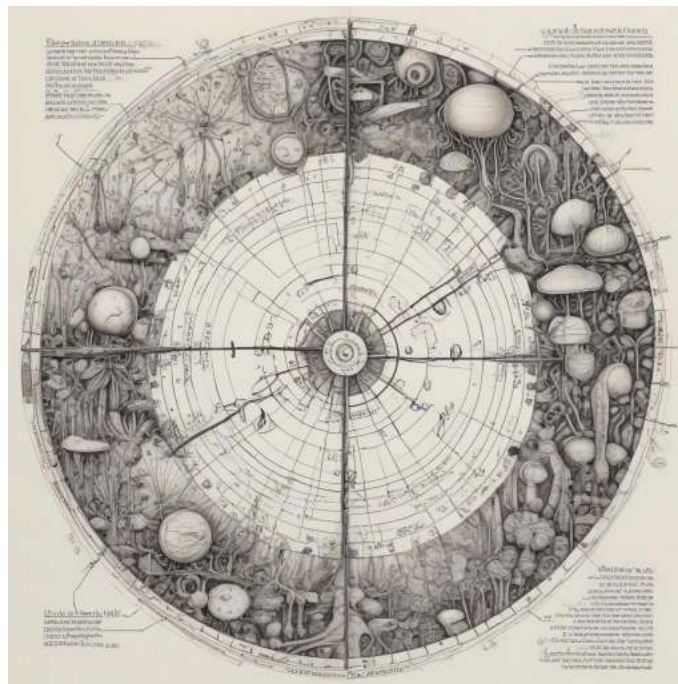

Clases de Cálculo III para Ingeniería

Teoría y 150 ejercicios resueltos

Versión 2.2 - Septiembre 2025



Pedro José Hernando Oter

Cover image generated by Imagine AI Art Generator - www.imagine.art

© Pedro José Hernando Oter, 2025

pedroj@math.uc3m.es
www.clasesde.eu

Departamento de Matemáticas
Escuela Politécnica Superior
UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
Avda de la Universidad, 30
28911 Leganés
SPAIN

ISBN: xxx-xx-xxx-xxxx-x

Versión 2.2 - Septiembre 2025
Made by L^AT_EX - TeX Live

This is pdfTeX, Version 3.141592653-2.6-1.40.27 (TeX Live 2026/dev/Arch Linux) kpathsea version 6.4.2/dev

Índice

Tema	Página
1 Introducción a las Ecuaciones Diferenciales	1
1.1 Ecuaciones	3
1.1.1 Tipos de Ecuaciones	3
1.1.2 Ecuaciones Funcionales	3
Clasificación de las Ecuaciones Funcionales	4
1.2 Ecuaciones Diferenciales	4
1.2.1 Notación de las Derivadas	4
Notación de Leibniz	4
Notación de Lagrange	5
Operador Diferencial	5
1.2.2 Análisis Matemático	6
Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales	7
1.2.3 Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales	7
Clasificación 1: Tipo de las derivadas	7
Clasificación 2: Orden y Grado de la Ecuación	8
Clasificación 3: Linealidad de la Ecuación	9
1.3 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)	10
1.3.1 Funciones de Clase C^n	10
1.3.2 Solución o Curva Integral de una EDO	11
Tipos de Solución	11
1.3.3 Resolución de EDO Simples	12
Método de Separación de Variables	12
Solución Singular	13
1.3.4 Familias de Soluciones	14
1.3.5 Tipos de Problemas con EDO	14
Problema de Valores Iniciales (PVI)	15
Problema de Frontera o de Contorno (PVF)	15
1.3.6 Tipos de Soluciones de una EDO	16
2 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden	19
2.0 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden	21
2.0.1 Métodos de Resolución de Tipos Canónicos	21
2.1 EDO Simple de la forma $y' = f(x)$	21
2.2 EDO de Variables Separables o Separable	23
2.3 EDO de la Forma: $y' = f(ax + by + c)$	23
2.4 EDO Homogéneas	24
Caso 1: $f(t) \neq t$	25
Caso 2: $f(t) = t$	25
2.4.1 EDO Reducibles a Homogéneas	27
Caso 1: Rectas Secantes	27
Caso 2: Rectas Paralelas	27
2.5 EDO Exactas	29
Método General de Resolución de EDO Exactas	32
2.5.1 Factores Integrantes	33

	Existencia de Factores Integrantes	33
	Cálculo Práctico de Factores Integrantes	34
	Otros Factores Integrantes	35
2.6	EDO Lineales	36
2.6.1	EDO Lineal de Primer Orden	36
	Resolución de EDO Lineales	36
	Explicación: Fáctor Integrante	36
2.7	Ecuación de Bernoulli	37
2.8	Ecuación de Riccati	38
2.9	Reducción de EDO de Segundo Orden	40
2.10	Resumen: EDO Primer Orden	41
2.11	Aplicaciones de las EDO de Primer Orden	42
2.11.1	Familia de Curvas	42
2.11.2	Trayectorias Ortogonales	43
2.11.3	Modelización Matemática	46
	Ley de Newton del Enfriamiento	46
	Dinámica de Poblaciones	46
	Ecuación Logística	46
	Ley de Torricelli	47
	Desintegración Radiactiva	47
	Caída Libre y Resistencia del Aire	47
3	EDO Lineales de Orden Superior	49
3.1	EDO Lineales de Orden n	51
3.1.1	Introducción	51
3.1.2	Solución de una EDOL	51
3.1.3	Tipos de Problemas con EDOL	52
3.1.4	Existencia y Unicidad de las Soluciones	54
3.1.5	Solución de una EDOL	56
3.2	EDOL con Coeficientes Constantes Homogénea (EDOCH)	57
3.2.1	Dependencia e Independencia Lineal de Funciones: Wronskiano	59
3.2.2	Solución de una EDOCH: Casos Particulares	60
	Raíces Reales con Multiplicidad $m > 1$	60
	Raíces Complejas	61
3.2.3	Resumen: Soluciones de una EDOCH	63
3.3	EDOL con Coeficientes Constantes Completa (EDOC)	64
3.3.1	Método de los Coeficientes Indeterminados	64
3.3.2	Método de Variación de Parámetros	69
	Extensión del Método de Variación de Parámetros a EDOL de Orden n	72
3.3.3	Función de Green	75
3.4	EDOL con Coeficientes Variables	76
3.4.1	Reducción de Orden por falta de un Tipo de Variable	76
	Ausencia de y : $F(x, y', y'') = 0$	76
	Ausencia de x : $F(y, y', y'') = 0$	76
3.4.2	Reducción de Orden conocida una Solución Particular: Fórmula de Abel	76
3.4.3	Ecuación de Cauchy-Euler	79
	Soluciones de la forma: $y(x) = x^m$	79
	Cambio de Variable: $x = e^z$	81
3.4.4	Ecuación de Bessel	82
	Funciones Especiales	82
	Ecuación de Bessel	82
	Función Gamma, $\Gamma(z)$	82
	Solución de la Ecuación de Bessel	83
	Funciones de Bessel de Primera Clase o Especie	83
	Algunas Propiedades de las Funciones de Bessel de Primera Clase	84
	Funciones de Bessel de Segunda Clase o Especie	84
	EDO Resolubles en Términos de Funciones de Bessel	84

Aplicaciones de la Ecuación de Bessel	85
3.5 Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (SEDO)	86
3.5.1 Sistemas de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden Lineales	87
3.6 Aplicaciones de las EDO de Orden Superior	88
3.6.1 Circuitos Eléctricos	88
3.6.2 Sistemas Mecánicos	89
4 Transformada de Laplace	91
4.1 Introducción	93
4.1.1 Series de Potencias	93
4.2 Transformadas	94
4.3 Transformada de Laplace	95
4.3.1 Definición	95
4.3.2 Función Gamma $\Gamma(t)$	98
4.3.3 Tabla de Transformadas de Laplace Elementales	99
4.3.4 Condiciones Suficientes de Existencia	99
4.3.5 Propiedades de la Transformada de Laplace	101
Linealidad	101
Primer Teorema de Traslación: Traslación en el eje s	102
Segundo Teorema de Traslación: Traslación en el eje t	103
Derivada de una Transformada de Laplace	106
Integral de una Transformada de Laplace	108
4.3.6 Transformadas Inversa de Laplace	108
Resumen: Propiedades de $\mathcal{L}\{f(t)\}$	109
Tablas de Transformadas Inversas de Laplace	110
4.3.7 Transformada de la Derivada e Integral	111
Transformada de la Derivada de una Función	111
Transformada de la Integral de una Función	112
4.4 Método de Descomposición en Fracciones Simples	113
4.5 Transformada de Laplace y EDO	115
4.5.1 PVI de EDOC	115
4.5.2 EDOL con Coeficientes Polinómicos	116
4.5.3 Sistemas de EDO Lineales de Orden n	117
4.5.4 Ecuaciones Integrales e Integrodiferenciales	118
4.5.5 Transformada de un Producto: Convolución	120
Propiedades de la Convolución	123
Aplicaciones de la Convolución	123
4.6 EDOS y Señales	127
4.6.1 Función Delta de Dirac	129
Introducción	129
Propiedades Básicas de la Función Delta de Dirac	130
Relación entre Delta de Dirac y Escalón Unitario	130
Transformada de Laplace de Delta de Dirac	130
5 Series de Fourier	133
5.1 Introducción	135
5.2 Funciones Periódicas	135
5.3 Espacios Vectoriales de Funciones	136
5.3.1 Funciones Ortogonales	137
5.3.2 Bases de Espacios Vectoriales de Funciones	138
5.4 Serie de Fourier	139
5.4.1 Convergencia de la Serie de Fourier	140
5.4.2 Fenómeno de Gibbs	143
5.4.3 Extensión Periódica de una Función	143
5.4.4 Series de Fourier de Senos y Cosenos	144
Serie de Fourier de Cosenos	144
Serie de Fourier de Senos	145

5.4.5	Desarrollo en Semi-intervalos. Series de Senos y Cosenos de una Función	146
5.4.6	Continuidad, Derivabilidad e Integrabilidad de las Series de Fourier	147
	Continuidad de las Series de Fourier	147
	Derivabilidad de las Series de Fourier	147
	Derivación de la Serie de Fourier respecto a un Parámetro	148
	Integrabilidad de las Series de Fourier	149
5.4.7	Forma Compleja de la Serie de Fourier	149
6	Problemas de Autovalores de Sturm-Liouville	151
6.1	Introducción: Problema de Autovalores Matricial	153
6.2	Problema de Autovalores en Operadores Diferenciales	153
6.2.1	Casos Prácticos	153
	Caso 1: Condiciones Frontera de tipo Dirichlet	154
	Caso 2: Condiciones Frontera de tipo Neumann	156
	Caso 3: Condiciones Frontera de tipo Periódico	157
	Resumen	159
6.3	Problema Regular de Sturm-Liouville	160
	Características de los Problemas Regulares de Sturm-Liouville	160
6.3.1	Forma Autoadjunta	163
6.3.2	Serie de Fourier Generalizada	164
6.3.3	Cociente de Rayleigh	167
6.4	Problemas No Regulares de Sturm-Liouville	169
6.4.1	Ortogonalidad en las Funciones de Bessel	171
6.4.2	Serie de Fourier-Bessel	172
7	Ecuaciones en Derivadas Parciales	175
7.1	Introducción	177
	Notación	177
7.1.1	Solución de una EDP	177
7.1.2	Características de las EDP	178
7.1.3	Operadores Diferenciales Lineales	179
	Operador Laplaciano 3D en otras Coordenadas	179
	Otros Operadores Lineales	180
7.1.4	Clasificación de las EDP	180
7.1.5	Problemas en EDP	182
	Tipos de Condiciones	182
7.1.6	Solución de un Problema en EDP	183
7.2	Método de Separación de Variables	183
7.2.1	Procedimiento General	183
7.2.2	Principio de Superposición	186
7.3	Problemas Clásicos en EDP	186
7.4	Ecuación de Calor	186
7.4.1	Transferencia de Calor	186
	Transferencia de Calor por Conducción	187
7.4.2	Ecuación del Calor Unidimensional	188
	Caso 1: Superficie Lateral Aislada y Condiciones Dirichlet	188
	Caso 2: Superficie Lateral Aislada y Condiciones Neumann	190
	Caso 3: Condiciones Dirichlet No Homogéneas	193
	Caso 4: Superficie Lateral No Aislada	194
	Caso 5: Condiciones Dirichlet + Robin	196
7.4.3	Ecuación del Calor en Polares con Simetría Radial	198
7.5	Ecuación de Onda	201
7.5.1	Ecuación de Onda Unidimensional	202
	Caso 1: Extremos Fijos (Condiciones Dirichlet)	202
	Caso 2: Extremos Móviles (Condiciones Neumann)	204
	Caso 3: Extremos Fijo-Móvil (Condiciones Dirichlet-Neumann)	207
7.5.2	Ecuación de Onda en Coordenadas Polares con Simetría Radial	209

7.5.3	Ecuación de Onda en Coordenadas Polares	212
7.6	Ecuación de Laplace	216
7.6.1	Ecuación de Laplace Bidimensional	218
	Caso 1: Condiciones Dirichlet (I)	218
	Caso 2: Condiciones Dirichlet (II)	220
	Caso 3: Condiciones Dirichlet (III)	222
	Caso 4: Condiciones Neumann	223
	Caso 5: Coordenadas Polares	225
7.7	Problemas de Evolución Bidimensionales	228
7.7.1	Ecuación del Calor Bidimensional en Coordenadas Cartesianas	228
	Problema 1: Ecuación de Helmholtz	228
	Problema 2: Serie Doble de Fourier	229
7.7.2	Ecuación de Onda Bidimensional en Coordenadas Cartesianas	230
7.7.3	Ecuación del Calor en un Cilindro con Simetría Radial	233
7.8	Unicidad y Condiciones de Compatibilidad en EDP	236
7.8.1	Identidades de Green	237
7.8.2	Estudio de la Unicidad	237
	Ecuación de Poisson	237
	Ecuación del Calor	238
	Ecuación de Onda	238

APÉNDICE

241

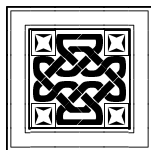
A Software Matemático

243

A.0	Software Matemático Simbólico	244
A.1	SageMath	245
A.1.1	<i>SageMath</i> Básico	245
A.1.2	Cálculo III con <i>SageMath</i>	251
	Ecuaciones Diferenciales con SageMath	252
A.1.3	Resolución de EDO de Primer Orden	253
	Ejemplos	253
A.1.4	Trayectorias Ortogonales	259
	Ejemplo	259
A.1.5	EDO Lineales de Orden Superior	262
	Ejemplos	262
A.1.6	Problemas de Valores en la Frontera (PVF)	268
A.1.7	Ecuación de Bessel	269
	Funciones de Bessel en <i>SageMath</i>	270
	Resolución de la Ecuación de Bessel	271
A.1.8	Sistemas de EDO (SEDO)	272
A.1.9	Transformada de Laplace	274
	Cálculo y Propiedades de la TL	274
A.1.10	Descomposición en Fracciones Simples	278
A.1.11	Resolución EDO con TL	279
A.1.12	Resolución SEDO con Transformada de Laplace	281
A.1.13	Ecuaciones Integrales e Integrodiferenciales	282
A.1.14	Convolución	283
A.1.15	Función Delta de Dirac	287
A.1.16	Series de Fourier	288
	Función Definida a Trozos	289
A.1.17	Problemas de Sturm-Liouville	293
A.1.18	Ecuaciones en Derivadas Parciales	302
	EDP de Primer Orden	303
	Ecuación del Calor Unidimensional	304
	Ecuación del Calor en Polares con Simetría Radial	307

Bibliografía

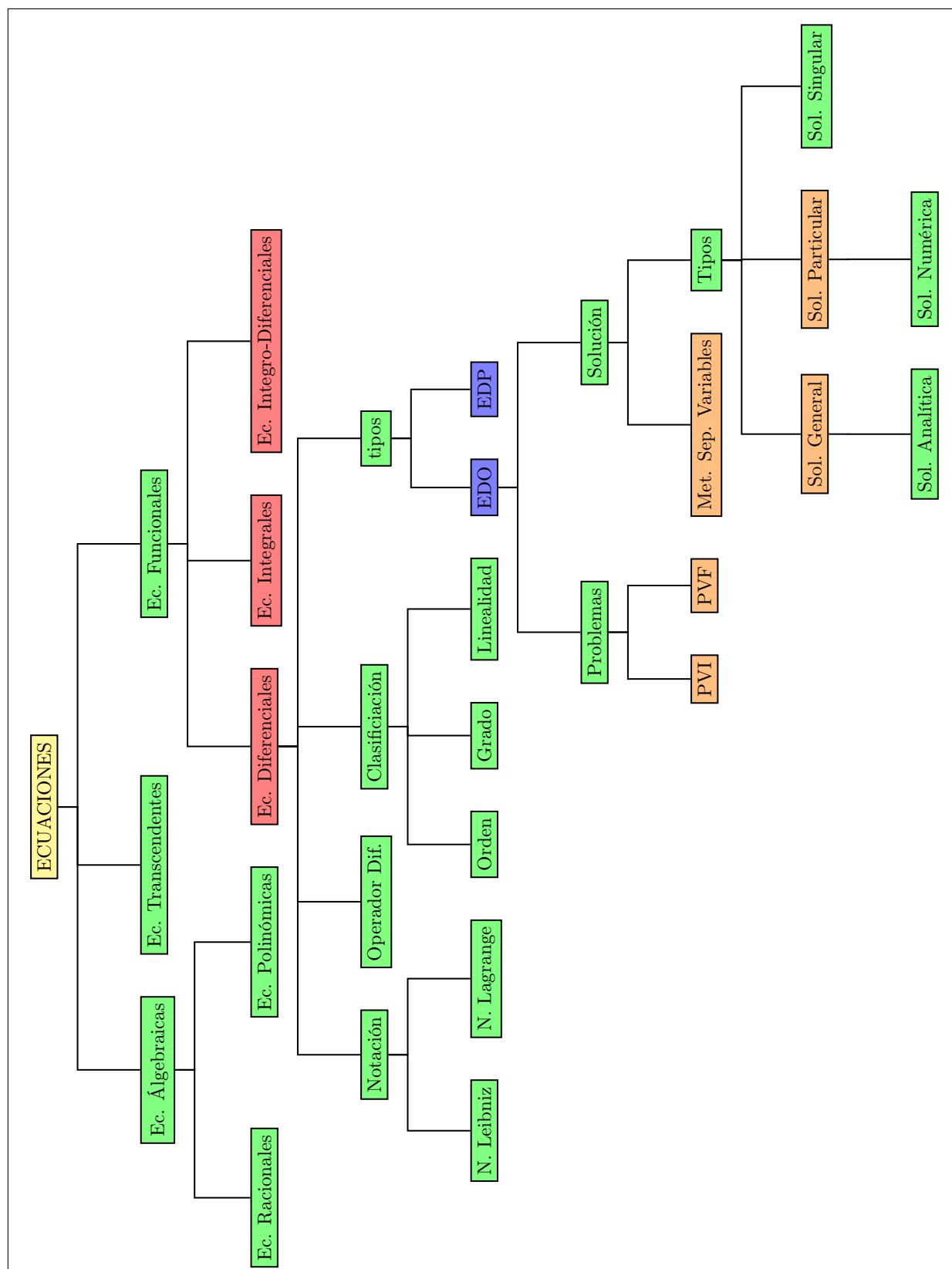
313



Introducción a las Ecuaciones Diferenciales

Contenido

1.1 Ecuaciones	3
1.1.1 Tipos de Ecuaciones	3
1.1.2 Ecuaciones Funcionales	3
1.2 Ecuaciones Diferenciales	4
1.2.1 Notación de las Derivadas	4
1.2.2 Análisis Matemático	6
1.2.3 Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales	7
1.3 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)	10
1.3.1 Funciones de Clase C^n	10
1.3.2 Solución o Curva Integral de una EDO	11
1.3.3 Resolución de EDO Simples	12
1.3.4 Familias de Soluciones	14
1.3.5 Tipos de Problemas con EDO	14
1.3.6 Tipos de Soluciones de una EDO	16



1.1. Ecuaciones

Definición 1.1. Ecuación

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones matemáticas, denominadas *miembros*, en las que aparecen elementos conocidos o *datos*, y desconocidos o *incógnitas*, relacionados mediante operaciones matemáticas.

- Se denomina **solución** de una ecuación al conjunto de valores de las *incógnitas* que verifican la ecuación.
- **Resolver** una ecuación es hallar (en caso de que existan) sus *soluciones*.

1.1.1. Tipos de Ecuaciones

Hay diferentes tipos de ecuaciones entre las que destacan:

- **Ecuaciones algebraicas:** son todas aquellas que se basan en operaciones algebraicas¹. Este tipo de ecuaciones son las más comunes y las podemos subdividir en:
 - **Ecuaciones polinómicas:** donde la incógnita es la variable de un polinomio. Las hay de diferentes grados en función de la mayor potencia del polinomio.
 - **Ecuaciones racionales:** son aquellas que están formadas por cocientes de polinomios.
 - **Ecuaciones diofánticas:** son aquellas cuyas soluciones son solo números enteros $\mathbb{Z}$.
- **Ecuaciones trascendentes:** aquellas que involucran funciones no polinómicas, como funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, etc.
- **Ecuaciones funcionales:** en ellas la incógnita es una *función* y no se pueden reducir² a ecuaciones algebraicas ni trascendentes.

Ejemplo 1.1. Tipos de ecuaciones

- $2x + 3 = 5 - x$ $\longrightarrow$ Ec. algebraica, polinómica de primer grado o lineal.
- $2x + y = 0$ $\longrightarrow$ Ec. lineal con dos incógnitas.
- $ax^2 + bx + c = 0$ $\longrightarrow$ Ec. polinómica de 2º grado, con coeficientes a , b y c .
- $\frac{3x^2 - x + 1}{x^3 + 1} = 6x + 2$ $\longrightarrow$ Ec. racional
- $\sin(x + 1) + \ln(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ $\longrightarrow$ Ec. trascendente.
- $3f(x) - \frac{d}{dx}f(x) = \tan(x) - 1$ $\longrightarrow$ Ec. funcional con incógnita $f(x)$.

1.1.2. Ecuaciones Funcionales

Definición 1.2. Ecuación funcional

Las ecuaciones funcionales representan una relación entre *variables independientes* y *funciones incógnitas* cuya expresión y/o valor se quiere conocer.

¹Suma, resta, multiplicación y división.

²Por lo menos de una forma sencilla.

Clasificación de las Ecuaciones Funcionales

Hay diferentes tipos de ecuaciones funcionales entre las que podemos destacar las siguientes³:

$$\text{Ecuaciones Funcionales} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuaciones Diferenciales} \left\{ \begin{array}{l} \text{ordinarias} : \frac{df}{dx} + x f^2 = 0 \\ \text{en derivadas parciales} : y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \\ \text{Ecuaciones Integrales} : x^2 f + \int x f dx = 0 \\ \text{Ecuaciones Integro-diferenciales} : f \frac{df}{dx} + \int x f dx = 0 \end{array} \right.$$

En este curso nos centraremos fundamentalmente en las *ecuaciones diferenciales* aunque también se verán algunos ejemplos de *ecuaciones integrales* e *integro-diferenciales* en la [Sección 4.5.4, página 118](#).

1.2. Ecuaciones Diferenciales

Definición 1.3. Ecuación Diferencial

Una **ecuación diferencial** es una ecuación que relaciona una *función* (variable dependiente), su *variable* o *variables independientes* y **al menos una** de sus *derivadas*.

Ejemplo 1.2. Ejemplos de ecuaciones diferenciales

$$y' = -ky \quad ; \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2)y = 0 \quad ; \quad a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial t}$$

1.2.1. Notación de las Derivadas

Hay diferentes formas de denotar las derivadas de una función, para verlas vamos a considerar dos funciones:

- $f(x)$: función dependiente de una única variable independiente x .
- $z(x, y)$: función dependiente de dos variables independientes x e y .

Notación de Leibniz

Se basa en el cociente de *diferenciales*⁴, siendo muy utilizada sobre todo en derivadas parciales al quedar claro el orden de la derivada (en el numerador) y la relación y orden de las variables con respecto a las que se deriva (en el denominador).

- Primera derivada⁵

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} z(x, y) \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} z(x, y)$$

- Segunda derivada⁶

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{df}{dx} \quad ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}$$

- n-ésima derivada

$$\frac{d^n f}{dx^n} \quad ; \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^m \partial y^{n-m}}$$

³Ver la notación diferencial de Leibniz en [Sección 1.2.1, página 4](#).

⁴Los diferenciales dx , dy , ∂x , ∂y , etc. hacen referencia a valores muy pequeños (*infinitésimos*) de las variables.

⁵Se lee “diferencial de f con respecto a x ” o “diferencial de z con respecto a y ”.

⁶Se lee “diferencial segunda de f con respecto a x dos veces” o “diferencial segunda de z con respecto a x e y ”.

Notación de Lagrange

Es muy utilizada por ser la más simple aunque en ocasiones es insuficientemente clara. Emplea tildes o primas para las primeras derivadas y potencias o números romanos entre paréntesis para las derivadas superiores.

- $f' = \frac{dy}{dx}$, $f'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, $f''' = \frac{d^3y}{dx^3}$, $f^{iv} = \frac{d^4y}{dx^4}$, $f^v = \frac{d^5y}{dx^5}$
- $f^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$

Se lee “ f prima de x ”, “ f segunda de x ”, etc. Una variación de la notación de Lagrange se suele utilizar para referirse a las derivadas parciales, utilizando tildes o sin ellas (más común):

$$z_x = z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} \quad ; \quad z_y = z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$z_{xx} = z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad ; \quad z_{yy} = z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad ; \quad z_{xy} = z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

Hay otras notaciones como la de Euler⁷ ($D_x f = f'$) o la de Newton ($\dot{x} = f'$, $\ddot{x} = f''$) pero su uso se suele restringir a determinadas áreas de la física, de las matemáticas u otras.

Operador Diferencial

La operación de diferenciación puede representarse a través del símbolo D :

$$D \equiv \frac{d}{dx} \Rightarrow \begin{cases} Dy = \frac{dy}{dx} \\ D^2y = D[Dy] = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2y}{dx^2} \\ D^ny = \frac{d^ny}{dx^n} \end{cases}$$

Definición 1.4. Operador Diferencial

El símbolo⁸ D se denomina **operador**⁹ **diferencial** y transforma una función (diferenciable) en otra función (su derivada).

Nota 1.1. A veces se indica la variable sobre la que se deriva en el subíndice, por ejemplo D_z indica que la variable sobre la que se deriva es z .

Ejemplo 1.3. Operadores diferenciales

- $D[5x^3 - 4 \operatorname{sen}(4x)] = 15x^2 - 16 \cos(4x)$
- $D^2[5x^3 - 4 \operatorname{sen} 4x] = D[D[5x^3 - 4 \operatorname{sen} 4x]] = D[15x^2 - 16 \cos(4x)] = 30x + 64 \operatorname{sen}(4x)$
- $D_{xy}[6x^2 - \operatorname{sen}(xy)] = D_x[D_y[6x^2 - \operatorname{sen}(xy)]] = D_x[-x \cos(xy)] = -\cos(xy) + xy \operatorname{sen}(xy)$

Cualquier expresión polinomial en la que interviene D también es un *operador diferencial*, como por ejemplo:

$$D + 3 \quad ; \quad D^2 + 3D - 4 \quad ; \quad 5D^3 - 6x^3D^2 + (1 - x^2)D \quad ; \quad \dots$$

⁷En la **Sección 1.2.1, página 5** se verá la utilización del *operador* D .

⁸La primera utilización del símbolo D como operador diferencial se debe al científico inglés Oliver Heaviside (1850-1925), que también da nombre a la *función escalón unitario* (ver la **Definición 4.6, página 103**).

⁹En general un operador matemático es un símbolo que indica una operación especificada sobre un cierto número de operandos (números, funciones, vectores, etc.).

Ejercicio 1.1. Calcular las siguientes expresiones con operadores diferenciales.

a) $(3D - 4)[y^2 + y - 2]$

b) $(x^2D^3 - D)[y^2 + y - 2]$

a)

$$(3D - 4)[y^2 + y - 2] = 3D[y^2 + y - 2] - 4[y^2 + y - 2] = 3(2yy' + y') - 4(y^2 + y - 2) =$$

$$= 6yy' + 3y' - 4y^2 - 4y + 8$$

b) $(x^2D^3 - D)[y^2 + y - 2] = x^2D^3[y^2 + y - 2] - D[y^2 + y - 2] = 0 - (2yy' + y') = -y'(2y + 1)$

Definición 1.5. Operador Diferencial Lineal de orden n

El operador diferencial L de orden n se define como:

$$L \equiv a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + a_1(x)D + a_0(x)$$

Debido a las propiedades de la diferenciación, el operador diferencial L es **lineal**, verificándose:

$$L[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha L[f(x)] + \beta L[g(x)] \quad ; \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Como se verá más adelante¹⁰, una *ecuación diferencial ordinaria lineal* de orden n de la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

se puede representar a través del operador diferencial L de orden n de la forma:

$$L[y] = f(x)$$

1.2.2. Análisis Matemático

Las *ecuaciones diferenciales* son el núcleo principal de la rama de las matemáticas denominada **Análisis Matemático**.

El *Análisis Matemático* empieza con el desarrollo de una formulación rigurosa del *Cálculo* y estudia conceptos relacionados con los números reales y complejos y sus respectivas funciones. Actualmente se puede clasificar en los siguientes campos:

- **Análisis Real:** estudio formalmente riguroso de las derivadas e integrales de las funciones reales univalueadas, lo que incluye el estudio de límites, series de potencias y de las medidas.
- **Análisis Complejo:** estudia funciones complejas de variable compleja que son complejo-diferenciables, denominadas *funciones holomorfas*¹¹.
- **Análisis Armónico:** estudio de las *series de Fourier*¹².
- **Análisis Funcional:** estudia espacios y funciones e introduce conceptos como los espacios de Banach y espacios de Hilbert.
- **Análisis No Estándar:** estudia ciertos números hiperreales¹³ y sus funciones, dando un tratamiento riguroso de los números infinitesimales y los infinitamente grandes.

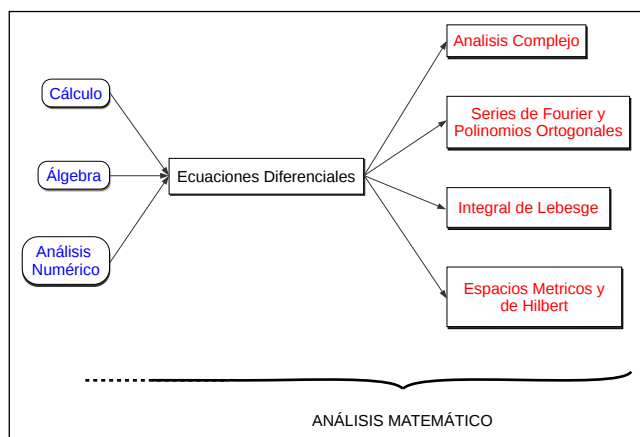
En la siguiente gráfica se muestra de forma esquemática la relación entre diferentes áreas matemáticas y su relación con el *Análisis Matemático*.

¹⁰Ver el Tema 3, página 49.

¹¹Ver por ejemplo "Clases de Ampliación de Matemáticas para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 313.

¹²Ver el Tema 5, página 133.

¹³Los números hiperreales ${}^*\mathbb{R}$ son una extensión de $\mathbb{R}$ al incluir a los números infinitesimales e infinitos.



Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales

Las ecuaciones diferenciales son el área matemática más importante para la comprensión de diferentes ciencias:

- *Física*: mecánica clásica y cuántica, electricidad y magnetismo, relatividad de Einstein, etc.
- *Química*: mezclas, reacciones químicas, etc.
- *Biología*: bio-física
- *Economía*: principio económico de la oferta y la demanda

1.2.3. Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales

Debido a la complejidad de su estudio, las ecuaciones diferenciales se pueden clasificar de diferentes formas, atendiendo a las siguientes características:

1. **Tipo de las derivadas** que aparecen en la ecuación.
2. **Orden y grado** de la ecuación.
3. **Linealidad** de la ecuación.

Clasificación 1: Tipo de las derivadas

Atendiendo al tipo de derivadas, las ecuaciones diferenciales (ED) se clasifican en dos grandes grupos¹⁴:

- **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)**: Son aquellas ED cuya incógnita es una función que depende únicamente de una variable y por tanto las derivadas son respecto a esa variable independiente.

$$y(x) \longrightarrow F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \quad , \quad y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}$$

donde las derivadas se pueden denotar mediante la notación de Leibniz o de Lagrange¹⁵.

- **Ecuaciones Diferenciales en derivadas Parciales (EDP)**: Son aquellas ED donde la función incógnita depende de varias variables y por tanto las derivadas son con respecto a esas variables independientes.

$$z(x, y, t) \longrightarrow F(x, y, t, z, z_x, z_y, \dots) = 0 \quad , \quad z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

Las derivadas parciales se pueden denotar mediante la notación de Lagrange o mediante el símbolo¹⁶ ∂ utilizando la notación de Leibniz.

La teoría de las EDP es muy diferente de las EDO y con una notable *mayor dificultad* en todas sus facetas.

¹⁴Ver la Sección 1.1.2, página 4.

¹⁵Ver la Sección 1.2.1, página 4.

¹⁶Se asemeja a una letra *d* redondeada y se denomina *d* de Jacobi o *parcial*. Proviene de las traducciones al idioma árabe que se hacían del latín y es una contracción entre las letras *a* y *d*, siendo el origen del actual símbolo de *arroba*, @. No confundir el símbolo ∂ con la letra griega *delta minúscula*, δ .

Ejemplo 1.4. Tipos de ecuaciones diferenciales.

- $y' = -ky \rightarrow$ EDO
- $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2)y = 0 \rightarrow$ EDO
- $a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial t} \rightarrow$ EDP

Clasificación 2: Orden y Grado de la Ecuación**Definición 1.6.** Orden de una Ecuación Diferencial

El **orden** de una ED (ordinaria o en derivadas parciales) es el *orden* de la derivada de mayor orden de la ecuación.

Ejemplo 1.5. Orden de una ecuación diferencial.

- $\frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 4y = e^x \rightarrow$ EDO de **segundo orden**.
- $y''' + 2e^x y'' + yy' = x^4 \rightarrow$ EDO de **tercer orden**.
- $M(x, y) dy + N(x, y) dx = 0 \rightarrow$ EDO de **primer orden**.
- $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow$ EDP de **segundo orden**.

Nota 1.2. Según la notación de Leibniz¹⁷ $y' = \frac{dy}{dx}$, donde dy y dx se denominan respectivamente *diferencial* de y y de x . En determinados casos, los diferenciales pueden aparecer separados.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)} \implies M(x, y) dy + N(x, y) dx = 0$$

En la **Sección 2.5, página 29** se verá una de las utilidades de esto.

Definición 1.7. Grado de una Ecuación Diferencial

El **grado** de una ecuación diferencial es la *potencia* de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación¹⁸.

Ejemplo 1.6. Orden y grado de una ecuación diferencial.

- $e^x \frac{d^2 y}{dx^2} + \sin x \frac{dy}{dx} = x \rightarrow$ EDO de **segundo orden** y **primer grado**.
- $\left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)^2 - 2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^4 + xy = 0 \rightarrow$ EDO de **tercer orden** y **segundo grado**.

¹⁷Ver la **Sección 1.2.1, página 4**.

¹⁸El grado de una ecuación diferencial solo se tiene en cuenta si la ecuación tiene una forma *polinómica*, de no ser así se considera que no tiene grado.

Clasificación 3: Linealidad de la Ecuación

Definición 1.8. Linealidad de una Ecuación Diferencial

Se dice que una ecuación diferencial es **lineal** si cumple simultáneamente las dos siguientes condiciones:

- La variable dependiente y todas sus derivadas son funciones *polinómicas* de *primer grado*.
- Cada término *coeficiente*¹⁹ solo depende, a lo sumo, de la o las variables independientes.

Ejemplo 1.7. Ecuaciones diferenciales lineales y no lineales.

$y'' - 2y' + y = 0$	: EDO lineal	$(1 - y)y' + 2y = e^x$	: EDO no lineal
$\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} - 5y = e^x$	: EDO lineal	$\frac{d^2y}{dx^2} + \text{sen } y = 0$	: EDO no lineal
$(y - x)dx + 4xdy = 0$	: EDO lineal	$\frac{d^4y}{dx^4} + y^2 = 0$	: EDO no lineal
$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x\frac{\partial u}{\partial y} = u$	: EDP lineal	$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u\frac{\partial u}{\partial y} = u$	: EDP no lineal
$u_x + xu_y = yu_{xy}$	: EDP lineal	$(u_x)^2 + uu_y = yu_{xy}$	: EDP no lineal

Nota 1.3. La expresión:

$$M(x, y) dy + N(x, y) dx = 0 \quad \implies \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)} \quad ; \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

puede presentar propiedades de linealidad distinta en las derivadas $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dx}{dy}$.

Ejemplo 1.8. Linealidad de la ecuación: $(y^2 - 1)dx + xdy = 0$

- **No lineal** en y : $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - y^2}{x} \longrightarrow$ Sol. $y(x)$
- **Lineal** en x : $\frac{dx}{dy} = \frac{-x}{y^2 - 1} \longrightarrow$ Sol. $x(y)$

Ejemplo 1.9. Linealidad y orden en EDO.

- $(1 - x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x \longrightarrow$ Lineal de **segundo orden**
- $(1 + y^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = e^x \longrightarrow$ No lineal de **segundo orden**
- $t^5y^{(4)} - t^3y'' + 6y = 0 \longrightarrow$ Lineal de **cuarto orden**
- $e^tx'' + x' \log t = \cos x \longrightarrow$ No lineal de **segundo orden**

¹⁹Aquel término que multiplica a una derivada.

Ejemplo 1.10. Linealidad y orden en EDP.

- $5 \frac{\partial z}{\partial x} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = 1 - z \rightarrow$ Lineal de **primer orden**
- $[u_x(x, y)]^2 + u_y(x, y) = 0 \rightarrow$ No Lineal de **primer orden**
- $u_x(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0 \rightarrow$ Lineal de **segundo orden**
- $5 \frac{\partial z}{\partial x} + 2w \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} = w + xy \rightarrow$ No Lineal de **segundo orden**

En éste y los siguientes temas analizaremos las EDO. Las EDP se verán a partir del **Tema 7, página 175**.

1.3. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)

Definición 1.9. EDO de orden n

Una EDO general de orden n es una ecuación de la forma:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

donde x es la variable independiente, $y(x)$ es la variable dependiente o función incógnita de la ecuación e $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}$ son las derivadas sucesivas de $y(x)$ con respecto a x hasta el grado n .

Las funciones solución $y(x)$ de una EDO deben cumplir una serie de características que veremos a continuación.

1.3.1. Funciones de Clase C^n

En el *Análisis Matemático*²⁰ las funciones se clasifican en base a las propiedades de sus derivadas.

Definición 1.10. Función de Clase C^n

Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo²¹.

- Se dice que la función f es de **clase**²² C^n , siendo²³ $n \in \mathbb{Z}^+$, si sus derivadas $f', f'', \dots, f^{(n)}$ existen y son continuas²⁴.
- Se dice que la función f es de **clase**²⁵ C^∞ , **suave** o **continuamente diferenciable**, si existen todas las derivadas de todos los órdenes de f .

Definición 1.11. Función Analítica

Se dice que una función f es **analítica**²⁶ si es *continuamente diferenciable* y es igual a su correspondiente serie de Taylor²⁷ expandida alrededor de cualquier punto de su dominio U .

²⁰Ver la **Sección 1.2.2, página 6**.

²¹Puede ser un intervalo abierto (a, b) , cerrado $[a, b]$, infinito (a, ∞) , etc.

²²Leído como "clase c-n".

²³El conjunto $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \dots\}$ es el conjunto de los enteros positivos (sin incluir el cero).

²⁴La continuidad es automática para todas las derivadas excepto para la última $f^{(n)}$.

²⁵Leído como "clase c-infinito".

²⁶Ver por ejemplo "Clases de Ampliación de Matemáticas para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. **313**.

²⁷Ver por ejemplo "Clases de Cálculo I para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. **313**.

1.3.2. Solución o Curva Integral de una EDO

Definición 1.12. Solución o Curva Integral de una EDO

Dada una EDO,

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

cualquier función $y = f(x)$ de al menos *clase* C^n en un intervalo²⁸ I que verifique la EDO, se denomina **solución** o **curva integral** de la EDO en el intervalo I .

El estudio de las soluciones de una EDO está centrado en dos cuestiones²⁹:

- **Existencia:** Una EDO puede o no tener solución. En caso de tenerla pueden ser un conjunto finito o infinito de funciones.
- **Unicidad**³⁰: Por cada punto del intervalo de definición de la ecuación I puede pasar una o varias soluciones.

Tipos de Solución

La solución de una EDO puede ser de dos tipos:

- **Solución Analítica:** La solución viene dada mediante una expresión matemática (fórmula, desarrollo en serie, etc.)

La solución analítica puede estar en dos formas:

- **Forma explícita** $y = f(x)$: donde la variable dependiente y está despejada en función de la variable independiente x .
- **Forma implícita** $F(y, x) = 0$: donde la variable dependiente y no está despejada, bien porque no se pueda o bien porque resulte más apropiada esta forma.

- **Solución Numérica:** Los valores de la solución son conocidos mediante la aplicación de un algoritmo numérico, teniendo normalmente una determinada precisión.

Las soluciones numéricas son muy importantes en la práctica y existen muchos *métodos numéricos* para encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales de todo tipo.

Generalmente es difícil o incluso imposible encontrar una *solución analítica*³¹ a una EDO. Sin embargo, suele ser *sencillo* comprobar que una determinada función $y = f(x)$ es solución de la misma, calculando para ello las correspondientes derivadas, introduciéndolas en la ecuación y comprobando su veracidad.

Ejercicio 1.2. Dada la EDO:

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

comprobar que las siguientes tres funciones son soluciones de la ecuación:

$$y_1(x) = e^{2x} \quad ; \quad y_2(x) = e^{3x} \quad ; \quad y_3(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \quad y_1 = e^{2x} \quad ; \quad y_1' = 2e^{2x} \quad ; \quad y_1'' = 4e^{2x} \quad \xrightarrow{\text{E.c.}} \quad 4e^{2x} - 10e^{2x} + 6e^{2x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{comprobado}$$

²⁸El intervalo I se denomina *intervalo de definición*, de *validez* o *dominio* de la solución. Puede ser un intervalo abierto (a, b) , cerrado $[a, b]$, infinito (a, ∞) , etc.

²⁹Las EDO poseen una teoría compleja sobre la *existencia* y *unicidad* de sus soluciones y en este curso solo se verán algunos detalles de la misma a lo largo de diferentes temas y en diversos tipos de ecuaciones.

³⁰Ver el **Ejemplo 1.15**, página 17

³¹Se estima que solo aproximadamente el 0,1% de las EDO resolubles tienen solución analítica. El porcentaje es todavía mucho menor en el caso de las EDP.

- $y_2 = e^{3x}$; $y_2' = 3e^{3x}$; $y_2'' = 9e^{3x} \xrightarrow{\text{Ec.}} 9e^{3x} - 15e^{3x} + 6e^{3x} = 0 \implies$ comprobado
- $y_3 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$; $y_3' = 2c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{3x}$; $y_3'' = 4c_1 e^{2x} + 9c_2 e^{3x} \xrightarrow{\text{Ec.}}$
 $[4c_1 e^{2x} + 9c_2 e^{3x}] - [10c_1 e^{2x} + 15c_2 e^{3x}] + [6c_1 e^{2x} + 6c_2 e^{3x}] = 0 \implies$ comprobado

Ejercicio 1.3. Comprobar que la función implícita: $xy = \log y + c$; $c \in \mathbb{R}$
 es solución de la EDO: $y' = \frac{y^2}{1 - xy}$.

Derivamos con respecto a la variable independiente x ambas partes de la función implícita, teniendo en cuenta que la derivada de la constante c con respecto a x es cero.

$$xy = \log y + c \quad ; \quad (xy)' = (\log y + c)' \quad ; \quad y + xy' = \frac{y'}{y}$$

Ahora reagrupamos y despejamos la derivada y' :

$$\frac{y'}{y} - xy' = y \quad ; \quad \frac{y' - xyy'}{y} = y \quad ; \quad \boxed{y' = \frac{y^2}{1 - xy}}$$

Comprobamos que dicho resultado corresponde con la EDO dada en el enunciado, lo que confirma que la función inicial es una solución analítica en forma implícita de dicha EDO.

1.3.3. Resolución de EDO Simples

Generalmente es necesario un método numérico para poder encontrar la solución de la mayoría de las EDO. Sin embargo, para determinados casos existen métodos matemáticos que permiten encontrar la *solución analítica*³² de la ecuación. En esta sección vamos a ver uno de estos métodos, conocido como **separación de variables**³³, que aun siendo bastante simple posee una gran importancia y aplicabilidad.

Vamos a considerar una EDO general de primer orden *explícita* o en *forma normal*³⁴:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = F(x, y)} \implies \begin{cases} x & : \text{Variable independiente.} \\ y = f(x) & : \text{Variable dependiente de } x. \text{ Solución buscada.} \\ F(x, y) & : \text{Función escalar de varias variables.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Definición 1.13. Función de Variables Separables

Se dice que una función $F(x, y)$ es de *variables separables* si puede expresarse como producto de dos funciones, una dependiente solo de la variable independiente x y otra dependiente solo de la variable dependiente y , de la siguiente forma:

$$F(x, y) = g(x)h(y)$$

Método de Separación de Variables

Si la función $F(x, y)$ es de *variables separables*, la **Ecuación (1.1)** se puede resolver utilizando el *método de separación de variables* de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) = g(x)h(y) \quad ; \quad \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx \quad ; \quad \boxed{\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx} \quad (1.2)$$

³²Ver la **Sección 1.3.2**, página 11.

³³Ver también la **Sección 2.2**, página 23.

³⁴Una EDO de primer orden se dice que es *explícita* si está despejada su primera derivada, e *implícita* en caso contrario. Cuando la EDO está en forma explícita se dice que está en *forma normal*.

En el caso de que se puedan calcular ambas *integrales indefinidas* se puede obtener las *funciones solución*³⁵ de la ecuación. Al resolver las integrales indefinidas aparecen dos **constantes de integración**, que se pueden simplificar en una sola de la siguiente forma:

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx \quad ; \quad H(y) + c_1 = G(x) + c_2 \quad ; \quad \boxed{H(y) = G(x) + c} \quad (1.3)$$

siendo ésta una **familia de soluciones**³⁶ de la EDO, con $H(y)$ y $G(x)$ *funciones primitivas*³⁷ de $1/h(y)$ y $g(x)$ respectivamente, c_1 y c_2 son las constantes de integración y $c = c_2 - c_1$ una única constante de integración simplificada.

Definición 1.14. Parámetro

Un *parámetro* es una entidad **distinta de las variables** cuyos valores dan lugar a diferentes casos en una función o problema.

La constante c en la *familia de soluciones* funciona como un **parámetro** dando lugar a un conjunto infinito de soluciones de la EDO³⁸, una por cada valor que se le asigne a c .

Solución Singular

Notar que la primera integral izquierda de la ecuación (1.2) solo tiene sentido si $h(y) \neq 0$. Los casos particulares $h(y) = 0$ hay que estudiarlos aparte para determinar si las funciones solución de esa ecuación son soluciones de la EDO o no. En caso afirmativo hay que comprobar si están contenidas en la *familia de soluciones*, ya que si no fuera así correspondería con lo que se conoce como una **solución singular o extraña**³⁹ de la EDO. También es posible que existan valores de la variable independiente x que den lugar a que no exista la integral de la derecha. Esos valores habría que analizarlos en la solución ya que pueden indicar puntos que no pertenecen al dominio o con comportamientos particulares.

Ejercicio 1.4. Resolver las siguientes EDO simples mediante el método de separación de variables:

$$a) \frac{dy}{dx} = 5 \quad b) \frac{dy}{dx} = 4x^2 + 3x - 2 \quad c) \frac{dy}{dt} = -y \quad d) \frac{dy}{dt} = 10t^2x^3y^5$$

$$\bullet a) \frac{dy}{dx} = 5 \quad ; \quad \int dy = \int 5 dx \quad ; \quad \boxed{y = 5x + c} \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\bullet b) \frac{dy}{dx} = 4x^2 + 3x - 2 \quad ; \quad \int dy = \int (4x^2 + 3x - 2) dx \quad ; \quad \boxed{y = \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x + c} \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\bullet c) \frac{dy}{dt} = -y \quad ; \quad \int \frac{dy}{y} = - \int dt \quad ; \quad \ln y = -t + c \quad ; \quad y = e^{-t+c} = e^{-t}e^c \quad ; \quad \boxed{y = ke^{-t}} \quad , \quad k = e^c \in \mathbb{R}$$

La primera integral de la izquierda no tiene sentido para $y = 0$, comprobándose fácilmente que ésta es solución de la EDO. Sin embargo no es una solución singular al poder obtenerse de la familia de soluciones obtenida, para el valor particular $k = 0$.

$$\bullet d) \frac{dy}{dt} = 10t^2x^3y^5 \quad ; \quad \int \frac{dy}{y^5} = 10x^3 \int t^2 dt \quad ; \quad \boxed{\frac{-1}{4y^4} = 10x^3 \left(\frac{t^3}{3} + c \right)} \quad ; \quad c \in \mathbb{R} \quad ; \quad \boxed{y = 0}$$

Notar que en este último caso la variable x funciona como un *parámetro* ya que no es ni la variable dependiente t ni la variable independiente y . La constante de integración c es otro parámetro. Notar también que $y = 0$ sí es una solución singular de la EDO.

³⁵En forma explícita, $y = f(x)$, o bien en forma implícita, $f(x, y) = 0$.

³⁶Ver la **Sección 1.3.4, página 14**.

³⁷Es decir, funciones que cumplen $[H(y)]' = 1/h(y)$ y $[G(x)]' = g(x)$.

³⁸Lo cual no significa que necesariamente sean todas las soluciones que posea la EDO. Ver la **Sección 1.3.2, página 11** y la **Sección 1.3.6, página 16**.

³⁹Ver la **Definición 1.19, página 16**.

Podemos utilizar algún software matemático que permita el cálculo simbólico⁴⁰ para resolver estos problemas⁴¹.

1.3.4. Familias de Soluciones

Como hemos visto en la sección anterior, cuando se resuelve una EDO aparecen *parámetros* como consecuencia de las constantes de integración que utilizamos en los métodos de resolución. Esto da lugar a *conjuntos de funciones solución* que se denominan *familias de soluciones*.

Definición 1.15. Familia de Soluciones

- Una solución⁴² $F(x; c)$ de una EDO que contiene un *parámetro* c representa un conjunto infinito de funciones⁴³ (una por cada valor de c) denominada **familia uniparamétrica de soluciones** de la EDO.
- Una solución $F(x; c_1, c_2, \dots, c_n)$ de una EDO que contiene n *parámetros* c_i representa un conjunto infinito de funciones (una por cada valor del vector $[c_1, \dots, c_n]$) que se denomina **familia n -paramétrica de soluciones** de la EDO.

Ejemplo 1.11. Familia de soluciones

La siguiente EDO: $y'' + y' + 1 = 0$
tiene infinitas funciones solución dadas por la siguiente *familia de soluciones* con dos parámetros, c_1 y c_2 :

$$y = c_1 e^{-x} - x + c_2 \quad ; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

1.3.5. Tipos de Problemas con EDO

Definición 1.16. Problema con EDO

Un **problema** con EDO es el conjunto formado por una EDO más unas **condiciones** adicionales que definen de forma precisa la solución de la ecuación.

Los problemas con EDO permiten obtener una única función solución (*curva integral*) en lugar de una *familia de soluciones*.

Los problemas con EDO se clasifican en dos tipos, en base a las *condiciones* que se añaden a la EDO y que permiten especificar cual de las infinitas funciones de una familia de curvas es la solución específica que se requiere. Estos tipos de problema son⁴⁴:

- Problemas de valores iniciales (PVI)
- Problemas de frontera o de contorno (PVF)

⁴⁰Los programas más conocidos son Mathematica, Maple y Matlab entre los comerciales y Sage, Maxima y Octave entre los de dominio público.

⁴¹En muchos casos resultan muy útiles para comprobar los cálculos realizados a mano.

⁴²Cuando una función depende de algún parámetro se suele utilizar punto y coma para indicar que no son variables independientes lo que viene a continuación, pero sí valores de los que depende la función.

⁴³De forma general representa lo que se denomina una *familia de curvas*, ver la [Sección 2.11.1, página 42](#).

⁴⁴Ver la [Sección 3.1.3, página 52](#).

Problema de Valores Iniciales (PVI)

Definición 1.17. Problema de Valores Iniciales (PVI)

Se denomina **problema de valores iniciales** (PVI) o **de Cauchy**, al conjunto formado por una EDO y unas **condiciones iniciales**⁴⁵ $y^{(k)}(x_0)$ evaluadas en un mismo valor x_0 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{EDO a resolver: } F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \\ \text{Sujeta a: } \underbrace{y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n)}(x_0) = y_0^{(n-1)}}_{\text{Condiciones Iniciales}} \end{array} \right.$$

El número de *condiciones iniciales* tiene que ser siempre igual al **orden**⁴⁶ de la EDO.

Ejemplo 1.12. Problemas de valor inicial (PVI) para EDO de primer y segundo orden.

$$a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = xy - \sen x^2 \\ y(3) = -10 \end{array} \right. ; \quad b) \quad \left\{ \begin{array}{l} y'' - y' + xy - \sen x^2 = 0 \\ y(-1) = 0 \\ y'(-1) = 2 \end{array} \right.$$

Problema de Frontera o de Contorno (PVF)

Definición 1.18. Problema de Valores Frontera (PVF)

Se denomina **problema de valores frontera** (PVF), **de contorno** o **de Dirichlet**, al conjunto formado por una EDO y unas **condiciones frontera** o **de contorno** $y^{(k_i)}(x_i)$ evaluadas en valores x_i :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{EDO a resolver: } F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \\ \text{Sujeta a: } \underbrace{y^{(k_1)}(x_1) = y_1, y^{(k_2)}(x_2) = y_2, \dots, y^{(k_n)}(x_n) = y_n}_{\text{Condiciones Frontera o de Contorno}} \end{array} \right.$$

Las n condiciones frontera están dadas en valores x_i (no todos iguales) y en valores de las derivadas k_i iguales o distintas.

Ejemplo 1.13. Problemas con condiciones frontera o de contorno

$$a) \quad \left\{ \begin{array}{l} y'' - y' + xy - \sen x^2 = 0 \\ y(0) = 0 \quad ; \quad y(1) = 2 \end{array} \right. \quad b) \quad \left\{ \begin{array}{l} y''' + 2y = t + 1 \\ y(1) = 0 \quad ; \quad y'(0) = 1 \quad ; \quad y''(1) = 1 \end{array} \right.$$

⁴⁵El término *condición inicial* proviene de los sistemas físicos en los que la variable independiente es el tiempo t y donde $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y'_0$ representan respectivamente, la posición y velocidad *iniciales* a tiempo t_0 . El valor t_0 es en muchos casos cero, aunque puede ser cualquier otro valor.

⁴⁶Ver la [Definición 1.6](#), página 8.

1.3.6. Tipos de Soluciones de una EDO

Las familias de soluciones pueden representar todas las soluciones posibles de una EDO o bien solo una parte de ellas.

Definición 1.19. Solución General, Particular y Singular

- La **solución general** de una EDO es una *familia de soluciones*⁴⁷ (con uno o varios parámetros) que contiene todas las funciones solución de la ecuación.

$$y = F(x; c_1, \dots, c_n) \implies \boxed{\text{Solución General}}$$

- Se denomina **solución particular** de una EDO a cada una de las curvas de una familia de soluciones, correspondientes a unos valores concretos c_{i0} de los parámetros c_i .

$$y = F(x; c_1 = c_{10}, \dots, c_n = c_{n0}) \implies \boxed{\text{Solución Particular}}$$

Los valores concretos de los parámetros se determinan a través de unas apropiadas *condiciones iniciales* o *de frontera*⁴⁸ del problema.

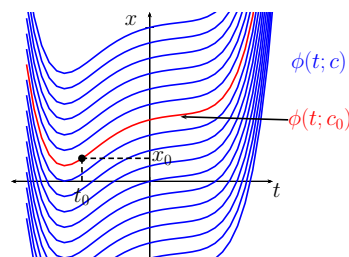
- Una **solución singular** o *extraña*⁴⁹ de una EDO es una *curva integral*⁵⁰ que no pertenece a ninguna *familia de soluciones* y por tanto ni tiene ni depende de ningún parámetro. También se pueden determinar a través de unas apropiadas *condiciones iniciales* o *de frontera* del problema.

$$y = F(x) \implies \boxed{\text{Solución Singular}}$$

Ejemplo 1.14. Solución general

En la siguiente gráfica se muestra la *solución general* de una determinada EDO (familia uniparamétrica de curvas en color azul) y una *solución particular* para unas determinadas *condiciones iniciales* (curva en color rojo).

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, t) \implies \boxed{x = \phi(t; c)} \\ x(t_0) = x_0 \implies \boxed{x = \phi(t; c_0)} \end{cases}$$



Podemos observar como las soluciones corresponden a *curvas integrales* que no se cortan en ningún punto del dominio, lo que indica que esta EDO cumple la *propiedad de unicidad* de sus soluciones⁵¹.

⁴⁷Ver la Definición 1.15, página 14.

⁴⁸Ver la Sección 1.3.5, página 14.

⁴⁹Ver la Sección 1.3.3, página 13.

⁵⁰Ver la Definición 1.12, página 11.

⁵¹Es decir, que por cada punto del dominio pasa únicamente una única *curva integral*, ver la Sección 1.3.2, página 11.

Ejercicio 1.5. Sabiendo que la siguiente EDO no tiene *soluciones singulares*, encontrar su solución general y la solución particular del siguiente PVI:

$$\begin{cases} y' = y \operatorname{sen} x \\ y(\pi) = 2 \end{cases}$$

Primero calculamos la *solución general*, aplicando el *método de separación de variables*⁵²:

$$y' = \frac{dy}{dx} = y \operatorname{sen} x \quad ; \quad \frac{dy}{y} = \operatorname{sen} x \, dx \quad ; \quad \int \frac{dy}{y} = \int \operatorname{sen} x \, dx \quad ; \quad \ln y + \ln c = \ln(cy) = -\cos x$$

$$y = ce^{-\cos x} \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

Para calcular la *solución particular*, es necesario primero calcular el valor del parámetro c . Para ello, aplicando las *condiciones iniciales* se tiene:

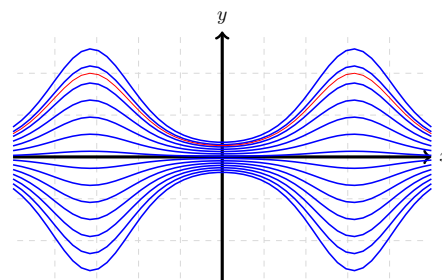
$$y(\pi) = 2 \quad \implies \quad 2 = ce^{-\cos \pi} = ce^{-(-1)} = ce \quad ; \quad c = \frac{2}{e} = 2e^{-1}$$

Finalmente la *solución particular* se obtiene sustituyendo el valor de c en la *solución general*:

$$y = 2e^{-1}e^{-\cos x} = 2e^{-(1+\cos x)}$$

En la siguiente gráfica se muestra una representación de la familia de curvas correspondiente a la solución general (en azul) y la curva de la solución particular (en rojo) para este caso.

Al igual que en el [Ejemplo 1.14, página 16](#), esta EDO cumple la propiedad de unicidad en sus soluciones.



Ejemplo 1.15. Familia de curvas y solución singular

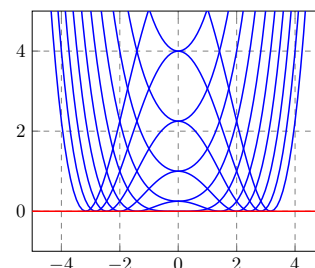
En la siguiente EDO,

$$y' = x\sqrt{y}$$

se puede encontrar fácilmente mediante el *método de separación de variables*⁵³ una familia de curvas solución $y(x)$. Además es fácil comprobar que $y = 0$ también es solución (singular) de la ecuación, que denotaremos por y_s .

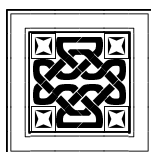
$$\text{Soluciones: } \begin{cases} y(x) = \frac{1}{16}(x^2 + c)^2 \\ y_s = 0 \end{cases}$$

Podemos observar como la solución singular y_s no se puede obtener dando algún valor al parámetro c de la familia de curvas $y(x)$. Además, vemos como las curvas integrales se cruzan en el dominio de definición de la EDO ($y \geq 0$), lo que indica que no se cumple la propiedad de *unicidad* en las soluciones de esta EDO (ver la [Sección 1.3.2, página 11](#)).



⁵²De forma general, todas las constantes de integración que van apareciendo en el proceso de cálculo, se suelen denominar mediante la letra c , aunque como consecuencia de las distintas operaciones realizadas, no necesariamente todas corresponden con el mismo parámetro.

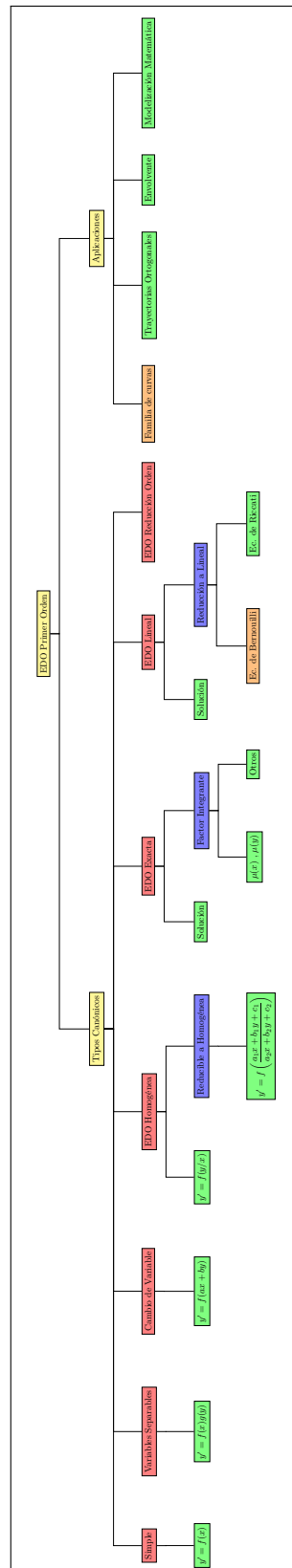
⁵³Ver la [Sección 1.3.3, página 12](#).



Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

Contenido

2.0 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden	21
2.0.1 Métodos de Resolución de Tipos Canónicos	21
2.1 EDO Simple de la forma $y' = f(x)$	21
2.2 EDO de Variables Separables o Separable	23
2.3 EDO de la Forma: $y' = f(ax + by + c)$	23
2.4 EDO Homogéneas	24
2.4.1 EDO Reducibles a Homogéneas	27
2.5 EDO Exactas	29
2.5.1 Factores Integrantes	33
2.6 EDO Lineales	36
2.6.1 EDO Lineal de Primer Orden	36
2.7 Ecuación de Bernoulli	37
2.8 Ecuación de Riccati	38
2.9 Reducción de EDO de Segundo Orden	40
2.10 Resumen: EDO Primer Orden	41
2.11 Aplicaciones de las EDO de Primer Orden	42
2.11.1 Familia de Curvas	42
2.11.2 Trayectorias Ortogonales	43
2.11.3 Modelización Matemática	46



2.0. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

Generalmente es difícil resolver una EDO de primer orden¹:

$$F(x, y, y') = 0$$

Incluso en las sencillas como las explícitas:

$$y' = f(x, y)$$

no siempre es posible encontrar soluciones *analíticas*² (expresadas a través de fórmulas) que permitan obtener su *solución general*³.

En este tema vamos a estudiar los casos denominados **tipos canónicos** de las EDO explícitas de primer orden para los cuales existen métodos sistemáticos de resolución.

2.0.1. Métodos de Resolución de Tipos Canónicos

Los tipos canónicos que estudiaremos son:

1. **EDO Simples** de la forma: $y' = f(x)$
2. **EDO de Variables Separables**
3. **EDO de la Forma:** $y' = f(ax + by + c)$
4. **EDO Homogéneas**
5. **EDO Exactas**
6. **EDO Lineales de Primer Orden**
7. **EDO Reducibles** (reducción de orden, ec. de Bernoulli y ec. de Riccati).

2.1. EDO Simple de la forma $y' = f(x)$

Es el caso más sencillo de EDO. Su resolución es directa mediante integración.

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad ; \quad dy = f(x) dx \quad ; \quad \int dy = \int f(x) dx \quad ; \quad y = \int f(x) dx + c \quad (2.1)$$

Nota 2.1. Una forma alternativa de expresar la integral indefinida anterior es mediante una integral definida de la siguiente forma:

$$\int f(x) dx + c = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

donde x_0 corresponde con la *condición inicial*⁴ del problema.

En algunos casos la **Ecuación (2.1)** se puede determinar por métodos de cálculo más o menos sencillos, sin embargo en otros puede ser muy difícil o incluso imposible hallar una fórmula para el valor de la integral⁵.

Definición 2.1. Integral no Elemental

Una **integral no elemental** es aquella para la cual se puede demostrar que no existe ninguna fórmula en términos de funciones elementales (polinomios, funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas y productos y composiciones de estas funciones) en la que pueda expresarse.

¹Ver la **Definición 1.6**, página 8.

²Ver la **Sección 1.3.2**, página 11.

³Ver la **Definición 1.19**, página 16.

⁴Ver la **Definición 1.17**, página 15.

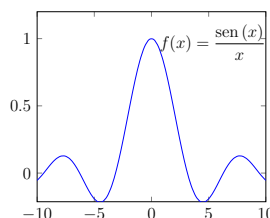
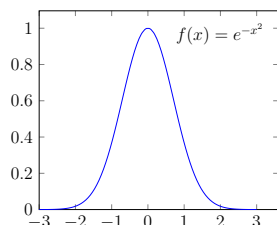
⁵En todos los casos de este curso nos referimos a la integral de Riemann.

Ejemplo 2.1. Integrales no elementales

Las siguientes integrales:

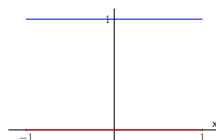
$$\int e^{-x^2} dx \quad , \quad \int \frac{\sin x}{x} dx$$

son no elementales, ya que existen pero sus valores *no* son expresables mediante un número finito de funciones elementales. En las siguientes funciones se observa que sus gráficas son curvas suaves y por tanto sus integrales están bien definidas.



Un ejemplo de una función no integrable Riemann es la función de Dirichlet, definida en el intervalo $[0, 1]$ como:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

**Definición 2.2.** Ecuación Resoluble o Integrable

- En caso de que **no** exista la integral de la **Ecuación (2.1)**, se dice que **no existe solución** para la EDO o que la EDO **no es resoluble**.
- En caso de que **sí** exista, se dice que es una EDO **resoluble** o **integrable**, y puede ser de dos tipos:
 - **Resoluble Analíticamente**: si se puede obtener una solución mediante funciones elementales.
 - **Resoluble por Cuadraturas**⁶: en caso contrario, la solución se tendrá que obtener mediante métodos numéricos.

Ejercicio 2.1. Dada la ecuación: $y' = xe^x$

1. Hallar la solución general.
2. Hallar la solución particular, que verifica $y = 3$ cuando $x = 1$.

1. Calculando la integral por partes se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = xe^x \quad ; \quad dy = xe^x dx \quad ; \quad \int dy = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = e^x(x-1) + c$$

2. Calculamos la constante c para las condiciones iniciales dadas:

$$3 = e^1(1-1) + c \quad ; \quad c = 3 \quad \implies \quad y = e^x(x-1) + 3$$

⁶Las cuadraturas son métodos numéricos de integración.

2.2. EDO de Variables Separables o Separable

Se denominan EDO de variables separables a aquellas de la forma⁷:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x) h(y)}{f(x, y)}$$

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x) dx \quad ; \quad \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx \quad \left\{ \begin{array}{l} H'(y) = 1/h(y) \\ G'(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow H(y) = G(x) + c$$

Al igual que en el caso anterior este tipo de EDO son *sencillas* de resolver, quedando reducidas a un problema de integración, aunque es posible que las integrales resultantes sean difíciles o imposibles de calcular explícitamente.

Las EDO de variables separables son las más sencillas y a la vez son las más importantes, ya que cualquier otro método de resolución de tipos canónicos, se basa esencialmente en aplicar diversos *trucos* para llegar a una EDO separable.

Ejercicio 2.2. Integrar la siguiente ecuación EDO de variables separables:

$$xyy' = y - 1$$

$$\frac{y dy}{y-1} = \frac{dx}{x} \quad ; \quad \int \frac{y dy}{y-1} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \begin{cases} \int \frac{y dy}{y-1} = \int \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) dy = y + \log(y-1) \\ \int \frac{dx}{x} = \log x + k = \log x + \log c = \log(cx) \end{cases}$$

$$y + \log(y-1) = \log(cx) \quad ; \quad \log e^y + \log(y-1) = \log(cx) \Rightarrow e^y(y-1) = cx$$

2.3. EDO de la Forma: $y' = f(ax + by + c)$

Vamos a estudiar las soluciones de las EDO donde aparecen bloques con términos de la forma:

$$y' = f(ax + by + c)$$

siendo⁸ $a, b \neq 0$.

Haciendo el cambio de variable:

$$y' = f(ax + by + c) : \quad t = ax + by + c \quad \longrightarrow \quad \frac{dt}{dx} = a + b \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{t' - a}{b}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$\frac{t' - a}{b} = f(t) \quad ; \quad t' = a + bf(t) \quad (\text{EDO Separable})$$

pudiéndose resolver y deshaciendo posteriormente el cambio de variable para obtener la solución $y(x)$.

Veamos un ejemplo de aplicación de este método.

⁷Este tipo de ecuaciones se ha introducido previamente en la [Sección 1.3.3, página 12](#).

⁸Ya que sería de variables separables en estos casos.

Ejercicio 2.3. Integrar la siguiente ecuación:

$$y' = (x + y)^2$$

Claramente es del tipo $y' = f(ax + by + c)$, por tanto:

$$t = x + y \quad ; \quad t' = 1 + y' \quad ; \quad y' = t' - 1$$

Sustituyendo en el ecuación e integrando:

$$t' - 1 = t^2 \quad ; \quad \frac{dt}{t^2 + 1} = dx \quad ; \quad \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \int dx \quad ; \quad \arctan t = x + c \quad ; \quad t = \tan(x + c)$$

Deshaciendo el c.v.: $x + y = \tan(x + c)$

2.4. EDO Homogéneas

Definición 2.3. Función Homogénea de Grado n

Una función $f(x, y)$ se dice que es **homogénea de grado n** si se cumple:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

Ejemplo 2.2. Funciones Homogéneas

- $f(x, y) = x^2 + y^2 \rightarrow f(tx, ty) = t^2(x^2 + y^2)$ **Función homogénea de grado 2**
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow f(tx, ty) = t\sqrt{x^2 + y^2}$ **Función homogénea de grado 1**
- $f(x, y) = \operatorname{sen} \frac{x}{y} \rightarrow f(tx, ty) = \operatorname{sen} \frac{x}{y}$ **Función homogénea de grado 0**

Definición 2.4. EDO Homogénea

Una EDO de la forma:

$$M(x, y) dx - N(x, y) dy = 0$$

se dice que es **homogénea**⁹ si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son *funciones homogéneas de igual grado*. En tal caso:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)} = f(x, y)$$

siendo la función $f(x, y)$ *homogénea de grado 0* y pudiéndose poner de la forma:

$$f(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right) = f(t)$$

⁹Aquí el término *homogéneo* es algo confuso, ya que no significa lo mismo que en la [Definición 3.2, página 51](#), donde en el caso más sencillo de una ecuación diferencial *lineal de primer orden* (ver la [Sección 2.6.1, página 36](#)) del tipo:

$$a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

se denomina *homogénea* cuando el término independiente $c(x) = 0$.

La búsqueda de la solución de una *EDO homogénea* se hace a través del siguiente cambio de variable¹⁰:

$$\boxed{t = \frac{y}{x}} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = tx \quad ; \quad y' = t'x + t \\ y' = \frac{M(x, y)}{N(x, y)} = \frac{M(x, tx)}{N(x, tx)} = \frac{x^\alpha M(1, t)}{x^\alpha N(1, t)} = \frac{M(1, t)}{N(1, t)} = f(1, t) = f(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{xt' + t = f(t)}$$

Esta es una *EDO Separable*¹¹:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{f(t) - t}{x} \quad ; \quad \frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x} \quad ; \quad \int \frac{dt}{f(t) - t} = \int \frac{dx}{x} \quad (2.2)$$

$$H(t) = \ln(cx) = \ln(x/c') \xrightarrow{c.v.} \boxed{H(y/x) = \ln(cx) = c + \ln x}$$

Notar que la constante de integración c puede ponerse en el numerador, en el denominador ($c = 1/c'$) o como sumando, según interese en cada caso.

En la **Ecuación (2.2)** hay que estudiar dos casos distintos en función de que se anule o no el denominador de la primera integral¹²:

$$\boxed{\int \frac{dt}{f(t) - t} = \int \frac{dx}{x}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Caso 1: } f(t) \neq t \\ \text{Caso 2: } f(t) = t \end{array} \right.$$

Caso 1: $f(t) \neq t$

$$\underbrace{\int \frac{dt}{f(t) - t}}_{\phi(t)} = \int \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{x}{c}\right) \Rightarrow \phi(t) = \ln\left(\frac{x}{c}\right) \Rightarrow \boxed{x = c e^{\phi(t)}}$$

Deshaciendo el cambio de variable se puede obtener la solución en forma paramétrica como:

$$\xrightarrow{y=tx} \left\{ \begin{array}{l} x = c e^{\phi(t)} \\ y = t c e^{\phi(t)} \end{array} \right. ; \quad t \in \mathbb{R}$$

Esta solución corresponde con una familia uniparamétrica de curvas¹³ en *forma paramétrica* que también en muchos casos se puede expresar de forma tradicional¹⁴ $y = F(x)$ (ver **Ejercicio 2.4**, página 26).

Caso 2: $f(t) = t$

Si existe algún valor $t_0 \in \mathbb{R}$ para el cual $f(t_0) = t_0$ no podemos utilizar la versión integral de la **Ecuación (2.2)**, ya que se anula el primer denominador. Sin embargo en este caso se tiene:

$$(\text{Ecuación (2.2)}) \longrightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{f(t_0) - t_0}{x} = 0 \quad ; \quad t = \text{cte} = t_0 \xrightarrow{c.v.} \boxed{y = t_0 x}$$

que corresponde con una recta que pasa por el origen y tiene por pendiente t_0 . Notar que este tipo de soluciones no puede obtenerse a partir de la familia de curvas obtenidas en el Caso 1 y por tanto se trata de una **solución singular**¹⁵.

Veamos unos ejemplos de aplicación de este método.

¹⁰También se puede hacer el cambio de variable $t = x/y$, pudiéndose elegir uno u otro en función de la sencillez de la ecuación resultante. Notar que estos tipos de cambio de variable solo tendrán sentido cuando **no** se anule la variable del denominador.

¹¹Ver la **Sección 2.2**, página 23.

¹²Que corresponderá al caso en el que se anule el valor de la x en la segunda integral.

¹³Ver la **Sección 2.11.1**, página 42.

¹⁴Notar que si podemos despejar t en la expresión $x = c e^{\phi(t)}$, la solución puede expresarse de forma más sencilla como:

$$t = F(x, c) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = xt = x F(x, c)}$$

¹⁵Ver la **Definición 1.19**, página 16.

Ejercicio 2.4. Resolver la EDO:

$$(x + y) dx - (x - y) dy = 0$$

Como $(x + y)$ y $(x - y)$ son funciones homogéneas de grado 1, ésta es una EDO homogénea, por tanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = y' = \frac{x + y}{x - y} = \frac{1 + y/x}{1 - y/x} \stackrel{t=y/x}{=} \frac{1 + t}{1 - t} \\ y = tx \quad ; \quad y' = xt' + t \end{array} \right\} \implies xt' + t = \frac{1 + t}{1 - t} \quad ; \quad xt' = \frac{1 + t^2}{1 - t}$$

Esta es una EDO separable, por tanto reorganizando e integrando se tiene:

$$\int \frac{1 - t}{1 + t^2} dt = \int \frac{dx}{x} = \log(cx) \quad ; \quad \arctan t - \frac{1}{2} \log(1 + t^2) = \log(x) + c$$

$$\arctan t = \log(x \sqrt{1 + t^2}) + c \quad \stackrel{t=y/x}{\longrightarrow} \quad \boxed{\arctan \frac{y}{x} = \log \sqrt{x^2 + y^2} + c}$$

Buscamos si existen soluciones singulares en este caso, analizando cuándo el denominador de la integral en t se anula:

$$1 + t^2 = 0 \implies t = \sqrt{-1}$$

Por tanto, no existen soluciones singulares (reales) en este caso.

Ejercicio 2.5. Integrar la siguiente ecuación:

$$x^2 y' - 3xy - 2y^2 = 0$$

Reordenando los términos:

$$y' = \frac{y(2y + 3x)}{x^2} \implies \text{Función homogénea de grado 2}$$

Por tanto, dividiendo numerador y denominador entre x :

$$y' = \frac{y(2\frac{y}{x} + 3)}{x} \stackrel{t=y/x}{=} t(2t + 3) \quad y' \stackrel{t=y/x}{=} t't'x + t \quad t't'x + t = t(2t + 3) \quad ; \quad t't'x = 2t^2 + 2t = 2t(t + 1)$$

Ahora integramos esta EDO separable:

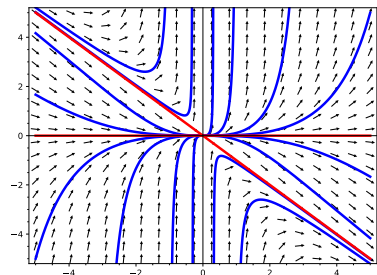
$$\int \frac{dt}{t(t + 1)} = 2 \int \frac{dx}{x} \implies \left\{ \begin{array}{l} \int \frac{dt}{t(t + 1)} = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t + 1} \right) dt = \log(t) - \log(t + 1) = \log \frac{t}{t + 1} \\ \int \frac{dx}{x} = \log(cx) \end{array} \right.$$

$$\log \frac{t}{t + 1} = 2 \log(cx) \quad ; \quad \frac{t}{t + 1} = cx^2 \quad ; \quad t = \frac{cx^2}{1 - cx^2} \quad \stackrel{t=y/x}{\longrightarrow} \quad \boxed{y = \frac{cx^3}{1 - cx^2} = \frac{x^3}{c - x^2} \quad ; \quad c \in \mathbb{R}}$$

Buscamos si existen soluciones singulares en este caso:

$$t(t + 1) = 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} t = 0 \\ t = -1 \end{array} \right\} \stackrel{y=tx}{\longrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ y = -x \end{array} \right.$$

En esta gráfica se muestran en azul algunas curvas integrales pertenecientes a la familia de curvas solución del problema, y en rojo las dos soluciones singulares $y = 0$ e $y = -x$.



2.4.1. EDO Reducibles a Homogéneas

Consideremos las EDO de la forma:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \quad ; \quad a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

Si $a_1 = b_1 = 0$ ó $a_2 = b_2 = 0$ se trata de una EDO de la forma¹⁶:

$$y' = F(ax + by + c)$$

mientras que si $c_1 = c_2 = 0$ se trata de una EDO *homogénea*¹⁷.

En caso contrario, la EDO se puede reducir a una *homogénea* o a una *separable*¹⁸, en función del tipo de soluciones del siguiente sistema homogéneo de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Caso 1: Rectas Secantes

Si el sistema (2.4) tiene una única solución (x_0, y_0) , entonces se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0) \\ a_2x + b_2y + c_2 = a_2(x - x_0) + b_2(y - y_0) \end{cases}$$

y haciendo el C.V.: $\begin{cases} u = x - x_0 \longrightarrow du = dx \\ v = y - y_0 \longrightarrow dv = dy \end{cases} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$

se tiene:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = f\left(\frac{a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0)}{a_2(x - x_0) + b_2(y - y_0)}\right) \implies v' = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right) \longrightarrow \text{EDO Homog.}$$

donde se puede resolver mediante el C.V:

$$t = \frac{u}{v} = \frac{x - x_0}{y - y_0}$$

Este último cambio de variable se puede realizar desde el principio, una vez que se ha determinado que corresponde al caso de rectas secantes (ver el siguiente [Ejercicio 2.6](#)).

Caso 2: Rectas Paralelas

Si las rectas de la [Ecuación \(2.4\)](#) son paralelas, $(a_1, b_1) = k(a_2, b_2)$, con $k \in \mathbb{R}$, (sistema sin solución), entonces:

$$y' = f\left(\frac{k(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \xrightarrow{\text{c.v.}} \left\{ \begin{array}{l} t = a_2x + b_2y \\ t' = a_2 + b_2y' \end{array} ; y' = \frac{t' - a_2}{b_2} \right\} \left[\frac{t' - a_2}{b_2} = f\left(\frac{kt + c_1}{t + c_2}\right) \right] \longrightarrow \text{EDO Var. Separables}$$

Ejercicio 2.6. Integrar la siguiente ecuación mediante un C.V. apropiado:

$$y' = \frac{x + y + 4}{x - y - 6}$$

Se trata de una EDO reducible a homogénea, ver la [Ecuación \(2.3\)](#), por tanto vamos a encontrar el tipo de soluciones del sistema homogéneo formado por el numerador y denominador. En este caso claramente corresponde con un par de rectas secantes, con solución:

$$\begin{cases} x + y + 4 = 0 \\ x - y - 6 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = -5 \end{cases} \quad (2.5)$$

¹⁶Ver la [Sección 2.3](#), página 23.

¹⁷Ver la [Sección 2.4](#), página 24.

¹⁸Ver la [Sección 2.2](#), página 23.

$$y' = \frac{(x-1) + (y+5)}{(x-1) - (y+5)} = \frac{1 + \frac{y+5}{x-1}}{1 - \frac{y+5}{x-1}} \xrightarrow{\text{C.V.}} \begin{cases} u = \frac{y+5}{x-1} \\ y = u(x-1) - 5 \end{cases} ; \quad y' = u'(x-1) + u$$

Aplicamos por tanto el método visto en la sección anterior:

$$u'(x-1) + u = \frac{1+u}{1-u} \quad ; \quad u'(x-1) = \frac{1+u^2}{1-u} \quad ; \quad \int \frac{1-u}{1+u^2} du = \int \frac{dx}{x-1}$$

$$\arctan u - \frac{1}{2} \log(1+u^2) = \log[c(x-1)] \quad ; \quad u = \tan \log \left[c(x-1) \sqrt{1+u^2} \right] \quad (2.6)$$

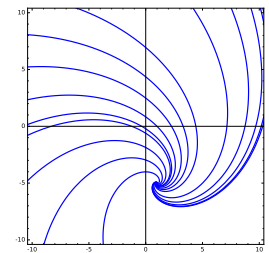
Estudiamos ahora la existencia de soluciones singulares:

$$\frac{1+u}{1-u} = u \quad ; \quad 1+u = u-u^2 \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{-1} \quad (\text{No tiene sol. singulares})$$

Finalmente deshaciendo el cambio de variable en la **Ecuación (2.6)** se tiene la solución final:

$$\frac{y+5}{x-1} = \tan \log \left[c(x-1) \sqrt{1 + \left(\frac{y+5}{x-1} \right)^2} \right]$$

En la gráfica vemos que las soluciones corresponden a espirales con centro $(1, -5)$ correspondiente con el punto solución del sistema de la **Ecuación (2.5)**.



Ejercicio 2.7. Integrar la siguiente ecuación mediante un C.V. apropiado:

$$y' = \frac{x-2y+1}{x-2y-2}$$

En este caso claramente las dos rectas son paralelas no coincidentes, (al tener la misma pendiente pero distinta ordenada en el origen), y por tanto el sistema no tiene solución. Realizamos el siguiente cambio de variable:

$$t = x - 2y \quad \Rightarrow \quad t' = 1 - 2y' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1-t'}{2}$$

Sustituyendo en la EDO: $\frac{1-t'}{2} = \frac{t+1}{t-2} \quad ; \quad \frac{dt}{dx} = 1 - 2 \frac{t+1}{t-2} = \frac{-t-4}{t-2}$

Se trata de una EDO separable, por tanto:

$$\frac{2-t}{t+4} dt = dx \quad ; \quad \int \left(-1 + \frac{6}{t+4} \right) dt = \int dx \quad ; \quad -t + 6 \log(t+4) = x + c$$

Deshaciendo el cambio de variable se obtiene la siguiente familia de curvas solución:

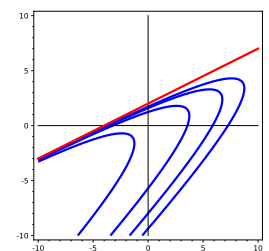
$$-x + 2y + 6 \log(x - 2y + 4) = x + c \quad \Rightarrow \quad 2y + 6 \log(x - 2y + 4) = 2x + c$$

Analizamos ahora la existencia de soluciones singulares.

$$t + 4 = 0 \quad ; \quad t = -4 \quad \Rightarrow \quad x - 2y = -4 \quad \Rightarrow \quad y_s = \frac{1}{2}x + 2$$

En la siguiente gráfica se muestran algunas de las curvas de la familia de soluciones (en azul) junto con la solución singular (en rojo).

Vemos que la familia de curvas son una especie de parábolas que se transforman en una recta en la solución singular.



2.5. EDO Exactas

Dada una familia de curvas¹⁹:

$$f(x, y) = c$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es un parámetro²⁰, se puede calcular la *diferencial total*²¹ a ambas partes de la expresión:

$$Df(x, y) = \underbrace{Dc}_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

obteniéndose una EDO de la forma:

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (2.7)$$

y donde en este caso particular las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ verifican:

$$M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad ; \quad N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Definición 2.5. Diferencial Exacta y Función Potencial

Sea una EDO de la siguiente forma:

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad \xrightarrow{\text{solución}} \quad f(x, y) = c \quad \text{cumpliendo} \quad \begin{cases} f_x = M(x, y) \\ f_y = N(x, y) \end{cases}$$

entonces cada uno de estos términos se denominan:

- $M(x, y) dx + N(x, y) dy$ **Diferencial Exacta**
- $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ **Ecuación Diferencial Exacta**
- $f(x, y)$ **Función Potencial**²²

Toda EDO de primer orden explícita $y' = f(x, y)$ se puede expresar como²³:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y) = \frac{-M(x, y)}{N(x, y)} \quad \Rightarrow \quad M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

Aunque no todas serán *EDO exactas*, al no existir una función $f(x, y)$ que verifique que $f_x = M$ y $f_y = N$.

¹⁹Ver la Sección 2.11.1, página 42.

²⁰Ver la Definición 1.14, página 13.

²¹La **diferencial total** de una función escalar de varias variables $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, denotada por df o Df , corresponde con la *combinación lineal* de los diferenciales de las variables x_i y cuyos coeficientes son las componentes del vector gradiente de la función, $\nabla f = [\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}]$, de la forma:

$$df = Df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

²²De forma general, una función vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que verifica $\vec{F} = \nabla f$ para alguna función escalar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, se denomina *campo vectorial gradiente*, siendo f la *función o campo potencial* de $\vec{F}$, y se dice que $\vec{F}$ *deriva de un potencial*. En estos casos la función $\vec{F}$ es un *campo conservativo* y verifica que su integral de línea sobre cualquier curva cerrada es cero. Ver por ejemplo "Clases de Cálculo II para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 313..

²³Las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ asociadas a una EDO no son únicas.

Teorema 2.1. EDO Exacta

La condición necesaria y suficiente para que la ecuación (2.7) con $M(x, y), N(x, y) \in \mathcal{C}^1$ sea una **diferencial exacta** en un determinado dominio $\mathcal{D}$, es que se cumpla:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Demostración 2.1.

Si la función $f(x, y) \in \mathcal{C}^2$, lo cual es común en la mayoría de aplicaciones prácticas, se cumple la igualdad de las derivadas cruzadas²⁴, verificándose entonces:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \implies \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

siendo ésta la condición necesaria y suficiente para que una EDO de la forma (2.7) sea exacta.

Ejercicio 2.8. Determinar cuáles de las siguientes EDO son exactas.

- a) $(2x - 1)dx + (3y + 7)dy = 0$ b) $(2x + y)dx - (x + 6y)dy = 0$
 c) $(x^2y^3 + y\sqrt{x})dx + x^3y^2dy = 0$ d) $\left(\frac{y}{x^2} - 4x^3 + 3y \sin 3x\right)dx + \left(2y - \frac{1}{x} - \cos 3x\right)dy = 0$

Según el Teorema 2.1 tenemos que comprobar si existe un dominio donde $M, N \in \mathcal{C}^1$ y además $M_y = N_x$.

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} M = 2x - 1 \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(2x - 1) = 0 \\ N = 3y + 7 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(3y + 7) = 0 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} M, N \in \mathcal{C}^1 \text{ en } \mathbb{R}^2 \\ \text{EDO exacta en } \mathbb{R}^2 \end{array} \right.$$

$$\text{b) } \left\{ \begin{array}{l} M = 2x + y \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(2x + y) = 1 \\ N = -(x + 6y) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(-x - 6y) = -1 \end{array} \right\} \implies \text{No es una EDO exacta}$$

$$\text{c) } \left\{ \begin{array}{l} M = x^2y^3 + y\sqrt{x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^3 + y\sqrt{x}) = 3x^2y^2 + \sqrt{x} \\ N = x^3y^2 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(x^3y^2) = 3x^2y^2 \end{array} \right\} \implies \text{No es una EDO exacta}$$

- d) En este caso M y N solo son de clase $\mathcal{C}^1$ en la región $\mathcal{D}$ formada por la unión de los semiplanos $x > 0$ y $x < 0$ de $\mathbb{R}^2$, siendo ambos simplemente conexos. Además:

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \frac{y}{x^2} - 4x^3 + 3y \sin 3x \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2} - 4x^3 + 3y \sin 3x \right) = \frac{1}{x^2} + 3 \sin 3x \\ N = 2y - \frac{1}{x} + \cos 3x \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(2y - \frac{1}{x} - \cos 3x \right) = \frac{1}{x^2} + 3 \sin 3x \end{array} \right\} \implies \text{EDO exacta en } \mathcal{D}$$

²⁴Ver por ejemplo "Clases de Cálculo II para Ingeniería" en la Bibliografía, pág. 313..

En algunos casos simples es relativamente sencillo hallar la solución de una *EDO exacta* por inspección y atendiendo a las reglas de derivación.

Ejercicio 2.9. Encontrar la familia uniparamétrica de curvas asociada a las siguientes EDO exactas.

a) $y \, dx + x \, dy = 0$ b) $\frac{1}{y} \, dx - \frac{x}{y^2} \, dy = 0$ c) $\frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} \, dx - \frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y} \, dy = 0$

- a) Si consideramos la función $xy = c$ donde c es una constante y derivamos ambas partes (primero con respecto a x y después con respecto a y) y teniendo en cuenta la derivada de un producto, se tiene la ecuación diferencial del enunciado:

$$xy = c \implies y \, dx + x \, dy = 0$$

Notar que este mismo resultado se obtiene derivando con respecto a x ambas partes de la igualdad y posteriormente reordenando los términos:

$$xy = c \implies \frac{d}{dx}(xy) = \frac{d}{dx}c \implies y + x \frac{dy}{dx} = 0 \implies y \, dx + x \, dy = 0$$

Por tanto la solución general de esta ecuación diferencial es la familia de soluciones:

$$\boxed{xy = c}$$

- b) En este caso si consideramos la función $\frac{x}{y} = c$ con c constante y derivamos ambas partes (con respecto a x e y) se tiene la ecuación diferencial del enunciado:

$$xy^{-1} = c \implies y^{-1} \, dx - xy^{-2} \, dy = 0 \implies \frac{1}{y} \, dx - \frac{x}{y^2} \, dy = 0$$

De igual forma se obtiene el mismo resultado derivando con respecto a x ambas partes de la igualdad y teniendo en cuenta la regla de la cadena:

$$\frac{x}{y} = c \implies \frac{d}{dx} \frac{x}{y} = \frac{d}{dx}c \implies \frac{1y - x \frac{dy}{dx}}{y^2} = 0 \implies \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \frac{dy}{dx} = 0 \implies \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \frac{dy}{dx} = 0$$

Por tanto la solución general de esta ecuación diferencial es:

$$\boxed{\frac{x}{y} = c}$$

- c) En este caso si consideramos la función $\sin \frac{x}{y} = c$ con c constante y derivamos ambas partes (con respecto a x e y) se tiene la ecuación diferencial del enunciado:

$$\sin \frac{x}{y} = c \implies \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} \, dx - \frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y} \, dy = 0$$

También se obtiene el mismo resultado derivando con respecto a x ambas partes de la igualdad y teniendo en cuenta la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \sin \frac{x}{y} = c &\implies \frac{d}{dx} \sin \frac{x}{y} = \frac{d}{dx}c \implies \cos \left(\frac{x}{y} \right) \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \frac{dy}{dx} \right) = 0 \implies \\ &\implies \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} \, dx - \frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y} \, dy = 0 \end{aligned}$$

Por tanto la solución general de esta ecuación diferencial es:

$$\boxed{\sin \frac{x}{y} = c}$$

Método General de Resolución de EDO Exactas

Dada una EDO exacta²⁵ de la forma: $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$

1. Buscamos una función $f(x, y)$ que cumpla²⁶:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \implies f(x, y) = \int M(x, y) dx + c(y) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) \implies f(x, y) = \int N(x, y) dy + c(x) \quad (2.9)$$

En caso de ser posible, calculamos ambas integrales, teniendo en cuenta que $c(x)$ y $c(y)$ son las constantes de integración, pero dependiendo cada una de ellas de una única variable distinta, (son por tanto funciones en este caso).

