalares	138
5.5.2	Integral de Superficie de Funciones Vectoriales	140
<b>5.6</b>	<b>Resumen de Fórmulas Integrales en Funciones de Varias Variables</b>	<b>142</b>
5.6.1	Funciones Escalares	142
5.6.2	Funciones Vectoriales	143
5.6.3	Comparación de Integrales de Línea y de Superficie	143
<b>5.7</b>	<b>Teoremas sobre Integrales de Funciones de Varias Variables</b>	<b>144</b>
5.7.1	Teorema de Green	144
5.7.2	Teorema de Stokes	145
5.7.3	Teorema de Gauss o de la Divergencia	147

---



## 5.1. Introducción

Vamos a ver una extensión del concepto de integral de funciones de varias variables a líneas y superficies. Para ello analizaremos en las correspondientes secciones los conceptos generales de curvas y superficies en espacios  $\mathbb{R}^n$ .

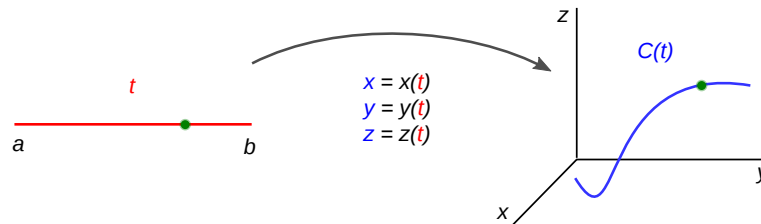
## 5.2. Curvas en $\mathbb{R}^n$

### Definición 5.1. Curva o Camino en $\mathbb{R}^n$

Una **curva**<sup>1</sup> o **camino** en  $\mathbb{R}^n$  es una función vectorial continua  $C : t \in [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow C(t) \in \mathbb{R}^n$ , con  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ .

$$C(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] \implies \begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ \vdots \\ x_n = x_n(t) \end{cases}$$

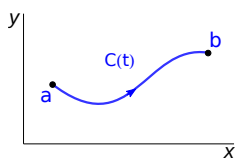
- Los puntos  $C(a)$  y  $C(b)$  son respectivamente el **origen** y **extremo** del camino.
- Cuando  $C(a) = C(b)$  se dice que la curva es **cerrada**.
- La variable real  $t$  se le denomina **parámetro** y la expresión que define la curva es su **forma paramétrica**.



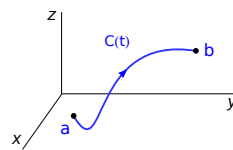
**Nota 5.1.** Existen infinitas formas paramétricas de una misma curva.

Las funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  del tipo  $y = f(x)$  se pueden poner fácilmente de forma paramétrica llamando  $x$  al parámetro, de forma:  $C(x) = [x, f(x)]$ .

### Ejemplo 5.1. Curvas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$



$$C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

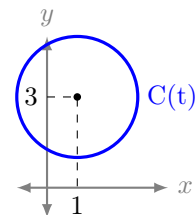


$$C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

### Ejemplo 5.2. Curva cerrada

La siguiente curva de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  define un camino cerrado que recorre la circunferencia de centro  $(1, 3)$  y radio 2.

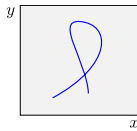
$$C(t) = [x(t), y(t)] : \begin{cases} x(t) = 1 + 2 \cos t \\ y(t) = 3 + 2 \sin t \end{cases} ; \quad t \in [0, 2\pi]$$



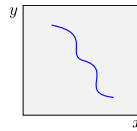
<sup>1</sup>Ver la Sección A.1, página 152.

**Definición 5.2. Curva Simple y de Jordan**

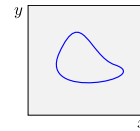
- Una curva  $C(t)$  se dice **simple** si no se corta a si misma, es decir, si admite una parametrización *inyectiva*<sup>2</sup>.
- Una curva simple cerrada se denomina **curva de Jordan**.

**Ejemplo 5.3. Curva, Curva Simple y Curva de Jordan en  $\mathbb{R}^2$ .**

Curva



Curva Simple



Curva de Jordan

**Definición 5.3. Trayectoria, Traza o Soporte**

Se denomina **trayectoria**, **traza** o **soporte** de una curva  $C(t)$  a la *imagen* de la función  $C(t)$ , es decir, al conjunto de puntos  $[x_1(t), \dots, x_n(t)]$  de la curva  $C(t)$ .

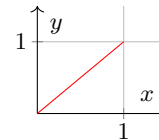
No hay que confundir la *curva* con su *trayectoria*:

- La *trayectoria* es un conjunto de puntos de  $\mathbb{R}^n$ .
- La *curva* es además de la trayectoria, la forma paramétrica de obtenerla.

**Ejemplo 5.4. Curvas y trayectorias**

- Las siguientes son dos curvas distintas en  $\mathbb{R}^2$  que tienen la misma trayectoria.

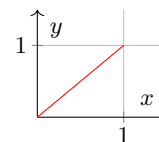
$$\begin{cases} C_1(t) = [t, t] & 0 \leq t \leq 1 \\ C_2(t) = [2t, 2t] & 0 \leq t \leq 1/2 \end{cases}$$



La curva  $C_2(t)$  recorre la trayectoria al doble de velocidad que lo hace  $C_1(t)$ .

- Las siguientes dos curvas de  $\mathbb{R}^2$  también son distintas con la misma trayectoria.

$$\begin{cases} C_1(t) = [t, t] & 0 \leq t \leq 1 \\ C_2(t) = [1-t, 1-t] & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$



En este caso, la curva  $C_2(t)$  la recorre en sentido contrario al que lo hace  $C_1(t)$ .

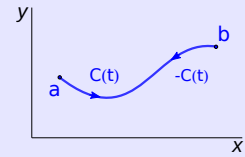
Los puntos de una trayectoria se ordenan atendiendo a los valores crecientes de  $t$ , y por tanto  $C(t)$  es siempre una **curva orientada**.

<sup>2</sup>Una función es *inyectiva* si elementos distintos del dominio  $t_1 \neq t_2$  tienen imágenes distintas  $C(t_1) \neq C(t_2)$ .

**Definición 5.4. Curva o Camino Opuesto**

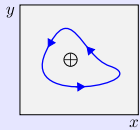
Dada una curva  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  se define la **curva opuesta** de  $C(t)$  al camino  $-C(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  dado por:

$$-C(t) = C(a + b - t) \quad a \leq t \leq b$$



Notar que  $-C(t)$  recorre la misma trayectoria que  $C(t)$  pero en sentido contrario, en particular:

$$-C(a) = C(b) \quad ; \quad -C(b) = C(a)$$

**Definición 5.5. Sentido Positivo**

Una curva simple cerrada se dice que se recorre en **sentido positivo** si lo hace en sentido *contrario a las agujas del reloj*, de modo que su interior esté localmente a la *izquierda* de la curva (para un observador que recorra la curva).

**Definición 5.6. Curva Derivable**

Se dice que una curva  $C : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tal que  $C(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$  es **derivable** en  $[a, b]$  si cada una de las funciones  $x_i(t)$  son derivables en  $[a, b]$  con respecto a  $t$ , y siendo la derivada de la curva:

$$C'(t) = [x'_1(t), \dots, x'_n(t)] \quad ; \quad x'_i(t) = \frac{dx_i}{dt}(t)$$

**Ejemplo 5.5. Derivada de una Curva**

La derivada de la curva dada en el [Ejemplo 5.2, página 123](#) viene dada por:

$$C'(t) = [x'(t), y'(t)] : \begin{cases} x'(t) = -5 \operatorname{sen} t \\ y'(t) = 5 \operatorname{cos} t \end{cases} \quad ; \quad t \in [0, 2\pi]$$

**Definición 5.7. Curva de Clase  $\mathcal{C}^n$** 

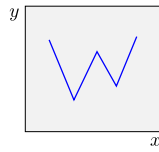
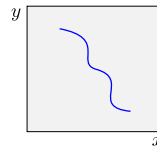
Una curva  $C : [a, b] \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es de **clase**<sup>3</sup>  $\mathcal{C}^n$  y se expresa como  $C \in \mathcal{C}^n([a, b])$  si:

$$C(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)] \quad \implies \quad \begin{cases} x_1(t) \in \mathcal{C}^n([a, b]) \\ \vdots \\ x_n(t) \in \mathcal{C}^n([a, b]) \end{cases}$$

**Definición 5.8. Curva Regular**

- Una curva  $C : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es **regular** si es una función de clase  $\mathcal{C}^1$  en el intervalo  $[a, b]$ .
- Una curva  $C : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es **regular a trozos** cuando existe una partición  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  del intervalo  $[a, b]$  tal que para cada  $k = 1, 2, \dots, n$  la curva definida en el subintervalo  $C : [t_{k-1}, t_k] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es de clase  $\mathcal{C}^1$ .

<sup>3</sup>Las funciones de *clase  $\mathcal{C}^n$*  son  $n$  veces *derivables* y con todas sus derivadas continuas en un dominio, ver la [Definición 2.20, página 48](#).

**Ejemplo 5.6.** Curva Continua y RegularCurva Continua  $C^0$ Curva Regular  $C^1$ **Definición 5.9.** Longitud de una Curva

Las curvas *regulares* son **rectificables**, es decir que se puede calcular su **longitud**, dada por:

$$L(C) = \int_a^b \|C'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{[x'_1(t)]^2 + \dots + [x'_n(t)]^2} dt$$

**Ejemplo 5.7.** Longitud de funciones en  $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Parametrizando la función:

$$y = f(x) \quad \Rightarrow \quad C(x) = [x, f(x)] = \begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}$$

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{x'(x)^2 + y'(x)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + [y'(x)]^2}$$

**Definición 5.10.** Función Longitud de Arco

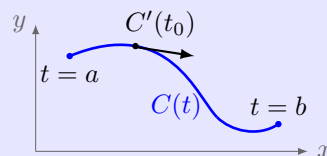
Dada una curva *regular*  $C : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , la longitud del origen a un valor  $t$  viene dada por:

$$l(t) = \int_a^t \|C'(s)\| ds$$

La función  $l : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  así definida recibe el nombre de función **longitud de arco** de la curva  $C$ .

**Definición 5.11.** Vector Velocidad y Vector Tangente

Si un camino  $C : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es derivable en un punto  $t_0 \in [a, b]$ , el vector  $C'(t_0)$  recibe el nombre de **vector velocidad** del camino en el instante  $t_0$ , y su norma  $\|C'(t_0)\|$  es la **rapidez** o **celeridad** en ese instante.



Cuando  $C'(t_0) \neq \vec{0}$  decimos también que  $C'(t_0)$  es el **vector tangente** al camino  $C$  en el instante  $t_0$  y la recta que pasa por el punto  $C(t_0)$  con vector de dirección  $C'(t_0)$  recibe el nombre de **recta tangente** al camino  $C$  en el instante  $t_0$ .

**Definición 5.12.** Curva Suave

Cuando un camino *regular*  $C : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tiene recta tangente, es decir, verifica  $C'(t) \neq \vec{0}$  para todo  $t \in [a, b]$ , se dice que  $C$  es una **curva suave**.

## 5.3. Integral de Línea

En muchos casos prácticos es necesario calcular el valor de la integral de un campo escalar o vectorial siguiendo una curva determinada<sup>4</sup>.

### 5.3.1. Integral de Línea de Funciones Escalares

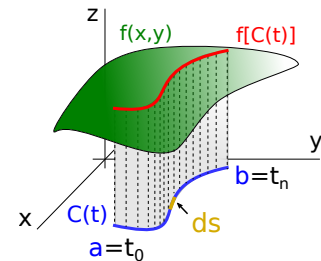
#### Definición 5.13. Integral de Línea de una Función Escalar

Sea  $C$  una curva regular parametrizada por  $C : t \in [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow C(t) \in \mathbb{R}^n$  y sea una función escalar continua  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida en el dominio de  $C$ . La **integral de línea**<sup>5</sup> con respecto a la *longitud de arco* de  $f$  sobre  $C$  se define como:

$$\int_C f = \int_C f ds = \int_a^b f[C(t)] \|C'(t)\| dt$$

donde  $ds = \|C'(t)\| dt$  se denomina *diferencial de arco*.

Podemos interpretar el significado de una integral de línea de una función escalar  $f$  sobre una curva  $C(t)$  como el **área** (en color gris en la gráfica) debajo de la curva formada por los valores de  $f[C(t)]$  (en color rojo en la gráfica) sobre cada uno de los puntos de la curva  $C(t)$  (en color azul en la gráfica).



Si  $C$  es una *curva cerrada*<sup>6</sup> la integral de línea se denota por:

$$\oint_C f ds$$

### Propiedades de la Integral de Línea de Funciones Escalares

1. La integral de línea de una función escalar no depende de la orientación de la parametrización de la curva.

$$\int_C f ds = \int_{-C} f ds$$

2.  $\int_C [\alpha f + \beta g] ds = \alpha \int_C f ds + \beta \int_C g ds \quad ; \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

3.  $\int_C f ds \leq \int_C g ds$  si  $f \leq g$  en cualquier punto  $\vec{x} \in C$

4.  $\int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds$  si  $C = C_1 \cup C_2$

<sup>4</sup>En algunos textos la *integral de línea* es denominada *integral de trayectoria* o *curvilínea*.

<sup>5</sup>También llamada *integral curvilínea* o *de trayectoria*.

<sup>6</sup>Ver la [Definición 5.1](#), página 123.

### Longitud de una Curva

En el caso particular que la función sea constante e igual a 1, es decir  $f(\vec{x}) = 1$ , la integral de línea de dicha función sobre una curva cualquiera  $C(t)$  con  $t \in [a, b]$ , dada por:

$$L(C) = \int_C 1 ds = \int_a^b \|C'(t)\| dt$$

corresponde<sup>7</sup> con la **longitud de la curva**<sup>8</sup>  $C$ .

**Ejercicio 5.1.** Sea la siguiente función escalar  $f(x, y)$  y la siguiente curva plana  $C(t)$ :

$$f(x, y) = x^2 y \quad ; \quad C : x^2 + (y + 1)^2 = 4$$

a) Determinar el valor de la integral de línea:

$$\oint_C f$$

b) Determinar la longitud de la curva  $C$ .

a) Lo primero es parametrizar la curva  $C$  que en este caso corresponde con una circunferencia de centro  $(0, -1)$  y radio 2.

$$C(t) = \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = -1 + 2 \sin t \end{cases} \quad \implies \quad C'(t) = \begin{cases} x' = -2 \sin t \\ y' = 2 \cos t \end{cases} \quad ; \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\|C'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} = 2$$

Por tanto la integral de línea de la función queda:

$$\begin{aligned} \oint_C f(x, y) ds &= \int_a^b f[x(t), y(t)] \|C'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} (2 \cos t)^2 (-1 + 2 \sin t) 2 dt = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} (-4 \cos^2 t + 8 \cos^2 t \sin t) dt = 2 \left[ -4 \left( \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin(2t) \right) - \frac{2}{3} \cos^3(t) \right]_0^{2\pi} = \\ &= 2 \left( -4\pi - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) = \boxed{-8\pi} \end{aligned}$$

b) La longitud de la curva<sup>9</sup>, vendrá dada por:

$$L(C) = \oint_C ds = \int_a^b \|C'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} 2 dt = 2t \Big|_0^{2\pi} = \boxed{4\pi}$$

que podemos comprobar que corresponde con la longitud de una circunferencia de radio 2, como es el caso de este problema, es decir  $L = 2\pi r$ .

<sup>7</sup>Desde un punto de vista intuitivo en baja dimensión, pensar que la integral de línea de la función escalar  $f(x, y) = 1$  (superficie correspondiente a un plano horizontal) sobre una curva en el plano  $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  corresponde geoméricamente con el área debajo del plano en los puntos de la curva (ver la [Sección 5.3.1, página 127](#)), y en este caso sería igual a la longitud de la curva por la altura, que es constante e igual a la unidad, y por tanto igual a la longitud de la curva.

<sup>8</sup>Ver la [Definición 5.9, página 126](#).

<sup>9</sup>En este caso es una curva cerrada, pero de forma general podría ser también abierta.

### Valor Promedio de una Función Escalar sobre una Curva

La integral de línea de una función escalar  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sobre una determinada curva parametrizada  $C(t)$  se puede utilizar para calcular el **valor promedio** de la función sobre el conjunto de puntos de la trayectoria de la curva, de la siguiente forma:

$$\text{Valor Medio de } f \text{ en } C(t) = \frac{\int_C f ds}{\int_C ds} = \frac{\int_a^b f[C(t)] \|C'(t)\| dt}{\int_a^b \|C'(t)\| dt}$$

es decir el cociente entre el valor de la *integral de línea*<sup>10</sup> de  $f$  sobre  $C$  y la *longitud*<sup>11</sup> de  $C$ .

**Ejercicio 5.2.** Sea un hilo metálico definido por el segmento de  $\mathbb{R}^3$  que une el origen de coordenadas con el punto  $(1, 1, 1)$ , el cual tiene una distribución de temperatura en cada punto dada por la función:

$$T(x, y, z) = x + 3y^2 + z$$

Determinar el valor de la temperatura promedio en el hilo.

Como hemos visto el *valor promedio* será el cociente entre la integral de línea de la función  $T$  sobre la curva  $C$  entre la longitud de la curva.

Lo primero es parametrizar la curva  $C$  que en este caso corresponde con una recta en  $\mathbb{R}^3$ :

$$C(t) = \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} ; \quad t \in [0, 1] \quad \implies \quad C'(t) = \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 1 \\ z' = 1 \end{cases}$$

$$\|C'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} = \sqrt{3}$$

Por tanto la integral de línea de la función queda:

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y, z) ds &= \int_a^b f[x(t), y(t), z(t)] \|C'(t)\| dt = \int_0^1 (t + 3t^2 + t) \sqrt{3} dt = \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 (2t + 3t^2) dt = \sqrt{3} [t^2 + t^3]_0^1 = \boxed{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

y la longitud del hilo viene dado por:

$$L(C) = \int_C ds = \int_a^b \|C'(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{3} dt = \boxed{\sqrt{3}}$$

por lo que finalmente:

$$\text{Valor Medio de } T \text{ en } C = \frac{\int_C f ds}{L(C)} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$$

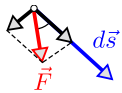
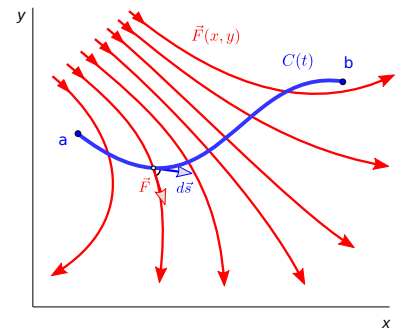
<sup>10</sup>Ver la [Definición 5.13](#), página 127.

<sup>11</sup>Ver la [Sección 5.3.1](#), página 128.

### 5.3.2. Integral de Línea de Funciones Vectoriales

Vamos analizar ahora el concepto de una *integral de línea* sobre funciones vectoriales<sup>12</sup> de la forma  $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . En este caso hay una interrelación muy importante entre la geometría de la curva sobre la que se realiza la integral y campo vectorial definido por la función.

Un ejemplo físico simple sobre este tipo de integrales es el cálculo del **trabajo** realizado por un campo de fuerzas al desplazar una partícula por un determinado recorrido. Recordemos que el trabajo es el producto de la fuerza por el desplazamiento, pero solo interviene en el trabajo la componente de la fuerza que tiene la misma dirección que el vector desplazamiento en ese punto.



Por tanto el diferencial de trabajo en un punto de la trayectoria se puede expresar como el siguiente producto escalar:

$$dW = \|\vec{F}\| \cos \theta \|\vec{ds}\| = \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

#### Definición 5.14. Integral de Línea de una Función Vectorial

Sea  $C$  una curva regular parametrizada por  $C : t \in [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow C(t) \in \mathbb{R}^n$  y sea una función vectorial continua  $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida en el dominio de  $C$ . La integral de línea de  $\vec{F}$  sobre  $C$  se define como:

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_a^b \vec{F}[C(t)] \cdot C'(t) dt$$

donde  $\vec{ds} = C'(t)dt$  se denomina *diferencial del vector desplazamiento*.

**Ejercicio 5.3.** Dada la curva de  $\mathbb{R}^3$   $C(t) = [1, t, \text{sen } t]$  con  $t \in [0, 2\pi]$  y el campo vectorial  $\vec{F}(x, y, z) = [y, z, x]$ . Calcular  $\int_C \vec{F} \cdot \vec{ds}$ .

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot \vec{ds} &= \int_a^b \vec{F}[C(t)] \cdot C'(t) dt = \int_0^{2\pi} [t, \text{sen } t, 1] \cdot [0, 1, \cos t] dt = \int_0^{2\pi} (0 + \text{sen } t + \cos t) dt = \\ &= -\cos t + \text{sen } t \Big|_0^{2\pi} = -1 + 1 = \boxed{0} \end{aligned}$$

#### Propiedades de la Integral de Línea de Funciones Vectoriales

1. La integral de línea de una función vectorial **sí** depende de la orientación con la que la parametrización recorre la curva.

$$\int_C f ds = - \int_{-C} f ds$$

2.  $\int_C [\alpha \vec{F} + \beta \vec{G}] \cdot \vec{ds} = \alpha \int_C \vec{F} \cdot \vec{ds} + \beta \int_C \vec{G} \cdot \vec{ds} \quad ; \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

3.  $\int_C \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot \vec{ds} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot \vec{ds} \quad \text{si } C = C_1 \cup C_2$

<sup>12</sup>En física las integrales de línea de campos vectoriales se suele denominar *circulación*.

### Forma Diferencial de una Integral de Línea de una Función Vectorial

#### Definición 5.15. Forma Diferencial

Los campos vectoriales<sup>13</sup>  $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  suelen representarse a través de su **forma diferencial**:

$$F(x, y, z) = [P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)] \implies \vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

y es común representar sus integrales de línea de la siguiente forma:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C Pdx + Qdy + Rdz$$

denominada **forma diferencial**.

**Nota 5.2.** La correspondencia entre ambas expresiones se explica de la siguiente forma:

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = \int_a^b \left( P[C(t)] \frac{dx}{dt} + Q[C(t)] \frac{dy}{dt} + R[C(t)] \frac{dz}{dt} \right) dt = \int_C F[C(t)] \cdot C'(t) dt = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

**Ejercicio 5.4.** Evaluar la siguiente integral de línea:

$$\int_C x^2 dx + xydy - dz \quad ; \quad C(t) = [t^3, -t, t^2] \quad , \quad t \in [0, 1]$$

En este caso se trata de una integral de la línea de la siguiente función vectorial  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ :

$$F(x, y, z) = [x^2, xy, -1]$$

que utilizando la terminología anterior correspondería con:

$$P(x, y, z) = x^2 \quad ; \quad Q(x, y, z) = xy \quad ; \quad R(x, y, z) = -1$$

Para calcularla, determinamos primero la derivada de la curva:

$$C'(t) = [3t^2, -1, 2t]$$

y usando la definición de integral de línea de una función vectorial<sup>14</sup> se tiene:

$$\begin{aligned} \int_C x^2 dx + xydy - dz &= \int_0^1 [t^6, -t^4, -1] \cdot [3t^2, -1, 2t] dt = \int_0^1 (3t^8 + t^4 - 2t) dt = \\ &= \left. \frac{1}{3}t^9 + \frac{1}{5}t^5 - t^2 \right|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - 1 = \boxed{-\frac{7}{15}} \end{aligned}$$

<sup>13</sup>De igual forma se suelen representar los campos vectoriales  $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  con una dimensión menos, es decir:

$$F(x, y) = [P(x, y), Q(x, y)] \implies \vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$$

<sup>14</sup>Ver la [Definición 5.14](#), página 130.

### 5.3.3. Campos Conservativos

#### Definición 5.16. Campo Conservativo

Se dice que una función vectorial  $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un **campo conservativo** si la integral de línea de  $\vec{F}$  sobre cualquier curva cerrada es cero, lo que es igual a que toda integral de línea es independiente del camino recorrido, dependiendo únicamente del punto inicial y final.

#### Definición 5.17. Campo Vectorial Gradiente

Se dice que una función vectorial  $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un **campo vectorial gradiente** si:

$$\vec{F} = \nabla f \implies \vec{F} = [f_{x_1}, \dots, f_{x_n}]$$

para alguna función escalar  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Si  $\vec{F} = \nabla f$ , a la función  $f$  se la denomina **función o campo potencial** de  $\vec{F}$  y se dice que  $\vec{F}$  **deriva de un potencial**.

#### Teorema 5.1. Teorema Fundamental de las Integrales de Línea

Todo campo vectorial gradiente  $\vec{F} = \nabla f$  es conservativo y cumple:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = f[C(b)] - f[C(a)] \quad \forall C(t) \quad , \quad t \in [a, b]$$

#### Demostración 5.1.

$$\begin{cases} \vec{F} = \nabla f \\ f'[C(t)] = \nabla f \cdot C'(t) \end{cases} \implies \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C \nabla f \cdot d\vec{s} = \int_C \nabla f[C(t)] \cdot C'(t) dt = \int_C f'[C(t)] dt = f[C(t)] \Big|_a^b$$

#### Teorema 5.2. Test de las Derivadas Cruzadas

- Una función vectorial  $\vec{F}(x, y) = [P(x, y), Q(x, y)]$  es conservativo sí y solo sí:

$$P_y = Q_x$$

- Una función vectorial  $\vec{F}(x, y, z) = [P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)]$  es conservativo sí y solo sí:

$$P_y = Q_x \quad ; \quad P_z = R_x \quad ; \quad Q_z = R_y$$

- Consecuencia de esto es que el campo es *irrotacional*.

$$\vec{F}(x, y, z) \text{ es un campo conservativo} \iff \text{rot } \vec{F} = \vec{0}$$

Una vez comprobado por el teorema anterior que un campo  $\vec{F} = [P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)]$  es conservativo, encontrar la función potencial  $f(x, y, z)$  de la que deriva es relativamente fácil, ya que:

$$\vec{F} = \nabla f = [f_x, f_y, f_z] = [P, Q, R] \implies \begin{cases} f_x = P & \implies & f = \int P dx \\ f_y = Q & \implies & f = \int Q dy \\ f_z = R & \implies & f = \int R dz \end{cases}$$

Integrando las tres funciones y teniendo en cuenta que las constantes de integración pueden depender de las variables sobre las que no se integra (ver la [Sección 4.2.3, página 94](#)), por comparación de ellas se puede encontrar fácilmente la función potencial  $f$ .

**Ejercicio 5.5.** Dada la siguiente función vectorial  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$F(x, y, z) = [y, z \cos(yz) + x, y \cos(yz)]$$

- Comprobar que es un campo conservativo.
- Calcular una función potencial del mismo.

a) Para comprobar que es un campo conservativo<sup>15</sup> tenemos que demostrar que es irrotacional y por tanto verifica el test de las derivadas cruzadas<sup>16</sup>. Para ello se tiene que cumplir:

$$P_y = Q_x \quad ; \quad P_z = R_x \quad ; \quad Q_z = R_y$$

Realizando las derivadas parciales de las correspondientes componentes se tiene:

$$\begin{cases} P_y = 1 \\ Q_x = 1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} P_z = 0 \\ R_x = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} Q_z = \cos(yz) - zy \operatorname{sen}(yz) \\ R_y = \cos(yz) - yz \operatorname{sen}(yz) \end{cases}$$

Por tanto verificamos que efectivamente es un campo conservativo.

b) Para encontrar una función potencial  $f(x, y, z)$  asociada a este campo conservativo  $F(x, y, z) = [P, Q, R]$  de forma que  $\nabla f = F$ , integramos cada componente del campo con respecto a su variable, de la siguiente forma:

$$\begin{cases} f_x = P \implies f = \int P dx = \int y dx = \mathbf{yx} + c(y, z) \\ f_y = Q \implies f = \int Q dy = \int [z \cos(yz) + x] dy = \frac{z}{z} \operatorname{sen}(yz) + xy + c(x, z) = \mathbf{\operatorname{sen}(yz)} + \mathbf{xy} + c(x, z) \\ f_z = R \implies f = \int R dz = \int y \cos(yz) dz = \frac{y}{y} \operatorname{sen}(yz) + c(x, y) = \mathbf{\operatorname{sen}(yz)} + c(x, y) \end{cases}$$

Como los tres resultados tienen que ser iguales, por comparación se llega a:

$$\begin{cases} c(x, y) = \mathbf{yx} \\ c(y, z) = \mathbf{\operatorname{sen}(yz)} \\ c(x, z) = \mathbf{0} \end{cases} \implies \boxed{f(x, y, z) = \mathbf{xy} + \mathbf{\operatorname{sen}(yz)} + c}$$

siendo  $c$  una constante cualquiera.

Podemos comprobar que efectivamente es la función potencial de la siguiente forma:

$$\nabla f = [f_x, f_y, f_z] = [y, x + z \cos(yz), z \cos(yz)] = F(x, y, z)$$

<sup>15</sup>Ver la [Definición 5.16, página 132](#).

<sup>16</sup>Ver el [Teorema 5.2, página 132](#).

**Ejercicio 5.6.** Evaluar la siguiente integral de línea:

$$\int_C ydx + xdy \quad ; \quad C(t) = [t^9, \operatorname{sen}^9(\pi t/2)] \quad , \quad t \in [0, 1]$$

Claramente  $(y)_y = 1 = (x)_x$ , por tanto el campo vectorial  $\vec{F} = [y, x]$  es conservativo. Vamos a determinar la función potencial  $f(x, y)$  de la que deriva  $\vec{F}(x, y)$ .

$$\vec{F} = \nabla f = [f_x, f_y] = [y, x] \quad \implies \quad \begin{cases} f_x = y & \implies f = \int ydx = yx + c(x) \\ f_y = x & \implies f = \int xdy = xy + c(y) \end{cases}$$

Como ambas expresiones tienen que ser iguales, por comparación determinamos que  $c(x) = c(y) = 0$  y por tanto  $f(x, y) = xy$ .

Como  $\vec{F}$  es un campo conservativo, su integral de línea no depende del camino recorrido, si no únicamente del punto inicial y final. Por tanto:

$$\int_C ydx + xdy = f[C(b)] - f[C(a)] = \left\{ \begin{array}{l} t=0 \quad C(0) = [0, 0] \\ t=1 \quad C(1) = [1, 1] \end{array} \right\} = f(1, 1) - f(0, 0) = \boxed{1}$$

### 5.3.4. Relación entre las Integrales de Línea Escalares y Vectoriales

Si  $C(t)$  es una *curva regular*<sup>17</sup> entonces  $C'(t)$  es el *vector tangente* a cada punto de la curva<sup>18</sup>. Normalizando el vector tangente se tiene el vector tangente unitario:

$$T(t) = \frac{C'(t)}{\|C'(t)\|}$$

Vamos a ver como podemos expresar una integral de línea de una función vectorial a través de una integral de línea de una función escalar y viceversa.

- Sea  $\vec{F}(\vec{x})$  un campo vectorial continuo definido en el dominio de la curva  $C(t)$ . Definimos entonces el campo escalar  $f$  de la forma:

$$f[C(t)] = \vec{F}[C(t)] \cdot T(t)$$

que corresponde a la proyección ortogonal de  $\vec{F}$  sobre el vector tangente unitario. Entonces, teniendo en cuenta que:

$$f[C(t)]\|C'(t)\| = \vec{F}[C(t)] \cdot T(t)\|C'(t)\| = \vec{F}[C(t)] \cdot C'(t)$$

se tiene:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}[C(t)] \cdot C'(t) dt = \int_a^b f[C(t)]\|C'(t)\| dt = \int_C f ds$$

- Sea  $f$  un campo escalar continuo definido en el dominio de una curva  $C(t)$ , y a través de él definimos el campo vectorial:

$$\vec{F}[C(t)] = f[C(t)]T(t)$$

y por lo visto anteriormente se tiene:

$$\int_C f ds = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

En la **Sección 5.7, página 144** se estudiarán tres teoremas que relacionan diferentes tipos de integrales sobre funciones de varias variables.

<sup>17</sup>Ver la **Definición 5.8, página 125**.

<sup>18</sup>Ver la **Definición 5.11, página 126**.

## 5.4. Superficies Parametrizadas

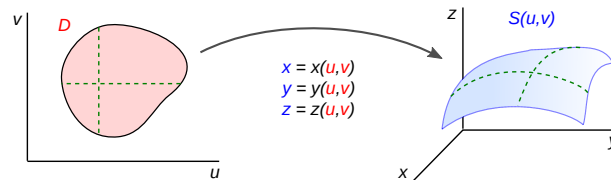
La idea intuitiva de una *curva parametrizada*<sup>19</sup> es la deformación de un intervalo donde a cada punto del mismo, recorrido por un parámetro  $t$ , le hace corresponder un punto de la curva en el espacio  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$ . De manera análoga la idea intuitiva de una *superficie parametrizada* es la deformación de una determinada región del plano  $\mathbb{R}^2$ , de forma que a cada punto del mismo (que al ser de dos dimensiones es necesario dos parámetros para poder recorrerla) le hace corresponder un punto de una superficie en  $\mathbb{R}^3$ .

### Definición 5.18. Superficie Parametrizada

Una **superficie**<sup>20</sup> parametrizada en  $\mathbb{R}^3$  es una función vectorial continua tal que:

$$S : (u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \in \mathbb{R}^3$$

- La imagen de  $S$  correspondiente a la frontera del dominio  $D$  se denomina **borde** o **contorno** de la superficie.
- Las variables independientes  $u$  y  $v$  se denominan **parámetros** y la expresión que define la superficie es su **forma paramétrica**.



Las superficies de tipo  $z = f(x, y)$  se pueden poner fácilmente de forma paramétrica haciendo que las variables  $x$  e  $y$  sean los parámetros, quedando:  $S(x, y) = [x, y, f(x, y)]$ .

### Definición 5.19. Superficie Paramétrica Regular Simple

Se dice que una *superficie paramétrica*  $S : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es **regular simple** si:

- El *dominio*  $D$  es un abierto acotado de  $\mathbb{R}^2$  cuya frontera es una *curva cerrada simple regular a trozos*<sup>21</sup>.
- La aplicación  $S(u, v) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  es *inyectiva* y de clase  $C^1$ , es decir  $S_u = \frac{\partial S}{\partial u}$  y  $S_v = \frac{\partial S}{\partial v}$  son funciones continuas en  $D$ .

**Ejercicio 5.7.** Dar una parametrización de la ecuación del plano  $x - 2y + 3z = 5$ .

Por ejemplo:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = u \\ y = v \\ z = (5 - u + 2v)/3 \end{array} \right\} \Rightarrow S(u, v) = [u, v, (5 - u + 2v)/3]$$

<sup>19</sup>Ver la Sección 5.2, página 123.

<sup>20</sup>Ver la Sección A.2, página 157.

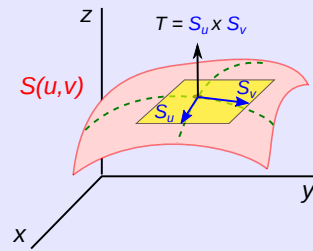
<sup>21</sup>Ver la Definición 5.8, página 125.