2. Determinación de las funciones $c(x)$ y $c(y)$.

$$\int M(x, y) dx + c(y) = \int N(x, y) dy + c(x)$$

Generalmente se pueden determinar por simple comparación, para que los dos términos sean iguales. En los casos más complicados, teniendo en cuenta el Teorema 2.1, página 30 se tiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = M \xrightarrow{(2.9)} \frac{\partial}{\partial x} \left[\int N dy + c(x) \right] = M \implies \frac{\partial}{\partial x} \int N dy + c'(x) = M \\ \frac{\partial f}{\partial y} = N \xrightarrow{(2.8)} \frac{\partial}{\partial y} \left[\int M dx + c(y) \right] = N \implies \frac{\partial}{\partial y} \int M dx + c'(y) = N \end{cases}$$

Despejando las constantes e integrando respecto a su variable se obtiene²⁷:

$$c(x) = \int \left[M - \frac{\partial}{\partial x} \int N dy \right] dx \quad ; \quad c(y) = \int \left[N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right] dy$$

Basta calcular solamente una de ellas para obtener el valor de $f(x, y)$.

3. La familia de curvas solución²⁸ de la EDO es:

$$f(x, y) = c \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 2.10. Integrar la siguiente ecuación:

$$(12x + 5y - 9) dx + (5x + 2y - 3) dy = 0$$

Primero vamos a comprobar si es una EDO exacta verificando la condición del Teorema 2.1, página 30, $M_y = N_x$.

$$\begin{cases} M(x, y) = 12x + 5y - 9 \longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 5 \\ N(x, y) = 5x + 2y - 3 \longrightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 5 \end{cases} \implies \text{Sí}$$

²⁵Ver la Definición 2.5, página 29.

²⁶Tener en cuenta que cuando se integra con respecto a una variable, la constante de integración no depende de esa variable, pero sí puede depender de otras. De ahí las funciones $c(x)$ y $c(y)$.

²⁷Por el teorema fundamental del Cálculo:

$$\int c'(x) dx = \int \frac{d}{dx} c(x) dx = \int d[c(x)] = c(x) \quad ; \quad \int c'(y) dy = \int \frac{d}{dy} c(y) dy = \int d[c(y)] = c(y)$$

²⁸Notar que la solución de la EDO **no** es la función potencial buscada $f(x, y)$, sino la función potencial igualada una constante c .

Seguimos entonces los pasos del método general:

1. Buscamos la función potencial $f(x, y)$.

$$\begin{cases} f(x, y) = \int M(x, y) dx = \int (12x - 9 + 5y) dx = \underbrace{6x^2 - 9x}_{c(x)} + 5xy + c(y) \\ f(x, y) = \int N(x, y) dy = \int (2y - 3 + 5x) dy = \underbrace{y^2 - 3y}_{c(y)} + 5xy + c(x) \end{cases}$$

2. Ahora tenemos que determinar las funciones $c(x)$ y $c(y)$. Por simple comparación vemos que ambas expresiones tienen en común el término $5xy$ que depende de x e y , y cada una de ellas tiene una parte (en azul) que solo depende de una de las variables en cada caso. Por tanto:

$$\begin{cases} c(x) = 6x^2 - 9x + c \\ c(y) = y^2 - 3y + c \end{cases} \implies \boxed{f(x, y) = 5xy + 6x^2 - 9x + y^2 - 3y + c}$$

siendo c una constante de integración y que por tanto no depende ni de x ni de y .

2.5.1. Factores Integrantes

Las EDO *exactas* son poco frecuentes. Sin embargo, una función **no** exacta se puede transformar en exacta, multiplicando por una determinada función $\mu(x, y)$.

$$\mu(x, y) [M(x, y) dx + N(x, y) dy] = 0 \implies \mu M dx + \mu N dy = 0$$

Definición 2.6. Factor Integrante

Cualquier función $\mu(x, y) \neq 0$ que transforme por multiplicación una EDO no exacta en exacta se denomina **factor integrante**.

Existencia de Factores Integrantes

Toda EDO que admite soluciones tiene al menos un factor integrante.

En el caso de una EDO exacta, dada una familia uniparamétrica de curvas $f(x, y) = c$, se tiene:

$$f(x, y) = c \implies \boxed{\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0} \implies \frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y} \quad (2.10)$$

Sea una EDO no exacta cuya familia de curvas solución es la anterior función $f(x, y) = c$:

$$\boxed{M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0} \implies \frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N} \quad (2.11)$$

Para transformar esta EDO en exacta podemos igualar los términos de la **Ecuación (2.10)** y de la **Ecuación (2.11)**:

$$-\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{M}{N} \implies \frac{f'_x}{M} = \frac{f'_y}{N} = \mu(x, y)$$

Por tanto:

$$\left. \begin{matrix} f'_x = \mu M \\ f'_y = \mu N \end{matrix} \right\} \implies \boxed{\mu M dx + \mu N dy = 0} \quad \text{EDO Exacta}$$

Generalmente hay diferentes factores integrantes para transformar una EDO en exacta. El siguiente teorema expresa las condiciones que tienen que cumplir los factores integrantes.

Teorema 2.2. Factor Integrante

Dada una EDO:

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

Según el **Teorema 2.1, página 30**, la condición necesaria y suficiente para que una función $\mu(x, y)$ sea un factor integrante de esta ecuación es:

$$\mu M dx + \mu N dy = 0 \implies \frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \implies \mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$\frac{1}{\mu} \left(N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \quad (2.12)$$

Esto corresponde con una EDP²⁹ cuyas soluciones $\mu(x, y)$ son todos los factores integrantes de la EDO.

En la mayoría de los casos, resolver la EDP **Ecuación (2.12)** es mucho más difícil que resolver la EDO original. Sin embargo, no necesitamos la solución general sino que cualquier solución particular puede valer.

Cálculo Práctico de Factores Integrantes

Una solución particular sencilla de la EDP **Ecuación (2.12)** aparece si μ solo dependiera o bien de x o bien de y , ya que en estos casos la EDP se transformaría en una EDO.

- $\mu(x, y) = \mu(x) \implies \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dx} ; \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0 \implies \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N} = c(x)$

Si existe un factor integrante que solo depende de x el segundo término $c(x)$ solo puede depender de x . Resolviendo entonces la EDO:

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx} = c(x) ; \quad \frac{d(\log \mu)}{dx} = c(x) \implies \mu(x) = e^{\int c(x) dx}$$

- $\mu(x, y) = \mu(y) \implies \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0 ; \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dy} \implies \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dy} = \frac{N_x - M_y}{M} = c(y)$

Si existe un factor integrante que solo depende de y el segundo término $c(y)$ solo puede depender de y . Resolviendo entonces la EDO:

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dy} = c(y) ; \quad \frac{d(\log \mu)}{dy} = c(y) \implies \mu(y) = e^{\int c(y) dy}$$

Ejercicio 2.11. Integrar la siguiente EDO encontrando un factor integrante que dependa de una sola variable:

$$(4x + 3y^3) dx + 3xy^2 dy = 0$$

Primero vamos a comprobar si es una EDO exacta verificando la condición del **Teorema 2.1, página 30**:

$$M_y \stackrel{?}{=} N_x \implies \left\{ \begin{array}{ll} M(x, y) = 4x + 3y^3 & \longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 9y^2 \\ N(x, y) = 3x^2 & \longrightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 3y^2 \end{array} \right\} \implies \text{No}$$

²⁹Ecuación Diferencial en derivadas Parciales. Ver la definición en la **Sección 1.2.3, página 7** y el **Tema 7, página 175**.

Vemos que ambas expresiones son muy parecidas. Vamos a ver por ejemplo si existe un factor integrante de la forma $\mu(x)$. En tal caso se tiene que cumplir:

$$\begin{aligned} \mu(x)(4x + 3y^3) dx + \mu(x)(3xy^2) dy = 0 & \xrightarrow{M_y=N_x} \left\{ \begin{array}{l} M_y = 9y^2\mu \\ N_x = \mu'3xy^2 + \mu3y^2 \end{array} \right\} \\ \Rightarrow 9y^2\mu = 3xy^2\mu' + 3y^2\mu & ; \quad 3x\mu' = 6\mu \quad \Rightarrow \quad \text{EDO Separable !} \\ \int \frac{d\mu}{\mu} = 2 \int \frac{dx}{x} & ; \quad \log \mu = \log cx^2 \quad ; \quad \boxed{\mu = cx^2} \end{aligned}$$

Nos sirve cualquier solución particular que no sea nula, por tanto tomamos la más sencilla para $c = 1$: $\mu(x) = x^2$. Aplicamos entonces este factor integrante a la EDO original, transformándola en una EDO equivalente³⁰ pero exacta:

$$\begin{aligned} x^2(4x + 3y^3) dx + x^2(3xy^2) dy = 0 \\ \xrightarrow{\text{Met. General, pag. 32}} \left\{ \begin{array}{l} f(x, y) = \int M dx = \int (4x^3 + 3x^2y^3) dx = x^4 + x^3y^3 + c(y) \\ f(x, y) = \int N dy = \int (3x^3y^2) dy = x^3y^3 + c(x) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Comparando ambas, la solución final queda:

$$\left\{ \begin{array}{l} c(y) = 0 + c \\ c(x) = x^4 + c \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{x^4 + x^3y^3 = c}$$

Otros Factores Integrantes

En el caso de que no sea sencillo encontrar factores integrantes μ que solo dependan de x o de y , también se puede buscar otros factores integrantes sencillos de forma que la Ecuación (2.12) sea fácil de resolver.

Por ejemplo se puede buscar $\mu(x, y)$ que dependa de formas como: $x^\alpha y^\beta$, $x + y$, xy , etc. y que cumplan las condiciones para ser factor integrante:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

Otra forma de obtener factores integrantes μ es tener en cuenta fórmulas diferenciales sencillas como por ejemplo:

$$\begin{aligned} d(xy) &= xdy + ydx & ; & & d(x^2 + y^2) &= 2(xdx + ydy) \\ d\left(\frac{y}{x}\right) &= \frac{xdy - ydx}{x^2} & ; & & d\left(\frac{x}{y}\right) &= \frac{ydx - xdy}{y^2} \\ d(\arctan \frac{x}{y}) &= \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} & ; & & d(\log \frac{x}{y}) &= \frac{ydx - xdy}{xy} \end{aligned}$$

Si reordenando la EDO original y multiplicando por alguna expresión sencilla (factor integrante), se obtiene alguna de estas fórmulas, su resolución es inmediata.

Ejercicio 2.12. Resolver la siguiente EDO:

$$ydx + (x^2y - x)dy = 0$$

Reordenando los términos se tiene:

$$x^2ydy - (xdy - ydx) = 0$$

Dividiendo ahora por x^2 (es decir que el factor integrante es $\mu = 1/x^2$):

$$ydy - \frac{xdy - ydx}{x^2} = ydy - d\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int ydy - \int d\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} = c}$$

³⁰Es decir una EDO distinta pero con las mismas soluciones.

2.6. EDO Lineales

El tipo más importante de EDO es el de las **lineales**, en las que la *derivada de orden más alto* es una *función lineal*³¹ de las derivadas de órdenes inferiores. Las *EDO lineales* se clasifican en función de su orden³²:

- **EDO Lineal de Primer Orden** : $y' = a(x)y + b(x)$
- **EDO Lineal de Segundo Orden** : $y'' = a(x)y' + b(x)y + c(x)$
- **EDO Lineal de Orden n** : $y^{(n)} = a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y + f(x)$

2.6.1. EDO Lineal de Primer Orden

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (2.13)$$

De forma general este tipo de ecuaciones **no** son de *variables separables*³³, aunque puede ser *homogénea*³⁴ o *exacta*³⁵.

Resolución de EDO Lineales

La forma más sencilla de resolver este tipo de EDO es darse cuenta del siguiente resultado:

$$\frac{d}{dx} \left(y e^{\int a(x) dx} \right) = y' e^{\int a(x) dx} + y a(x) e^{\int a(x) dx} = e^{\int a(x) dx} [y' + a(x)y] \quad (2.14)$$

De forma que si multiplicamos ambas partes de la **Ecuación (2.13)** por $e^{\int a dx}$ se obtiene:

$$e^{\int a dx} [y' + ay] = e^{\int a dx} b \quad \xrightarrow{(2.14)} \quad \frac{d}{dx} [y e^{\int a dx}] = b e^{\int a dx} \implies y e^{\int a dx} = \int b e^{\int a dx} dx + c$$

$$y = e^{-\int a dx} \left[\int b e^{\int a dx} dx + c \right] \quad (2.15)$$

Explicación: Factor Integrante

La fórmula anterior puede explicarse matemáticamente buscando un *factor integrante*³⁶ de la ecuación. Primeramente reordenamos la **Ecuación (2.13)** :

$$\frac{dy}{dx} + ay = b \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = b - ay \implies \underbrace{(ay - b)}_{M(x,y)} dx + \underbrace{1}_{N(x,y)} dy = 0$$

Ahora buscamos un factor integrante de la forma³⁷ $\mu(x)$:

$$\mu(ay - b) dx + \mu dy = 0 \quad \xrightarrow{\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}} \quad \mu a = \mu'$$

Resolviendo esta EDO se obtiene el factor integrante:

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int a dx \implies \log \mu = \int a dx \implies \mu = e^{\int a dx}$$

Existen otros métodos de resolver la EDO lineal de primer orden, como suma de la solución general de la homogénea más una solución particular³⁸ $y = y_h + y_p$, la búsqueda de soluciones de la forma $u(x)v(x)$, o bien por el *método de variación de parámetros*³⁹, pero todos ellos dan el mismo resultado de la **Ecuación (2.15)**.

³¹Ver la **Definición 1.8**, página 9.

³²Ver la **Definición 1.6**, página 8.

³³Ver la **Sección 2.2**, página 23.

³⁴Ver la **Sección 2.4**, página 24.

³⁵Ver la **Sección 2.5**, página 29.

³⁶Ver la **Sección 2.5.1**, página 33.

³⁷Ver la **Sección 2.5.1**, página 34.

³⁸Ver el **Teorema 3.2**, página 56.

³⁹Ver la **Sección 3.3.2**, página 69.

Ejercicio 2.13. Integrar la siguiente EDO lineal de primer orden:

$$xy' - 3y = x^4$$

Utilizamos la fórmula:

$$y = e^{-\int a dx} \left[\int b e^{\int a dx} dx + c \right]$$

Solo tenemos que identificar las funciones $a(x)$ y $b(x)$ e integrar. Reordenando la EDO original a la forma $y' + a(x)y = b(x)$ se tiene:

$$y' + \underbrace{-\frac{3}{x}}_{a(x)} y = \underbrace{x^3}_{b(x)}$$

Calculamos primero las integrales:

$$\begin{cases} \int a dx = -\int \frac{3}{x} dx = -3 \log x = \log \frac{1}{x^3} & \Rightarrow e^{\int a dx} = e^{\log \frac{1}{x^3}} = \frac{1}{x^3} \\ \int b e^{\int a dx} dx = \int x^3 \frac{1}{x^3} dx = \int dx = x \end{cases}$$

Entonces:

$$y = e^{-\int a dx} \left[\int b e^{\int a dx} dx + c \right] = e^{-\log \frac{1}{x^3}} [x + c] = e^{\log x^3} (x + c) = x^3(x + c) \Rightarrow y = x^3(x + c)$$

2.7. Ecuación de Bernoulli

Definición 2.7. Ecuación de Bernoulli

Se denomina **ecuación de Bernoulli** a la siguiente EDO de primer orden no lineal:

$$y' + a(x)y = b(x)y^n \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } n = 0 & \text{EDO Lineal} \\ \text{Si } n = 1 & \text{EDO Separable} \\ \text{Si } n \neq \{0, 1\} & \text{Ec. Bernoulli} \end{cases}$$

La *ecuación de Bernoulli* se puede reducir a una EDO lineal mediante el siguiente cambio de variable.

$$\begin{aligned} t = y^{1-n} & \Rightarrow t' = (1-n)y^{-n}y' \quad ; \quad y' = \frac{1}{1-n}t'y^n \\ y' + a(x)y = b(x)y^n & \Rightarrow \frac{1}{1-n}t'y^n + a(x)y = b(x)y^n \quad ; \quad t' + (1-n)a(x)y^{1-n} = (1-n)b(x) \\ t' + (1-n)a(x)t & = (1-n)b(x) \quad \text{EDO Lineal} \end{aligned}$$

Las *ecuaciones de Bernoulli* para $n > 0$ tienen además como *solución singular*⁴⁰ la *solución de equilibrio*:

$$y(x) = 0 \quad ; \quad x \neq 0$$

⁴⁰Ver la Sección 1.3.6, página 16.

Ejercicio 2.14. Resolver la siguiente ecuación, de Bernoulli: $xy' + y = x^4y^3$

Como en este caso $n = 3$ hacemos el c.v.: $t = y^{1-3} = y^{-2}$; $t' = -2y^{-3}y'$; $y' = -\frac{1}{2}y^3t'$
Sustituyendo en la EDO:

$$-\frac{1}{2}xy^3t' + y = x^4y^3 \quad ; \quad -\frac{1}{2}xt' + t = x^4 \quad ; \quad t' - \frac{2}{x}t = -2x^3 \rightarrow \text{EDO Lineal}$$

Teniendo en cuenta⁴¹: $y' + a(x)y = b(x) \Rightarrow y = e^{-\int a dx} \left[\int b e^{\int a dx} dx + c \right]$

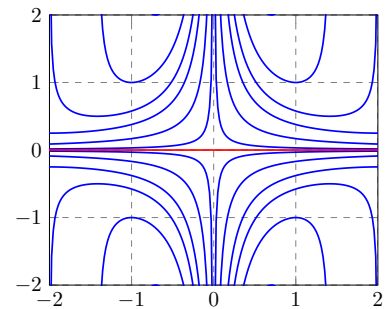
$$\left\{ \begin{array}{l} e^{-\int a dx} = e^{-\int -\frac{2}{x} dx} = e^{2 \log x} = e^{\log x^2} = x^2 \Rightarrow e^{\int a dx} = \frac{1}{x^2} \\ \int b e^{\int a dx} dx = \int (-2x^3) \frac{1}{x^2} dx = -2 \int x dx = -x^2 + c \end{array} \right\} \Rightarrow t = x^2(-x^2 + c)$$

Deshaciendo el cambio de variable $t = y^{-2}$ se obtiene la familia de curvas solución:

$$y^{-2} = x^2(c - x^2) \Rightarrow y^2 = \frac{1}{x^2(c - x^2)}$$

Como $n = 3 > 0$ además tiene la solución de equilibrio:

$$y(x) = 0$$



2.8. Ecuación de Riccati

Definición 2.8. Ecuación de Riccati

Se denomina **ecuación de Riccati**⁴² a la siguiente EDO de primer orden no lineal:

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$$

Generalmente es imposible resolver analíticamente la ecuación de Riccati, excepto que se conozca una *solución particular*⁴³ $y_p(x)$ de la ecuación. En estos casos, haciendo un cambio de variable apropiado puede transformarse la EDO original en una de Bernoulli⁴⁴ o mejor todavía en una lineal de primer orden⁴⁵.

- Cambio de Variable 1: $t = y - y_p$

$$y = y_p + t \quad ; \quad y' = y_p' + t'$$

Sustituyendo en la EDO:

$$(t' + y_p') + a(x)(t + y_p) + b(x)(t + y_p)^2 = c(x)$$

$$[t' + a(x)t + b(x)t(t + 2y_p)] + \underbrace{[y_p' + a(x)y_p + b(x)y_p^2]}_0 = c(x)$$

Reordenando los términos: $t' + [a(x) + 2b(x)y_p]t = -b(x)t^2$ (Ec. Bernoulli)

⁴¹Ver la Sección 2.6.1, página 36.

⁴²En honor al matemático italiano Jacopo Francesco Riccati (1676 – 1754).

⁴³Ver la Definición 1.19, página 16.

⁴⁴Ver la Sección 2.7, página 37.

⁴⁵Ver la Sección 2.6.1, página 36.

- Cambio de Variable 2: $\frac{1}{t} = y - y_p$

$$y = y_p + \frac{1}{t} \quad ; \quad y' = y'_p - \frac{t'}{t^2}$$

Sustituyendo en la EDO:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{t'}{t^2} + y'_p\right) + a(x) \left(\frac{1}{t} + y_p\right) + b(x) \left(\frac{1}{t} + y_p\right)^2 &= c(x) \\ \left[-\frac{t'}{t^2} + a(x)\frac{1}{t} + b(x)\frac{1}{t} \left(\frac{1}{t} + 2y_p\right)\right] + \underbrace{[y'_p + a(x)y_p + b(x)y_p^2]}_0 &= c(x) \end{aligned}$$

Multiplicando por $-t^2$ y reordenando los términos: $t' - [a(x) + 2b(x)y_p]t = b(x)$ (Ec. Lineal)

Ejercicio 2.15. Resolver la siguiente ecuación de Riccati:

$$y' + 2xy = 1 + x^2 + y^2$$

sabiendo que una solución particular de la misma es $y_p(x) = x$.

Haciendo el primer cambio de variable:

$$t = y - y_p = y - x \quad \Rightarrow \quad y = t + y_p = t + x \quad ; \quad y' = t' + y'_p = t' + 1$$

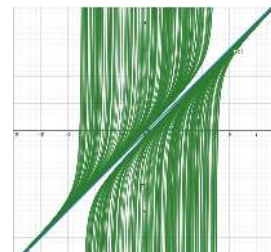
Sustituyendo en la EDO:

$$t' + 1 + 2x(t + x) = 1 + x^2 + (t + x)^2 \quad ; \quad t' + 2xt + 2x^2 = x^2 + t^2 + 2tx + x^2 \quad ; \quad t' = t^2$$

$$\int \frac{dt}{t^2} = \int dx \quad ; \quad -\frac{1}{t} = x + c \quad \xrightarrow{\text{c.v.}} \quad -\frac{1}{y-x} = x + c \quad ; \quad (x-y)(x+c) = 1$$

Notar que esta familia de curvas solución no incluye la solución particular dada en el enunciado, lo que hace suponer que se trata de una solución singular.

En la siguiente gráfica se muestra la familia de curvas solución (verde) junto con la solución particular $y_p = x$ que corresponde con una solución singular o extraña (azul).



Ejercicio 2.16. Resolver la siguiente ecuación de Riccati:

$$\begin{cases} y' = -2xy + y^2 + x^2 \\ y_p(x) = x + 1 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que en este caso $a(x) = 2x$, $b(x) = -1$ y $c(x) = x^2$, vamos a usar los dos tipos de cambio de variable en su resolución:

- Cambio de Variable 1: $t = y - y_p$

La ec. de Bernouilli que queda es:

$$t' + [a(x) + 2b(x)y_p]t = -b(x)t^2 \quad \Rightarrow \quad t' + [2x - 2(x+1)]t = t^2 \quad ; \quad t' - 2t = t^2$$

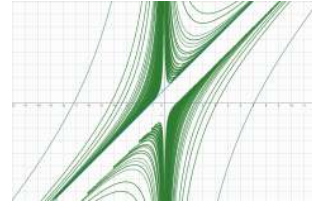
que en este caso particular, también es de variables separables, por tanto:

$$\int \frac{dt}{t(t+2)} = \int dx \quad ; \quad \int \left(\frac{1/2}{t} - \frac{1/2}{t+2}\right) dt = \int dx \quad ; \quad \frac{1}{2} \ln \frac{t}{t+2} = x+c \quad ; \quad \frac{t}{t+2} = ce^{2x}$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$t = y - y_p = y - x - 1 \implies \frac{y - x - 1}{y - x + 1} = ce^{2x}$$

Por la gráfica de las soluciones comprobamos que $y = x - 1$ también es otra solución singular.



- Cambio de Variable 2: $\frac{1}{t} = y - y_p$

La ec. lineal que queda es:

$$t' - [a(x) + 2b(x)y_p]t = b(x) \implies t' - [2x - 2(x+1)]t = -1 \quad ; \quad t' + 2t = -1$$

que también es de variables separables, por tanto:

$$\int \frac{dt}{2t+1} = - \int dx \quad ; \quad \frac{1}{2} \ln(2t+1) = -x + c \quad ; \quad 2t+1 = ce^{-2x}$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$t = \frac{1}{y - y_p} = \frac{1}{y - x - 1} \implies \frac{2}{y - x - 1} + 1 = ce^{-2x} \quad ; \quad \frac{y - x + 1}{y - x - 1} = ce^{-2x}$$

Que vemos que coincide con la anterior.

2.9. Reducción de EDO de Segundo Orden

Una EDO general de segundo orden tiene la forma:

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

Existen dos casos sencillos de este tipo de EDO que pueden ser resueltos mediante los métodos vistos de EDO de primer orden:

1. Ausencia de variable dependiente y : $F(x, y', y'') = 0$

Haciendo el cambio de variable: $t = y'$ donde ⁴⁶ $t(x)$ y $t' = \frac{dt}{dx}$.

$$y'' = \frac{dt}{dx} = t' \implies f(x, t, t') = 0 \quad (\text{EDO } 1^{\text{er}} \text{ Orden})$$

2. Ausencia de variable independiente x : $F(y, y', y'') = 0$

Haciendo el cambio de variable ⁴⁷: $t = y'$ donde ⁴⁸ $t(y)$ y $t' = \frac{dt}{dy}$.

Haciendo uso de la regla de la cadena se tiene:

$$y'' = \frac{dt}{dx} = \frac{dt}{dy} \frac{dy}{dx} = t' t \implies f(y, t, t') = 0 \quad (\text{EDO } 1^{\text{er}} \text{ Orden})$$

En ambos casos la solución se obtiene resolviendo **dos** EDO de primer orden sucesivas.

⁴⁶La variable t depende de la variable independiente x .

⁴⁷En este caso al no aparecer la variable independiente x , con el cambio de variable vamos a considerar t la variable dependiente e y la variable independiente, ya que de otra forma se tendrían tres variables: x , y y t .

⁴⁸En este caso la variable t depende de la variable y que pasa a ser la variable independiente en la ecuación transformada por el cambio de variable.

Ejercicio 2.17. Integrar la EDO: $y'' + x = 1$

Claramente es una EDO de segundo orden a la que le falta la variable dependiente y , por tanto hacemos el cambio de variable: $t = y'$, donde $t(x)$ y por tanto $t' = dt/dx$.

$$\left. \begin{array}{l} y' = t \\ y'' = t' \end{array} \right\} \implies t' + x = 1 \implies \int dt = \int (1 - x) dx \implies t = x - \frac{x}{2} + c_1$$

Teniendo en cuenta que $t = y'$ tenemos que deshacer el C.V. y volver a integrar:

$$y' = \frac{dy}{dx} = x - \frac{x}{2} + c_1 \quad ; \quad \int dy = \int \left(x - \frac{x^2}{2} + c_1 \right) dx \quad ; \quad \boxed{y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2}$$

Ejercicio 2.18. Integrar la EDO: $y'' + k^2 y = 0$; $k \in \mathbb{R}$

En este caso es una EDO de segundo orden a la que le falta la variable independiente x , por tanto hacemos el cambio de variable: $t = y'$, donde $t(y)$ y por tanto $t' = dt/dy$.

$$\left. \begin{array}{l} y' = t \\ y'' = tt' \end{array} \right\} \implies tt' + k^2 y = 0$$

Esta ecuación resultante es de *variables separables*, por tanto:

$$\int t dt = -k^2 \int y dy \quad ; \quad \frac{t^2}{2} = -k^2 \frac{y^2}{2} + c \quad ; \quad t = \sqrt{k^2 c_1 - k^2 y^2} = k \sqrt{c_1 - y^2}$$

Teniendo en cuenta que $t = y'$ tenemos que deshacer el C.V. y volver a integrar:

$$y' = \frac{dy}{dx} = k \sqrt{c_1 - y^2} \quad ; \quad \int \frac{dy}{\sqrt{c_1 - y^2}} = k \int dx \quad ; \quad \arcsen \frac{y}{c_1} = kx + c_2 \quad ; \quad \boxed{y = c_1 \sen(kx + c_2)}$$

2.10. Resumen: EDO Primer Orden

1	Var. Separables	$y' = g(x)h(y)$
2	C.V. Lineal	$y' = f(ax + by + c)$
3	Homogénea	$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$
4	Exacta	$\begin{cases} M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \\ M_y = N_x \end{cases}$
5	Factor Integrante	$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0$
6	Lineal	$y' = P(x)y + Q(x)$
7	Bernoulli	$y' = A(x)y + B(x)y^n$
8	Ricatti	$y' = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$
9	Reducibles Orden	$\begin{cases} F(x, y', y'') = 0 \\ F(y, y', y'') = 0 \end{cases}$

2.11. Aplicaciones de las EDO de Primer Orden

2.11.1. Familia de Curvas

Hasta ahora hemos visto que⁴⁹:

1. La **solución general** de una EDO de primer orden contiene normalmente un **parámetro**⁵⁰ (constante arbitraria).
2. Asignando valores a este parámetro se obtiene una **familia de soluciones** denominadas **curvas integrales**.
3. Cada *curva integral* es una **solución particular** correspondiente a unas **condiciones iniciales** o de **frontera**.

En este tema vamos a estudiar de forma general las familias de n -paramétricas de curvas y su relación con las EDO.

Definición 2.9. Familia n -paramétrica de Curvas

Una familia n -paramétrica de curvas es un conjunto de funciones que vienen dadas por una ecuación que depende de n parámetros c_i .

$$f(x, y; c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$$

Las funciones que componen una familia n -paramétrica de curvas, son curvas integrales de una EDO de orden n . De forma general, los pasos a seguir para obtener esta EDO son:

1. Derivar la ecuación n veces con respecto a la variable independiente x :

$$f(x, y; c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{d}{dx} f = g_1(x, y, y'; c_1, \dots, c_n) = 0 \\ \frac{d^2}{dx^2} f = g_2(x, y, y', y''; c_1, \dots, c_n) = 0 \\ \vdots \\ \frac{d^n}{dx^n} f = g_n(x, y, y', \dots, y^{(n)}; c_1, \dots, c_n) = 0 \end{cases}$$

De esta forma se obtiene un conjunto de n ecuaciones $\{g_1 = 0, \dots, g_n = 0\}$ con n incógnitas $\{c_1, \dots, c_n\}$, cuyas soluciones son del tipo:

$$c_i = h_i(x, y, y', \dots, y^{(n)})$$

2. Sustituyendo los valores c_i anteriores en la familia de curvas, se obtiene la EDO buscada:

$$f(x, y; c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \quad \xrightarrow{c_1, \dots, c_n} \quad F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Si la familia es **uniparamétrica**, hay una forma alternativa para los casos en los que se pueda despejar el único parámetro: $f(x, y) = c$.

1. Calcular la derivada total: $Df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$

2. Despejar la derivada: $\frac{dy}{dx} = \frac{-f'_x}{f'_y}$

⁴⁹Ver la Sección 1.3.6, página 16.

⁵⁰Ver la Definición 1.14, página 13.

Ejercicio 2.19. Encontrar la EDO correspondiente a la siguiente familia de curvas:

$$x^2 + y^2 = 2cx$$

Como en este caso se trata de una familia uniparamétrica de curvas, lo vamos a hacer por las dos formas:

Forma 1:

1. Aplicando la regla de la cadena: $\frac{d}{dx}F[y(x)] = \frac{dF}{dy} \frac{dy}{dx}$, derivamos la ecuación con respecto a x :
 $2x + 2yy' = 2c$
2. Eliminamos c , despejando c de las dos funciones e igualando:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 2cx \\ 2x + 2yy' = 2c \end{array} \right\} \frac{x^2 + y^2}{2x} = x + yy'$$

3. Despejamos, si es posible, el valor de la derivada:

$$y' = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{2xy} = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

Forma 2:

1. Aislamos c : $x + \frac{y^2}{x} = 2c$
2. Calculamos la derivada total Df : $\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx + \frac{2y}{x} dy = 0$
3. Despejamos la derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y} \left(\frac{y^2}{x^2} - 1 \right) = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

- En general, una *familia de curvas* no engloba a todas las soluciones de una EDO, ya que pueden existir otras soluciones *singulares* o *extrañas*⁵¹.
- Tampoco se puede asegurar que toda EDO tenga una *familia de curvas* que sea su solución.