### 5.4.1. Ecuación del Plano Tangente a una Superficie Parametrizada

#### Definición 5.20. Superficie Suave

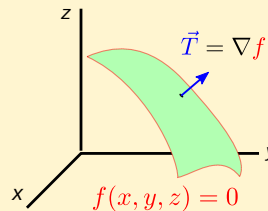
Sea  $S(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$  una superficie paramétrica simple definida en una región  $D$  del plano  $uv$ . Se dice que la superficie es **suave** en  $D$  si los vectores tangentes  $S_u = [x_u, y_u, z_u]$  y  $S_v = [x_v, y_v, z_v]$  en las direcciones  $u$  y  $v$  respectivamente cumplen<sup>22</sup>:

$$\vec{T} = S_u \times S_v = \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \neq \vec{0} \quad \forall (u, v) \in D$$



- El vector  $\vec{T}$  de la definición anterior corresponde con un<sup>23</sup> **vector tangencial (normal o perpendicular)** a una superficie suave en cada punto de la misma.
- Las superficies *suaves* no tienen esquinas, puntos afilados, etc. en los cuales no existe *vector normal*  $\vec{T}$ .
- Si la superficie *suave* viene dada en forma implícita  $f(x, y, z) = 0$  entonces un *vector normal* en cada punto viene dado por su *vector gradiente*:

$$\vec{T} = \nabla f = [f_x, f_y, f_z]$$



#### Definición 5.21. Ecuación del Plano Tangente a una Superficie Parametrizada

La **ecuación del plano tangente** de una superficie parametrizada *suave*  $S(u, v)$  en un punto  $(u_0, v_0)$  viene dado por la ecuación<sup>24</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \vec{T}(u_0, v_0) = S_u(u_0, v_0) \times S_v(u_0, v_0) = [T_x, T_y, T_z] \\ x_0 = x(u_0, v_0) \quad , \quad y_0 = y(u_0, v_0) \quad , \quad z_0 = z(u_0, v_0) \end{aligned} \right\} \implies T_x(x - x_0) + T_y(y - y_0) + T_z(z - z_0) = 0$$

**Ejercicio 5.8.** Encontrar la ecuación del plano tangente de la superficie parametrizada  $S(u, v) = [u - v, v^2 + 1, uv]$  en el punto  $(u_0, v_0) = (1, 1)$

Primeramente determinamos el vector normal a la superficie en el punto dado. Si fuera el vector nulo, la superficie no tendría plano tangente en ese punto.

$$\vec{T} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & v \\ -1 & 2v & u \end{vmatrix} = -2v^2\mathbf{i} - (v + u)\mathbf{j} + 2v\mathbf{k} \quad ; \quad \vec{T}(1, 1) = [-2, -2, 2]$$

El punto de la superficie donde se desea el plano es:  $S(u_0, v_0) = [x_0, y_0, z_0] \implies S(1, 1) = [0, 2, 1]$   
 Por tanto, la ecuación del plano tangente en el punto  $(u_0, v_0) = (1, 1)$  es:

$$-2(x - 0) - 2(y - 2) + 2(z - 1) = 0 \implies x + y - z = 1$$

<sup>22</sup>Esta condición indica que los dos vectores son linealmente independientes en todo punto de  $D$ , ya que el producto vectorial solo es nulo si ambos vectores son paralelos. El producto  $S_u \times S_v$  se denomina *producto vectorial fundamental* de la superficie.

<sup>23</sup>Existen infinitos vectores tangenciales a una superficie *suave* en un punto. Éste corresponde con uno de ellos.

<sup>24</sup>Esta ecuación corresponde con la *ecuación normal* de un plano en  $\mathbb{R}^3$ .

### 5.4.2. Área de una Superficie Parametrizada

#### Definición 5.22. Área de una Superficie Paramétrica

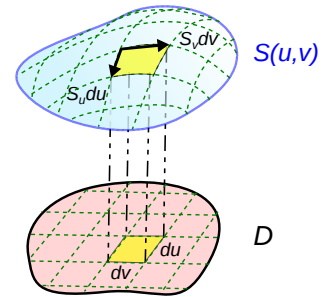
Sea  $S(u, v)$  una superficie paramétrica suave<sup>25</sup> definida en un dominio  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Si cada punto de  $S$  corresponde con un único punto  $(u, v) \in D$  del plano  $uv$ , entonces el área de  $S$  viene dada por:

$$A(S) = \iint_D dS = \iint_D \|S_u \times S_v\| dA = \iint_D \left\| \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} \right\| dudv$$

Vamos a ver de forma intuitiva el significado de la fórmula anterior. Particionando el dominio  $D$  se obtienen rectángulos de lados  $du$  y  $dv$ . A cada uno de estos rectángulos les corresponde un elemento de superficie, con lados curvos dados por los vectores  $S_u du$  y  $S_v dv$ . Recordando que el área de un paralelogramo viene dado por la norma del producto vectorial de sus lados definidos por vectores<sup>26</sup>, se tiene que el área del elemento es:

$$dS = \|S_u du \times S_v dv\| = \|S_u \times S_v\| dudv = \|S_u \times S_v\| dA$$

Integrando esta expresión sobre todo el dominio  $D$  se tiene el área de la superficie parametrizada:



Esta fórmula sirve para determinar el área de funciones en  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de la forma  $z = f(x, y)$ . Para ello, parametrizando la función:

$$z = f(x, y) \implies S(x, y) = [x, y, f(x, y)] = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x, y) \end{cases}$$

Entonces:

$$S_x \times S_y = \frac{\partial S}{\partial x} \times \frac{\partial S}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_x & y_x & z_x \\ x_y & y_y & z_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & z_x \\ 0 & 1 & z_y \end{vmatrix} = -z_x \mathbf{i} - z_y \mathbf{j} + \mathbf{k} \implies \|S_x \times S_y\| = \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}$$

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2} dA = \iint_D \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2} dx dy$$

**Ejercicio 5.9.** Encontrar el área de la superficie parametrizada  $S(u, v) = [u, v^2, v]$  en el dominio  $uv$  dado por el cuadrado  $D = [0, 0] \times [1, 1]$ .

Primeramente determinamos el vector normal a la superficie en el punto dado. Si fuera el vector nulo, la superficie no tendría plano tangente en ese punto.

$$\vec{T} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2v & 1 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2v\mathbf{k} \quad ; \quad \|\vec{T}\| = \|S_u \times S_v\| = \sqrt{1 + 4v^2}$$

El área será entonces:

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \|S_u \times S_v\| dA = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 + 4v^2} dv du = \int_0^1 \left[ \frac{v}{2} \sqrt{1 + 4v^2} + \frac{1}{4} \operatorname{arcsenh} 2v \right]_0^1 du \\ &= \int_0^1 \left( \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{arcsenh} 2 \right) du = \left( \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{arcsenh} 2 \right) [u]_0^1 = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{arcsenh} 2} \end{aligned}$$

<sup>25</sup>Excepto, quizás, en un número finito de puntos.

<sup>26</sup>Ver la Sección 1.1.1, página 5.

## 5.5. Integral de Superficie

Vamos a estudiar las integrales sobre superficies parametrizadas de funciones escalares y vectoriales de varias variables. Estas integrales son la base para enunciar los teoremas de Stokes y Gauss que estudiaremos al final del tema.

### 5.5.1. Integral de Superficie de Funciones Escalares

#### Definición 5.23. Integral de Superficie de una Función Escalar

Sea  $S$  una superficie suave parametrizada por  $S(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$  en un dominio  $D$  del plano  $uv$  y sea una función escalar  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  continua en el dominio de  $S$ . La integral de superficie de  $f(x, y, z)$  sobre  $S$  se define como:

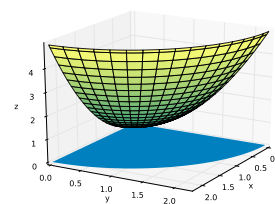
$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \|S_u \times S_v\| dudv$$

donde  $dS = \|S_u \times S_v\| dudv$  se denomina *diferencial de superficie*.

**Ejercicio 5.10.** Encontrar la masa de la superficie del paraboloides  $z = 1 + x^2 + y^2$  en el primer octante para  $1 \leq z \leq 5$  si la densidad en un punto  $P$  es directamente proporcional a su distancia al plano  $xy$ .

La densidad es  $\rho = kz$  con  $k = \text{cte}$  y la masa de la superficie viene dada por:

$$\begin{aligned} m &= \iint_S f(x, y, z) ds = \iint_D kz \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2} dx dy = \\ &= k \iint_D (1 + x^2 + y^2) \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy \end{aligned}$$



Vamos a utilizar coordenadas polares:  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \implies \begin{cases} z = 1 + x^2 + y^2 = 1 + r^2 \\ \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} = \sqrt{1 + 4r^2} \end{cases}$

En este caso el dominio de integración es:

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 1 \implies 1 = 1 + x^2 + y^2 = 1 + r^2 \implies r = 0 \\ z = 5 \implies 5 = 1 + x^2 + y^2 \implies x^2 + y^2 = 4 \implies r^2 = 4 \end{array} \right\} \implies r \in [0, 2]$$

En el caso de la variable  $\theta$ , como estamos interesados solo en el trozo de paraboloides incluido en el primer octante se tiene que  $\theta \in [0, \pi/2]$ . Por tanto, teniendo en cuenta que el jacobiano en coordenadas polares es  $r$  se tiene:

$$m = k \int_0^{\pi/2} \int_0^2 (1 + r^2) \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta = k \int_0^{\pi/2} \int_0^2 [r \sqrt{1 + 4r^2} + r^3 \sqrt{1 + 4r^2}] dr d\theta$$

Teniendo en cuenta los siguientes resultados:

$$\int x^n \sqrt{a + bx^{n+1}} dx = \frac{2}{3b(n+1)} (a + bx^{n+1})^{3/2} + c ; \int x^3 \sqrt{a + bx^2} dx = \frac{1}{5b} \left( x^2 - \frac{2a}{3b} \right) (a + bx^2)^{3/2} + c$$

se tiene:

$$k \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{1}{12} (1 + 4r^2)^{3/2} + \frac{1}{20} \left( r^2 - \frac{1}{6} \right) (1 + 4r^2)^{3/2} \right]_0^2 d\theta = \frac{k\pi}{24} (17\sqrt{17} + 559)$$

### Valor Promedio de una Función Escalar sobre una Superficie

La integral de superficie de una función escalar  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sobre una determinada superficie parametrizada  $S(u, v)$  en un dominio  $D$  se puede utilizar para calcular el **valor promedio** de la función sobre el conjunto de puntos de la superficie, de la siguiente forma:

$$\text{Valor Medio de } f \text{ en } S(u, v) = \frac{\iint_D f dS}{\iint_D dS} = \frac{\iint_D f[S(u, v)] \|S_u \times S_v\| dA}{\iint_D \|S_u \times S_v\| dA}$$

es decir el cociente entre el valor de la *integral de superficie*<sup>27</sup> de  $f$  sobre  $S(u, v)$  y el *área*<sup>28</sup> de  $S(u, v)$ .

**Ejercicio 5.11.** Sea una placa metálica definida por el plano  $x + y + z = 1$  en el primer cuadrante, la cual tiene una distribución de temperatura en cada punto dada por la función:

$$T(x, y, z) = x + 3y^2 + z$$

Determinar el valor de la temperatura promedio en la placa.

Como hemos visto el *valor promedio* será el cociente entre la integral de superficie de la función  $T$  sobre la porción del plano dada y el área de la superficie.

Lo primero es parametrizar la superficie  $S$ :

$$S(u, v) = \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 - u - v \end{cases} \implies S(u, v) = [u, v, 1 - u - v] \quad ; \quad D = \{(u, v) : u \in [0, 1], 0 \leq v \leq 1 - u\}$$

$$\begin{cases} S_u = [1, 0, -1] \\ S_v = [0, 1, -1] \end{cases} \implies S_u \times S_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = [1, 1, 1] \implies \|S_u \times S_v\| = \sqrt{3}$$

Por tanto la integral de superficie de la función queda:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y, z) dS &= \iint_D f[S(u, v)] \|S_u \times S_v\| dudv = \int_0^1 \int_0^{1-u} (u + 3v^2 + 1 - u - v) \sqrt{3} dvdu = \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-u} (3v^2 + 1 - v) dvdu = \sqrt{3} \int_0^1 \left( v^3 + v - \frac{v^2}{2} \right) \Big|_0^{1-u} du = \sqrt{3} \int_0^1 \left( -u^3 + \frac{5}{2}u^2 - 3u + \frac{3}{2} \right) du = \\ &= \sqrt{3} \left( -\frac{u^4}{4} + \frac{5}{6}u^3 - \frac{3}{2}u^2 + \frac{3}{2}u \right) \Big|_0^1 = \boxed{\frac{7}{12}\sqrt{3}} \end{aligned}$$

y el área de la placa viene dado por:

$$A(S) = \iint_D ds = \iint_D \|S_u \times S_v\| dudv = \int_0^1 \int_0^{1-u} \sqrt{3} dvdu = \sqrt{3} \int_0^1 (1 - u) du = \sqrt{3} \left( u - \frac{u^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

por lo que finalmente:

$$\text{Valor Medio de } T \text{ en } S = \frac{\iint_D f dS}{A(S)} = \frac{7 \cdot 2\sqrt{3}}{12\sqrt{3}} = \frac{7}{6}$$

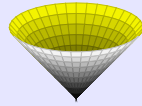
<sup>27</sup>Ver la [Definición 5.23](#), página 138.

<sup>28</sup>Ver la [Definición 5.22](#), página 137.

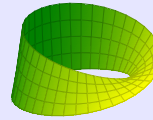
5.5.2. Integral de Superficie de Funciones Vectoriales

**Definición 5.24. Superficie Orientada**

Se denominan superficies **orientadas** u **orientables** a aquellas que tienen dos caras, una *exterior* o *positiva* y la otra *interior* o *negativa*.

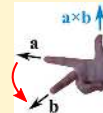
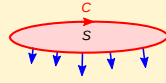
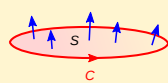


Superficie orientada (dos caras)



Cinta de Möbius (una cara)

- En función de la parametrización de una superficie, los vectores normales a la superficie tienen dos direcciones opuestas, una por cada cara.
- La orientación de la superficie  $S$  induce el sentido en que se recorre la curva  $C$  que forma la frontera de la superficie  $\delta S$ , siguiendo la *regla de la mano derecha*<sup>29</sup>.



**Definición 5.25. Vector Normal Unitario a una Superficie Orientada**

En cada punto, el **vector normal unitario** a una superficie parametrizada  $S(u, v)$  viene dado por:

$$\vec{n} = \frac{S_u \times S_v}{\|S_u \times S_v\|}$$

Si la superficie viene dada en forma  $f(x, y, z) = 0$  entonces el vector normal unitario viene dado por:

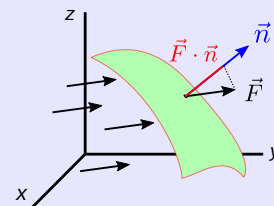
$$\vec{n} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$$

**Definición 5.26. Integral de Superficie de una Función Vectorial (Flujo)**

Sea  $S$  una superficie suave parametrizada por  $S(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$  en un dominio  $D$  del plano  $uv$ , con vector *normal unitario* en cada punto dado por  $\vec{n}$ .

Dada un función vectorial continua  $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  y sea la función escalar  $f = \vec{F} \cdot \vec{n}$  correspondiente a la proyección ortogonal de  $\vec{F}$  sobre la dirección del vector normal unitario a la superficie  $\vec{n}$ . Entonces la **integral de superficie** de  $\vec{F}$  sobre  $S$  se denomina **integral de flujo** y viene dada por:

$$\int_S \vec{F} = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \iint_D \vec{F}[S(u, v)] \cdot (S_u \times S_v) dudv$$



<sup>29</sup>Ver la Sección 1.1.1, página 5.

- En la definición anterior las tres primeras integrales corresponden a distintas formas de designar la integral de superficie de una función vectorial, y la última integral es la definición de la misma.
- El *vector normal unitario*<sup>30</sup> que aparece en la integral queda simplificado en la definición de la siguiente forma:

$$(\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \left( \vec{F} \cdot \frac{S_u \times S_v}{\|S_u \times S_v\|} \right) \|S_u \times S_v\| dA = [\vec{F} \cdot (S_u \times S_v)] dudv$$

- En el caso de que la función vectorial  $\vec{F}(x, y, z)$  represente la velocidad de un volumen de fluido en cada punto, la *integral de superficie* de  $\vec{F}$  sobre una determinada superficie  $S$  con vector normal unitario exterior<sup>31</sup>  $\vec{n}$ , representa el **flujo** del fluido a través de la superficie, es decir, el volumen de fluido que atraviesa  $S$  de forma normal (perpendicular) a la misma, hacia afuera y por unidad de tiempo.

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = \|\vec{F}\| \underbrace{\|\vec{n}\|}_{1} \cos \alpha = \|\vec{F}\| \cos \alpha \implies \text{Componente de } \vec{F} \text{ en la dirección de } \vec{n}$$

- En función de la parametrización de una *superficie orientable*<sup>32</sup>, la integral de flujo puede tener signos opuestos, utilizados para identificar si el flujo entra o sale de la superficie.

**Ejercicio 5.12.** Determinar la integral de flujo de la función vectorial  $\vec{F}(x, y, z) = [1 - 2z, 0, 2y]$  sobre la superficie  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y + 2z = 4, z \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ .

Esta superficie  $S$  consiste en la porción del plano  $2x + y + 2z = 4$  comprendida en el primer octante del espacio coordenado tridimensional. Nos piden calcular la integral de flujo que corresponde con la integral de superficie del campo  $\vec{F}$  dado a través de  $S$ , dada por:

$$\int_S F = \iint_D F[S(u, v)] \cdot (S_u \times S_v) dudv$$

donde  $S(u, v)$  es una parametrización de  $S$  definida en un dominio  $(u, v) \in D$ .

Primeramente parametrizamos la superficie:

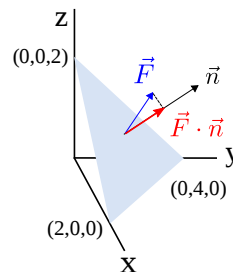
$$S(x, y) = [x, y, (4 - 2x - y)/2] \quad ; \quad S_x = [1, 0, -1] \quad , \quad S_y = [0, 1, -1/2]$$

$$S_x \times S_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \mathbf{k} = [1, 1/2, 1]$$

$$F[S(x, y)] = [1 - (4 - 2x - y), 0, 2y] = [-3 + 2x + y, 0, 2y]$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS &= \iint_D [\vec{F}[S(x, y)] \cdot (S_x \times S_y)] dx dy = \int_0^2 \int_0^{4-2x} ([-3 + 2x + y, 0, 2y] \cdot [1, 1/2, 1]) dx dy = \\ &= \int_0^2 \int_0^{4-2x} (-3 + 2x + 3y) dx dy = \int_0^2 \left[ (-3 + 2x)y + \frac{3}{2}y^2 \right]_0^{4-2x} = \int_0^2 (2x^2 - 10x + 12) dx = \\ &= \left[ \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 12x \right]_0^2 = \boxed{\frac{28}{3}} \end{aligned}$$



<sup>30</sup>Ver la [Definición 5.25](#), página 140.

<sup>31</sup>Si  $\vec{n}$  tiene la dirección hacia el interior de la superficie, el flujo representa el volumen que atraviesa la superficie hacia dentro.

<sup>32</sup>Ver la [Definición 5.24](#), página 140.

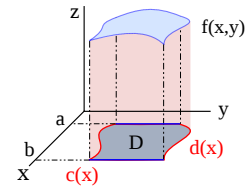
## 5.6. Resumen de Fórmulas Integrales en Funciones de Varias Variables

### 5.6.1. Funciones Escalares

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$        $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$        $\begin{cases} z = f(x, y) \\ C(t) = [x(t), y(t)] \end{cases} ; t \in [a, b]$

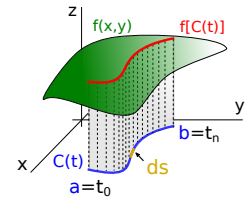
Integral Doble<sup>33</sup>

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy dx$$



Integral de Línea<sup>34</sup>

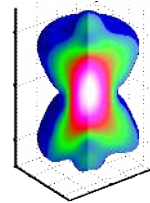
$$\int_C f ds = \int_a^b f[C(t)] \|C'(t)\| dt$$



- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$        $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$        $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$        $\begin{cases} f = f(x, y, z) \\ C(t) = [x(t), y(t), z(t)] \\ S(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \end{cases} ; \begin{matrix} t \in [a, b] \\ u, v \in D \end{matrix}$

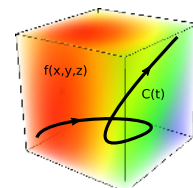
Integral Triple<sup>35</sup>

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx$$



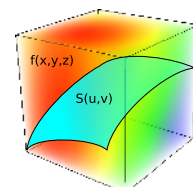
Integral de Línea<sup>34</sup>

$$\int_C f ds = \int_a^b f[C(t)] \|C'(t)\| dt$$



Integral de Superficie<sup>36</sup>

$$\int_S f dS = \iint_D f[S(u, v)] \|S_u \times S_v\| du dv$$



<sup>33</sup>Ver la Sección 4.2, página 91.

<sup>34</sup>Ver la Sección 5.3.1, página 127.

<sup>35</sup>Ver la Sección 4.3, página 107.

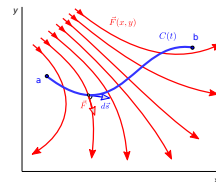
<sup>36</sup>Ver la Sección 5.5.1, página 138.

### 5.6.2. Funciones Vectoriales

- $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$      $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$      $\begin{cases} F(x, y) = [P(x, y), Q(x, y)] \\ C(t) = [x(t), y(t)] \quad ; \quad t \in [a, b] \end{cases}$

Integral de Línea<sup>37</sup>

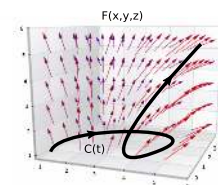
$$\int_C F \cdot d\vec{s} = \int_C P dx + Q dy = \int_a^b F[C(t)] \cdot C'(t) dt$$



- $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$      $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$      $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$      $\begin{cases} F(x, y, z) = [P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)] \\ C(t) = [x(t), y(t), z(t)] \quad ; \quad t \in [a, b] \\ S(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \quad ; \quad u, v \in D \end{cases}$

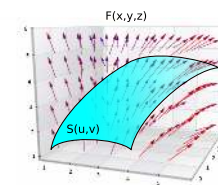
Integral de Línea<sup>37</sup>

$$\int_C F \cdot d\vec{s} = \int_C P dx + Q dy + R dz = \int_a^b F[C(t)] \cdot C'(t) dt$$



Integral de Superficie<sup>38</sup>

$$\int_S F = \int_S (F \cdot n) dS = \iint_D F[S(u, v)] \cdot (S_u \times S_v) dudv$$



### 5.6.3. Comparación de Integrales de Línea y de Superficie

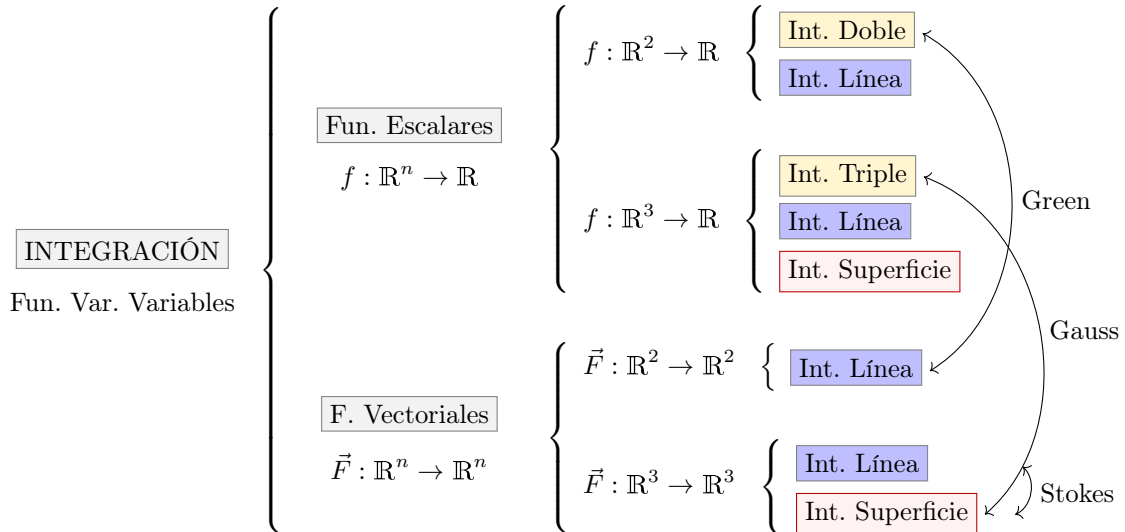
	Integral de Línea	Integral de Superficie
<b>Fun. Escalar</b>	$\int_C f ds = \int_a^b f[C(t)] \ C'(t)\  dt$	$\int_S f dS = \iint_D f[S(u, v)] \ S_u \times S_v\  dudv$
<b>Fun. Vectorial</b>	$\int_C F \cdot d\vec{s} = \int_a^b F[C(t)] \cdot C'(t) dt$	$\int_S F \cdot d\vec{S} = \iint_D F[S(u, v)] \cdot (S_u \times S_v) dudv$

<sup>37</sup>Ver la Sección 5.3.2, página 130.

<sup>38</sup>Ver la Sección 5.5.2, página 140.

### 5.7. Teoremas sobre Integrales de Funciones de Varias Variables

En esta sección vamos a repasar tres teoremas, (de Green, de Stokes y de Gauss), que relacionan algunos de los tipos de integrales sobre funciones de varias variables. En el siguiente esquema se resumen todos los tipos de integrales vistos en este tema, junto con los teoremas y su relación con las integrales.



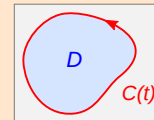
#### 5.7.1. Teorema de Green

El *teorema de Green*<sup>39</sup> da la relación entre una integral de línea alrededor de una curva cerrada simple  $C$  y una integral doble sobre la región plana  $D$  limitada por  $C$ .

#### Teorema 5.3. Teorema de Green

Sea  $\vec{F}(x, y) = [P(x, y), Q(x, y)]$  un campo vectorial con derivadas parciales continuas en  $D \subset \mathbb{R}^2$  y sea  $C$  la curva de Jordan<sup>40</sup> frontera de la región  $D$  simplemente conexa<sup>41</sup> recorrida en sentido positivo<sup>42</sup>. Entonces<sup>43</sup>:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$



Notar que si  $\vec{F}$  es un *campo conservativo*<sup>44</sup> ambas integrales son cero.

**Ejercicio 5.13.** Comprobar el teorema de Green con el campo vectorial  $\vec{F} = [-y, x]$  y la curva dada por la elipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ .

En este caso:

$$\vec{F} = Pdx + Qdy = -ydx + xdy \implies Q_x - P_y = 1 - (-1) = 2$$

Parametrizamos la curva en coordenadas polares:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \implies C(t) = \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} ; \quad t \in [0, 2\pi] ; \quad C'(t) = \begin{cases} x' = -a \sin t \\ y' = b \cos t \end{cases}$$

<sup>39</sup>En honor al científico británico George Green, (1793)-(1841).

<sup>40</sup>Ver la **Definición 5.2**, página 124.

<sup>41</sup>Ver la **Definición 1.15**, página 7.

<sup>42</sup>Ver la **Definición 5.5**, página 125.

<sup>43</sup>Esta expresión se conoce con el nombre de **fórmula de Green**.

<sup>44</sup>Ver la **Definición 5.16**, página 132.

Calculamos primero la integral de línea del campo vectorial:

$$\begin{aligned} \int_C Pdx + Qdy &= \int_0^{2\pi} [P[C(t)]x' + Q[C(t)]y'] dt = \int_0^{2\pi} [(-b \operatorname{sen} t)(-a \operatorname{sen} t) + (a \operatorname{cos} t)(b \operatorname{cos} t)] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} abdt = \boxed{2ab\pi} \end{aligned}$$

Calculamos ahora la integral doble sobre el interior de la elipse<sup>a</sup>:

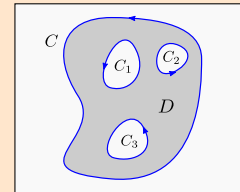
$$\iint_D (Q_x - P_y) dx dy = \iint_D 2 dx dy = 2 \iint_D dx dy = 2 \text{Área Elipse} = \boxed{2ab\pi}$$

Comprobándose la igualdad de ambos resultados.

### Teorema 5.4. Extensión Teorema de Green

En el caso de que el dominio  $D$  sea *múltiplemente conexo*, (con uno o varios agujeros), el teorema de Green se puede extender de la siguiente forma:

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} - \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} - \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} - \oint_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$



### 5.7.2. Teorema de Stokes

Recordamos que el *teorema de Green*<sup>45</sup> establece en dos dimensiones:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

donde  $C$  es una curva *orientada positivamente*<sup>46</sup>. Teniendo en cuenta la definición del *rotacional*<sup>47</sup> de una función vectorial:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \implies \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \mathbf{k} = [0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}] \cdot [0, 0, 1] = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

El teorema de Green se puede por tanto expresar como:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \mathbf{k} dA$$

Notar que  $(\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \mathbf{k}$  representa la componente tangencial al plano de la curva. Esto se puede generalizar a funciones vectoriales  $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a través del teorema de Stokes<sup>48</sup>.

<sup>a</sup>Ver resultado del Ejercicio 4.10, página 102.

<sup>45</sup>Ver el Teorema 5.3, página 144.

<sup>46</sup>Ver la Definición 5.5, página 125.

<sup>47</sup>Ver la Definición 2.24, página 49.

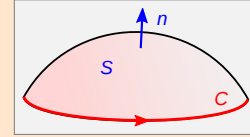
<sup>48</sup>En honor al físico y matemático irlandés George G. Stokes, (1819-1903).

**Teorema 5.5. Teorema de Stokes**

Sea  $S$  una superficie orientada suave acotada por una curva  $C$  cerrada simple suave y sea  $\vec{F}(x, y, z) = [P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)]$  de clase  $C^1$  en una región abierta de  $\mathbb{R}^3$  que contiene a  $S$ . Entonces si  $C$  está recorrida en sentido positivo se tiene:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S (\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{n} dS$$

donde  $\vec{n}$  es una normal unitaria a  $S$  en su dirección de orientación.



**Ejercicio 5.14.** Determinar la siguiente integral de línea utilizando el teorema de Stokes.

$$\oint_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz$$

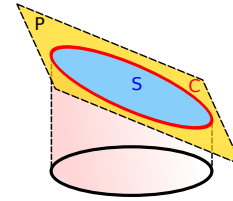
donde  $C$  es la intersección del cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  con el plano  $x + y + z = 1$  recorrida en sentido positivo.

Parametrizamos la curva  $C$ :

$$C(t) = [\cos t, \sin t, 1 - \cos t - \sin t] \quad ; \quad t \in [0, 2\pi]$$

y parametrizamos el plano:

$$P(x, y) = [x, y, 1 - x - y]$$



de forma que la superficie de interés es la parte del plano  $P$  contenida en el interior del cilindro de forma:

$$S(x, y) = [x, y, 1 - x - y] \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, x + y + z = 1\}$$

Entonces:

$$S_x \times S_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} = [1, 1, 1]$$

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^3 & x^3 & -z^3 \end{vmatrix} = (0 - 0)\mathbf{i} + (0 - 0)\mathbf{j} + (3x^2 + 3y^2)\mathbf{k} \quad ; \quad \text{rot } \vec{F}[S(x, y)] = [0, 0, 3(x^2 + y^2)]$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \oint_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz &= \iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \iint_D [\text{rot } \vec{F}[S(x, y)] \cdot (S_x \times S_y)] dx dy = \\ &= \iint_D ([0, 0, 3(x^2 + y^2)] \cdot [1, 1, 1]) dx dy = 3 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 dr d\theta = \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{4} r^4 \right]_0^1 d\theta = \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} d\theta = \boxed{\frac{3\pi}{2}} \end{aligned}$$

Como consecuencia del teorema de Stokes, cuando la superficie es **cerrada** se tiene:

$$\oiint_S (\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n}) dS = 0$$

para cualquier campo vectorial  $\vec{F}$  que sea de clase  $\mathcal{C}^1$  en un abierto que contenga a  $S$ .

**Nota 5.3.** El resultado anterior es fácil de comprender si pensamos en una superficie cerrada y la partimos en dos partes que tienen una curva frontera en común. Entonces la integral de superficie será la suma de las integrales de superficie sobre cada una de las dos partes. La integral de superficie sobre una de ellas tendrá un valor determinado, mientras que la integral de superficie sobre la otra parte tendrá el mismo valor pero de signo contrario al tener la curva frontera común, pero el vector normal a la superficie signo contrario. Por tanto la suma de ambos valores es siempre cero, independientemente de como se parta la superficie cerrada original.

### 5.7.3. Teorema de Gauss o de la Divergencia

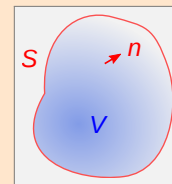
Este teorema se puede también considerar una nueva generalización del teorema de Green en  $\mathbb{R}^3$  y expresa una integral de superficie como una determinada integral triple.

#### Teorema 5.6. Teorema de Gauss o de la Divergencia

Sea  $V$  un sólido limitado por una superficie cerrada  $S$  y sea  $\vec{n}$  el campo de los vectores unitarios normales exteriores a  $S$ . Si  $\vec{F} = [P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)]$  es un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $V$ , entonces:

$$\oiint_S (\vec{F} \cdot d\vec{n}) dS = \iiint_V (\text{div } \vec{F}) dV$$

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$



**Ejercicio 5.15.** Utilizando el teorema de Gauss determinar la siguiente integral:

$$\oiint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS$$

donde  $\vec{F} = [z^2, 2y, -x]$  y  $S$  es la esfera unidad  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Como:

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial z^2}{\partial x} + \frac{\partial 2y}{\partial y} + \frac{\partial (-x)}{\partial z} = 2$$

Por tanto, teniendo en cuenta que el volumen de una esfera viene dado por  $V = 4/3\pi R^3$ , se tiene:

$$\oiint_S (\vec{F} \cdot d\vec{n}) dS = \iiint_V (\text{div } \vec{F}) dV = 2 \iiint_V dV = 2 \frac{4\pi(1)^3}{3} = \boxed{\frac{8\pi}{3}}$$

**Ejercicio 5.16.** Sea la función,

$$F(x, y, z) = [z(x - \log y), \quad ze^{\sqrt{x^2+z^2}} \tan x, \quad z]$$

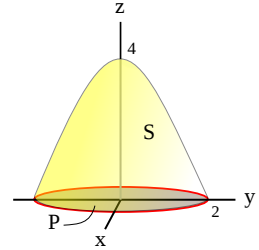
y la superficie dada por el paraboloido invertido  $S = \{(x, y, z) : z = 4 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0\}$  orientada hacia el exterior. Calcular la integral de superficie,

$$\int_S F \cdot dS$$

Calcular esta integral de superficie sobre una función  $F$  tan complicada como esta puede ser una labor bastante complicada, sino imposible.

En este caso al ser  $S$  una superficie abierta no se puede aplicar directamente el teorema de Gauss.

Construimos por tanto la superficie exterior  $A$  del dominio comprendido entre  $S$  y el plano  $P$  definido por  $z = 0$ , siendo en este caso  $A$  una superficie cerrada:



$$A = S \cup P \quad \Rightarrow \quad \oint_A F = \iint_S F + \iint_P F \quad \Rightarrow \quad \iint_S F = \oint_A F - \iint_P F$$

Para la primera integral podemos aplicar el teorema de Gauss:

$$\oint_A F = \iiint_V \operatorname{div} F \quad ; \quad \operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = z + 0 + 1 = z + 1$$

Para integrar el volumen utilizamos coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \operatorname{sen} t \\ z = 4 - r^2 \end{cases} \quad ; \quad J = r$$

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} F &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-r^2} (z+1) r dz dt dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r \left( \frac{z^2}{2} + z \right) \Big|_0^{4-r^2} dt dr = \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} r \left( \frac{(4-r^2)^2}{2} + 4 - r^2 \right) dt dr = 2\pi \int_0^2 \left( 12r + \frac{r^5}{2} - 5r^3 \right) dr = 2\pi \left( 6r^2 + \frac{r^6}{12} - \frac{5}{4}r^4 \right) \Big|_0^2 = \frac{64}{3}\pi \end{aligned}$$

Para calcular la segunda integral parametrizamos el plano  $z = 0$  como  $P(u, v) = [u, v, 0]$  con  $u^2 + v^2 \leq 4$ , y  $P_u \times P_v = [0, 0, -1]$ . Por tanto:

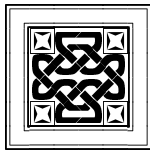
$$\iint_P F = \iint_D F[P(u, v)] \cdot (P_u \times P_v) dA = \iint_D [0, 0, 0] \cdot [0, 0, -1] dA = 0$$

Por tanto finalmente:

$$\iint_S F = \oint_A F - \iint_P F = \boxed{\frac{64}{3}\pi}$$

Notar que hemos cambiado el calcular una única integral de superficie complicada, por el cálculo de dos integrales de superficie pero mucho más sencilla que la original, ya que en una de ellas se puede aplicar el teorema de Gauss y la otra es muy sencilla al ser sobre una superficie plana.