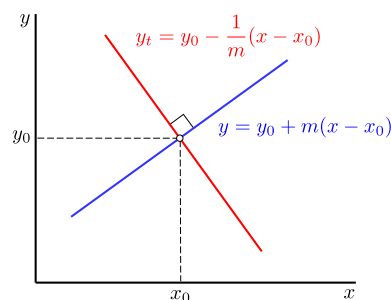
2.11.2. Trayectorias Ortogonales

Recordamos que dada una recta r que pasa por el punto del plano (x_0, y_0) con pendiente m , tiene por ecuación:

$$y = y_0 + m(x - x_0),$$

La ecuación de la recta ortogonal (perpendicular) a r que pasa por el punto (x_0, y_0) tiene por ecuación:

$$y = y_0 - \frac{1}{m}(x - x_0)$$



Vamos a extender este concepto al de *familia de curvas*.

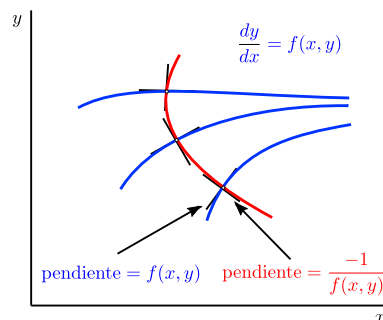
⁵¹Ver la Definición 1.19, página 16.

Definición 2.10. Trayectorias o Curvas Ortogonales

Se dice que una determinada **curva** es **ortogonal** a una **familia de curvas**, si cada uno de los puntos de la curva es ortogonal a cada una de las curvas de la familia en algún punto.

En la siguiente gráfica se muestra una familia de curvas (en azul) correspondientes a la solución general de una EDO, y una trayectoria (en rojo) que es ortogonal en puntos determinados de cada una de las curvas de la familia.

La recta tangente de cada curva es ortogonal a la recta tangente de la trayectoria en cada uno de los puntos de corte.

**Definición 2.11. Familia de Trayectorias Ortogonales**

Dada una familia uniparamétrica de curvas, definida por una EDO de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

entonces la familia de las trayectorias ortogonales a la primera familia viene dada por la siguiente EDO de primer orden⁵²:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{f(x, y)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = -f(x, y)$$

Dada una familia uniparamétrica de curvas:

$$f(x, y; c) = 0$$

Los pasos a seguir para obtener la familia de trayectorias ortogonales a dicha familia son:

1. Derivando y eliminando el parámetro⁵³ c , obtener la EDO asociada a la familia⁵⁴:

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y; c) = 0 \\ \frac{df}{dx} \rightarrow g(x, y, y'; c) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y' = F(x, y)$$

2. La EDO asociada a la familia de trayectorias ortogonales es:

$$y' = -\frac{1}{F(x, y)}$$

3. Resolver la EDO anterior:

$$h(x, y, c) = 0$$

⁵²Ambas expresiones en rojo son equivalentes.

⁵³Para ello se despeja la constante c de ambas expresiones y se igualan.

⁵⁴Ver la Sección 2.11.1, página 42.

Ejercicio 2.20. Calcular las trayectorias ortogonales a la familia de curvas.

$$y = ce^{-x}$$

Seguimos los pasos descritos anteriormente:

1. Derivamos con respecto a x :

$$y' = -ce^{-x}$$

Ahora eliminamos el parámetro c :

$$\left. \begin{array}{l} y = ce^{-x} \\ y' = -ce^{-x} \end{array} \right\} \implies y' = -y$$

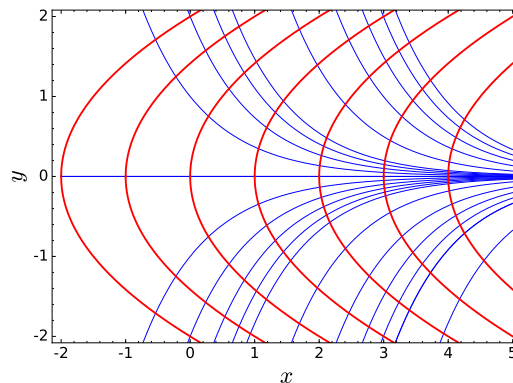
2. Encontramos la EDO asociada a la familia de trayectorias ortogonales:

$$y' = \frac{1}{y}$$

3. Resolvemos la EDO:

$$ydy = dx \quad ; \quad \int ydy = \int dx \quad \implies \quad \boxed{\frac{y^2}{2} = x + c}$$

En la siguiente gráfica se muestran algunas curvas de la familia de curvas original (en azul) y de su correspondiente familia de curvas ortogonales (en rojo), comprobándose que en los puntos de corte mostrados entre ambas, sus respectivas rectas tangentes son ortogonales.



2.11.3. Modelización Matemática

Muchos de los problemas ingenieriles pueden estudiarse y solucionarse más fácilmente si se expresan en lenguaje matemático. La descripción matemática de un sistema o fenómeno se denomina *modelización matemática*.

Los pasos a seguir para la formulación de un modelo matemático son:

1. Identificación de las variables que definen el sistema. El número y tipo de variables elegidas definen el nivel de resolución del modelo.
2. Establecimiento de hipótesis (leyes, teoremas, etc.) razonables sobre el sistema.
3. Resolución del sistema y comprobación con la respuesta esperada y si es necesario cambio del modelo (nivel de resolución, hipótesis, etc.)

Las EDO de primer orden representan una forma de modelar fenómenos de muy diversa índole (físicos, químicos, ingenieriles, etc.). Vamos a ver algunos de los más representativos.

Ley de Newton del Enfriamiento

Cuando la diferencia de temperaturas entre un cuerpo y su medio ambiente no es demasiado grande, el calor (Q) transferido en la unidad de tiempo (t) hacia el cuerpo o desde el cuerpo por *convección* es aproximadamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo (T) y el medio ambiente (T_a).

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha S(T - T_a) \quad ; \quad dQ = -mCdT$$

donde α es el coeficiente de intercambio de calor, S la superficie del cuerpo, $m = \rho V$ su masa y C el calor específico.

$$\rho VC \frac{dT}{dt} = -\alpha S(T - T_a) \implies \boxed{\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)} \quad ; \quad k = \frac{\alpha S}{\rho VC}$$

donde k

Dinámica de Poblaciones

En 1798 el economista inglés Thomas Malthus estableció una sencilla ecuación para modelar el *crecimiento demográfico* humano. Para ello supuso que la *tasa de crecimiento de la población* (variación de la población en un determinado periodo de tiempo) es proporcional a la población total (P).

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = kP}$$

Básicamente establece que a mayor población mayor crecimiento de la misma.

Ecuación Logística

La ecuación anterior es bastante aproximada y no tiene en cuenta muchos otros factores. Una ecuación más precisa es considerar que k es función de P : $k = f(P)$.

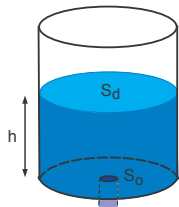
La dependencia más sencilla es $k = a - bP$, la cual tiene en cuenta también los efectos negativos de la masificación sobre el crecimiento de poblaciones:

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = (a - bP)P = aP - bP^2}$$

Esta ecuación se le denomina *ecuación logística* o de *Verhulst*.

Ley de Torricelli

La velocidad de vaciado de un depósito con agua a una altura h , a través de un pequeño orificio (sin rozamiento) situado en el fondo del depósito, es la misma que la que tendría una gota de agua al caer libremente de una altura h , es decir $v = \sqrt{2gh}$. Llamando V al volumen de líquido en el depósito a un tiempo t , S_d a la superficie de depósito y S_o a la superficie del orificio, se tiene:



$$\frac{dV}{dt} = -S_o \sqrt{2gh} \quad ; \quad V = hS_d \quad ; \quad \boxed{\frac{dh}{dt} = -\frac{S_o}{S_d} \sqrt{2gh}}$$

Desintegración Radiactiva

La desintegración radiactiva consiste en la transformación de átomos inestables (radio, uranio, etc.) en otro tipo de átomos. Aproximadamente la velocidad de desintegración es proporcional a la cantidad de sustancia radiactiva (A):

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = -kA}$$

Caída Libre y Resistencia del Aire

La velocidad (v) de caída de un objeto desde una altura h viene dada por la acción de dos fuerzas: la gravedad, que tira del cuerpo, y la fricción con el aire, que se opone a la caída. Según la segunda ley del movimiento de Newton, si la masa del cuerpo es m y g la aceleración de la gravedad, esto puede expresarse como:



$$\boxed{m \frac{dv}{dt} = mg - kv}$$

Ejercicio 2.21. El modelo logístico de crecimiento de una población viene regulado por la ecuación diferencial $P' = aP - bP^2$.

- Determinar la población en un instante t sabiendo que la población inicial es M .
- Calcular la población de peces en un estanque el año 1998 sabiendo que se inició con 1.000 peces el año 1990 y se estimó que durante los años 1992 y 1994 era de 3.000 y 5.000 peces respectivamente.
- ¿Cuál es la población de equilibrio a largo plazo?

i) Resolvemos la EDO de variables separables:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP}{dt} = aP - bP^2 \\ P(t_0) = M \end{array} \right\} \quad ; \quad \int_M^P \frac{dP}{P(a - bP)} = \int_{t_0}^t dt \quad ; \quad -\frac{1}{a} \log \frac{bP - a}{P} \Big|_M^P = t - t_0$$

$$\frac{1}{a} \log \frac{P(a - bM)}{M(a - bP)} = t - t_0 \quad ;$$

$$\boxed{P(t) = \frac{aM}{bM + (a - bM)e^{a(t-t_0)}}$$

ii) Primero vamos a reordenar la ecuación:

$$P(t) = \frac{aM}{bM + (a - bM)e^{a(t-t_0)}} = \frac{1}{\frac{b}{a} + \left(\frac{1}{M} - \frac{b}{a}\right)e^{a(t_0-t)}}$$

Ahora hacemos un cambio de variables que simplifique el resultado.

$$P(T) = \frac{1}{X + (1/M - X)Y^{T/2}} \quad \begin{cases} X = b/a \\ Y = e^{-2a} \\ T = t - t_0 \end{cases} ; \quad P = P/1000$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_0 = 1990; T = 0 \\ M = 1000 \rightarrow 1 \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{l} t = 1992; T = 2 \\ P = 3000 \rightarrow 3 \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{l} t = 1994; T = 4 \\ P = 5000 \rightarrow 5 \end{array} \right\}$$

Por último determinamos el valor de los parámetros con los datos del problema.

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 = \frac{1}{X + (1 - X)Y^{-2}} \\ 5 = \frac{1}{X + (1 - X)Y^{-4}} \end{array} \right\} \quad \begin{cases} X = 1/6 \\ Y = 1/5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = \frac{6}{1 + 5^{1-T/2}}}$$

Entonces para los datos pedidos:

$$1998 \rightarrow P(8) = \frac{6}{1 + 5^{1-4}} = 5.95238 \Rightarrow P(1998) \approx 5952 \text{ peces}$$

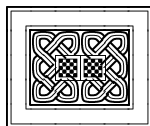
iii)

Forma 1: equilibrio $\Leftrightarrow P' = \frac{dP}{dt} = 0$

$$aP - bP^2 = 0 \quad ; \quad P = \frac{a}{b} = \frac{1}{X} = 6 \quad (\text{miles de peces})$$

Forma 2: largo plazo $\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$

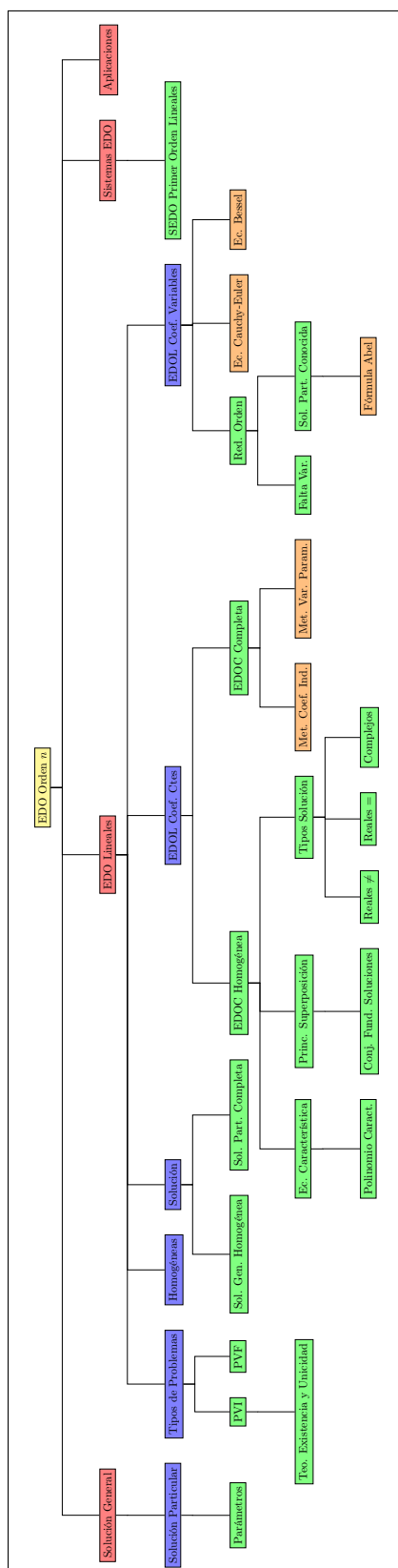
$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{6}{1 + 5^{1-T/2}} = 6$$



EDO Lineales de Orden Superior

Contenido

3.1 EDO Lineales de Orden n	51
3.1.1 Introducción	51
3.1.2 Solución de una EDOL	51
3.1.3 Tipos de Problemas con EDOL	52
3.1.4 Existencia y Unicidad de las Soluciones	54
3.1.5 Solución de una EDOL	56
3.2 EDOL con Coeficientes Constantes Homogénea (EDOCH)	57
3.2.1 Dependencia e Independencia Lineal de Funciones: Wronskiano	59
3.2.2 Solución de una EDOCH: Casos Particulares	60
3.2.3 Resumen: Soluciones de una EDOCH	63
3.3 EDOL con Coeficientes Constantes Completa (EDOC)	64
3.3.1 Método de los Coeficientes Indeterminados	64
3.3.2 Método de Variación de Parámetros	69
3.3.3 Función de Green	75
3.4 EDOL con Coeficientes Variables	76
3.4.1 Reducción de Orden por falta de un Tipo de Variable	76
3.4.2 Reducción de Orden conocida una Solución Particular: Fórmula de Abel	76
3.4.3 Ecuación de Cauchy-Euler	79
3.4.4 Ecuación de Bessel	82
3.5 Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (SEDO)	86
3.5.1 Sistemas de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden Lineales	87
3.6 Aplicaciones de las EDO de Orden Superior	88
3.6.1 Circuitos Eléctricos	88
3.6.2 Sistemas Mecánicos	89



3.1. EDO Lineales de Orden n

3.1.1. Introducción

Una EDO de orden n (EDON) tiene la forma¹:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

donde x es la variable independiente, $y(x)$ es la variable dependiente o función incógnita de la ecuación e $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}$ son las derivadas de orden k de $y(x)$ con respecto a x .

Ejemplo 3.1. Ejemplos de EDO de orden n

- $xy'' + yy' = \sin x$
- $y''' - x^2 y'' = y' - \log y$
- $3 \frac{d^5 x}{dt^5} + y \frac{d^4 x}{dt^4} - 2 \frac{d^3 x}{dt^3} = 0$

Ya que muy pocas EDO no lineales se pueden resolver de forma explícita, necesitando métodos numéricos para su resolución, en este curso nos centraremos únicamente en las EDO *lineales*² de orden n (EDOL).

Definición 3.1. EDO Lineal de Orden n (EDOL)

Una EDO Lineal de orden n (EDOL) es aquella que tiene la forma general:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (3.1)$$

donde las funciones $a_i(x)$ y la función $f(x)$ son continuas en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.2. Ejemplos de EDOL de diferentes órdenes.

- $xy'' + x^2 y' = \sin x$
- $2y''' - 3y'' = y' - \log x$
- $(3x^2 - \sin x) \frac{d^5 y}{dx^5} + 2 \frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{d^3 y}{dx^3} = 0$

Definición 3.2. EDO Lineal de Orden n Homogénea (EDOLH)

Se dice que una EDOL dada por la Ecuación (3.1) es **homogénea**³ si $f(x) = 0$.

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (3.2)$$

3.1.2. Solución de una EDOL

Definición 3.3. Solución de una EDOL

Una solución de una EDOL es cualquier función $y(x) = \phi(x)$ que verifique la EDOL⁴.

¹Ver la Definición 1.9, página 10.

²Ver la Definición 1.8, página 9.

³Esta terminología no debe confundirse con la utilizada en la Sección 2.4, página 24.

⁴Obligatoriamente la función solución tendrá que ser n veces derivable.

Ejemplo 3.3. Solución de una EDOL

La siguiente función:

$$y = 3 \operatorname{sen}(2x) + \cos(2x)$$

es una solución de la EDOL de segundo orden:

$$y'' + 4y = 0$$

ya que:

$$\begin{aligned} y' &= 6 \cos(2x) - 2 \operatorname{sen}(2x) & ; & & y'' &= -12 \operatorname{sen}(2x) - 4 \cos(2x) \\ \Rightarrow & & & & y'' + 4y &= -12 \operatorname{sen}(2x) - 4 \cos(2x) + 4[3 \operatorname{sen}(2x) + \cos(2x)] = 0 \end{aligned}$$

Definición 3.4. Solución General y Particular de una EDOL

- El conjunto de todas las soluciones de una EDOL se denomina **solución general**⁵ y viene dada en forma de una *familia n -paramétrica de curvas*⁶:

$$y(x) = \phi(x; c_1, c_2, \dots, c_n)$$

donde los c_i son los *parámetros* (ver la **Definición 1.14**, página 13).

- Cada una de las soluciones que componen la *solución general* se denominan **solución particular** y están asociadas a unos valores determinados de los *parámetros* c_i .

Solo en las EDO lineales (EDOL) se puede asegurar una *solución general* que contenga **todas** las soluciones de la ecuación⁷. De forma general las EDO de orden⁸ n (EDON) pueden tener soluciones en forma de familias de curvas, pero éstas no necesariamente agrupan a todas las soluciones de la ecuación⁹.

3.1.3. Tipos de Problemas con EDOL

Para poder determinar la solución de un *problema*¹⁰ de una EDOL debe estar **bien definido**, es decir, es necesario que además de especificar la ecuación, se den n condiciones adicionales que permitan obtener las n constantes c_i de la solución general.

Existen dos formas de especificar las n condiciones, dando lugar a dos tipos de problemas distintos¹⁰:

- Problema de Valor Inicial (PVI)
- Problema de Valores en la Frontera (PVF)

Definición 3.5. Problema de Valor Inicial (PVI)

Se denomina un **problema de valor inicial** (PVI) de una EDOL, al conjunto de la EDO y de n *condiciones iniciales*¹¹ en un mismo punto $x = x_0$.

$$\begin{cases} a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

⁵Ver la **Definición 1.19**, página 16.

⁶Ver la **Sección 1.3.4**, página 14.

⁷Sin *soluciones singulares* o *extrañas*, ver la **Sección 1.3.3**, página 13.

⁸Ver la **Sección 3.1.1**, página 51.

⁹Ver el **Ejemplo 1.15**, página 17 y el **Ejercicio 2.5**, página 26.

¹⁰Ver la **Sección 1.3.5**, página 14.

¹¹Ver la **Definición 1.17**, página 15.

Ejemplo 3.4. Ejemplo de un PVI,

$$\begin{cases} xy''' + 3y'' + (1 + x^2)y = \cos x \\ y(-2) = 3, \quad y'(-2) = 0, \quad y''(-2) = 1 \end{cases}$$

Definición 3.6. Problema de Valores en la Frontera (PVF)

Se denomina un **problema de valores frontera** (PVF) de una EDOL, al conjunto de la EDO y de n *condiciones frontera*¹² definidas en puntos distintos del dominio.

$$\begin{cases} a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \\ \sum_{i=1}^n \alpha_{1i} y^{(i-1)}(x_1) = \beta_1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \alpha_{ni} y^{(i-1)}(x_n) = \beta_n \end{cases}$$

siendo las constantes $\alpha_{ij}, \beta_i \in \mathbb{R}$ y $x_i \in I$ los puntos del dominio de definición de la ecuación.

En una EDOL de orden 2, las *condiciones frontera* se pueden expresar de forma general como:

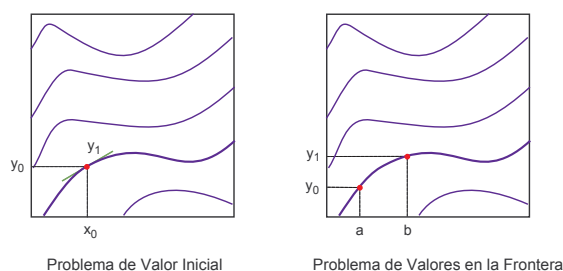
$$\begin{cases} \alpha_{11} y(a) + \alpha_{12} y'(a) = \beta_1 \\ \alpha_{21} y(b) + \alpha_{22} y'(b) = \beta_2 \end{cases}$$

donde $a, b \in I$ y $\alpha_{ij}, \beta_i \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.5. PVF con EDOL de distintos órdenes.

$$\begin{cases} y'' + 3y' - y = 0 \\ y(0) = 3, \quad y(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} xy''' + 3y'' + (1 + x^2)y = \cos x \\ 2y(0) + y'(1) = 3 \\ y(1) = 0, \quad y''(1) = 2 \end{cases}$$

Ejemplo 3.6. PVI y PVF.



En esta figura se muestra de forma esquemática la *solución general* de una EDO lineal de segundo orden correspondiente a los dos tipos de problemas: PVI y PVF.

A la izquierda se representa un *problema de condiciones iniciales* (PVI) en el punto $x = x_0$ donde se especifican los valores de la función y_0 y de su primera derivada y_1 en dicho punto, permitiendo identificar una *solución particular*.

¹²Ver la [Definición 1.18](#), página 15.

En la gráfica de la derecha se muestra un *problema de valores en la frontera* (PVF) donde se han especificado el valor de la solución particular en dos puntos distintos a y b del dominio. En este caso también se podría haber especificado el valor y la pendiente en dos puntos distintos, dos pendientes en puntos distintos o alguna relación lineal de ambos.

En realidad la situación es más complicada, ya que normalmente las curvas integrales se intersectan unas con otras¹³, como muestra el siguiente ejemplo con una situación más realista del problema.

Ejemplo 3.7. Soluciones particulares.

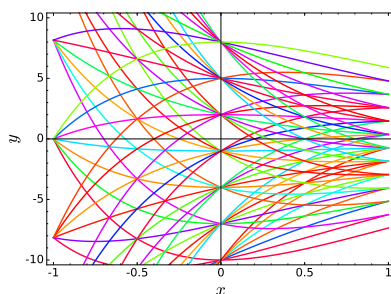
La siguiente EDOL,

$$y'' + 2y' + y = 0$$

tiene por solución general:

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-x}$$

Dando valores a c_1 y c_2 se obtienen sus infinitas soluciones particulares. En la siguiente gráfica se muestran algunas de esas soluciones particulares, en diferentes colores, en un determinado dominio.



Podemos observar como las curvas integrales se intersectan mutuamente, lo que indica que existen infinitas curvas integrales que pasan por cada uno de los puntos del dominio.

Por ello, en las EDO de orden $n > 1$ es necesario especificar más de una condición inicial o de frontera para obtener una única solución, ya que al aumentar el número de *parámetros* en la familia de curvas, aumenta la densidad de curvas en el gráfico.

Por ejemplo en esta EDO al ser de segundo orden necesitamos dos condiciones para referenciar una solución particular que pasa por un punto (x_0, y_0) del plano $x - y$, que podría ser por ejemplo el valor $y(x_0) = y_0$ y el de su derivada $y'(x_0) = y'_0$.

3.1.4. Existencia y Unicidad de las Soluciones

Teorema 3.1. Existencia y Unicidad para un PVI

Para todo PVI¹⁴ de una EDOL¹⁵ del tipo¹⁶:

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

donde las funciones $a_i(x)$ y $f(x)$ son continuas en un intervalo I , **existe** siempre una **única** solución en I .

¹³Notar que si no fuera así, no serían necesarias varias condiciones iniciales. Si por cada punto del dominio pasase una única solución, como ocurre con algunos problemas de primer orden vistos en el tema anterior, solo sería necesario especificar una condición que sería por ejemplo un punto determinado del dominio de la solución.

¹⁴Ver la **Definición 3.5**, página 52.

¹⁵Ver la **Definición 3.1**, página 51.

¹⁶Aquí se considera que el coeficiente $a_n(x) \neq 0$ en todo el dominio I y se ha dividido la ecuación por esa función para tener un coeficiente 1 en la derivada $y^{(n)}$.

Este teorema solo es válido para los PVI. En los PVF, aun verificando las hipótesis del teorema, puede ocurrir cualquier cosa: solución única, varias soluciones o sin solución.

Ejemplo 3.8. Existencia y unicidad de soluciones.

El siguiente PVI,

$$\begin{cases} y'' + \frac{1}{x}y' + (1+x^2)y = \cos x \\ y(0) = 1, y'(0) = 1 \end{cases}$$

No tiene asegurada ni la existencia ni la unicidad de sus soluciones en el intervalo $[-1, 1]$, ya que la función $\frac{1}{x}$ **no** es continua en ese intervalo. Por tanto su solución puede existir o no para esas condiciones y en caso de existir puede ser una sola función solución o varias.

Ejemplo 3.9. Existencia y unicidad de soluciones.

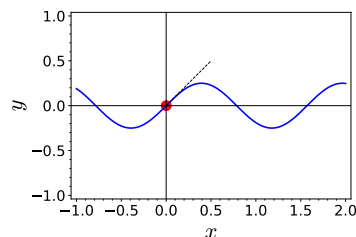
Sea la siguiente EDO:

$$y'' + 16y = 0$$

- Al tratarse de una EDO de segundo orden **lineal**, las soluciones de **cualquiera** de sus PVI siempre *existirán* y serán *únicas*. El siguiente es un ejemplo.

$$\begin{cases} y'' + 16y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

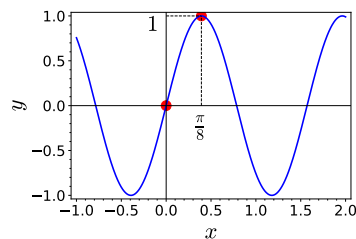
En la gráfica podemos ver la única curva solución que cumple las dos condiciones iniciales.



- Los PVF formados por esta ecuación no tienen garantizada ni la *existencia* ni la *unicidad* de sus soluciones. Aquí mostramos tres ejemplos con comportamientos distintos.

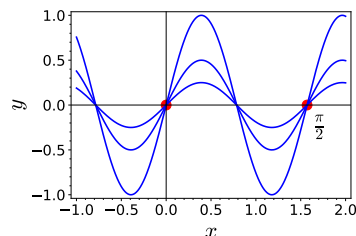
PVF con solución única.

$$\begin{cases} y'' + 16y = 0 \\ y(0) = 0, y(\frac{\pi}{8}) = 1 \end{cases}$$



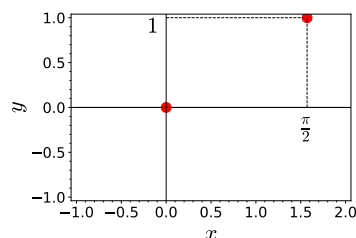
PVF con infinitas soluciones.

$$\begin{cases} y'' + 16y = 0 \\ y(0) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$



PVF sin solución.

$$\begin{cases} y'' + 16y = 0 \\ y(0) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$$



3.1.5. Solución de una EDOL

Teorema 3.2. Solución General de una EDOL

La solución general de una EDOL:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

es igual a la suma de la *solución general*¹⁷ de su *ecuación homogénea*¹⁸:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

más una *solución particular*¹⁹ de la *ecuación completa* original:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \quad \begin{cases} y(x) & : \text{Sol. general de la ec. completa} \\ y_h(x) & : \text{Sol. general de la ec. homogénea} \\ y_p(x) & : \text{Sol. particular de la ec. completa} \end{cases}$$

Demostración 3.2.

Calculando la derivadas de esta fórmula se tiene:

$$y = y_h + y_p \quad ; \quad y' = y'_h + y'_p \quad ; \quad \dots \quad ; \quad y^{(n)} = y_h^{(n)} + y_p^{(n)}$$

Introduciéndolas en la EDOL:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f$$

$$a_n (y_h^{(n)} + y_p^{(n)}) + a_{n-1} (y_h^{(n-1)} + y_p^{(n-1)}) + \dots + a_1 (y'_h + y'_p) + a_0 (y_h + y_p) = f$$

Agrupando las soluciones homogéneas y particulares y teniendo en cuenta su significado se tiene:

$$\underbrace{[a_n y_h^{(n)} + a_{n-1} y_h^{(n-1)} + \dots + a_1 y'_h + a_0 y_h]}_0 + \underbrace{[a_n y_p^{(n)} + a_{n-1} y_p^{(n-1)} + \dots + a_1 y'_p + a_0 y_p]}_0 = f$$

Con lo que queda demostrado.

Vamos a estudiar la solución de EDOL²⁰ siguiendo el siguiente plan de trabajo:

$$\text{EDOL} \quad \begin{cases} \text{Con Coeficientes Constantes} \\ \text{Con Coeficientes Variables} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Homogénea} \\ \text{Completa} \end{cases}$$

Empezamos viendo la definición de estos dos tipos de EDOL.

¹⁷Ver la Definición 1.19, página 16.

¹⁸Ver la Definición 3.2, página 51.

¹⁹Puede ser cualquiera de las infinitas funciones que forman la solución general que estamos buscando.

²⁰Ver la Definición 3.1, página 51.

Definición 3.7. EDOL con Coeficientes Constantes (EDOC)

Una **EDOL con coeficientes constantes** (EDOC) es aquella donde las funciones $a_i(x)$ son constantes²¹,

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_1y'(x) + a_0y = f(x)$$

siendo su *ecuación homogénea asociada* (EDOCH):

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_1y'(x) + a_0y = 0 \quad (3.3)$$

Definición 3.8. EDOL con Coeficientes Variables (EDOV)

Una **EDOL con coeficientes variables** (EDOV) tiene la forma²²:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y = f(x)$$

siendo su *ecuación homogénea asociada* (EDOVH):

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y = 0$$

Empezaremos el estudio de las EDOL con coeficientes constantes y en la [Sección 3.4, página 76](#) se verán las EDOL con coeficientes variables.

3.2. EDOL con Coeficientes Constantes Homogénea (EDOCH)

Teniendo en cuenta la solución del problema simple:

$$y' = ay \quad \implies \quad y = ce^{ax}$$

vamos a ver bajo qué condiciones la EDOCH tiene soluciones de la forma $y = e^{\lambda x}$.

$$y = e^{\lambda x} \quad \implies \quad \begin{cases} y' &= \lambda e^{\lambda x} \\ y'' &= \lambda^2 e^{\lambda x} \\ \vdots & \\ y^{(n)} &= \lambda^n e^{\lambda x} \end{cases}$$

Sustituyendo en la [Ecuación \(3.3\)](#) tenemos:

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \dots + a_1\lambda e^{\lambda x} + a_0e^{\lambda x} = 0 \quad \implies \quad \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Teorema 3.3. Condiciones de la Solución de una EDOCH

La función $e^{\lambda x}$ es solución de la [Ecuación \(3.3\)](#) si y solo si λ es una raíz del denominado **polinomio característico** que al igualarlo a cero da lugar a la denominada **ecuación característica**:

$$\underbrace{\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0}_{\text{Polinomio Característico}} = 0 \quad (\text{Ec. Característica})$$

²¹Como el coeficiente a_n nunca puede ser nulo, de forma general se puede dividir la ecuación entre él para que aparezca el término $y^{(n)}$ en solitario.