# APÉNDICES



# Curvas y Superficies Elementales

## Contenido

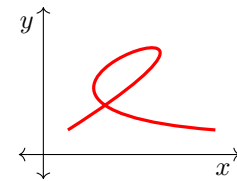
---

<b>A.1</b>	<b>Curvas en <math>\mathbb{R}^2</math></b> . . . . .	<b>152</b>
	A.1.1 Cónicas . . . . .	152
<b>A.2</b>	<b>Superficies en <math>\mathbb{R}^3</math></b> . . . . .	<b>157</b>
	A.2.1 Superficies Cuadráticas o Cuádricas . . . . .	157
<b>A.3</b>	<b>Curvas en <math>\mathbb{R}^3</math></b> . . . . .	<b>159</b>
	A.3.1 Curvas sobre Superficies . . . . .	159

---

## A.1. Curvas en $\mathbb{R}^2$

Una **curva**<sup>1</sup> es una línea continua de una dimensión que varía de dirección de forma paulatina<sup>2</sup> y constante.



Las curvas de  $\mathbb{R}^2$  son planas y pueden estar expresada de varias formas:

- **Forma explícita:** es posible despejar una variable en función de la otra, de alguna de estas dos formas:

$$y = f(x) \quad \text{ó} \quad x = f(y)$$

- **Forma implícita:** no hay forma de despejar una variable en función de la otra:

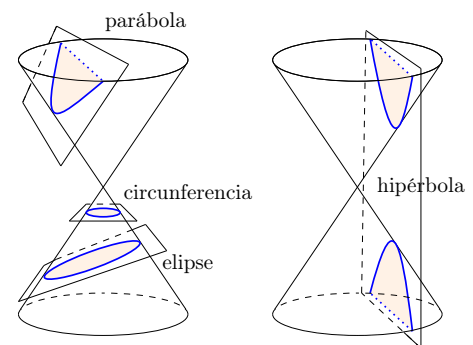
$$f(x, y) = 0$$

- **Forma paramétrica:** las dos variables (independiente y dependiente) se definen a través de un parámetro:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}$$

### A.1.1. Cónicas

Vamos a ver un tipo particular de curvas<sup>3</sup> en  $\mathbb{R}^2$  denominadas **secciones cónicas** correspondientes a curvas obtenidas por las diferentes intersecciones entre un doble cono recto<sup>4</sup> y un plano, (ver figura de la derecha), cuando éste no pasa por el vértice<sup>5</sup>. Se clasifican en cuatro tipos: elipse, parábola, hipérbola y circunferencia.



#### Ecuación General

De forma general corresponde con curvas de ecuación<sup>6</sup>:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde el tipo de curva puede ser determinado por el signo del *discriminante*:

$$B^2 - 4AC \begin{cases} < 0 & : \text{Elipse o circunferencia} \\ = 0 & : \text{Parábola} \\ > 0 & : \text{Hipérbola} \end{cases}$$

La *ecuación reducida* o *canónica* de una cónica es aquella ecuación simplificada de la curva que sitúa el centro o los vértices<sup>7</sup> de la cónica como origen de coordenadas mientras que los ejes<sup>8</sup> presentan unas relaciones particulares con la cónica. Partiendo de la ecuación general de una cónica se puede llegar a su ecuación *reducida* o *canónica*, aplicándole consecutivamente un giro y una traslación de forma adecuada.

<sup>1</sup>En la [Sección 5.2, página 123](#) se estudiarán en detalle las curvas en espacios generales  $\mathbb{R}^n$ .

<sup>2</sup>Lenta y gradual.

<sup>3</sup>Una curva es el lugar geométrico de los puntos del plano que verifican una determinada propiedad geométrica.

<sup>4</sup>Superficie que se genera al girar una recta (*generatriz*) alrededor de otra recta distinta con la que se corta (*eje* del cono). El punto de intersección de ambas rectas se denomina *vértice* del cono.

<sup>5</sup>Al hacerlo se obtienen rectas y puntos que se denominan *cónicas degeneradas*.

<sup>6</sup>Esta ecuación corresponde con la forma desarrollada de otras ecuaciones con formas más sencillas que veremos a continuación.

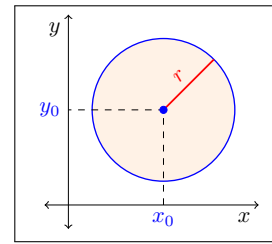
<sup>7</sup>Las cónicas con centro son la circunferencia, elipse e hipérbola.

<sup>8</sup>Si el coeficiente  $B = 0$  los ejes de las cónicas coinciden con los ejes de coordenadas.

**Circunferencia**

Corresponde con la cónica obtenida por la intersección de un plano perpendicular al doble cono<sup>9</sup> (ver figura anterior).

Una circunferencia se define como el lugar geométrico del plano correspondiente a los puntos que equidistan de uno dado denominado centro. La **ecuación canónica** de una circunferencia a través de su *centro* y *radio* en coordenadas cartesianas viene dada por:



$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_0, y_0) : \text{centro} \\ r : \text{radio} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{centro}=(0,0)} x^2 + y^2 = r^2$$

Desarrollando la *ecuación canónica* se obtiene la **ecuación general de la circunferencia** en coordenadas cartesianas:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \implies x^2 + y^2 - \underbrace{2x_0}_{-D}x - \underbrace{2y_0}_{-E}y + \underbrace{x_0^2 + y_0^2 - r^2}_F = 0$$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_0, y_0) = \left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) \\ r = \sqrt{\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F} \end{array} \right.$$

**Ejercicio A.1.** Determinar el centro y radio de la siguiente circunferencia, expresando su correspondiente ecuación canónica.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

El centro será:

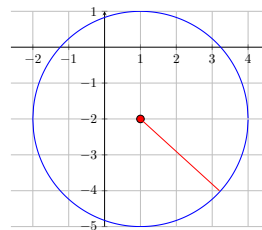
$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) = \left(-\frac{-2}{2}, -\frac{4}{2}\right) = (1, -2)$$

Siendo su radio:

$$r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - F} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 - (-4)} = \sqrt{9} = 3$$

La ecuación canónica de esta circunferencia es por tanto:

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$



La circunferencia también se puede expresar en **coordenadas paramétricas** y **polares** vienen dadas por:

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos t \\ y = y_0 + r \sin t \end{cases} ; \quad t \in [0, 2\pi)$$

Paramétricas, **centro:**  $(x_0, y_0)$ , **radio:**  $r$

$$r^2 - 2sr \cos(\theta - \alpha) + s^2 = c^2 \xrightarrow{s=0} r = c$$

Polares, **centro:**  $(s, \alpha)$ , **radio:**  $c$

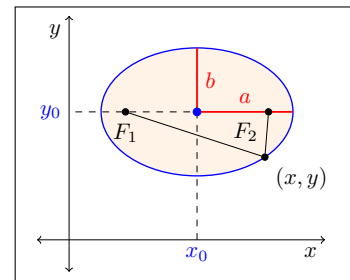
**Nota A.1.** En coordenadas polares, la variable independiente es  $\theta$  (ángulo) mientras que la variable dependiente es  $r$  (módulo), la cual en este caso no hay que confundir con el radio  $c$ .

<sup>9</sup>Por un punto distinto del vértice del doble cono, ya que de otra forma el corte produce un punto.

## Elipse

Corresponde con el corte de un plano que no es ni perpendicular ni paralelo al eje del cono y además el plano y el eje forman un ángulo mayor que el que forma el eje con sus rectas generatrices.

Una elipse se define como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de las distancias a dos puntos fijos llamados *focos*, ( $F_1$  y  $F_2$  en la gráfica), es constante. La **ecuación canónica** en coordenadas cartesianas viene dada por<sup>10</sup>:



$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_0, y_0) : \text{centro} \\ a, b : \text{semiejes} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{centro}=(0,0)} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Desarrollando la *ecuación canónica* se obtiene la **ecuación general de la elipse** en coordenadas cartesianas:

$$b^2(x-x_0)^2 + a^2(y-y_0)^2 = a^2b^2 \implies b^2x^2 + a^2y^2 - \underbrace{2x_0b^2}_{-D}x - \underbrace{2y_0a^2}_{-E}y + \underbrace{x_0^2b^2 + y_0^2a^2 - a^2b^2}_{F} = 0$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Notar que al multiplicar esta expresión por cualquier número no nulo se pueden obtener infinitas versiones de la ecuación general.

En **coordenadas paramétricas** y **polares** vienen dadas por:

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cos t \\ y = y_0 + b \sin t \end{cases} ; \quad t \in [0, 2\pi)$$

$$r(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2}}}$$

Paramétricas, **centro:**  $(x_0, y_0)$ , **semiejes:**  $a, b$

Polares, **centro:**  $(0, 0)$

**Ejercicio A.2.** Encontrar la **ecuación canónica** y **general** de la **elipse** con centro  $(2, 5)$  y semiejes horizontal 2 y vertical 5, esbozando su gráfica.

Con los datos dados la ecuación canónica es fácil de determinar:

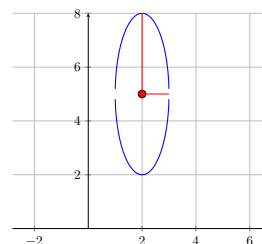
$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-5)^2}{9} = 1$$

Desarrollando y simplificando se obtiene una ecuación general:

$$\frac{x^2 + 4 - 4x}{4} + \frac{y^2 + 25 - 10y}{9} = 1 \quad ; \quad 9(x^2 + 4 - 4x) + 4(y^2 + 25 - 10y) = 36$$

$$9x^2 + 4y^2 - 36x - 40y + (\cancel{36} + 100 - \cancel{36}) = 0$$

$$9x^2 + 4y^2 - 36x - 40y + 100 = 0$$



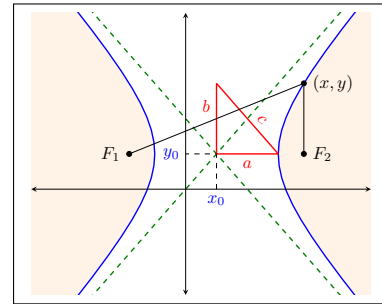
<sup>10</sup>Una elipse se puede entender como una circunferencia *achatada*, con uno de los semiejes mayor que el otro. La **excentricidad** ( $e$ ) de una elipse mide este alargamiento y se puede calcular a través de los semiejes como  $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ , siendo  $a > b$ . Notar que la excentricidad de una circunferencia es cero.

### Hipérbola

Una hipérbola es una curva plana abierta de dos ramas y corresponde con el corte de un plano oblicuo al eje del cono, y además el plano y y con ángulo menor que el de la generatriz respecto del eje de revolución.

Una hipérbola se define como el lugar geométrico de los puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es igual a la distancia entre los vértices, la cual es una constante positiva.

La ecuación general en coordenadas cartesianas viene dada por<sup>11</sup>:



$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_0, y_0) : \text{centro} \\ a, b : \text{semiejes} \end{array} \right. \quad \xrightarrow{\text{centro}=(0,0)} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

En coordenadas paramétricas<sup>12</sup> y polares<sup>13</sup> vienen dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + a \sec t \\ y = y_0 + b \tan t \end{array} \right. ; \quad t \in [0, 2\pi) \quad \quad \quad r = a \sec^2 \theta$$

Paramétricas, centro:  $(x_0, y_0)$ , semiejes:  $a, b$

Polares, centro:  $(0, 0)$

**Nota A.2.** En el caso de la hipérbola el semieje  $b$  no aparece de forma explícita en su geometría, pero está relacionado con la distancia focal, (distancia entre los focos  $F_1$  y  $F_2$ ), cuyo valor es  $2c$ , cumpliéndose:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

**Ejercicio A.3.** Identificar las siguientes cónicas y calcular sus elementos característicos.

a)  $4x^2 + 9y^2 = 36$

b)  $9x^2 + 9y^2 = 25$

a) Dividiendo ambos miembros de la igualdad por 36:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

que corresponde con una elipse centrada en el origen con semieje horizontal  $a = \sqrt{9} = 3$  y semieje vertical  $b = \sqrt{4} = 2$ .

b) Dividiendo ambos miembros de la igualdad por 9:

$$x^2 + y^2 = \frac{25}{9}$$

que corresponde con una circunferencia centrada en el origen y radio  $r = \sqrt{25/9} = 5/3$ .

<sup>11</sup>Esta ecuación corresponde al caso del eje focal paralelo al eje  $x$ . La ecuación correspondiente al caso del eje focal paralelo al eje  $y$  es:  $(x - x_0)^2/a^2 - (y - y_0)^2/b^2 = 1$ .

<sup>12</sup>Esta ecuación corresponde a una hipérbola abierta de derecha a izquierda, que también puede expresarse como:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 \pm a \cosh t \\ y = y_0 + b \sinh t \end{array} \right.$$

Las ecuaciones correspondientes a una hipérbola abierta de arriba abajo (ambas equivalentes):

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 \pm a \tan t \\ y = y_0 + b \sec t \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + a \sinh t \\ y = y_0 \pm b \cosh t \end{array} \right.$$

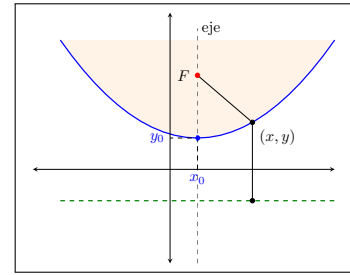
<sup>13</sup>Esta ecuación corresponde a una hipérbola abierta de derecha a izquierda, siendo la correspondiente a la hipérbola abierta de arriba abajo:  $r^2 = -a \sec 2\theta$ .

## Parábola

Una parábola es una curva plana abierta de una sola rama que corresponde con el corte de un plano paralelo a cualquiera de las rectas generatrices del cono.

Una parábola se define como el lugar geométrico de los puntos del plano que son equidistantes a un punto fijo llamado **foco** y a una línea fija llamada **directriz**.

La ecuación correspondiente al caso del eje paralelo al eje  $y$  es<sup>14</sup>:



$$4p(y - y_0) = (x - x_0)^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_0, y_0) \quad : \text{vértice} \\ (x_0, y_0 + p) \quad : \text{foco} \\ y = y_0 - p \quad : \text{directriz} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{centro}=(0,0)} \quad 4py = x^2$$

donde  $p$  es la *distancia focal*. En coordenadas paramétricas<sup>15</sup> y polares<sup>16</sup> vienen dadas por:

$$\begin{cases} x = t \\ y = y_0 + \frac{1}{4p}(t - x_0)^2 \end{cases}$$

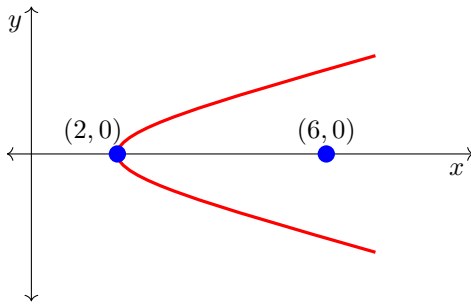
$$r = \frac{2p}{1 \pm \sin \theta}$$

Paramétricas, centro:  $(x_0, y_0)$ , foco:  $p$

Polares, centro:  $(0, 0)$

**Nota A.3.** En la ecuación en coordenadas polares el signo menos produce una parábola abierta hacia arriba y con el signo más abierta hacia abajo.

**Ejercicio A.4.** Hallar la ecuación de la parábola que tiene su vértice en  $(2, 0)$  y su foco en  $(6, 0)$ .



Como el vértice y el foco de la parábola están sobre el eje  $x$ , la orientación de la misma debe ser horizontal, por tanto su ecuación es de la forma (intercambiando variables  $x$  e  $y$ ):

$$4p(x - x_0) = (y - y_0)^2$$

Teniendo en cuenta la relación entre el foco  $p$  y el vértice  $(x_0, y_0) = (2, 0)$ , se tiene:

$$\text{foco} = (x_0 + p, y_0) = (6, 0) = (2 + 4, 0) \implies p = 4$$

Por tanto la ecuación de esta parábola es:

$$4 * 4(x - 2) = (y - 0)^2 \implies y^2 = 16x - 32$$

<sup>14</sup>La ecuación correspondiente al caso del eje paralelo al eje  $x$  es:  $(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$ .

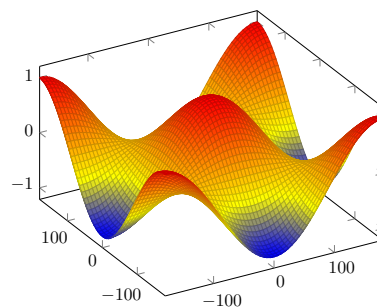
<sup>15</sup>Esta ecuación corresponde a una parábola con eje paralelo al eje  $y$ . Las ecuaciones correspondientes al eje paralelo al eje  $x$  son:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{1}{4p}(t - y_0)^2 \\ y = t \end{cases}$$

<sup>16</sup>Esta ecuación corresponde a una parábola con eje paralelo al eje  $y$ . Las ecuaciones correspondientes al eje paralelo al eje  $x$  son:  $r = 1/(1 \pm \cos \theta)$ .

## A.2. Superficies en $\mathbb{R}^3$

Una **superficie**<sup>17</sup> es un conjunto de puntos de  $\mathbb{R}^3$  que forma un espacio topológico bidimensional.



Al igual que las curvas<sup>18</sup> en  $\mathbb{R}^2$ , las superficies pueden expresarse de diferentes formas:

- **Implícita:**  $f(x, y, z) = 0$ .
- **Explícita:**  $z = f(x, y)$ ,  $x = f(y, z)$  ó  $y = f(x, z)$ .
- **Paramétrica**<sup>19</sup>: 
$$\begin{cases} x = x(t, s) \\ y = y(t, s) \\ z = z(t, s) \end{cases} ; \quad t, s \in \mathbb{R}$$

### Ejemplo A.1. Superficies en $\mathbb{R}^3$

- $y = 2$  representa un plano
- $x^2 + y^2 = 1$  representa un cilindro

Vamos a estudiar un conjunto de *superficies notables* con interés práctico.

### A.2.1. Superficies Cuadráticas o Cuádricas

Se denomina **superficie cuadrática** o **cuádrica** aquella cuya ecuación en coordenadas cartesianas es de la forma<sup>20</sup>:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

donde al menos uno de los seis primeros coeficientes  $A, B, C, D, E, F$  es diferente de cero.

Cuando en la ecuación de la cuádrica no aparecen términos *cruzados*<sup>21</sup> ( $D = E = F = 0$ ), la ecuación se puede reducir utilizando el *método de completación de cuadrados*, que puede resumirse de la siguiente forma:

$$ax^2 + bx + c = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

Así se obtienen algunas de las ecuaciones reducidas que muestra la [Tabla A.1, página 158](#).

<sup>17</sup>De forma aproximada podemos entender una superficie como un plano deformado.

<sup>18</sup>Ver la [Sección A.1, página 152](#).

<sup>19</sup>Ver la [Sección 5.4, página 135](#).

<sup>20</sup>Generalmente, se descartan todos los polinomios de segundo grado que son cuadrados, como por ejemplo

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz = (x + y + z)^2 = 0$$

que corresponde con un plano, superficie que no tiene las propiedades relacionadas con el segundo grado. Estas superficies se engloban en las denominadas *cuádricas degeneradas*.

<sup>21</sup>Estos términos representan giros de la superficie.

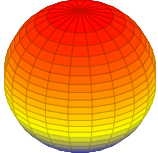
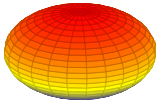
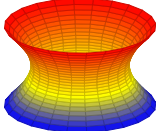
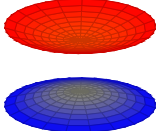
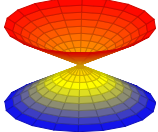
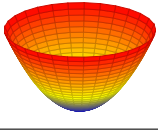
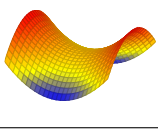
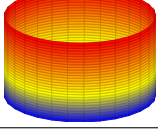
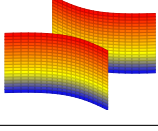
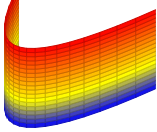
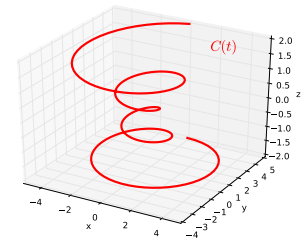
Nombre	Ec. Cartesiana	Ec. Paramétrica	Figura
Esfera	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$	$\begin{cases} x = x_0 + r \cos \phi \cos \theta \\ y = y_0 + r \cos \phi \sin \theta \\ z = z_0 + r \sin \phi \end{cases}$	
Elipsoide	$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$	$\begin{cases} x = x_0 + a \cos \phi \cos \theta \\ y = y_0 + b \cos \phi \sin \theta \\ z = z_0 + c \sin \phi \end{cases}$	
Hiperboloide Elíptico	$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$	$\begin{cases} x = x_0 + a \cosh \phi \cos \theta \\ y = y_0 + b \cosh \phi \sin \theta \\ z = z_0 + c \sinh \phi \end{cases}$	
Hiperboloide Hiperbólico	$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = -1$	$\begin{cases} x = x_0 + a \sinh \phi \cos \theta \\ y = y_0 + b \sinh \phi \sin \theta \\ z = z_0 \pm c \cosh \phi \end{cases}$	
Cono	$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = \frac{(z - z_0)^2}{c^2}$	$\begin{cases} x = x_0 + r \cos \theta \\ y = y_0 + r \sin \theta \\ z = z_0 + r \end{cases}$	
Paraboloide Elíptico	$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = z - z_0$	$\begin{cases} x = x_0 + ar \cos \theta \\ y = y_0 + br \sin \theta \\ z = z_0 + r^2 \end{cases}$	
Paraboloide Hiperbólico	$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = z - z_0$	$\begin{cases} x = x_0 + a(t + s) \\ y = y_0 + b(t - s) \\ z = z_0 + 4ts \end{cases}$	
Cilindro Elíptico	$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$	$\begin{cases} x = x_0 + a \cos \theta \\ y = y_0 + b \sin \theta \\ z = z \end{cases}$	
Cilindro Hiperbólico	$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$	$\begin{cases} x = x_0 \pm a \cosh \theta \\ y = y_0 + b \sinh \theta \\ z = z \end{cases}$	
Cilindro Parabólico	$4p(y - y_0) = (x - x_0)^2$	$\begin{cases} x = t \\ y = y_0 + \frac{1}{4p}(t - x_0)^2 \\ z = s \end{cases}$	

Tabla A.1: Superficies cuadráticas o cuádricas

## A.3. Curvas en $\mathbb{R}^3$

Una *curva en forma paramétrica*, o simplemente **curva**<sup>22</sup> en  $\mathbb{R}^3$  viene dada por:

$$C(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$



### A.3.1. Curvas sobre Superficies

En el espacio hay algunas curvas que se describen sobre una superficie, es decir, forman parte de dicha superficie. Vamos a ver las más características.

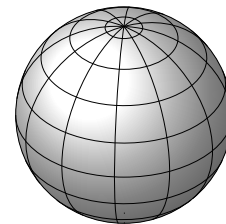
#### Curvas Coordenadas

Sea una superficie en coordenadas paramétricas de la forma<sup>23</sup>:

$$S = \begin{cases} x = x(t, s) \\ y = y(t, s) \\ z = z(t, s) \end{cases}$$

Si fijamos uno de los dos parámetros a un valor constante, por ejemplo  $s = s_0$ , se tiene una determinada curva que pertenece a dicha superficie:

$$C = \begin{cases} x = x(t, s_0) = x(t) \\ y = y(t, s_0) = y(t) \\ z = z(t, s_0) = z(t) \end{cases}$$



Estas curvas definen un mallado sobre la superficie y de ahí que reciban el nombre de **curvas coordenadas de la superficie**.

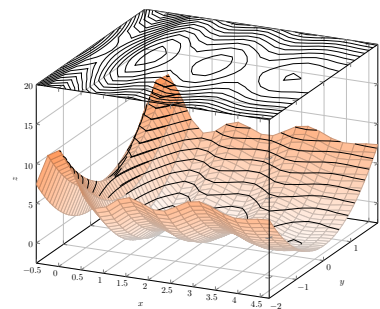
#### Curvas de Nivel

Dada una superficie  $S$  de la forma:

$$z = f(x, y)$$

se llama *curva de nivel de  $S$*  a la curva que se obtiene al cortar la superficie con un plano de tipo  $z = c$ . Las ecuaciones de la curva de nivel vienen dadas por:

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = c \end{cases} \implies f(x, y) = c$$



La expresión final es una curva plana del tipo  $y = y(x)$  aunque generalmente dada en forma implícita.

<sup>22</sup>Ver la [Sección 5.2, página 123](#).

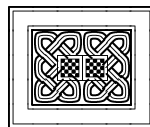
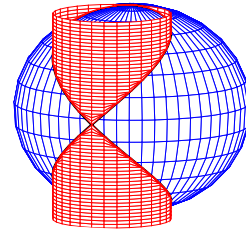
<sup>23</sup>En la [Sección 5.4, página 135](#) se estudian las *superficies parametrizadas*.

## Curvas Implícitas

Una curva de forma implícita viene dada por la intersección de dos superficies, dando lugar a un sistema de dos ecuaciones, generalmente no lineales, con tres incógnitas.

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

En la figura se muestra una curva en  $\mathbb{R}^3$  definida mediante el corte entre una determinada esfera y un cilindro dado.



# Software Matemático

## Contenido

---

<b>B.0 Software Matemático</b> . . . . .	<b>162</b>
<b>B.1 Introducción a <i>SageMath</i></b> . . . . .	<b>163</b>
B.1.1 Formas de Ejecutar el Programa . . . . .	163
B.1.2 Gráficos 2D . . . . .	164
B.1.3 Gráficos 3D . . . . .	168
<b>B.2 Aplicaciones de <i>SageMath</i> en Cálculo</b> . . . . .	<b>172</b>
B.2.1 Programación Básica en <i>SageMath</i> . . . . .	172
B.2.2 Comandos <i>SageMath</i> útiles en Cálculo . . . . .	172
B.2.3 Ejemplos . . . . .	172

---

## B.0. Software Matemático

Existe un gran número de programas matemáticos que permiten resolver o ayudar a resolver e ilustrar problemas matemáticos de muy diferentes tipos. Estos programas cubren las necesidades de multitud de campos dentro de las ciencias e ingenierías. Algunos de ellos son libres o de dominio público, mientras que otros son comerciales. A grandes rasgos los podemos clasificar en tres tipos<sup>1</sup>:

- **Numéricos**: se utilizan para obtener resultados numéricos de nuestros problemas. Las operaciones se realizan generalmente con la precisión de la máquina, de forma que los resultados obtenidos tienen una determinada aproximación<sup>2</sup>. Generalmente permiten la creación de programas, en lenguajes de programación sencillos propios del programa y suelen ser útiles para el tratamiento de grandes cantidades de datos mediante la utilización de vectores y matrices. Programas característicos de este tipo son Matlab<sup>3</sup> (comercial) y Octave<sup>4</sup> (software libre). Ambos se encuentran disponibles para distintas plataformas (Windows, Linux, Mac, etc.).
- **Simbólicos**<sup>5</sup>: Permite el tratamiento tanto de números como símbolos, expresiones y fórmulas de manera exacta, al contrario que los programas numéricos<sup>6</sup>. Las operaciones típicas que permiten este tipo de programas incluye la diferenciación, integración y el cálculo de límites de funciones de una y varias variables, resolución de ecuaciones de diferentes tipos, operaciones vectoriales y matriciales, etc. Dentro de este tipo los más conocidos son Mathematica<sup>7</sup> (comercial), Maple<sup>8</sup> (comercial) y SageMath<sup>9</sup> (dominio público).
- **Gráficos**: Permiten la visualización y el tratamiento de entes geométricos definidos mediante fórmulas matemáticas. Uno de los más conocidos de este tipo de programas es GeoGebra<sup>10</sup> (freeware<sup>11</sup>).

---

<sup>1</sup>La mayoría de los programas cubren varios de estos tipos en mayor o menor medida.

<sup>2</sup>Para un procesador de 32 bits se obtienen 19 dígitos decimales en precisión doble, mientras que para los procesadores de 64 bits se obtienen 38 dígitos.

<sup>3</sup><https://es.mathworks.com/products/matlab.html>.

<sup>4</sup><https://www.gnu.org/software/octave/>.

<sup>5</sup>En terminología inglesa se los denomina SAC cuya traducción es *Sistema de Álgebra Computacional*.

<sup>6</sup>Naturalmente esto tiene un coste que afecta a la velocidad de los cálculos, de forma que los programas simbólicos suelen ser mucho más lentos que los programas numéricos para la realización de una misma tarea.

<sup>7</sup><https://www.wolfram.com/mathematica/>.

<sup>8</sup><https://www.maplesoft.com/products/maple/>.

<sup>9</sup><http://www.sagemath.org/>.

<sup>10</sup><http://https://www.geogebra.org/>.

<sup>11</sup>El software gratuito o *freeware* son programas informáticos cuya distribución y uso es gratuito pero los usuarios no están habilitados para modificar su código, a diferencia del software libre.

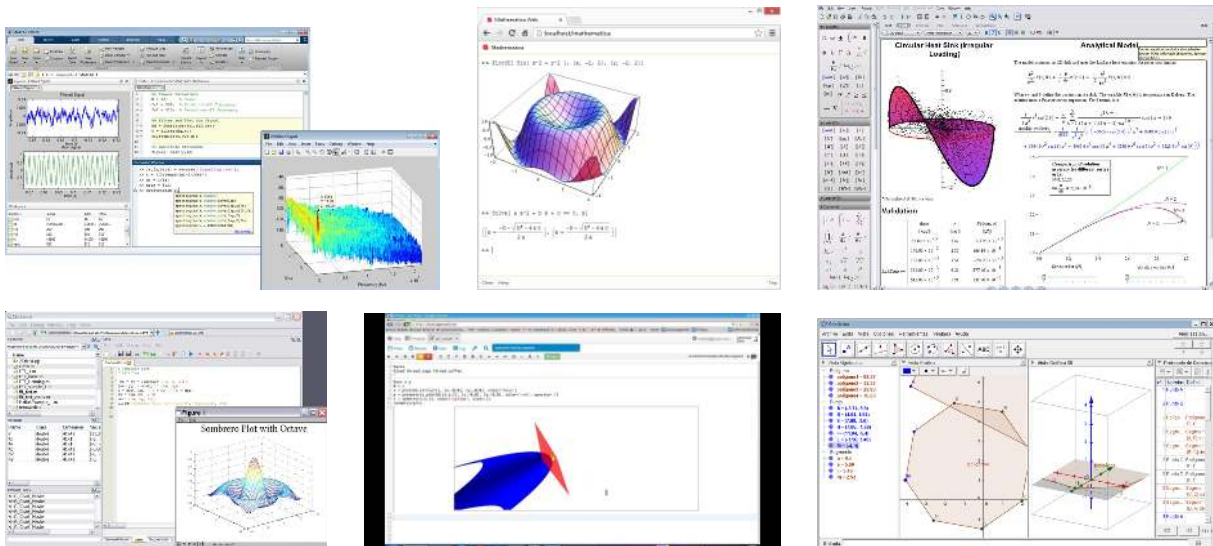


Figura B.1: Entornos de programas matemáticos. Comerciales: Matlab (superior izquierda), Mathematica (superior centro) y Maple (superior derecha). Dominio público: Octave (inferior izquierda), SageMath (inferior centro) y GeoGebra (inferior derecha).

## B.1. Introducción a SageMath

*SageMath* es un software matemático libre y de código abierto con capacidades de cálculo tanto simbólico como numérico, así como de representación gráfica, que cubre múltiples campos de las Matemáticas, con aplicaciones en ciencia e ingeniería.

En esta sección vamos a ver una ligera introducción basada en ejemplos relacionados con los temas tratados en este texto.

### B.1.1. Formas de Ejecutar el Programa

Hay varias formas de ejecutar el programa:

- A través de una terminal<sup>12</sup>: Esta es la forma más directa pero menos vistosa de ejecutar el programa. Precisa de la instalación del programa en un ordenador y funciona a través de una shell de IPython es la forma más rápida de ejecución. Por contra, la salida de resultados no es tan vistosa y no podemos grabar sesiones de forma sencilla.
- Mediante notebooks: Esta es una forma muy visual de trabajar a través de una página web donde aparecen los comandos y los resultados. Para ejecutarla es necesario lanzar primero una terminal y ejecutar el comando `notebook()`, abriéndose una página web local en nuestro navegador. No es tan rápida de ejecución como a través de una terminal pero permite guardar y recuperar las sesiones de forma sencilla.
- De forma Online<sup>13</sup>: de esta forma no es necesario instalar el programa en un ordenador, ya que funciona a través de una página web de la misma forma como un notebook. La desventaja de esto es que suele ser un proceso lento, además de que precisa la creación de una cuenta (gratuita) en *CoCalc* (Collaborative Calculation in the Cloud).