²²Ver por ejemplo "Clases de Ampliación de Matemáticas para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 313.

Ejercicio 3.1. Encontrar soluciones del siguiente EDOCH y comprobar su validez.

$$y''' - y' = 0$$

Primeramente encontramos las soluciones de su *polinomio característico*:

$$\lambda^3 - \lambda = 0 \quad ; \quad \lambda(\lambda^2 - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases}$$

Por tanto tres soluciones de esta ecuación son:

$$y_1 = e^{0x} = 1 \quad ; \quad y_2 = e^x \quad ; \quad y_3 = e^{-x}$$

Comprobamos la validez de estas soluciones:

- $y_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = y''' = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 - 0 = 0$
- $y_2 = e^x \quad \Rightarrow \quad y' = y''' = e^x \quad \Rightarrow \quad e^x - e^x = 0$
- $y_3 = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad y' = y''' = -e^{-x} \quad \Rightarrow \quad -e^{-x} - (-e^{-x}) = 0$

Teorema 3.4. Principio de Superposición

- Si $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ son soluciones de la **Ecuación (3.2)**, entonces cualquier **combinación lineal**²³ de ellas también es solución.
- El conjunto de todas las soluciones de una EDO lineal homogénea de dimensión n forma un **espacio vectorial**²⁴ de funciones de dimensión n .

Ejercicio 3.2. Comprobar que toda combinación lineal posible de las soluciones encontradas en el SEDOC del **Ejercicio 3.1**, también es solución de dicho sistema.

Todas las posibles combinaciones lineales de las tres soluciones encontradas forman la siguiente función:

$$\phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$$

donde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ son las constantes de la combinación lineal.

Comprobamos ahora que esta familia de funciones es solución de la ecuación dada:

$$\phi = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \phi' = c_2 e^x - c_3 e^{-x} \\ \phi''' = c_2 e^x - c_3 e^{-x} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \phi''' - \phi' = 0$$

Verificándose por tanto la ecuación.

Para que un conjunto de funciones forme un **espacio vectorial** de dimensión n es necesario que en ese conjunto existan n funciones **linealmente independientes**.

Vamos a ver el concepto de dependencia e independencia lineal en funciones.

²³Una combinación lineal de un conjunto de funciones $f_1, f_2, \dots, f_k$ es una nueva función de la forma $f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_k f_k$, donde los c_i son números reales cualesquiera. Esta definición es análoga por ejemplo a la combinación lineal de *ecuaciones* y de *vectores*.

²⁴Ver por ejemplo "Clases de Álgebra Lineal para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 313.

3.2.1. Dependencia e Independencia Lineal de Funciones: Wronskiano

Definición 3.9. Dependencia e Independencia Lineal Funcional

Se dice que un conjunto de funciones $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ es **linealmente dependiente** en un dominio, si cualquiera de ellas se puede expresar en ese dominio como *combinación lineal* del resto de las funciones.

$$f_k(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) \quad c_i \in \mathbb{R}$$

En caso contrario se dice que las funciones son **linealmente independientes** en el dominio.

Ejemplo 3.10. Funciones linealmente dependientes e independientes.

- Las funciones $f_1(x) = 2 \sin(x)$ y $f_2(x) = 3 \sin(x)$ son linealmente dependientes en cualquier intervalo de $\mathbb{R}$ ya que:

$$f_1(x) = \frac{2}{3} f_2(x)$$

- Las funciones $f_1(x) = \sin(2x)$ y $f_2(x) = \sin(3x)$ son linealmente independientes en cualquier intervalo de $\mathbb{R}$ ya que:

$$f_1(x) \neq c f_2(x) \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

En principio no es fácil la determinación de la dependencia e independencia lineal de funciones generales. Vamos a ver un teorema que nos permite determinarla de forma sistemática.

Teorema 3.5. Wronskiano

Un conjunto de n funciones $f_1(x), \dots, f_n(x)$ definidas en un intervalo I son **linealmente independientes** si y solo si el siguiente determinante denominado **wronskiano** $W(x)$, no se anula en todos los puntos de dicho intervalo.

$$W[f_1, \dots, f_n](x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall x \in I$$

De otra forma se dice que las funciones son **linealmente dependientes** en I .

Ejemplo 3.11. Funciones Linealmente Dependientes e Independientes

- Las funciones $y_1 = 2 \sin(x)$ y $y_2 = 3 \sin(x)$ son linealmente dependientes en $\mathbb{R}$ ya que:

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} 2 \sin(x) & 3 \sin(x) \\ 2 \cos(x) & 3 \cos(x) \end{vmatrix} = 6 \sin(x) \cos(x) - 6 \sin(x) \cos(x) = 0$$

- Las funciones $y_1 = \sin(2x)$ y $y_2 = \sin(3x)$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}$ ya que:

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} \sin(2x) & \sin(3x) \\ 2 \cos(2x) & 3 \cos(3x) \end{vmatrix} = 3 \sin(2x) \cos(3x) - 2 \sin(3x) \cos(2x),$$

no se anula para todos los puntos de $\mathbb{R}$, ya que por ejemplo para $x = \pi/4$ se tiene:

$$W(x = \pi/4) = 3 \sin \frac{\pi}{2} \cos 3 \frac{\pi}{4} - 2 \sin 3 \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2} = 3 * 1 * \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2 * \frac{\sqrt{2}}{2} * 0 = -3 \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$$

Definición 3.10. Conjunto Fundamental de Soluciones

Un conjunto de n soluciones *linealmente independientes* $y_i(x)$ de una EDO lineal *homogénea* de orden n (EDOLH), forman una **base**²⁵ del espacio vectorial de todas las soluciones²⁶ del problema, y se denomina **conjunto fundamental de soluciones**.

Cualquier solución $\phi(t)$ de una EDOLH se puede expresar como combinación lineal de las soluciones de un *conjunto fundamental* $\{y_1, \dots, y_n\}$ para unos únicos valores reales $c_1, c_2, \dots, c_n$, de la forma:

$$\phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

Por tanto esta expresión corresponde con la **solución general**²⁷ de la ecuación.

3.2.2. Solución de una EDOCH: Casos Particulares

Para determinar la solución general de una EDOCH²⁸ es necesario tener presentes las siguientes cuestiones:

- La *solución general* de la EDOCH está formada por un conjunto de n soluciones linealmente independientes.
- Sabemos que dada una EDOCH, podemos encontrar soluciones $\{e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}\}$ resolviendo su correspondiente *ecuación característica*²⁹ y mediante combinación lineal de ellas obtener una *familia n-paramétrica de soluciones* de la ecuación.
- Por el teorema fundamental del álgebra, el polinomio característico tiene exactamente n soluciones λ_i pudiendo ser reales o complejas, iguales o distintas.
- Si **todas** las soluciones del polinomio característico $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son **reales** y **distintas** podemos formar fácilmente un conjunto de soluciones *linealmente independientes* $\{e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}\}$ y por *combinación lineal* de ellas obtener la *solución general* de la ecuación.

Vamos a estudiar cómo obtener soluciones linealmente independientes³⁰ cuando aparecen raíces λ_i de los otros dos tipos: raíces reales múltiples y raíces complejas.

Raíces Reales con Multiplicidad $m > 1$

En este caso el *polinomio característico* tiene alguna raíz real repetida m veces (*multiplicidad* m) y naturalmente éstas son *linealmente dependientes*, al ser todas iguales.

Si tenemos una raíz λ real con multiplicidad $m > 1$, podemos formar un conjunto linealmente independiente de m soluciones de la ecuación de la siguiente forma:

$$y_1 = e^{\lambda x} \quad ; \quad y_2 = x e^{\lambda x} \quad ; \quad y_3 = x^2 e^{\lambda x} \quad ; \quad \dots \quad ; \quad y_m = x^{m-1} e^{\lambda x}$$

Siendo por tanto la *solución general*³¹:

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_m x^{m-1}) e^{\lambda x}$$

²⁵Ver por ejemplo "Clases de Álgebra Lineal para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 313.

²⁶También conocido como *espacio funcional*.

²⁷Ver la **Definición 1.19**, página 16.

²⁸Ver la **Definición 3.7**, página 57.

²⁹Ver el **Teorema 3.3**, página 57.

³⁰Y a través de ellas obtener la solución general.

³¹Considerando que éstas son las únicas raíces.

Ejercicio 3.3. Encontrar dos familias linealmente independientes de soluciones del siguiente EDOCH y su solución general, comprobando su validez.

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Primeramente encontramos las soluciones de su polinomio característico:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0 \quad \implies \quad \lambda_{1,2} = 1 \quad (\text{multiplicidad } 2)$$

Por tanto las dos familias linealmente independientes de soluciones de esta ecuación son:

$$y_1 = ce^x \quad ; \quad y_2 = cxe^x \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

Como las dos soluciones son linealmente independientes, forman una base del espacio de soluciones de la ecuación y por tanto su solución general es:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x = (c_1 + c_2 x) e^x$$

Comprobamos la validez de la solución general:

- $y = (c_1 + c_2 x) e^x$
- $y' = c_2 e^x + (c_1 + c_2 x) e^x = (c_1 + c_2 + c_2 x) e^x$
- $y'' = c_2 e^x + (c_1 + c_2 + c_2 x) e^x = (c_1 + 2c_2 + c_2 x) e^x$

Entonces:

$$y'' - 2y' + y = (c_1 + 2c_2 + c_2 x) e^x - 2(c_1 + c_2 + c_2 x) e^x + (c_1 + c_2 x) e^x = 0$$

Raíces Complejas

En el caso de que el *polinomio característico* tenga soluciones complejas, éstas siempre aparecen como pares conjugados.

$$\lambda_{1,2} = r \pm mi \quad ; \quad r, m \in \mathbb{R}$$

donde r es la parte real y m es la parte imaginaria de las raíces. En este caso las dos soluciones son complejas:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \quad ; \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

Vamos a expresar estas soluciones en forma real y para ello tenemos en cuenta la *fórmula de Euler*³²:

$$e^{zx} = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} e^{\beta i x} = e^{\alpha x} [\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)]$$

las soluciones complejas se pueden expresar entonces como:

$$\begin{cases} y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(r+mi)x} = e^{rx} e^{mxi} = e^{rx} (\cos mx + i \sin mx) \\ y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(r-mi)x} = e^{rx} e^{-mxi} = e^{rx} [\cos(-mx) + i \sin(-mx)] = e^{rx} (\cos mx - i \sin mx) \end{cases}$$

Se puede comprobar que cada uno de los términos $e^{rx} \cos mx$ y $e^{rx} \sin mx$ son soluciones reales linealmente independientes de la EDOCH, asociadas a las raíces complejas $\lambda_{1,2}$.

³²Para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple: $e^{xi} = \cos x + i \sin x$. A veces se denota mediante la función $\text{cis}(x) = \cos x + i \sin x$.

³³Notar que por cada dos soluciones complejas conjugadas (linealmente independientes) que forman una base del espacio vectorial de soluciones complejas de un problema, hay siempre otras dos soluciones reales linealmente independientes que forman una base del espacio de soluciones reales del mismo problema.

Las funciones $e^{rx} \cos mx$ y $e^{rx} \sen mx$ son dos soluciones reales *linealmente independientes* de la EDOCH y por tanto forman una *base* del espacio de soluciones reales del problema³³.

Si tenemos una raíz compleja conjugada $\lambda_{1,2} = r \pm mi$ con multiplicidad 1, podemos formar un conjunto linealmente independiente de 2 soluciones de la ecuación de la forma:

$$y_1 = e^{rx} \cos mx \quad ; \quad y_2 = e^{rx} \sen mx$$

Siendo por tanto la solución general:

$$y = (c_1 \cos mx + c_2 \sen mx)e^{rx}$$

Ejercicio 3.4. Encontrar dos familias linealmente independientes de soluciones del siguiente EDOCH y su solución general, comprobando su validez.

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

Primeramente encontramos las soluciones de su polinomio característico:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = -1 \pm 2i \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$$

Al ser complejas, las dos familias de soluciones linealmente independientes de esta ecuación son:

$$y_1 = ce^{-x} \cos(2x) \quad ; \quad y_2 = ce^{-x} \sen(2x) \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

las cuales forman una base del espacio de soluciones de la ecuación y por tanto su solución general es:

$$y(x) = [c_1 \cos(2x) + c_2 \sen(2x)]e^{-x}$$

Comprobamos la validez de la solución general:

- $y = [c_1 \cos(2x) + c_2 \sen(2x)]e^{-x}$
- $y' = 2[-c_1 \sen(2x) + c_2 \cos(2x)]e^{-x} - [c_1 \cos(2x) + c_2 \sen(2x)]e^{-x}$
 $= [(2c_2 - c_1) \cos(2x) - (2c_1 + c_2) \sen(2x)]e^{-x}$
- $y'' = 2[-(2c_2 - c_1) \sen(2x) - (2c_1 + c_2) \cos(2x)]e^{-x} - [(2c_2 - c_1) \cos(2x) - (2c_1 + c_2) \sen(2x)]e^{-x}$
 $= [(-3c_1 - 4c_2) \cos(2x) + (4c_1 - 3c_2) \sen(2x)]e^{-x}$

Entonces:

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + 5y &= [(-3c_1 - 4c_2) \cos(2x) + (4c_1 - 3c_2) \sen(2x)]e^{-x} + \\ &2[(2c_2 - c_1) \cos(2x) - (2c_1 + c_2) \sen(2x)]e^{-x} + 5[c_1 \cos(2x) + c_2 \sen(2x)]e^{-x} = \\ &= [(-3c_1 - 4c_2 + 4c_2 - 2c_1 + 5c_1) \cos(2x) + (4c_1 - 3c_2 - 4c_1 - 2c_2 + 5c_2) \sen(2x)]e^{-x} = 0 \end{aligned}$$

La solución general correspondiente a una raíz compleja conjugada $\lambda_{1,2} = r \pm mi$ con multiplicidad M , tiene la forma³⁴:

$$\begin{aligned} y &= e^{rx} [(c_1 \cos mx + c_2 \sen mx) + x (c_3 \cos mx + c_4 \sen mx) + \\ &+ x^2 (c_5 \cos mx + c_6 \sen mx) + \cdots + x^{M-1} (c_{2M-1} \cos mx + c_{2M} \sen mx)] \end{aligned}$$

³⁴Similar al caso real de multiplicidad m , ver la Sección 3.2.2, página 60.

Ejercicio 3.5. Encontrar la solución general de la siguiente ecuación diferencial lineal:

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

Primeramente encontramos las soluciones de su polinomio característico:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \implies \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = -1 \pm 2i \implies \lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$$

Al ser complejas, las dos familias de soluciones linealmente independientes de esta ecuación son:

$$y_1 = ce^{-x} \cos(2x) \quad ; \quad y_2 = ce^{-x} \sin(2x) \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

Como las dos soluciones son linealmente independientes, forman una base del espacio de soluciones de la ecuación y por tanto su solución es:

$$y(x) = [c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)]e^{-x}$$

Comprobamos la validez de la solución general:

- $y = [c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)]e^{-x}$
- $y' = 2[-c_1 \sin(2x) + c_2 \cos(2x)]e^{-x} - [c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)]e^{-x}$
 $= [(2c_2 - c_1) \cos(2x) - (2c_1 + c_2) \sin(2x)]e^{-x}$
- $y'' = 2[-(2c_2 - c_1) \sin(2x) - (2c_1 + c_2) \cos(2x)]e^{-x} - [(2c_2 - c_1) \cos(2x) - (2c_1 + c_2) \sin(2x)]e^{-x}$
 $= [(-3c_1 - 4c_2) \cos(2x) + (4c_1 - 3c_2) \sin(2x)]e^{-x}$

Entonces:

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + 5y &= [(-3c_1 - 4c_2) \cos(2x) + (4c_1 - 3c_2) \sin(2x)]e^{-x} + \\ & 2[(2c_2 - c_1) \cos(2x) - (2c_1 + c_2) \sin(2x)]e^{-x} + 5[c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)]e^{-x} = \\ & = [(-3c_1 - 4c_2 + 4c_2 - 2c_1 + 5c_1) \cos(2x) + (4c_1 - 3c_2 - 4c_1 - 2c_2 + 5c_2) \sin(2x)]e^{-x} = 0 \end{aligned}$$

3.2.3. Resumen: Soluciones de una EDOCH

Soluciones en función de la multiplicidad m de las soluciones de la ecuación característica.

Tipo Solución Ec. Característica	Tipo Solución de la EDO
Reales con multiplicidad m : λ^m	$e^{\lambda x}(c_1 + c_2 x + \dots + c_m x^{m-1})$
Complejas con multiplicidad m : $[\lambda \pm \mu i]^m$	$e^{\lambda x}[(c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x) +$ $+ x(c_3 \cos \mu x + c_4 \sin \mu x) + \dots$ $+ x^{m-1}(c_{2m-1} \cos \mu x + c_{2m} \sin \mu x)]$

Ejercicio 3.6. Encontrar la solución particular del siguiente PVI.

$$\begin{cases} y'' - y' - 6y = 0 \\ y(0) = 2, y'(0) = 1 \end{cases}$$

Primeramente encontramos las soluciones de su polinomio característico:

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \implies \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \implies \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

Al ser reales y distintas, la solución general es:

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$$

Vamos a encontrar la solución particular a través de las condiciones iniciales.

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = 2 \rightarrow c_1 + c_2 = 2 \\ y'(0) = 1 \rightarrow 3c_1 - 2c_2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2c_1 + 2c_2 = 4 \\ 3c_1 - 2c_2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5c_1 = 5 \rightarrow c_1 = 1 \\ c_2 = (3c_1 - 1)/2 \rightarrow c_2 = 1 \end{array} \right.$$

$$y(x) = e^{3x} + e^{-2x}$$

3.3. EDOL con Coeficientes Constantes Completa (EDOC)

En esta sección vamos a estudiar la forma de resolver las EDO Lineales de Orden n con coeficientes constantes completa (*no homogénea*), donde el término independiente $f(x) \neq 0$.

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_1y'(x) + a_0y = f(x) \quad (3.4)$$

Como hemos visto³⁵ su solución general viene dada por:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_h(x) : \text{Sol. General de la Ec. Homogénea} \\ y_p(x) : \text{Particular de la Ec. Completa} \end{array} \right.$$

Como la solución $y_h(x)$ de la EDO homogénea (EDOC) ya ha sido estudiado en la sección anterior³⁶, vamos a ver ahora la forma de encontrar una solución particular $y_p(x)$ de la ecuación completa. Hay dos métodos:

1. Método de los Coeficientes Indeterminados
2. Método de Variación de Parámetros

3.3.1. Método de los Coeficientes Indeterminados

El **método de los coeficientes indeterminados** solo es válido en EDOC cuando el término independiente $f(x)$ de la **Ecuación (3.4)**, es de uno de estos tipos³⁷:

- Polinomios: $P_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$
- Exponenciales: ae^{bx}
- Senos y Cosenos: $a_1 \cos bx + a_2 \sin bx$

o bien sumas o productos de funciones de estas formas.

Cuando la forma del término independiente $f(x)$ es de alguna de las formas anteriores (o mezcla de ellas), la solución particular $y_p(x)$ de la EDOC, necesaria para obtener su solución general $y(x)$, tiene una forma *similar* a su $f(x)$, pero con coeficientes a_i no necesariamente iguales³⁸.

Se puede generalizar el producto de estos tres tipos de funciones (polinomios, exponenciales y senos-cosenos) de la siguiente forma:

$$e^{\alpha x} [P_m(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \alpha = 0 \text{ no aparece la exponencial} \\ \text{Si } \beta = 0 \text{ no aparecen senos-cosenos} \end{array} \right. \quad (3.5)$$

³⁵Ver el Teorema 3.2, página 56.

³⁶Ver la Sección 3.2, página 57.

³⁷Estos tres tipos de funciones tienen la particularidad de que sus derivadas son del mismo tipo que ellas. Así la derivada de un polinomio es otro polinomio, la derivada de una exponencial es otra exponencial y las derivadas de seno y coseno son cosenos y senos.

³⁸De ahí el nombre de *coeficientes indeterminados*.

En la **Tabla 3.1** se resume la forma que tiene la solución particular en función de la forma del término independiente $f(x)$, diferenciando dos posibles casos (soluciones reales y complejas).

Término Independiente $f(x)$	Raíces de la Ec. Característica	Forma de Sol. Particular $y_p(x)$
$e^{\alpha x}[P_m(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x]$	$\alpha \pm i\beta$ no es raíz	$e^{\alpha x}[\tilde{P}_m(\mathbf{x}) \cos \beta x + \tilde{Q}_m(\mathbf{x}) \sin \beta x]$
	$\alpha \pm i\beta$ sí es raíz de mul. s	$x^s e^{\alpha x}[\tilde{P}_m(\mathbf{x}) \cos \beta x + \tilde{Q}_m(\mathbf{x}) \sin \beta x]$

Tabla 3.1: Forma de la solución particular $y_p(x)$ dada por el método de los coeficientes indeterminados en función del término independiente $f(x)$ de la EDO. Los términos $P_m(x)$ y $Q_m(x)$ hacen referencia a polinomios de grado m y los términos $\tilde{P}_m(\mathbf{x})$ y $\tilde{Q}_m(\mathbf{x})$ a polinomios del mismo grado pero con coeficientes no necesariamente iguales a los anteriores (coeficientes indeterminados).

Térm. Indep. $f(x)$	Raíz $\alpha + \beta i$	Sol. Ec. Caract.	Forma de Sol. Particular $y_p(x)$
3	0	{1, 2}	A
-2	0	{0, ± 1 , -2}	Ax
$2x + 1$	0	{ ± 3 , 0 (doble)}	$x^2(Ax + B)$
$x^3 + 2$	0	{-1 (doble)}	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$
$\sin 2x$	$\pm 2i$	{0, $1 \pm 2i$ }	$A \cos 2x + B \sin 2x$
$x \cos 2x$	$\pm 2i$	{ $\pm 2i$ }	$x(Ax + B) \cos 2x + x(Cx + D) \sin 2x$
$x^2 \cos 2x + \sin 2x$	$\pm 2i$	{1, $\pm i$ }	$(Ax^2 + Bx + C) \cos 2x + (Dx^2 + Ex + F) \sin 2x$
$x \cos x + \sin 2x$	$\pm i, \pm 2i$	{1, 2}	$(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x + E \cos 2x + F \sin 2x$
$x \cos x + \sin 2x$	$\pm i, \pm 2i$	{0, 1, $\pm i$ }	$x(Ax + B) \cos x + x(Cx + D) \sin x + E \cos 2x + F \sin 2x$
$-2e^{-3x}$	-3	{1, 2}	Ae^{-3x}
$-xe^{-2x}$	-2	{0, -2 (doble)}	$x^2(Ax + B)e^{-2x}$
$e^{-2x} \sin 2x$	$-2 \pm 2i$	{ ± 2 }	$e^{-2x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$
$e^x \sin 2x - \cos x$	$1 \pm 2i, \pm i$	{ $\pm i$ }	$e^x(A \cos 2x + B \sin 2x) + x(C \cos x + D \sin x)$
$e^{3x} \sin x + e^x \cos x$	$3 \pm i, 1 \pm i$	{1, 3}	$e^{3x}(A \cos x + B \sin x) + e^x(C \cos x + D \sin x)$
$e^{3x} \sin x + e^x \cos x$	$3 \pm i, 1 \pm i$	{ $1 \pm i$ }	$e^{3x}(A \cos x + B \sin x) + xe^x(C \cos x + D \sin x)$
$xe^{-x} \sin x$	$-1 \pm i$	{0, ± 1 , 2}	$e^{-x}[(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x]$
$xe^{-x} \sin x$	$-1 \pm i$	{ $-1 \pm i$ }	$xe^{-x}[(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x]$
$-6e^x \sin 3x + \sin 2x$	$1 \pm 3i, \pm 2i$	{-2, $1 \pm 3i$ }	$xe^x(A \cos 3x + B \sin 3x) + C \cos 2x + D \sin 2x$
$-6e^x \sin 3x + \sin 2x$	$1 \pm 3i, \pm 2i$	{0, $\pm 2i$ }	$e^x(A \cos 3x + B \sin 3x) + x(C \cos 2x + D \sin 2x)$

Tabla 3.2: Casos prácticos de la determinación de la forma de la solución particular y_p dada por el método de los coeficientes indeterminados. En la primera columna de la izquierda aparecen ejemplos del término independiente $f(x)$ de la EDO. En la segunda columna aparece la raíz $\alpha + i\beta$ asociada a $f(x)$ en base a su forma (Ecuación 3.5 de la pág. 64). En la tercera columna se da un posible ejemplo de soluciones de la ecuación característica asociada a la EDO homogénea. Por último, en la cuarta columna se muestra la correspondiente forma de la solución particular según el método de los coeficientes indeterminados para ese caso, en base a la **Tabla 3.1**.

En la [Tabla 3.2, página 65](#) se muestran diferentes ejemplos de funciones del término independiente en distintos casos y la correspondiente forma de la solución particular, en función de las raíces de la ecuación característica.

El procedimiento de cálculo para encontrar la solución general de una EDOC no homogénea es el siguiente:

1. Encontrar la solución general de la ec. homogénea asociada correspondiente³⁹.
2. A través de la forma del término independiente $f(x)$ y del tipo de soluciones de la ecuación característica (columnas 1 y 2 de la tabla anterior), determinar la forma de la solución particular (columna 3).
3. Los **coeficientes indeterminados**⁴⁰ de la solución particular $y_p(x)$ se determinan encontrando sus n derivadas, sustituyendo en la EDOC y comparando los términos para que la verifiquen.
4. La solución general $y(x)$ de la EDOC será la suma de la solución homogénea $y_h(x)$ más la solución particular $y_p(x)$.

Vamos a ver algunos ejercicios donde se presenta la forma de operar con el *método de los coeficientes indeterminados* en diferentes casos.

Ejercicio 3.7. Encontrar la solución general de las siguientes EDOC.

- | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|
| a) $y'' - y' = 2$ | b) $y'' + 2y' + y = x^2 + x$ |
| c) $y'' - 3y' + 2y = 144xe^{-2x}$ | d) $y'' - y = x \cos(x) + \sin(x)$ |

a) Primeramente encontramos la solución general de la ec. homogénea asociada: $y'' - y' = 0$.

$$\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_h = c_1 + c_2 e^x}$$

Encontramos ahora la solución particular de la completa.

1. Nos fijamos en la forma del término independiente. En este caso al ser una constante corresponde con un polinomio de grado 0.
2. Mirando la [Tabla 3.1, página 65](#) vemos que la forma de la solución particular depende de las raíces de la ecuación característica anterior. Como cero sí es una raíz con multiplicidad 1, por tanto la forma de la particular es $y_p = xa$, donde a es una constante a determinar (coeficiente indeterminado).
3. Derivamos la solución particular e introducimos sus valores en la ecuación completa.

$$\begin{cases} y_p = ax \\ y_p' = a \\ y_p'' = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 0 - a = 2 \quad \Rightarrow \quad a = -2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_p = -2x}$$

Finalmente la solución general de la completa es la suma de la general de la homogénea más la particular de la completa:

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 + c_2 e^x - 2x}$$

b) Primeramente encontramos la solución general de la ec. homogénea asociada: $y'' + 2y' + y = 0$.

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_h = (c_1 + c_2 x)e^{-x}}$$

Encontramos ahora la solución particular de la completa. Como el término independiente $x^2 + x$ es un polinomio de grado 2 y cero no es una raíz de la ec. característica, la forma de la solución particular es un polinomio de segundo grado con coeficientes indeterminados, $y_p(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\begin{cases} y_p = ax^2 + bx + c \\ y_p' = 2ax + b \\ y_p'' = 2a \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2a + 4ax + 2b + ax^2 + bx + c = x^2 + x$$

³⁹Ver la [Sección 3.2.2, página 60](#).

⁴⁰Correspondientes a los coeficientes a_i de los polinomios $\tilde{P}_m(x)$ y $\tilde{Q}_m(x)$.

Comparando términos de igual grado se tiene:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 4a + b = 1 \rightarrow b = 1 - 4 = -3 \\ 2a + 2b + c = 0 \rightarrow c = 4 \end{cases} \implies \boxed{y_p = x^2 - 3x + 4}$$

Finalmente la solución general es:

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (c_1 + c_2x)e^{-x} + x^2 - 3x + 4}$$

c) Primeramente encontramos la solución general de la homogénea asociada: $y'' - 3y' + 2y = 0$.

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \implies \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \implies \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{y_h = c_1e^x + c_2e^{2x}}$$

Encontramos ahora la solución particular de la completa. En este caso el término independiente $144xe^{-2x}$ es un polinomio de primer grado multiplicado por una exponencial, sin coincidir ninguna de las raíces con su exponente.

Por tanto buscamos una solución particular con la forma: $y_p = (a + bx)e^{-2x}$.

$$\begin{cases} y_p = (a + bx)e^{-2x} \\ y'_p = (b - 2a - 2bx)e^{-2x} \\ y''_p = (-4b + 4a + 4bx)e^{-2x} \end{cases}$$

$$[-4b + 4a + 4bx - 3(b - 2a - 2bx) + 2(a + bx)]e^{-2x} = 144xe^{-2x} \implies 12a - 7b + 12bx = 144x$$

Comparando términos de igual grado se tiene:

$$\begin{cases} 12a - 7b = 0 \rightarrow a = 7b/12 = 7 \\ 12b = 144 \rightarrow b = 12 \end{cases} \implies \boxed{y_p = (7 + 12x)e^{-2x}}$$

Finalmente la solución general es:

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + (7 + 12x)e^{-2x}}$$

d) Primeramente encontramos la solución general de la homogénea asociada: $y'' - y = 0$.

$$\lambda^2 - 1 = 0 \implies \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \implies \boxed{y_h = c_1e^x + c_2e^{-x}}$$

Encontramos ahora la solución particular de la completa. En este caso el término independiente $x \cos(x) + \sin(x)$ está formado por polinomios que multiplican a senos y cosenos y además su coeficiente x no coincide con la raíz compleja de la ec. característica (debería ser $\pm i$). Por tanto buscamos una solución particular con la forma: $y_p = (ax + b) \cos(x) + (cx + d) \sin(x)$.

$$\begin{cases} y_p = (ax + b) \cos(x) + (cx + d) \sin(x) \\ y'_p = a \cos(x) - (ax + b) \sin(x) + c \sin(x) + (cx + d) \cos(x) \\ \quad = (a + cx + d) \cos(x) + (c - ax - b) \sin(x) \\ y''_p = c \cos(x) - (a + cx + d) \sin(x) - a \sin(x) + (c - ax - b) \cos(x) \\ \quad = (2c - ax - b) \cos(x) - (2a + cx + d) \sin(x) \end{cases}$$

Sustituyendo en la EDOC:

$$(2c - ax - b) \cos(x) - (2a + cx + d) \sin(x) - (ax + b) \cos(x) - (cx + d) \sin(x) = x \cos(x) + \sin(x)$$

$$(2c - 2ax - 2b) \cos(x) - (2a + 2cx + 2d) \sin(x) = x \cos(x) + \sin(x)$$

Comparando términos:

$$\left\{ \begin{array}{l} -2a = 1 \rightarrow a = -1/2 \\ 2c - 2b = 0 \rightarrow b = c = 0 \\ -2c = 0 \rightarrow c = 0 \\ -2a - 2d = 1 \rightarrow d = (-2a - 1)/2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y_p(x) = -\frac{1}{2}x \cos(x)$$

Finalmente la solución general es:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2}x \cos(x)$$

Ejercicio 3.8. Encontrar la solución particular del siguiente problema.