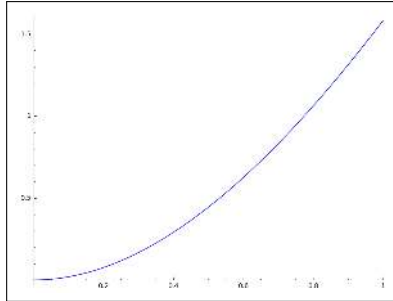
<sup>12</sup>[http://doc.sagemath.org/html/en/tutorial/interactive\\_shell.html](http://doc.sagemath.org/html/en/tutorial/interactive_shell.html)

<sup>13</sup>[https://cocalc.com/?utm\\_source=sagemath.org&utm\\_medium=landingpage](https://cocalc.com/?utm_source=sagemath.org&utm_medium=landingpage)

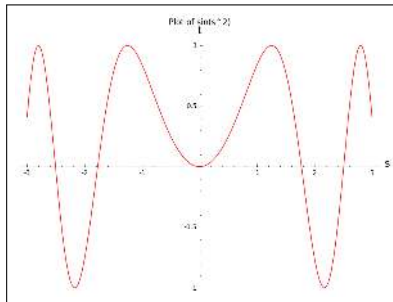
### B.1.2. Gráficos 2D

- Funciones Escalares  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

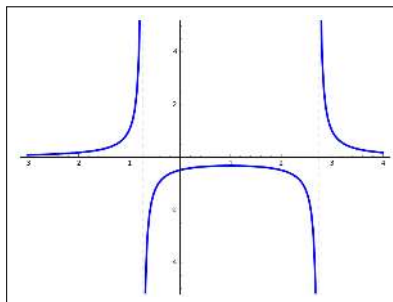
```
sage: plot(3*x^2+sin(x)*ln(1+x),0,1) # La variable simbólica 'x' está definida por defecto
```



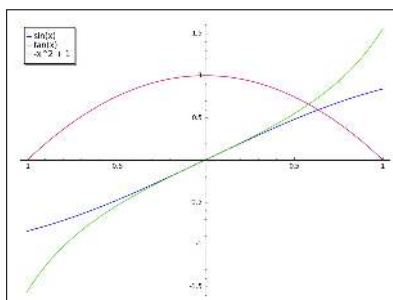
```
sage: var('s') # Variables simbólicas distintas que 'x' siempre hay que declararlas primero
sage: plot(sin(s^2), (s, -3, 3), title='Plot of sin(s^2)', axes_labels=['s','t'], color='red')
```



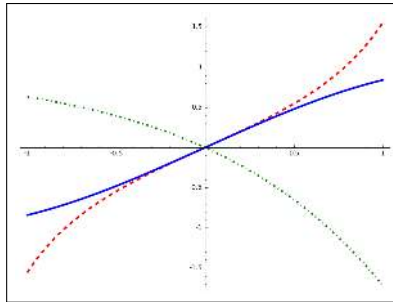
```
sage: g(x) = x^2-2*x-2 # Podemos definir primeramente la función
sage: plot(1/g(x), (x, -3, 4), detect_poles='show', ymin=-5, ymax=5, thickness=3)
sage: # detect_poles encuentra automáticamente los pts de discontinuidad
```



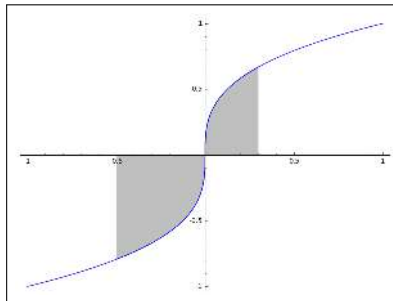
```
sage: plot([sin(x), tan(x), 1-x^2], legend_label='automatic') # Varias fun con sus leyendas
```



```
sage: plot(sin(x),-1,1,color='blue', linestyle='-') + plot(tan(x),-1,1,color='red', linestyle='--') + plot(sin(x),-1,1,color='blue', linestyle='-') + plot(1-exp(x),-1,1,color='green', linestyle='-.') # distintos estilos de línea en cada fun
```

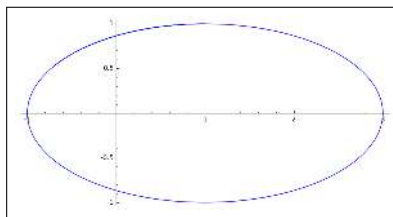


```
sage: plot(sign(x)*abs(x)^(1/3),-1,1) + plot(sign(x)*abs(x)^(1/3),-0.5,0.3,fill='axis', fillcolor='grey') # región sombreada
```



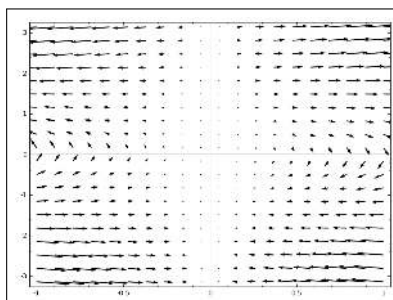
- Funciones Paramétricas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \implies$  Curvas 2D  $C(t) = [x(t), y(t)]$

```
sage: var('t')
sage: parametric_plot([1+2*sin(t),cos(t)],(t,-1,2*pi))
```

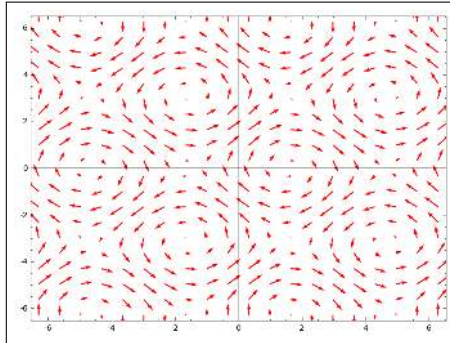


- Funciones Vectoriales  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

```
sage: var('x y')
sage: plot_vector_field((x*y,-x*cos(y)),(x,-1,1),(y,-pi,pi))
```

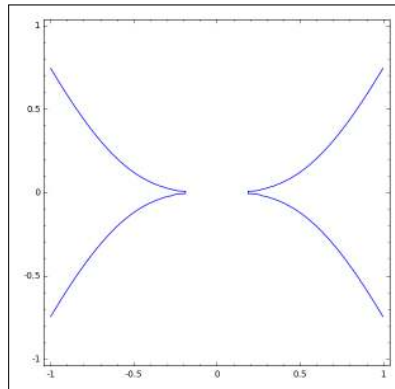


```
sage: var ('x y')
sage: F=vector([sin(y),cos(x)]) # fun vectorial, también se pueden utilizar () en lugar de []
sage: plot_vector_field(F,(x,-2*pi,2*pi),(y,-2*pi,2*pi), color='red') # forma alternativa
```

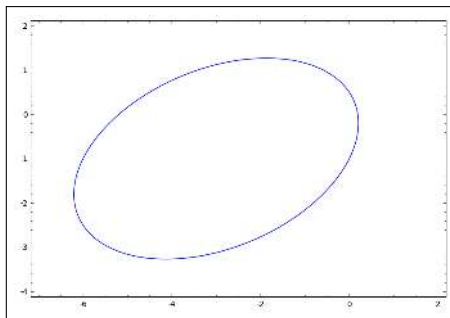


- Funciones Implícitas  $f(x, y) = 0$

```
sage: var ('x y')
sage: implicit_plot(x^2*ln(1+abs(x*y))-y^2,(x,-1,1),(y,-1,1))
```

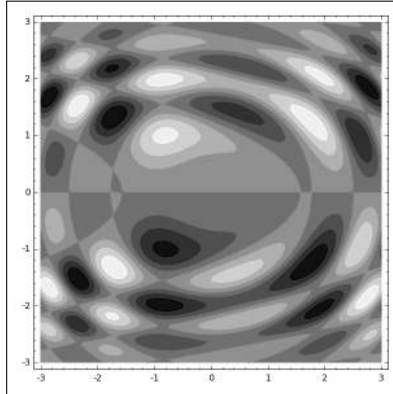


```
sage: var ('x y')
sage: implicit_plot(x^2+2*y^2==x*y-5*x-y+1,(x,-7,2),(y,-4,2)) # igualdad en ecuaciones es '=='
```

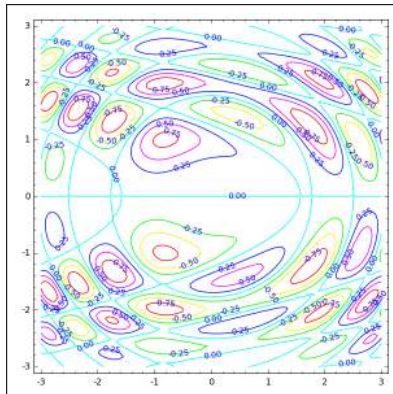


- Funciones Escalares  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

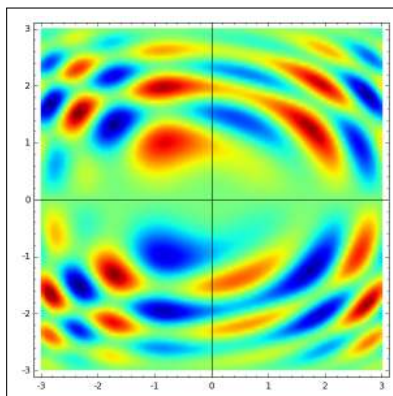
```
sage: var ('x y')
sage: contour_plot(sin(x^2 + y^2) * cos(x+y^2) * sin(y), (x,-3,3), (y,-3,3))
sage: # curvas de nivel (color sólido)
```



```
sage: var ('x y')
sage: contour_plot(sin(x^2 + y^2) * cos(x+y^2) * sin(y), (x,-3,3), (y,-3,3), fill=False, cmap='hsv', labels=True) # curvas de nivel con valores
```



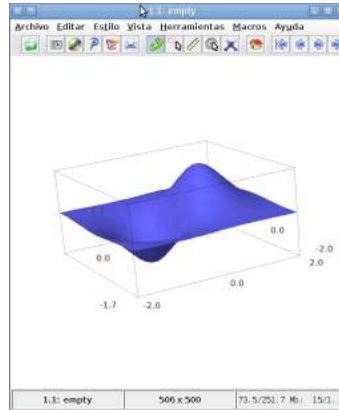
```
sage: var ('x y')
sage: density_plot(sin(x^2 + y^2) * cos(x+y^2) * sin(y), (x,-3, 3), (y,-3, 3), cmap='jet', plot_points=100).show(figsize=(6,6), frame=True) # degradación de colores
```



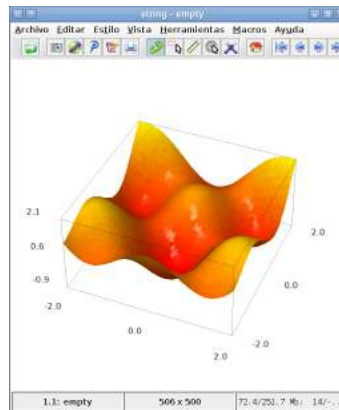
### B.1.3. Gráficos 3D

- Funciones Escalares  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

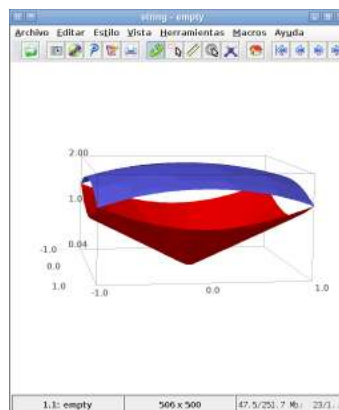
```
sage: var('x,y')
sage: plot3d(4*x*exp(-x^2-y^2), (x,-2,2), (y,-2,2)) # superficie
```



```
sage: var('r v')
sage: cm = [colormaps['autumn'](i) for i in xrange(0,1,0.05)] # escala de color
sage: plot3d(0.2*(r**2 + v**2) + cos(2*r)*sin(2*v), (r,-2,2), (v,-2,2), adaptive=True, color=cm,
plot_points=10, opacity=0.9)
```

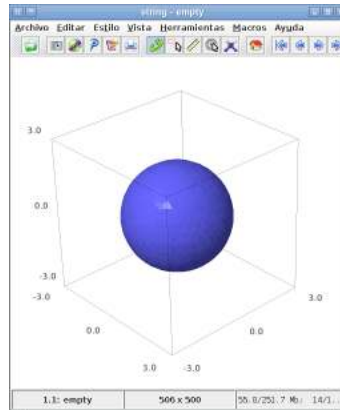


```
sage: var('x y')
sage: f1=sqrt(4-x^2-y^2) # semiesfera de radio 2
sage: f2=sqrt(x^2+y^2) # cono superior
sage: plot3d(f1, (x,-1,1), (y,-1,1)) + plot3d(f2, (x,-1,1), (y,-1,1), color='red')
```

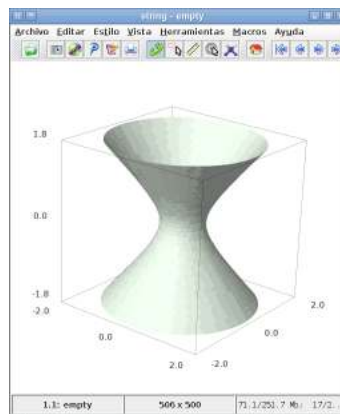


- Funciones Implícitas  $f(x, y, z) = 0$

```
sage: var('x y z')
sage: implicit_plot3d(x^2+y^2+z^2==4, (x,-3,3), (y,-3,3), (z,-3,3)) # esfera
```

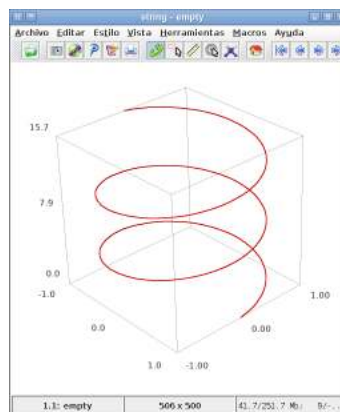


```
sage: var('x y z')
sage: implicit_plot3d(x^2+y^2-z^2-0.3, (x,-2,2), (y,-2,2), (z,-1.8,1.8), color='honeydew')
sage: # no es necesario ==0
```



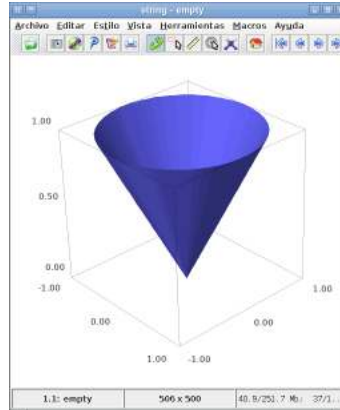
- Funciones Paramétricas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \implies$  Curvas 3D  $C(t) = [x(t), y(t), z(t)]$

```
sage: var('t')
sage: parametric_plot3d((cos(t), sin(t), t), (t,0,5*pi), thickness=3, color='red') # sirven [] y ()
sage: # Igual que en 2D pero con una coordenada más
```

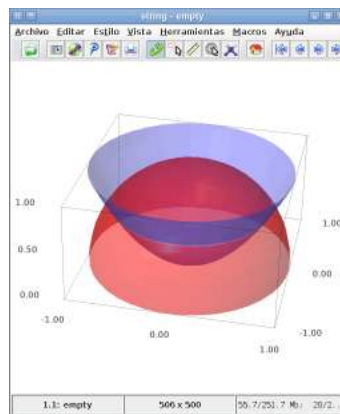


- Funciones Paramétricas  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \implies$  Superficies Paramétricas  $S(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$

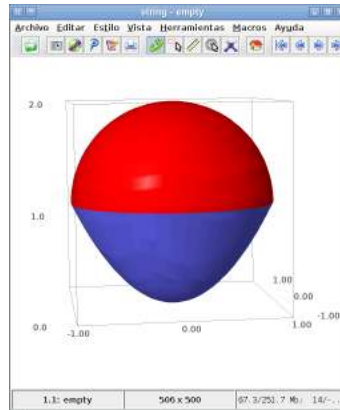
```
sage: var('r t')
sage: parametric_plot3d([r*cos(t),r*sin(t),r],(r,0,1),(t,0,2*pi)) # cono
```



```
sage: var('r t f') # radio, theta, phi
sage: e=[1*sin(p)*cos(t),1*sin(p)*sin(t),1*cos(p)] # esfera de radio=1
sage: p=[r*cos(t),r*sin(t),r^2] # paraboloido cilíndrico
sage: parametric_plot3d(p,(r,0,1),(t,0,2*pi),opacity=0.5,aspect_ratio=1)+parametric_plot3d(e,(t,0,2*pi),(f,0,pi/2),color='red',opacity=0.5,aspect_ratio=1) # transparencias
```

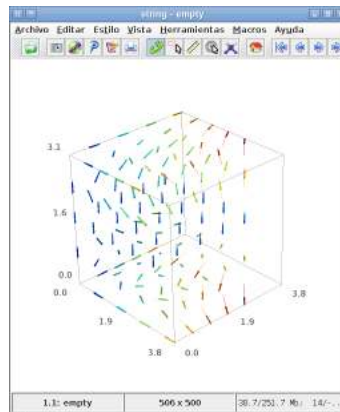


```
sage: var('x y') # variables multiuso
sage: e=[sin(x)*cos(y),sin(x)*sin(y),1+cos(x)] # esfera r=1 desplazada en eje z
sage: p=[x*cos(y),x*sin(y),x^2] # paraboloido cilindrico
sage: parametric_plot3d(p,(x,0,1),(y,0,2*pi),aspect_ratio=1)+parametric_plot3d(e,(x,0,pi/2),(y,0,2*pi),color='red',aspect_ratio=1)
```

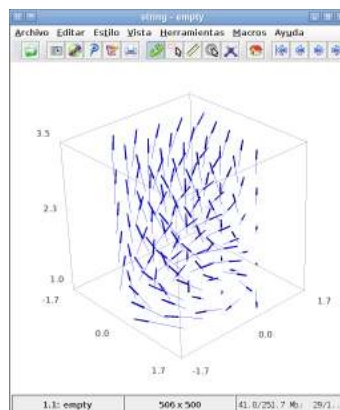


- Funciones Vectoriales  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

```
sage: var('x y z')
sage: plot_vector_field3d((x*cos(z),-y*cos(z),sin(z)),(x,0,pi),(y,0,pi),(z,0,pi))
```



```
sage: var('x y z')
sage: F=vector([y/z,-x/z,z/4]) # Campo vectorial 3D. Sirven [] y ()
sage: plot_vector_field3d(F,(x,-1,1),(y,-1,1),(z,1,3),colors="blue") # Forma alternativa
```



## B.2. Aplicaciones de SageMath en Cálculo

### B.2.1. Programación Básica en SageMath

- Los comentarios van precedidos por un símbolo #
- La *sentencia anterior* se representa mediante un símbolo subrayado \_
- El comando `assume()` fija restricciones en la variables, lo que permite la simplificación de expresiones.
- El comando `simplify_full()` simplifica expresiones.

### B.2.2. Comandos SageMath útiles en Cálculo

- `solve` : solución simbólica de ecuaciones, (sirve también para despejar variables)
- `limit` : Cálculo de límites. Tiene algunos errores.
- `diff` : Cálculo de derivadas de cualquier orden totales y parciales.
- `taylor` : Cálculo del desarrollo de Taylor de funciones de una y varias variables.
- `integral` : integrales de funciones escalares de una y varias variables. en expresiones).

### B.2.3. Ejemplos

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

```
sage: limit((x^2-1)/(x-1),x=1)
2
```

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^5 + y^2}$

```
sage: var('x y m r t') # declaración de variables
sage: f(x,y)=x^2*y/(x^5+y^2)
sage: limit(limit(f,x=0),y=0) # límites reiterados
(x, y) |--> 0
sage: limit(f(x,m*x),x=0) # límites siguiendo rectas y=mx
0
sage: limit(f(r*cos(t),r*sin(t)),r=0) # límite en polares
0
sage: # Esto último es erróneo
```

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^2 t \sin t}{r^5 \cos^5 t + r^2 \sin^2 t} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos^2 t \sin t}{r^3 \cos^5 t + \sin^2 t} = \lim_{r \rightarrow 0} r \underbrace{\frac{\cos^2 t \sin t}{r^3 \cos^5 t + \sin^2 t}}_{\text{No acotado}} = \text{depende de } t$$

- $\frac{d}{dx} \left( \frac{x^2 e^{x^2-1} + \ln(x)}{\sqrt{x-1}} \right)$

```
sage: f=(x^2*exp(x^2-1)+ln(x))/(sqrt(x-1))
sage: diff(f,x)
(2*x^3*e^(x^2 - 1) + 2*x*e^(x^2 - 1) + 1/x)/sqrt(x - 1) - 1/2*(x^2*e^(x^2 - 1) + log(x))/(x - 1)^(3/2)
sage: view(_) # muestra formateada la sentencia anterior
```

$$\frac{2x^3 e^{(x^2-1)} + 2xe^{(x^2-1)} + \frac{1}{x}}{\sqrt{x-1}} - \frac{x^2 e^{(x^2-1)} + \log(x)}{2(x-1)^{\frac{3}{2}}}$$

- Encontrar los puntos donde se anula la tercera derivada de la función  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1}$ .

```
sage: f=(x^2+2*x-1)/(x^2+1)
sage: df=diff(f,x,3) # derivada tercera con respecto a x de la función
sage: df # muestra el valor de la derivada
48*(x + 1)*x^2/(x^2 + 1)^3 - 48*(x^2 + 2*x - 1)*x^3/(x^2 + 1)^4 - 12*(x + 1)/(x^2 + 1)^2 + 24*(x^2 + 2*x - 1)*x/(x^2 + 1)^3 - 12*x/(x^2 + 1)^2
sage: solve(df,x) # encuentra los ceros de la derivada
x == -sqrt(2) - 1/2*sqrt(-8*sqrt(2) + 16) + 1, x == -sqrt(2) + 1/2*sqrt(-8*sqrt(2) + 16) + 1, x == sqrt(2) - 1/2*sqrt(8*sqrt(2) + 16) + 1, x == sqrt(2) + 1/2*sqrt(8*sqrt(2) + 16) + 1]
sage: view(_) # muestra formateada la sentencia anterior
```

$$\left[ x = -\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-8\sqrt{2}+16} + 1, x = -\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-8\sqrt{2}+16} + 1, x = \sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{8\sqrt{2}+16} + 1, x = \sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{8\sqrt{2}+16} + 1 \right]$$

- $\nabla \left( \frac{x^2 e^{xy} - 2y^3}{\sqrt{x-y}} \right)$

```
sage: var('y')
sage: f=(x^2*exp(x*y)-2*y^3)/(sqrt(x-y))
sage: gf=vector([diff(f,x),diff(f,y)])
sage view(gf) # muestra formateada la función
```

$$\left( \frac{x^2 y e^{(xy)} + 2 x e^{(xy)}}{\sqrt{x-y}} + \frac{2 y^3 - x^2 e^{(xy)}}{2 (x-y)^{\frac{3}{2}}}, \frac{x^3 e^{(xy)} - 6 y^2}{\sqrt{x-y}} - \frac{2 y^3 - x^2 e^{(xy)}}{2 (x-y)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

- $\frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^3 \partial z} \left( \frac{xyz^2 - \sin(x-1)}{\sqrt{xy-z}} \right)$

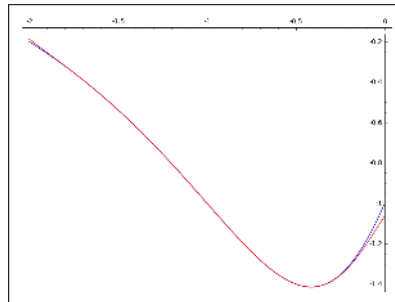
```
sage: var('y z')
sage: f=(sin(z-1))/(sqrt(y-x*z))
sage: diff(diff(diff(f,z),y,3),x,2)
-945/32*z^2*cos(z - 1)/(-x*z + y)^(11/2) - 10395/64*x*z^2*sin(z - 1)/(-x*z + y)^(13/2) - 945/16*z*sin(z - 1)/(-x*z + y)^(11/2)
sage view(_) # muestra formateada la sentencia anterior
```

$$-\frac{945 z^2 \cos(z-1)}{32(-xz+y)^{\frac{11}{2}}} - \frac{10395 x z^2 \sin(z-1)}{64(-xz+y)^{\frac{13}{2}}} - \frac{945 z \sin(z-1)}{16(-xz+y)^{\frac{11}{2}}}$$

- Encontrar el polinomio de Taylor de orden 10 en el punto  $x = -1$  de la función  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1}$  y representar gráficamente ambos resultados.

```
sage: f=(x^2+2*x-1)/(x^2+1)
sage: t=taylor(f,x,-1,10) # taylor(fun, var, pto, orden)
sage: t # muestra el valor del polinomio
-1/16*(x + 1)^9 - 1/8*(x + 1)^8 - 1/8*(x + 1)^7 + 1/4*(x + 1)^5 + 1/2*(x + 1)^4 + 1/2*(x + 1)^3
- x - 2
sage: view(_) # muestra formateada la sentencia anterior
sage: plot(f,-2,0)+plot(t,-2,0,color='red') # representación gráfica
```

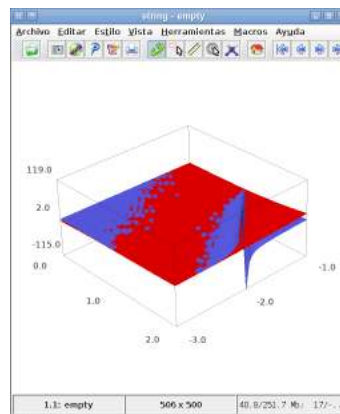
$$-\frac{1}{16}(x+1)^9 - \frac{1}{8}(x+1)^8 - \frac{1}{8}(x+1)^7 + \frac{1}{4}(x+1)^5 + \frac{1}{2}(x+1)^4 + \frac{1}{2}(x+1)^3 - x - 2$$



- Encontrar el desarrollo de Taylor de orden 3 en el punto  $(1, -2)$  de la función  $f(x, y) = \frac{xy + 1}{x + y}$  y representar gráficamente ambos resultados.

```
sage: var('x y')
sage: f=(x*y+1)/(x+y)
sage: taylor(f,(x,1),(y,-2),3) # taylor(fun, (var1,val1), (var2,val2), orden)
3*(x - 1)^3 + 5*(x - 1)^2*(y + 2) + 2*(x - 1)*(y + 2)^2 + 3*(x - 1)^2 + 2*(x - 1)*(y + 2) + 3*x
- 2
sage: t=_ # asignamos el resultado anterior a la variable t
sage: view(t) # muestra formateada la sentencia anterior
sage: plot3d(f,(x,0,2),(y,-3,-1))+plot3d(t,(x,0,2),(y,-3,-1),color='red') # rep. gráfica
```

$$3(x-1)^3 + 5(x-1)^2(y+2) + 2(x-1)(y+2)^2 + 3(x-1)^2 + 2(x-1)(y+2) + 3x - 2$$



- $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1} dx$

```
sage: integral((x^2+2*x-1)/(x^2+1),x) # integral(fun,var)
x - 2*arctan(x) + log(x^2 + 1)
```

- $\int_{-2}^3 \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1} dx$

```
sage: integral((x^2+2*x-1)/(x^2+1),x,-2,3) # integral(fun,var,a,b)
-2*arctan(3) - 2*arctan(2) + log(10) - log(5) + 5
sage: _.n() # valor numérico de la expresión anterior
0.980758200175256
```

- $\int_1^3 \int_{-x}^x (x^2 - y^2) dy dx$

```
sage: var('x y')
sage: integral(integral((x^2-y^2),y,-x,x),x,1,3) # integral doble
80/3
```

- $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (1 + x + y + z) dz dy dx$

```
sage: var('x y z')
sage: integral(integral(integral(1+x+y+z,z,0,1-x-y),y,0,1-x),x,0,1) # integral triple
7/24
```

- $\oint_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$  ;  $C : x^2 + y^2 = ax$

```
sage: var('x y a t') # variables simbólicas
sage: assume(a>0) # para poder simplificar expresiones
sage: assume(t,'real')
sage: # Forma canónica circunferencia: (x-a/2)^2 + y^2=a^2/4
sage: x=a/2+a/2*cos(t) # cambio de variable a polares
sage: y=a/2*sin(t)
sage: C=vector([x,y]) # curva en paramétricas
sage: C # mostramos C(t)
(1/2*a*cos(t) + 1/2*a, 1/2*a*sin(t))
sage: dC=diff(C,t) # C'(t)
sage: dC # mostramos C'(t)
-1/2*a*sin(t), 1/2*a*cos(t)
sage: ndC=dC.norm().simplify_full() # Calculamos ||C'(t)|| y simplificamos
sage: ndC # mostramos ||C'(t)||
1/2*a
sage: f=sqrt(x^2+y^2) # Función a integrar. Como x(t), y(t) => f(t)
sage: f # mostramos f
sqrt(1/4*a^2*sin(t)^2 + 1/4*(a*cos(t) + a)^2)
sage: f=f.simplify_full() # simplificamos expresión
sage: f
sqrt(1/2*a^2*cos(t) + 1/2*a^2)
sage: integral(f*ndC,t,0,2*pi) # calculamos integral de línea a través de su def.
0 # tarda algunos minutos
```

- Calcular la siguiente integral de línea:

$$\int_C (x+2)dx + 3zdy + y^2dz$$

donde  $C$  es una parametrización de la curva intersección entre las superficies:  $\{x^2+y^2+z^2=1, z=x-1\}$ .

```
sage: var('x y z t') # variables simbólicas
sage: assume(t,'real')
sage: (x^2+y^2+z^2==1).subs(z=x-1).simplify_full() # Encontramos ec. curva
2*x^2 + y^2 - 2*x + 1 == 1
sage: # Forma canónica elipse: 4(x-1/2)^2+2y^2=1
sage: x=1/2+1/2*cos(t) # cambio de variable a polares
sage: y=1/sqrt(2)*sin(t)
sage: z=x-1
sage: C=vector([x,y,z]) # curva en paramétricas
sage: C # mostramos C(t)
(1/2*cos(t) + 1/2, 1/2*sqrt(2)*sin(t), 1/2*cos(t) - 1/2)
sage: dC=diff(C,t) # C'(t)
sage: dC # mostramos C'(t)
(-1/2*sin(t), 1/2*sqrt(2)*cos(t), -1/2*sin(t))
sage: f=vector([x+2,3*z,y^2]) # Función a integrar f(t)=[x(t),y(t),z(t)]
sage: f # mostramos f
(1/2*cos(t) + 5/2, 3/2*cos(t) - 3/2, 1/2*sin(t)^2)
sage: integral(f.dot_product(dC),t,0,2*pi) # calculamos integral de línea a través de su def.
3/4*sqrt(2)*pi
```

- Calcular la siguiente integral de superficie:

$$\iint_S x^2z dS$$

donde  $S$  es la superficie externa del cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$  comprendida entre los planos  $z = 2$  y  $z = -2$ .

```
sage: var('x y z a u v') # variables simbólicas
sage: assume(a>0) # para poder simplificar expresiones
sage: assume(u,v,'real')
sage: x=a*cos(u) # utilizamos coordenadas cilíndricas
sage: y=a*sin(u)
sage: z=v
sage: S=vector([x,y,z]) # superficie parametrizada
sage: S # mostramos S(u,v)
(a*cos(u), a*sin(u), v)
sage: Su=diff(S,u) # S_u
sage: Sv=diff(S,v) # S_v
sage: n=Su.cross_product(Sv) # n= S_u x S_v
sage: n # mostramos
(a*cos(u), a*sin(u), 0)
sage: nn=n.norm().simplify_full() # nn= ||n||
sage: nn # mostramos
a
sage: f=x^2*z # Función a integrar f(u,v)
sage: f # mostramos f
a^2*v*cos(u)^2
sage: integral(integral(f*nn,u,0,2*pi),v,-2,2) # integral de superficie a través de su def.
0
```

- Calcular el flujo del campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} - (2x + y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  a través de la superficie  $S$  formada por el hemisferio  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$  en dirección al exterior de la esfera.

```
sage: var('x y z u v')      # variables simbólicas
sage: assume(u,v,'real')
sage: x=sin(u)*cos(v) # utilizamos coordenadas esféricas
sage: y=sin(u)*sin(v)
sage: z=cos(u)
sage: S=vector([x,y,z]) # superficie parametrizada
sage: S # mostramos
(cos(v)*sin(u), sin(u)*sin(v), cos(u))
sage: n=diff(S,u).cross_product(diff(S,v)).simplify_full() # vector normal a la superficie
sage: n # mostramos
(cos(v)*sin(u)^2, sin(u)^2*sin(v), cos(u)*sin(u))
sage: F=vector([x,-2*x-y,z]) # Función a integrar F(u,v)=[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]
sage: F # mostramos
(cos(v)*sin(u), -2*cos(v)*sin(u) - sin(u)*sin(v), cos(u))
sage: # Calculamos la integral de superficie de un campo vectorial a través de su definición
sage: integral(integral(F.dot_product(n).simplify_full(),u,0,pi/2),v,0,2*pi)
2/3*pi
```

- Aplicar el teorema de Green para calcular:

$$\int_C (y^2 + x^3)dx + x^4 dy$$

donde  $C$  es el perímetro del cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$  recorrido en sentido positivo.

```
sage: # Teo Green: int_C Pdx+Qdy = int_D (Q_x - P_y)
sage: var('x y z')      # variables simbólicas
sage: F=vector([y^2+x^3,x^4]) # función vectorial
sage: # Calculamos la integral doble del teorema
sage: integral(integral(diff(F[1],x)-diff(F[0],y),y,0,1),x,0,1)
0
```

- Aplicar el teorema de Stokes para resolver la siguiente integral:

$$\int_C (y-1)dx + z^2dy + ydz \quad ; \quad C : \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2/2 \\ z = y + 1 \end{cases}$$

```
sage: # Teo Stokes: int_C F = int_S rot(F)
sage: var('x y z u v') # variables simbólicas
sage: # Definimos un comando para calcular el rotacional de un campo
sage: def rot(F):
....:     assert(len(F) == 3)
....:     return vector([diff(F[2],y)-diff(F[1],z), diff(F[0],z)-diff(F[2],x), diff(F[1],x)-
diff(F[0],y)])
....:
sage: F=vector([y-1,z^2,y]) # función vectorial
sage: rF=rot(F) # rotacional de la función
sage: rF
(-2*z + 1, 0, -1)
sage: S=vector([u,v,v+1]) # Plano parametrizado
sage: n=diff(S,u).cross_product(diff(S,v))
sage: n # mostramos vector normal
(0, -1, 1)
sage: # Si C está recorrido en sentido positivo, n es correcto al apuntar hacia arriba
sage: rF=rF.subs(x=u,y=v,z=v+1) # Sustituimos superficie (plano) en rot(F)
sage: rF
(-2*v - 1, 0, -1)
sage: # Encontramos dominio de integración dado por el corte de las superficies
sage (x^2+y^2==z^2/2).subs(z=y+1).simplify_full()
x^2 + y^2 == 1/2*y^2 + y + 1/2
sage: # La superficie S es el plano z=y+1 en la región x^2+(y-1)^2/2 <= 1
sage: # teniendo en cuenta nuestra parametrización: u=x, v=y
sage: # Calculamos la integral de superficie del teorema
sage: integral(integral(rF.dot_product(n),v,1-sqrt(2*(1-u^2)),1+sqrt(2*(1-u^2))),u,-1,1)
-sqrt(2)*pi
```

- Aplicar el teorema de Gauss para determinar el flujo del campo  $F(x, y, z) = [x, y, 2z]$  a través de la superficie cerrada  $S$  que limita el sólido  $V = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 4 - 2x^2 - 2y^2\}$ .

```
sage: # Teo Gauss: int_S F = int_V div(F)
sage: var('x y z') # variables simbólicas
sage: # Definimos un comando para calcular la divergencia de un campo
sage: def div(F):
....:     assert(len(F) == 3)
....:     return diff(F[0],x) + diff(F[1],y) + diff(F[2],z)
....:
sage: F=vector([x,y,2*z]) # función vectorial
sage: dF=div(F) # rotacional de la función
sage: dF
4
sage: # La superficie S es un paraboloido circular invertido.
sage: # La base en z=0 es una circunferencia de centro origen y radio sqrt(2)
sage: # Calculamos la integral de volumen del teorema
sage: integral(integral(integral(dF,z,0,4-2*x^2-2*y^2),y,-sqrt(2-x^2),sqrt(2-x^2)),x,-sqrt(2),
sqrt(2))
16*pi
```

# Bibliografía

- M. Corral, **Vector Calculus**, <http://www.mecmath.net>. 2011.
- P. J. HERNANDO, **Clases de Álgebra Lineal para Ingeniería**, Versión 6.6, (Septiembre 2025).
- P. J. HERNANDO, **Clases de Cálculo I para Ingeniería**, Versión 3.8, (Septiembre 2025).
- P. J. HERNANDO, **Clases de Cálculo III para Ingeniería**, Versión 2.2, (Septiembre 2025).
- P. J. HERNANDO, **Clases de Ampliación de Matemáticas para Ingeniería**, Versión 6.0, (Septiembre 2025).
- Jerrold E. Marsden, Anthony J. Tromba, **Cálculo Vectorial**, Quinta Edición, (Pearson, 2004).
- Saturnino L. Salas, Elnar Hille, **Calculus. Una y Varias Variables - Volumen 2**, Cuarte Edición, (Reverte, 2002).
- James Stewart, **Cálculo de Varias Variables**, Sexta Edición, (Thomson, 2008).
- George B. Thomas, **Cálculo Varias Variables**, Undécima Edición, (Pearson, 2006).
- George B. Thomas, Ross L. Finney **Calculus and Analytic Geometry**, Novena Edición, (Addison-Wesley, 1998).
- Dennis G. Zill, Warren S. Wright, **Cálculo de Varias Variables**, Cuarta Edición, (McGraw-Hill, 20011).