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = xe^x \sin(x) \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$$

Se trata de una EDOC cuyo término independiente es el producto de un polinomio por una exponencial y una función seno, por tanto podemos aplicar el método de los coeficientes indeterminados para calcular su solución general y a través de ella y mediante las condiciones iniciales del problema, determinar la solución particular pedida.

Primeramente encontramos la solución general de la homogénea asociada: $y'' + 3y' + 2y = 0$.

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

Encontramos ahora la solución particular de la completa. En este caso el término independiente está formado por el producto de polinomio, exponenciales y senos, aunque no coinciden sus coeficientes con la raíz compleja de la ec. característica (ya que solo tiene raíces reales). Por tanto buscamos una solución particular con la forma:

$$y_p = e^x[(ax + b) \cos(x) + (cx + d) \sin(x)]$$

Es importante tener en cuenta que aunque no aparece el coseno en el término independiente, es necesario buscar si existe este término en la solución particular. Encontramos ahora las correspondientes derivadas.

$$\begin{cases} y_p = e^x[(ax + b) \cos(x) + (cx + d) \sin(x)] \\ y_p' = e^x[(ax + b) \cos(x) + (cx + d) \sin(x) + a \cos(x) + c \sin(x) - (ax + b) \sin(x) + (cx + d) \cos(x)] = \\ = e^x[(ax + cx + a + b + d) \cos(x) + (-ax + cx - b + c + d) \sin(x)] \\ y_p'' = e^x[(ax + cx + a + b + d) \cos(x) + (-ax + cx - b + c + d) \sin(x)] + \\ + e^x[(a + c) \cos(x) + (-a + c) \sin(x) - (ax + cx + a + b + d) \sin(x) + \\ + (-ax + cx - b + c + d) \cos(x)] = \\ = 2e^x[(cx + a + c + d) \cos(x) + (-ax - a - b + c) \sin(x)] \end{cases}$$

Sustituyendo:

$$2e^x[(cx + a + c + d) \cos(x) + (-ax - a - b + c) \sin(x)] + 3e^x[(ax + cx + a + b + d) \cos(x) + (-ax + cx - b + c + d) \sin(x)] + 2e^x[(ax + b) \cos(x) + (cx + d) \sin(x)] = xe^x \sin(x)$$

$$5xe^x[(a + c) \cos(x) + (-a + c) \sin(x)] + e^x[(5a + 5b + 2c + 5d) \cos(x) + (-2a - 5b + 5c + 5d) \sin(x)] = xe^x \sin(x)$$

Comparando términos:

$$\begin{cases} a + c = 0 \rightarrow a = -1/10 \\ 5(-a + c) = 1 \rightarrow 10c = 1 \rightarrow c = 1/10 \\ 5a + 5b + 2c + 5d = 0 \rightarrow c = -5d/2 = 1/10 \\ -2a - 5b + 5c + 5d = 0 \rightarrow 3a + 7c + 10d = 0 \rightarrow 10d = 3/10 - 7/10 \rightarrow d = -1/25 \end{cases}$$

Por tanto la solución particular de la EDOC es:

$$y_p(x) = e^x \left[\frac{1}{10}(-x+1)\cos(x) + \frac{1}{50}(5x-2)\sin(x) \right]$$

Y la solución general de la EDOC:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + e^x \left[\frac{1}{10}(-x+1)\cos(x) + \frac{1}{50}(5x-2)\sin(x) \right]$$

Para encontrar la solución particular del problema, tenemos que determinar los coeficientes c_1 y c_2 de la solución general, utilizando las condiciones iniciales $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$. Entonces:

$$y(0) = c_1 + c_2 + \frac{1}{10} = 0 \quad (3.6)$$

Determinamos la primera derivada de la solución:

$$y'(x) = -c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-2x} + e^x \left[\frac{1}{10}(-x+1)\cos(x) + \frac{1}{50}(5x-2)\sin(x) \right] + e^x \left[\frac{1}{10}\cos(x) - \frac{1}{10}(-x+1)\sin(x) + \frac{1}{10}\sin(x) + \frac{1}{50}(5x-2)\cos(x) \right]$$

Por tanto:

$$y'(0) = -c_1 - 2c_2 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{25} = 0 \quad (3.7)$$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas formados por la **Ecuación (3.6)** y la **Ecuación (3.7)**, se obtiene:

$$c_1 = -\frac{18}{50} \quad ; \quad c_2 = \frac{13}{50}$$

y por tanto la solución particular del problema es:

$$y(x) = -\frac{18}{50}e^{-x} + \frac{13}{50}e^{-2x} + e^x \left[\frac{1}{10}(-x+1)\cos(x) + \frac{1}{50}(5x-2)\sin(x) \right]$$

3.3.2. Método de Variación de Parámetros

El **método de variación de parámetros**⁴¹ es un procedimiento para determinar soluciones particulares de todo tipo de EDOL, no solo con coeficientes constantes⁴². Generalmente, su aplicación suele ser más complicada que un que el de *método de los coeficientes indeterminados*⁴³, de forma que se suele utilizar solo en aquellos casos en los que falla este último método.

Por sencillez y claridad en los cálculos, vamos a ver primero la explicación y utilización de este método para EDOC de segundo orden del tipo:

$$\alpha_2 y'' + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = F(x) \quad ; \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \quad , \quad \alpha_2 \neq 0$$

Es necesario que el coeficiente que multiplica a la derivada de mayor orden y'' sea la unidad, en caso de no serlo se divide todo la ecuación por el coeficiente α_2 quedando⁴⁴:

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad (3.8)$$

⁴¹Desarrollado por el matemático Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

⁴²En teoría solo está limitado por la cantidad y complejidad de las operaciones que involucra. Sin embargo en la práctica primero se debe conocer la solución general de la ecuación homogénea, lo que suele ser difícil calcular de forma general.

⁴³Ver la **Sección 3.3.1, página 64**.

⁴⁴Notar que $a_1 = \alpha_1/\alpha_2$, $a_0 = \alpha_0/\alpha_2$ y $f(x) = F(x)/\alpha_2$.

Como se ha visto⁴⁵, su solución general viene dada por:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \implies \begin{cases} y_h & : \text{Sol. gen. de la ec. homogénea} & y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \\ y_p & : \text{Sol. par. de la ec. completa} & y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \end{cases}$$

Partimos de que ya disponemos de la *solución general* de la ecuación homogénea, formada por un *conjunto fundamental de soluciones*⁴⁶ $y_1(x)$ y $y_2(x)$:

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad ; \quad c_i : \text{parámetros}$$

El **método de variación de parámetros** consiste en sustituir los *parámetros* c_1 y c_2 en la solución *homogénea* y_h por funciones⁴⁷ $c_1(x)$ y $c_2(x)$, y buscar con ella una *solución particular* de la EDOL completa, de la forma:

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

donde $c_i(x)$ son funciones a determinar.

Para ello calculamos la primera derivada de y_p :

$$y'_p = c'_1 y_1 + c_1 y'_1 + c'_2 y_2 + c_2 y'_2$$

Ya que en principio hay infinitas funciones c_i que nos podría valer, vamos a poner una condición que nos simplifique el cálculo de las mismas.

$$\underbrace{c'_1 y_1 + c'_2 y_2}_{\text{Condición}} = 0 \implies y'_p = c_1 y'_1 + c_2 y'_2 \quad (3.9)$$

Calculamos ahora la segunda derivada, teniendo en cuenta lo anterior:

$$y''_p = c'_1 y'_1 + c_1 y''_1 + c'_2 y'_2 + c_2 y''_2 \quad (3.10)$$

Sustituyendo los valores de la **Ecuación (3.9)** y **Ecuación (3.10)** en la ecuación completa **Ecuación (3.8)**, se tiene:

$$\begin{aligned} y''_p + a_1 y'_p + a_0 y_p &= f \\ y''_p + a_1 y'_p + a_0 y_p &= [c'_1 y'_1 + c_1 y''_1 + c'_2 y'_2 + c_2 y''_2] + a_1 [c_1 y'_1 + c_2 y'_2] + a_0 [c_1 y_1 + c_2 y_2] \\ &= c_1 \underbrace{[y''_1 + a_1 y'_1 + a_0 y_1]}_0 + c_2 \underbrace{[y''_2 + a_1 y'_2 + a_0 y_2]}_0 + c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 \\ &= f \end{aligned}$$

Los valores entre corchetes son nulos ya que las soluciones y_1 e y_2 son soluciones de la *ecuación homogénea*, por tanto se reduce a:

$$c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 = f \quad (3.11)$$

La condición impuesta en la **Ecuación (3.9)** junto con la **Ecuación (3.11)** forman un sistema de dos ecuaciones algebraicas lineales para las derivadas⁴⁸ c'_1 y c'_2 de las funciones desconocidas c_1 y c_2 :

$$\begin{cases} c'_1 y_1 + c'_2 y_2 &= 0 \\ c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 &= f \end{cases}$$

Aplicando la regla de Cramer:

$$c'_1 = \frac{W_1}{W} = -\frac{y_2 f}{W} \quad ; \quad c'_2 = \frac{W_2}{W} = \frac{y_1 f}{W}$$

⁴⁵Ver el **Teorema 3.2**, página 56.

⁴⁶Ver la **Definición 3.10**, página 60.

⁴⁷De ahí el nombre de *variación de parámetros*.

⁴⁸Es decir, es un sistema de ecuaciones diferenciales 2×2 , generalmente no lineal y que de forma general suele ser difícil de calcular, de ahí la complejidad del método.

donde los valores del **wronskiano**⁴⁹ W y de W_1 y W_2 vienen dados por:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}$$

Finalmente, las funciones c_1 y c_2 se obtienen integrando las expresiones anteriores.

$$c_1(x) = - \int \frac{y_2 f}{W} dx \quad ; \quad c_2(x) = \int \frac{y_1 f}{W} dx$$

Hay infinitas funciones válidas $c_1(x)$ y $c_2(x)$, dando valores a las constantes de integración de estas dos integrales. Todas ellas son válidas, siendo las más sencillas las que resultan de el valor cero para las constantes.

Ejercicio 3.9. Encontrar una solución particular de la siguiente ecuación.

$$y'' + y = \tan x \quad ; \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

Vamos a aplicar el *método de variación de parámetros*. Notar que el coeficiente de y'' es la unidad, de otra forma habría que dividir toda la ecuación por ese coeficiente. Primeramente necesitamos la solución general de la homogénea asociada. Resolvemos entonces la ecuación característica:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i \quad \Rightarrow \quad y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad \begin{cases} y_1 = \cos x \\ y_2 = \sin x \end{cases}$$

donde y_1 e y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones de la homogénea.

Vamos a encontrar unas funciones $c_1(x)$ y $c_2(x)$ que verifiquen las dos ecuaciones del *método de variación de parámetros* donde $y_p = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$.

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0 \\ -c_1' \sin x + c_2' \cos x = \tan x \end{cases}$$

Aplicando Cramer:

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \tan x & \cos x \end{vmatrix} = -\sin x \tan x \quad ; \quad W_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \tan x \end{vmatrix} = \cos x \tan x = \sin x$$

Calculamos la funciones c_i .

$$c_1' = \frac{W_1}{W} = -\sin x \tan x \quad ; \quad c_1 = - \int \sin x \tan x dx$$

$$\begin{aligned} \int \sin x \tan x dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} dx = \int \sec x dx - \int \cos x dx = \\ &= \log(\sec x + \tan x) - \sin x \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\log(\sec x + \tan x) + \sin x \end{aligned}$$

$$c_2' = \frac{W_2}{W} = \sin x \quad ; \quad c_2 = \int \sin x dx = -\cos x$$

Por tanto:

$$y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x = (-\log(\sec x + \tan x) + \sin x) \cos x - \cos x \sin x$$

$$y_p = -\log(\sec x + \tan x) \cos x = \log\left(\frac{\cos x}{1 + \sin x}\right) \cos x$$

⁴⁹Ver el Teorema 3.5, página 59.

Extensión del Método de Variación de Parámetros a EDOL de Orden n

La técnica vista en el apartado anterior para resolver una EDO de segundo orden (Ecuación 3.8, página 69), se puede extender a EDO lineales de cualquier orden n , obteniéndose un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias (SEDO) de primer orden en las n funciones incógnitas $c_i(x)$, y resolverse de la misma forma por el método de Cramer. Veamos a modo de ejemplo cómo sería el proceso para una EDOL de tercer orden:

$$\alpha_3(x)y''' + \alpha_2(x)y'' + \alpha_1(x)y' + \alpha_0(x)y = F(x) \quad ; \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \quad , \quad \alpha_3 \neq 0$$

Al igual que antes⁵⁰, es necesario que el coeficiente que multiplica a la derivada de mayor orden y''' sea la unidad, dividiendo toda la ecuación en caso necesario por $\alpha_3(x)$ quedando:

$$y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{\alpha_3(x)}F(x) \quad (3.12)$$

La solución general viene dada por:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \implies \begin{cases} y_h & : \text{Sol. gen. de la ec. homogénea} & y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0 \\ y_p & : \text{Sol. par. de la ec. completa} & y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x) \end{cases}$$

Una vez calculada la *solución general* de la ecuación homogénea a través de su ecuación característica, tendremos tres soluciones linealmente independientes $y_1(x)$, $y_2(x)$ y $y_3(x)$ de forma que:

$$y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + c_3y_3(x) \quad ; \quad c_i : \text{parámetros}$$

A través del método de variación de parámetros buscamos una solución particular de la forma:

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + c_3(x)y_3(x) \quad ; \quad c_i(x) : \text{funciones a determinar}$$

Derivando esta expresión tres veces e imponiendo simplificaciones se tiene:

$$\begin{aligned} y_p' &= c_1y_1' + c_2y_2' + c_3y_3' + \underbrace{c_1'y_1 + c_2'y_2 + c_3'y_3}_0 \\ y_p'' &= c_1y_1'' + c_2y_2'' + c_3y_3'' + \underbrace{c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_3'y_3'}_0 \\ y_p''' &= c_1y_1''' + c_2y_2''' + c_3y_3''' + c_1'y_1'' + c_2'y_2'' + c_3'y_3'' \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación completa Ecuación (3.12), reordenando y simplificando se tiene::

$$\begin{aligned} y_p''' + a_2(x)y_p'' + a_1(x)y_p' + a_0(x)y_p &= f \\ y_p''' + a_2(x)y_p'' + a_1(x)y_p' + a_0(x)y_p &= c_1'y_1'' + c_2'y_2'' + c_3'y_3'' + \\ + c_1 \underbrace{[y_1''' + a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1]}_0 &+ c_2 \underbrace{[y_2''' + a_2(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2]}_0 + \\ + c_3 \underbrace{[y_3''' + a_2(x)y_3'' + a_1(x)y_3' + a_0(x)y_3]}_0 &= f \\ c_1'y_1'' + c_2'y_2'' + c_3'y_3'' &= f \end{aligned}$$

Finalmente se tiene un sistema de 3 ecuaciones algebraicas lineales para las derivadas c_1' , c_2' y c_3' de las funciones desconocidas:

$$\begin{cases} c_1'y_1'' + c_2'y_2'' + c_3'y_3'' = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_3'y_3' = 0 \\ c_1'y_1'' + c_2'y_2'' + c_3'y_3'' = f \end{cases}$$

⁵⁰Ver la Sección 3.3.2, página 69.

Aplicando la regla de Cramer:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ y''_1 & y''_2 & y''_3 \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & y'_2 & y'_3 \\ f & y''_2 & y''_3 \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_3 \\ y'_1 & 0 & y'_3 \\ y''_1 & f & y''_3 \end{vmatrix}, \quad W_3 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y'_1 & y'_2 & 0 \\ y''_1 & y''_2 & f \end{vmatrix}$$

$$c'_1 = \frac{W_1}{W} \quad ; \quad c'_2 = \frac{W_2}{W} \quad ; \quad c'_3 = \frac{W_3}{W}$$

Integrando estas EDO de primer orden se tiene finalmente:

$$c_1(x) = \int \frac{W_1}{W} dx \quad ; \quad c_2(x) = \int \frac{W_2}{W} dx \quad ; \quad c_3(x) = \int \frac{W_3}{W} dx$$

De forma general para una EDO lineal de orden n de la forma:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

El sistema que hay que resolver por el método de *variación de parámetros* es:

$$\begin{cases} c'_1 y_1 + c'_2 y_2 + \dots + c'_n y_n = 0 \\ c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 + \dots + c'_n y'_n = 0 \\ \vdots \\ c'_1 y_1^{(n-1)} + c'_2 y_2^{(n-1)} + \dots + c'_n y_n^{(n-1)} = f \end{cases}$$

donde las funciones $y_i(x)$ corresponden al conjunto fundamental de soluciones de la EDO homogénea asociada.

Ejercicio 3.10. Encontrar la solución general de la siguiente ecuación usando el método de los coeficientes indeterminados y el método de variación de parámetros.

$$y''' - y'' = 12x^2 + 6x$$

Al tratarse de una EDO lineal, la solución general puede expresarse como:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

La solución general de la homogénea se puede obtener a través de la ecuación característica:

$$y''' - y'' = 0 \quad \implies \quad \lambda^3 - \lambda^2 = 0 \quad ; \quad \lambda^2(\lambda - 1) = 0 \quad \implies \quad \begin{cases} \lambda_{1,2} = 0 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

$$y_h(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x$$

Para encontrar una solución particular vamos a utilizar los dos métodos que nos indica el enunciado.

• Método de los Coeficientes Indeterminados

Como el término independiente es de tipo polinómico con raíz asociada $\alpha \pm \beta i = 0$ y ésta está presente como raíz de la ec. característica con multiplicidad 2, la solución particular tiene la forma:

$$y_p(x) = x^2(Ax^2 + Bx + C) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$$

Derivando y sustituyendo en la EDO completa se tiene:

$$y'_p(x) = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx \quad ; \quad y''_p(x) = 12Ax^2 + 6Bx + 2C \quad ; \quad y'''_p(x) = 24Ax + 6B$$

$$y''' - y'' = 24Ax + 6B - (12Ax^2 + 6Bx + 2C) = -12Ax^2 + (24A - 6B)x + (6B - 2C) = 12x^2 + 6x$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -12A = 12 \Rightarrow A = -1 \\ 24A - 6B = 6 \Rightarrow B = -5 \\ 6B - 2C = 0 \Rightarrow C = -15 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{y_p(x) = -x^4 - 5x^3 - 15x^2}$$

Finalmente, la solución general de la EDO dada es:

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 + c_2x + c_3e^x - x^4 - 5x^3 - 15x^2}$$

• Método de Variación de Parámetros

Notar que el coeficiente de y''' es la unidad, de otra forma habría que dividir toda la ecuación por ese coeficiente **antes** de encontrar la solución de la homogénea.

Buscamos una solución particular de la forma:

$$y_p(x) = c_1(x) + c_2(x)x + c_3(x)e^x$$

Para encontrar las funciones $c_i(x)$ resolvemos el siguiente sistema, teniendo en cuenta que $y_1 = 1$, $y_2 = x$ e $y_3 = e^x$.

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1'y_1 + c_2'y_2 + c_3'y_3 = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_3'y_3' = 0 \\ c_1'y_1'' + c_2'y_2'' + c_3'y_3'' = f \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1' + c_2'x + c_3'e^x = 0 \\ c_2' + c_3'e^x = 0 \\ c_3'e^x = 12x^2 + 6x \end{array} \right.$$

Lo resolvemos por Cramer:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & x & e^x \\ 0 & 1 & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} = e^x \quad ; \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x & e^x \\ 0 & 1 & e^x \\ 12x^2 + 6x & 0 & e^x \end{vmatrix} = (12x^3 - 6x^2 - 6x)e^x$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & e^x \\ 0 & 0 & e^x \\ 0 & 12x^2 + 6x & e^x \end{vmatrix} = -e^x(12x^2 + 6x) \quad ; \quad W_3 = \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12x^2 + 6x \end{vmatrix} = 12x^2 + 6x$$

Por tanto:

$$c_1' = \frac{W_1}{W} = 12x^3 - 6x^2 - 6x \quad ; \quad c_2' = \frac{W_2}{W} = -12x^2 - 6x \quad ; \quad c_3' = \frac{W_3}{W} = (12x^2 + 6x)e^{-x}$$

Integrando:

$$c_1' = \frac{dc_1}{dx} = 12x^3 - 6x^2 - 6x \Rightarrow c_1(x) = \int (12x^3 - 6x^2 - 6x) dx = 3x^4 - 2x^3 - 3x^2$$

$$c_2' = \frac{dc_2}{dx} = -12x^2 - 6x \Rightarrow c_2(x) = \int (-12x^2 - 6x) dx = -4x^3 - 3x^2$$

$$c_3' = \frac{dc_3}{dx} = (12x^2 + 6x)e^{-x} \Rightarrow c_3(x) = 12 \int x^2 e^{-x} dx + 6 \int x e^{-x} dx$$

Integrando por partes:

$$c_3(x) = -12(x^2 + 2x + 2)e^{-x} - 6(x + 1)e^{-x} = -6(2x^2 + 5x + 5)e^{-x}$$

Por tanto la solución particular buscada será:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= c_1(x) + c_2(x)x + c_3(x)e^x = 3x^4 - 2x^3 - 3x^2 - (4x^3 + 3x^2)x - 6(2x^2 + 5x + 5)e^{-x}e^x = \\ &= -x^4 - 5x^3 - 15x^2 - 30x - 30 \end{aligned}$$

Finalmente, la solución general es:

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 + c_2x + c_3e^x - x^4 - 5x^3 - 15x^2 - 30x - 30}$$

Notar que las dos soluciones generales de ambos apartados son distintas ya que cada uno de los métodos (**coeficientes indeterminados** y **variación de parámetros**) ha dado como resultado una solución particular distinta. Esto suele ser normal, ya que existen infinitas soluciones particulares de la ecuación (todo el conjunto de funciones dado por la familia de curvas tri-paramétrica de la solución general) cada método devuelve una cualquiera de ellas, no teniendo porqué ser iguales.

Podemos comprobar fácilmente la validez de ambas soluciones generales por ejemplo con *SageMath*⁵¹.

```
sage: var('c1 c2 c3')
sage: # Solución general del apartado a)
sage: y1=c1+c2*x+c3*e^x-x^4-5*x^3-15*x^2
sage: # Comprobación de la solución en la EDO
sage: diff(y1,x,3)-diff(y1,x,2)-12*x^2-6*x
0
sage: # Solución general del apartado b)
sage: y2=c1+c2*x+c3*e^x-x^4-5*x^3-15*x^2-30*x-30
sage: # Comprobación de la solución en la EDO
sage: diff(y2,x,3)-diff(y2,x,2)-12*x^2-6*x
0
```

Por tanto ambas soluciones generales son válidas.

En la práctica, al igual que se observa en el ejercicio anterior, el *método de los coeficientes indeterminados*, siempre que se pueda aplicar⁵², suele resultar más sencillo de realizar que el *método de variación de parámetros*.

3.3.3. Función de Green

Definición 3.11. Función de Green

Dada la EDO:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

Su solución general viene dada por:

$$y = y_h + y_p = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x)$$

La solución particular puede obtener por el **método de variación de parámetros** como:

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \implies c_1(x) = - \int_{x_0}^x \frac{y_2(s)R(s)}{W(s)} ds ; \quad c_2(x) = \int_{x_0}^x \frac{y_1(s)R(s)}{W(s)} ds$$

donde x_0 es un punto cualquiera del dominio de la ecuación⁵³. Por tanto:

$$y_p(x) = -y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{y_2(s)R(s)}{W(s)} ds + y_2(x) \int_{x_0}^x \frac{y_1(s)R(s)}{W(s)} ds = \int_{x_0}^x \underbrace{\frac{y_1(s)y_2(x) - y_2(s)y_1(x)}{W(s)}}_{G(x,s)} R(s) ds$$

$$y_p(x) = \int_{x_0}^x G(x,s) R(s) ds$$

donde la función $G(x,s)$ recibe el nombre de **función de Green** de la ecuación.

Como se verá esta forma de expresar la solución de una ecuación diferencial a través de su **función de Green** aparecerá en diferentes problemas a lo largo de los temas⁵⁴.

⁵¹<https://www.sagemath.org/>

⁵²Ver la Sección 3.3.1, página 64.

⁵³La solución particular obtenida es la solución del problema formado por la ecuación y las condiciones iniciales $y(x_0) = y'(x_0) = 0$.

⁵⁴Ver por ejemplo la Sección 7.4.2, página 192.

3.4. EDOL con Coeficientes Variables

No existe métodos generales para resolver las EDO lineales de orden n con coeficientes variables de la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y = f(x)$$

El mejor procedimiento para obtener soluciones de este tipo de EDO es en forma de *series infinitas*⁵⁵ Existen sin embargo dos casos donde es posible encontrar soluciones analíticas de forma simple:

1. Reducción de orden (para orden 2)

- Falta de variable independiente o dependiente.
- Conocida una solución particular.

2. Ecuación de Cauchy-Euler

3.4.1. Reducción de Orden por falta de un Tipo de Variable

Como se vio en el [Sección 2.9, página 40](#), una EDO de segundo orden en la falte la variable x o y se puede transformar, mediante un cambio de variable apropiado, en una EDO de primer orden.

Ausencia de y : $F(x, y', y'') = 0$

Se realiza haciendo el c.v.: $y' = t$ con $t(x)$ y $t' = \frac{dt}{dx}$

$$y'' = \frac{dt}{dx} = t' \quad \Rightarrow \quad f(x, t, t') = 0 \quad \text{EDO 1}^{er} \text{ Orden}$$

Ausencia de x : $F(y, y', y'') = 0$

Se realiza haciendo el c.v.: $y' = t$ con $t(y)$ y $t' = \frac{dt}{dy}$

$$y'' = \frac{dt}{dx} = \frac{dt}{dy} \frac{dy}{dx} = t't \quad \Rightarrow \quad f(y, t, t') = 0 \quad \text{EDO 1}^{er} \text{ Orden}$$

En ambos casos la solución se obtiene resolviendo **dos** EDO de primer orden sucesivas⁵⁶.

3.4.2. Reducción de Orden conocida una Solución Particular: Fórmula de Abel

Dada una EDO lineal homogénea de segundo orden:

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

se puede reducir a una de *primer orden* si se conoce una solución $y_1(x)$ no trivial. La solución general será:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

siendo $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluciones *linealmente independientes*⁵⁷, es decir, su cociente no puede ser constante.

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{cte} \quad \xrightarrow{\text{c.v.}} \quad u(x) = \frac{y_1(x)}{y_2(x)} \quad ; \quad y_2(x) = u(x)y_1(x)$$

Sustituyendo este valor de $y_2(x)$ en la EDO de segundo orden, se reduce a una EDO de primer orden, siendo la incógnita $u(x)$.

⁵⁵Este método no se estudiará en este curso. Ver por ejemplo "Clases de Ampliación de Matemáticas para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 313.

⁵⁶Ver el [Ejercicio 2.17, página 41](#) y el [Ejercicio 2.18, página 41](#).

⁵⁷Ver la [Definición 3.9, página 59](#).

Entonces, cuando tenemos un problema general de segundo orden en *forma canónica*⁵⁸:

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ \text{Sol. Particular: } y_1(x) \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{C.V.}} y(x) = u(x)y_1(x)$$

Sustituyendo: $\left\{ \begin{array}{l} y' = uy_1' + y_1u' \\ y'' = uy_1'' + 2y_1'u' + y_1u'' \end{array} \right\}$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = \underbrace{u[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1]}_0 + y_1u'' + (2y_1' + p(x)y_1)u' = 0$$

Por tanto, podemos realizar una reducción de orden de la siguiente forma:

$$y_1u'' + (2y_1' + p(x)y_1)u' = 0 \quad \xrightarrow{w = u'} \quad y_1w' + (2y_1' + p(x)y_1)w = 0$$

La ecuación anterior es lineal y separable, de forma que separando variables e integrando:

$$\frac{dw}{w} + 2\frac{y_1'}{y_1}dx + p(x)dx = 0 \quad \xrightarrow{\int dx} \quad \log w + 2 \log y_1 = - \int p(x) dx + c$$

$$\log |wy_1^2| = - \int p(x)dx + c \quad ; \quad wy_1^2 = c_1 e^{- \int p(x)dx}$$

Despejando w , deshaciendo el C.V. $w = u'$ e integrando de nuevo:

$$u = c_1 \int \frac{e^{- \int p(x)dx}}{y_1^2} dx + c_2$$

Como cualquier solución particular $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ no trivial es válida, haciendo $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$ se tiene la conocida como **fórmula de Abel**⁵⁹:

$$y_2(x) = y_1 \int \frac{e^{- \int p(x)dx}}{y_1^2} dx$$

Finalmente, la solución general será:

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Este procedimiento se puede generalizar para determinar la solución general de una ecuación **no homogénea** de segundo orden de la forma:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (3.13)$$

Siempre que:

- Se conozca una **solución particular** $y_1(x)$ de la *ecuación homogénea asociada*.
- Se aplique, posteriormente a la **reducción de orden** (*fórmula de Abel*), el *método de variación de parámetros*⁶⁰ para determinar una **solución particular** de la *ecuación completa* (3.13).

De forma general, este método de *reducción de orden* se puede aplicar para reducir una EDO lineal de orden n a otra EDO de orden $n - m$ siempre que se conozcan m soluciones particulares de la ecuación original.

Nota 3.1. Dada la EDO homogénea $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, se puede demostrar que el *wronskiano*⁶¹ de dos soluciones cualesquiera de esta ecuación viene dado por:

$$W = ce^{\int p(x) dx} \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 \int \frac{W}{y_1^2} dx \quad (\text{Fórmula de Abel})$$

para una determinada constante c .

⁵⁸Donde $p(x) = b(x)/a(x)$ y $q(x) = c(x)/a(x)$. Ver por ejemplo "Clases de Ampliación de Matemáticas para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 313.

⁵⁹También conocida a veces como *fórmula de reducción de orden* o de *Abel-Liouville*.

⁶⁰Ver la *Sección 3.3.2*, página 69.

⁶¹Ver el *Teorema 3.5*, página 59.

Ejercicio 3.11. Encontrar la solución general de la siguiente ecuación, conociendo una solución particular $y_1(x)$ de su ecuación homogénea.

$$(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2 - 1)^2 \quad ; \quad y_1(x) = x$$

Notar que es una EDO lineal de segundo orden con coeficientes variables y no homogénea, de forma que no hay un método para su resolución. Vamos a aplicar el procedimiento descrito en la sección anterior.

Primeramente ponemos la ecuación en su *forma canónica*:

$$(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2 - 1)^2 \implies y'' - \underbrace{\frac{2x}{x^2 - 1}}_{p(x)} y' + \frac{2}{x^2 - 1} y = \underbrace{\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}}_{f(x)}$$

Notar que esta segunda EDO tiene las mismas soluciones que la original, excepto en $x = \pm 1$, que es un *punto singular*⁶² de la primera EDO. Aplicamos la fórmula de Abel:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx = x \int \frac{e^{\int \frac{2x}{x^2-1} dx}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{\ln(x^2-1)}}{x^2} dx = x \int \frac{x^2-1}{x^2} dx = \\ &= x \int (1 - x^{-2}) dx = x(x + x^{-1}) = x^2 + 1 \end{aligned}$$

Por tanto la solución general de la homogénea es:

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = \boxed{c_1 x + c_2 (x^2 + 1)}$$

Aplicamos ahora el *método de variación de parámetros* para obtener una solución particular de la completa. Notar que en este método siempre el coef. de la derivada de mayor orden debe ser la unidad (*forma canónica*) que es la que hemos utilizado en la *fórmula de Abel*.

$$y_p = c_1(x)x + c_2(x)(x^2 + 1)$$

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f \end{cases} \implies \begin{cases} c_1' x + c_2' (x^2 + 1) = 0 \\ c_1' + 2xc_2' = x^2 - 1 \end{cases} \implies \begin{cases} -c_1' - c_2' \frac{x^2+1}{x} = 0 \\ c_1' + 2xc_2' = x^2 - 1 \end{cases} \quad (3.14)$$

Sumando ambas:

$$(-x - x - 1 + 2x)c_2' = x^2 - 1 \quad ; \quad (x - x^{-1})c_2' = x^2 - 1 \quad ; \quad \frac{\cancel{x^2-1}}{x}c_2' = \cancel{x^2-1} \quad ; \quad c_2' = x$$

$$\implies \boxed{c_2(x) = \frac{x^2}{2}}$$

De la primera ecuación de (3.14):

$$-c_1' - x \frac{x^2+1}{x} = 0 \quad ; \quad c_1' = -x^2 - 1 \quad ; \quad \boxed{c_1(x) = -\frac{x^3}{3} - x}$$

Por tanto, una solución particular de la EDO es:

$$y_p(x) = c_1(x)x + c_2(x)(x^2 + 1) = \left(-\frac{x^3}{3} - x\right)x + \frac{x^2}{2}(x^2 + 1) = -\frac{x^4}{3} - x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2} = \boxed{\frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{2}}$$

Finalmente, la solución general pedida es:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \boxed{c_1 x + c_2 (x^2 + 1) + \frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{2}}$$

⁶²Ver por ejemplo "Clases de Ampliación de Matemáticas para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 313.

3.4.3. Ecuación de Cauchy-Euler

Se denomina **ecuación de Cauchy-Euler** o **equidimensional completa** a una EDO de la forma:

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y'(x) + a_0 y = g(x)$$

donde los coeficientes a_i son constantes y el grado k de los coeficientes monomiales x^k coincide con el orden k de las derivadas $y^{(k)}$ (puede faltar algún bloque $a_k x^k y^{(k)}$).

La solución general de esta ecuación completa, será como siempre la suma de la solución general de la homogénea asociada más una solución particular de la completa.

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Una solución particular de la ecuación completa se puede obtener mediante el *método de variación de parámetros*⁶³. Veamos ahora como determinar la solución general de la **ecuación de Cauchy-Euler** o **equidimensional homogénea**⁶⁴:

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y'(x) + a_0 y = 0 \quad (3.15)$$

Hay dos métodos:

- Buscar soluciones de la forma: $y(x) = x^m$
- Mediante el cambio de variable: $x = e^z$

Soluciones de la forma: $y(x) = x^m$

Este método es el más sencillo y se basa en buscar soluciones de la forma:

$$y(x) = x^m \rightarrow \frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2} \dots$$

por tanto:

$$a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} = a_k x^k m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1) x^{m-k} = a_k m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1) x^m$$

de forma que cualquier EDO de tipo Cauchy-Euler de orden n se transforma en una ecuación algebraica de orden n .

Por ejemplo, sea la siguiente EDO de Cauchy-Euler de segundo orden y homogénea:

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = 0$$

Al buscar soluciones de la forma $y = x^m$ se obtiene:

$$ax^2 m(m-1)x^{m-2} + bmx^{m-1} + cx^m = ax^m m(m-1) + bx^m + cx^m = 0$$

Quedando la ecuación algebraica, denominada **ecuación auxiliar** o **indicial**, de la forma:

$$am(m-1) + bm + c = 0 \rightarrow am^2 + (b-a)m + c = 0$$

De forma general, para una EDO de Cauchy-Euler homogénea de orden n (**Ecuación (3.15)**), la *ecuación indicial* es una ecuación polinómica de grado n y por tanto con n soluciones (reales y/o complejas, iguales y/o distintas). Para cada una de ellas existe una solución de una determinada forma $y_k(x)$, siendo la solución general de la ecuación homogénea $y_h(x)$ una combinación lineal de todas ellas.

$$y_h(x) = \sum_{k=1}^n c_k y_k(x)$$

⁶³El método de los *coeficientes indeterminados* (ver la **Sección 3.3.1, página 64**) en general solo es válido para las EDO con coeficientes constantes. Por tanto para determinar la solución particular del ecuación de Cauchy-Euler solo es posible utilizar el *método de variación de parámetros*, ver la **Sección 3.3.2, página 69**.

⁶⁴En algunos textos es a esta ecuación a la que se refieren como de Cauchy o equidimensional.

En la siguiente tabla se muestra la forma de las soluciones $y_k(x)$, donde s representa la multiplicidad de una determinada solución m_k de la ecuación indicial.

Solución $m_k = \alpha + i\beta$	Tipo solución $y_k(x)$
Reales : α^s	$x^\alpha [c_1 + c_2 \log x + \dots + c_s (\log x)^{s-1}]$
Complejas : $[\alpha \pm \beta i]^s$	$x^\alpha \{c_1 \cos(\beta \log x) + c_2 \sin(\beta \log x) + \log x [c_3 \cos(\beta \log x) + c_4 \sin(\beta \log x)] + \dots + (\log x)^{s-1} [c_{2s-1} \cos(\beta \log x) + c_{2s} \sin(\beta \log x)]\}$

A continuación se muestran algunos ejemplos prácticos del uso de esta tabla:

- $x^2 y'' + 2x^2 y' - 2y = 0$

Ec. Indicial:

$$m(m-1) + 2m - 2 = 0$$

Ec. Indicial Simplificada:

$$m^2 + m - 2 = 0$$

Sol. Ec. Indicial:

$$m = \{1, -2\}$$

Sol. General:

$$y(x) = c_1 x + c_2 x^{-2}$$

- $x^4 y^{(4)} + 3x^3 y''' - 2x^2 y'' + 4xy' = 0$

Ec. Indicial:

$$m(m-1)(m-2)(m-3) + 3m(m-1)(m-2) - 2m(m-1) + 4m = 0$$

Ec. Indicial Simplificada:

$$m^4 - 3m^3 + 4m = 0$$

Sol. Ec. Indicial:

$$m = \{0, -1, 2 \text{ (doble)}\}$$

Sol. General:

$$y(x) = c_1 + c_2 x^{-1} + x^2(c_3 + c_4 \log x)$$

- $x^3 y''' + 3x^2 y'' + 4xy' - 52y = 0$

Ec. Indicial:

$$m(m-1)(m-2) + 3m(m-1) + 4m - 52 = 0$$

Ec. Indicial Simplificada:

$$m^3 - 3m - 52 = 0$$

Sol. Ec. Indicial:

$$m = \{4, -2 \pm 3i\}$$

Sol. General:

$$y(x) = c_1 x^4 + x^{-2}(c_3 \cos(3 \log x) + c_4 \sin(3 \log x))$$

Ejercicio 3.12. Resolver la siguiente EDO de Cauchy-Euler.

$$x^3 y''' + 5x^2 y'' + 7xy' + 8y = 0$$

Buscamos soluciones de la forma: $y = x^m$

$$x^m m(m-1)(m-2) + 5x^m m(m-1) + 7x^m m + 8x^m = 0 \implies m(m-1)(m-2) + 5(m-1) + 7m + 8 = 0$$

Reordenando:

$$(m+2)(m^2+4) = 0$$

Las soluciones son en este caso: $m_1 = -2$; $m_{2,3} = \pm 2i$

Por tanto, la solución general de la EDO será:

$$y(x) = c_1 x^{-2} + c_2 \cos(2 \log x) + c_3 \sin(2 \log x)$$

Cambio de Variable: $x = e^z$

Este segundo método para calcular la solución de la **Ecuación (3.15)** es más laborioso, aunque no necesita una tabla de soluciones como el caso anterior. Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$x = e^z \quad \implies \quad z = \log x \quad \implies \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$$

con lo que las derivadas pasan a ser:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{1}{x} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left[\frac{dy}{dz} \frac{1}{x} \right] = \frac{d^2y}{dz^2} \frac{1}{x^2} - \frac{dy}{dz} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \left[\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} \right] \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{d}{dx} \frac{d^2y}{dx^2} = \dots = \frac{1}{x^3} \left[\frac{d^3y}{dz^3} - 3 \frac{d^2y}{dz^2} + 2 \frac{dy}{dz} \right] \\ \frac{d^4y}{dx^4} &= \frac{d}{dx} \frac{d^3y}{dx^3} = \dots = \frac{1}{x^4} \left[\frac{d^4y}{dz^4} - 6 \frac{d^3y}{dz^3} + 11 \frac{d^2y}{dz^2} - 6 \frac{dy}{dz} \right] \end{aligned}$$

El cambio de variable anterior transforma la ecuación original en una EDO Lineal de orden n de coeficientes constantes de la forma:

$$b_n \frac{d^n y}{dz^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dy}{dz} + b_0 y = 0$$

que puede resolverse a través de la *ecuación característica*⁶⁵ y después deshacer el cambio de variable: $z = \log x$.

Ejercicio 3.13. Resolver la EDO de Cauchy-Euler del **Ejercicio 3.12** a través del cambio de variable $x = e^z$

$$x^3 y''' + 5x^2 y'' + 7xy' + 8y = 0$$

Buscamos soluciones de la forma: $x = e^z$

$$y' = x^{-1} \frac{dy}{dz} \quad ; \quad y'' = x^{-2} \left[\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} \right] \quad ; \quad y''' = x^{-3} \left[\frac{d^3y}{dz^3} - 3 \frac{d^2y}{dz^2} + 2 \frac{dy}{dz} \right]$$

Sustituyendo en el EDO:

$$\left[\frac{d^3y}{dz^3} - 3 \frac{d^2y}{dz^2} + 2 \frac{dy}{dz} \right] + 5 \left[\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} \right] + 7 \frac{dy}{dz} + 8y = 0 \quad ; \quad \frac{d^3y}{dz^3} + 2 \frac{d^2y}{dz^2} + 4 \frac{dy}{dz} + 8y = 0$$

cuya ecuación característica es:

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0 \quad \implies \quad \lambda = \{-2, \pm 2i\}$$

Por tanto la solución en la variable z es:

$$y = c_1 e^{-2z} + c_2 \cos(2z) + c_3 \sin(2z)$$

Deshaciendo el cambio de variable $z = \log x$ se obtiene finalmente la misma solución que en el ejercicio anterior:

$$y(x) = c_1 x^{-2} + c_2 \cos(2 \log x) + c_3 \sin(2 \log x)$$

⁶⁵Ver la **Sección 3.2**, página 57.

3.4.4. Ecuación de Bessel

Funciones Especiales

En problemas aplicados surgen con frecuencia algunas EDO de segundo orden particulares. Estas ecuaciones han sido estudiadas en forma extensa y sus soluciones corresponden a **funciones especiales**⁶⁶. Entre las más conocidas se encuentran las siguientes⁶⁷:

- $x^2 y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0$ Ec. de Bessel
- $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$ Ec. de Legendre
- $y'' + (2p + 1 - x^2)y = 0$ Ec. de Hermite

En este curso solo vamos a estudiar la ecuación de Bessel, por su gran aplicabilidad⁶⁸.

Ecuación de Bessel

Se denomina **ecuación de Bessel** de orden⁶⁹ m a la siguiente EDOL de segundo orden con coeficientes variables:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0 \quad ; \quad m \geq 0 \quad (3.16)$$

Donde $x = 0$ es *punto singular regular*⁶⁸ y por tanto permite soluciones en forma de *series de Frobenius*⁷⁰ en torno a ese punto. En la definición de estas soluciones aparece la *función gamma* que veremos a continuación.

Función Gamma, $\Gamma(z)$

La **función gamma**, representada por $\Gamma(z)$, generaliza el concepto de *factorial*⁷¹ a los números complejos z y está definida mediante la siguiente integral impropia:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

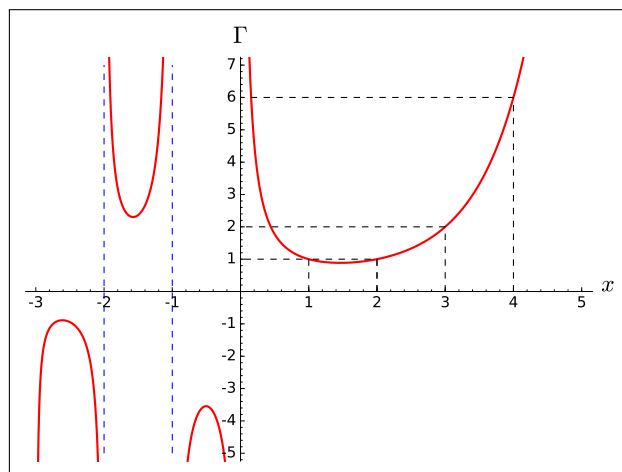
Si n es un número real entero positivo se tiene:

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \begin{cases} \Gamma(1) = 0! \\ \Gamma(2) = 1! \\ \Gamma(3) = 2! \\ \vdots \end{cases}$$

cumpléndose las siguientes dos propiedades:

$$\Gamma(1 + \alpha) = \alpha \Gamma(\alpha)$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$



A través de la *función gamma* se pueden definir diferentes *funciones especiales*, conocidas como **funciones de Bessel**, que permiten de forma sencilla expresar la solución de la ecuación de Bessel para distintos órdenes m .

⁶⁶Son un grupo de funciones no elementales entre las que se incluyen la función gamma, integrales de Fresnel y funciones elípticas, entre otras.

⁶⁷Cada una de estas ED pueden considerarse como un problema (singular) de autovalores de Sturm-Liouville, ver el **Tema 6**, página 151.

⁶⁸Más información sobre estas ecuaciones se pueden ver por ejemplo "Clases de Ampliación de Matemáticas para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 313.

⁶⁹De forma general m es un número complejo cualquiera aunque en este curso se estudian solo los casos reales con $m \geq 0$.

⁷⁰Las series de Frobenius son una generalización de las series de potencia que permiten exponentes no enteros.

⁷¹El factorial de un entero positivo n viene dado por $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, considerando $0! = 1$.

Solución de la Ecuación de Bessel

La solución general de la **ecuación de Bessel**, **Ecuación (3.16)**, se puede expresar como:

$$y(x) = c_1 J_m(x) + c_2 Y_m(x)$$

donde $J_m(x)$ y $Y_m(x)$ son las **funciones de Bessel de primera y segunda clase o especie** respectivamente.

Nota 3.2. Si m no es entero la solución de la ecuación de Bessel se puede expresar también como⁷²:

$$y(x) = c_1 J_m(x) + c_2 J_{-m}(x) \quad ; \quad m \notin \mathbb{Z}$$

Ejercicio 3.14. Encontrar la solución general de la siguiente ecuación de Bessel.

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0$$

En este caso $m = \sqrt{1/9} = 1/3$, (no entero), y por tanto la solución general de la ecuación puede expresarse de las siguientes dos formas:

$$y(x) = c_1 J_{1/3}(x) + c_2 Y_{1/3}(x) \quad ; \quad y(x) = c_1 J_{1/3}(x) + c_2 J_{-1/3}(x)$$

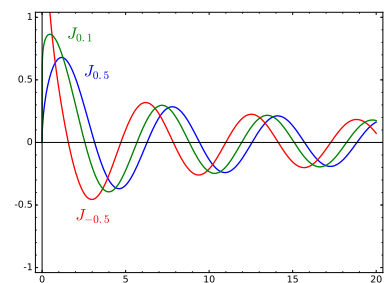
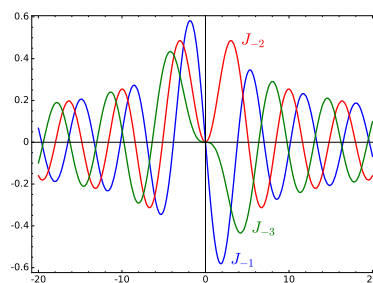
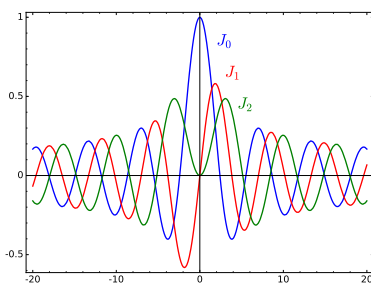
En la actualidad las *funciones de Bessel* están implementadas en muchos lenguajes de programación, en diferentes software matemáticos e incluso en algunas calculadoras científicas, de forma que su uso resulta sencillo⁷³.

Funciones de Bessel de Primera Clase o Especie

Para valores reales del *parámetro*⁷⁴ m , las siguientes funciones:

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1+m+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m} = \left(\frac{x}{2}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1+m+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \quad ; \quad m \in \mathbb{R}$$

se denominan **funciones de Bessel de primera clase o especie** y de **orden** m . En las siguientes gráficas se muestran algunos de sus miembros para m cero y valores enteros positivos (izquierda), para valores de m enteros negativos (centro) y para valores fraccionarios positivos y negativos (derecha).



⁷²Notar que esto no implica que $J_{-m}(x) = Y_m(x)$ para ningún valor de m .

⁷³Ver en la **Sección A.1.7, página 269** el uso de las funciones de Bessel a través del programa *SageMath*.

⁷⁴Ver la **Definición 1.14, página 13**.

Algunas Propiedades de las Funciones de Bessel de Primera Clase

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \frac{x^8}{2^2 4^2 6^2 8^2} \cdots \\ J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 4} + \frac{x^5}{2^2 4^2 6} - \frac{x^7}{2^2 4^2 6^2 8} \cdots \end{array} \right\} \quad J'_0(x) = \frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x)$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}[x^{-p}J(p)(x)] = -x^{-p}J_{p+1}(x)} \quad , \quad p \geq 0$$

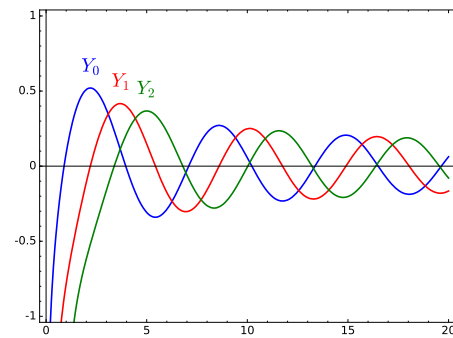
$$\bullet J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\tau - x \sin \tau) d\tau \quad ; \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \quad , \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \quad (\text{Funciones Esféricas})$$

Funciones de Bessel de Segunda Clase o Especie

Las **funciones de Bessel de segunda clase o especie**⁷⁵ y de **orden** $m \in \mathbb{R}$, se identifican mediante Y_m y vienen definidas por:

$$\left\{ \begin{array}{ll} Y_m(x) = \frac{\cos(m\pi)J_m(x) - J_{-m}(x)}{\sin(m\pi)} & m \notin \mathbb{Z} \\ Y_m(x) = \lim_{n \rightarrow m} Y_n(x) & m \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$



Para $m \in \mathbb{Z}$ se cumple:

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x) \quad ; \quad Y_{-m}(x) = (-1)^m Y_m(x)$$

EDO Resolubles en Términos de Funciones de Bessel

A veces es posible transformar algunas EDO en la ecuación de Bessel mediante determinados cambios de variable. Estas ecuaciones son importantes ya que aparecen de forma habitual en diferentes problemas de EDP⁷⁶.

• Ecuación Paramétrica de Bessel de orden m

$$x^2 y'' + xy' + (\alpha^2 x^2 - m^2)y = 0 \quad ; \quad \text{c.v.: } z = \alpha x \quad , \quad \alpha > 0$$

$$x = \frac{z}{\alpha} \quad ; \quad y(x) = y(z/\alpha) = \phi(z) \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d\phi}{dz} \frac{dz}{dx} = \phi'(z)\alpha \quad ; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dz}[\phi'(z)\alpha] \frac{dz}{dx} = \phi''(z)\alpha^2$$

$$\frac{z^2}{\alpha^2} \phi'' \alpha^2 + \frac{z}{\alpha} \phi' \alpha + \left(\alpha^2 \frac{z^2}{\alpha^2} - m^2 \right) \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{z^2 \phi'' + z \phi' + (z^2 - m^2) \phi = 0}$$

cuya solución es, después de deshacer el cambio de variable:

$$\phi(z) = c_1 J_m(z) + c_2 Y_m(z) \quad \xrightarrow{\text{c.v.}} \quad \boxed{y = c_1 J_m(\alpha x) + c_2 Y_m(\alpha x)}$$

⁷⁵También se le suele llamar a veces *funciones de Neumann o de Weber* y se representa por N_m .

⁷⁶Ver por ejemplo: Sección 7.4.3, página 198, Sección 7.5.2, página 209, Sección 7.5.3, página 212 y Sección 7.7.3, página 233.

• **Ecuación Generalizada de Bessel**

$$y'' + \frac{1-2a}{x}y' + \left(b^2c^2x^{2c-2} + \frac{a^2-p^2c^2}{x^2}\right)y = 0 \quad ; \quad p, b \geq 0$$

Un gran número de EDO se ajustan a esta forma para determinados valores de a , b , c y p . Mediante el cambio de variable:

$$z = bx^c \quad ; \quad y(x) = \left(\frac{z}{b}\right)^{a/c} w(z)$$

se transforma en una ecuación de Bessel de orden p cuya solución, después de deshacer el c.v. es:

$$y(x) = x^a [c_1 J_p(bx^c) + c_2 Y_p(bx^c)]$$

• **Ecuación Modificada de Bessel de orden m**

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + m^2)y = 0$$

con el cambio de variable $t = ix$ se transforma en la ecuación de Bessel:

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + (t^2 - m^2)y = 0$$

donde las soluciones de valores complejos son $J_m(ix)$ e $Y_m(ix)$. Las soluciones de valores reales se denominan **función modificada de Bessel de primera clase** de orden m :

$$I_m(x) = i^{-m} J_m(ix)$$

y **función modificada de Bessel de segunda clase** de orden m

$$\begin{cases} K_m(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-m}(x) - I_m(x)}{\sin(m\pi)} & m \notin \mathbb{Z} \\ K_m = \lim_{n \rightarrow m} K_n(x) & m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

La solución general de valores reales se puede expresar como:

$$y(x) = c_1 I_m(x) + c_2 K_m(x)$$

Aplicaciones de la Ecuación de Bessel

La ecuación y funciones de Bessel aparecen en muchas áreas prácticas, como fenómenos de propagación de ondas, potenciales estáticos y otros problemas descritos por las ecuaciones de Helmholtz⁷⁷ o Laplace⁷⁸ con simetría radial, cilíndrica o esférica.

En el **Tema 7, página 175** se verán aplicaciones de la ecuación de Bessel en los siguientes campos:

- Conducción del calor en coordenadas polares con simetría radial (**Sección 7.4.3, página 198**)
- Propagación de ondas en un disco con simetría radial (**Sección 7.5.2, página 209**)
- Ecuación de ondas en una membrana circular (**Sección 7.5.3, página 212**)
- Resolución de la ecuación de Laplace en coordenadas polares (**Sección 7.6.1, página 225**)
- Ecuación del calor en coordenadas cilíndricas (**Sección 7.7.3, página 233**)

⁷⁷Ver la **Sección 7.7.1, página 228**.

⁷⁸Ver la **Sección 7.6.1, página 218**.

3.5. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (SEDO)

En muchos problemas prácticos aparecen diferentes magnitudes, dependientes todas de una misma variable independiente, que *interaccionan* unas con otras siguiendo determinadas leyes (ecuaciones). Una buena forma de modelizar estos problemas, generalmente complejos, es a través de *sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*.

Definición 3.12. Sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Un *Sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* (SEDO) de orden m es un conjunto de n ecuaciones que puede definirse de la forma:

$$\vec{F}(x, \vec{y}, \vec{y}', \dots, \vec{y}^{(m)}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F_1(x, \vec{y}, \vec{y}', \dots, \vec{y}^{(m)}) = 0 \\ F_2(x, \vec{y}, \vec{y}', \dots, \vec{y}^{(m)}) = 0 \\ \vdots \\ F_n(x, \vec{y}, \vec{y}', \dots, \vec{y}^{(m)}) = 0 \end{cases}$$

Donde $\vec{F} = [F_1, \dots, F_n]$ es una función vectorial de n componentes⁷⁹ F_i que dependen de una variable escalar x (variable independiente), de una función vectorial $\vec{y} = [y_1, \dots, y_n]$ con⁸⁰ $y_i = f_i(x)$ y de sus respectivas derivadas respecto a x de orden k , $\vec{y}^{(k)} = [y_1^{(k)}, \dots, y_n^{(k)}]$.

Ejemplo 3.12. Sistema de ecuaciones diferenciales (SEDO) de orden 3.

$$\begin{cases} 3y_1' - y_1y_2 + y_2'' = 0 \\ y_2''' - y_1'' + xy_1 - 1 = 0 \end{cases}$$

Este sistema relaciona dos funciones incógnitas $y_1(x)$ e $y_2(x)$ y sus respectivas derivadas hasta orden 3.

Definición 3.13. Solución de un SEDO

Se dice que un SEDO de orden m tiene **solución** en un intervalo I , si existen n funciones:

$$y_1 = f_1(x) \quad ; \quad y_2 = f_2(x) \quad ; \quad \dots \quad ; \quad y_n = f_n(x)$$

suficientemente derivables en I de forma que satisfacen todas las ecuaciones del sistema en todos los puntos de I .

Ejercicio 3.15. Comprobar que el conjunto de funciones (1) es una solución del SEDO (2):

$$(1) \begin{cases} x(t) = \sin t + t^2 \\ y(t) = e^{2t} \\ z(t) = \cos t \end{cases} \quad ; \quad (2) \begin{cases} x' = z + 2t \\ y' = 2y \\ z' = -x + t^2 \end{cases}$$

Vamos comprobar si ambas partes de las igualdades del SEDO son iguales:

$$\begin{array}{llllll} x' = \cos t + 2t & \rightarrow & z + 2t & = & \cos t + 2t & = & x' & \Rightarrow & \text{Cierto!} \\ y' = 2e^{2t} & \rightarrow & 2y & = & 2e^{2t} & = & y' & \Rightarrow & \text{Cierto!} \\ z' = -\sin t & \rightarrow & -x + t^2 & = & -\sin t & = & z' & \Rightarrow & \text{Cierto!} \end{array}$$

⁷⁹Al igualarlas a cero dan lugar a las ecuaciones del sistema.

⁸⁰Funciones incógnitas del sistema.

Si habitualmente resulta complicado el estudio de una única EDO, aun más complicado es el estudio general de los SEDO. En esta sección solo vamos a analizar los SEDO de *primer orden lineales*⁸¹ (SEDO1L), ya que están íntimamente relacionados con las EDO lineales de orden n .

3.5.1. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden Lineales

Nos vamos a centrar en SEDO1L formados por dos ecuaciones y dos incógnitas, de la forma:

$$\begin{cases} x' = ax + by + f(t) \\ y' = cx + dy + g(t) \end{cases}$$

donde $x(t)$ e $y(t)$ son las funciones incógnitas, a, b, c, d son constantes y $f(t)$ y $g(t)$ son funciones de la variable independiente t .

Este tipo de sistemas se pueden reducir a una EDO lineal con coeficientes constantes de segundo orden, que dependa solo de una variable (x o y) y resolverlo por los métodos vistos en la [Sección 3.3, página 64](#). Para ello se sigue el siguiente proceso.

1. Derivar una de las dos ecuaciones con respecto a la variable independiente t . Por ejemplo, si queremos quedarnos con la variable x elegimos la primera ecuación:

$$\frac{d}{dt}[x' = ax + by + f(t)] \implies x'' = ax' + by' + f'(t) \quad (3.17)$$

2. Con las dos ecuaciones originales del sistema se despeja la variable y su derivada a eliminar. Por ejemplo en nuestro caso la variable a eliminar es y por tanto:

$$\begin{cases} \text{(Ec.1)} & : by = x' - ax - f(t) \\ \text{(Ec.2)} & : y' = cx + dy + g(t) \end{cases}$$

3. Sustituyendo en (3.17):

$$\begin{aligned} x'' = ax' + by' + f'(t) &= x'' = ax' + b[cx + dy + g(t)] + f'(t) = ax' + bcx + d[x' - ax - f(t)] + bg(t) + f'(t) \\ x'' &= (a + d)x' + (bc - ad)x - df(t) + bg(t) + f'(t) \end{aligned}$$

Que es una EDO de segundo orden lineal.

4. Una vez resuelta, se puede determinar fácilmente $y(t)$ de la primera ecuación del sistema.

Ejercicio 3.16. Encontrar la solución general y particular del siguiente SEDO:

$$\begin{cases} x' = 2x - 2y - t^2 \\ y' = x - y - 2t \\ x(0) = y(0) = 1 \end{cases}$$

Como se trata de un SEDO1L, vamos a reducirla a una EDO de segundo orden lineal:

$$\begin{aligned} x'' = 2x' - 2y' - 2t &= 2x' - 2(x - y - 2t) - 2t = 2x' - 2x - (x' - 2x + t^2) + 4t - 2t = x' - t^2 + 2t \\ x'' - x' &= -t^2 + 2t \end{aligned}$$

Resolvemos por el método de los coeficientes indeterminados (ver la [Sección 3.3.1, página 64](#)):

$$\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) = 0 \implies \lambda = \{0, 1\} \implies x_h = c_1 + c_2 e^t$$

Como 0 es raíz de la ec. característica, la forma de la solución particular es:

$$x_p = t(at^2 + bt + c) = at^3 + bt^2 + ct \quad ; \quad x'_p = 3at^2 + 2bt + c \quad ; \quad x''_p = 6at + 2b$$

⁸¹Ver la definición de orden y linealidad de una ecuación diferencial en la [Sección 1.2.3, página 7](#).

Sustituyendo en la EDO:

$$x'' - x' = 6at + 2b - 3at^2 - 2bt - c = -t^2 + 2t \implies \begin{cases} -3a = -1 \rightarrow a = 1/3 \\ 6a - 2b = 2 \rightarrow b = (6a - 2)/2 = 0 \\ 2b - c = 0 \rightarrow c = 0 \end{cases} \implies x_p = \frac{1}{3}t^3$$

La solución de $x = x_h + x_p$ es:

$$x(t) = c_1 + c_2 e^t + \frac{1}{3}t^3$$

De la primera ecuación del sistema se obtiene la solución general para y :

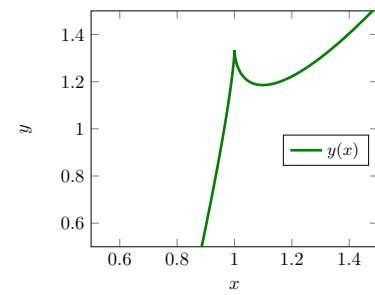
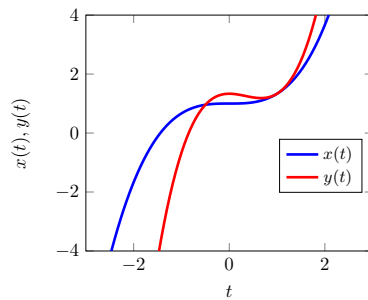
$$y(t) = \frac{2x - x' - t^2}{2} = \frac{2c_1 + 2c_2 e^t + \frac{2}{3}t^3 - c_2 e^t - t^2 - t^2}{2} = c_1 + \frac{1}{2}c_2 e^t + \frac{1}{3}t^3 - t^2$$

Imponiendo las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} x(0) = 1 \implies x(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ y(0) = c_1 + \frac{1}{2}c_2 = 1 \end{cases} \implies c_1 = 1, c_2 = 0$$

La solución particular es finalmente:

$$\begin{cases} x(t) = 1 + \frac{1}{3}t^3 \\ y(t) = 1 + \frac{1}{3}t^3 - t^2 \end{cases}$$



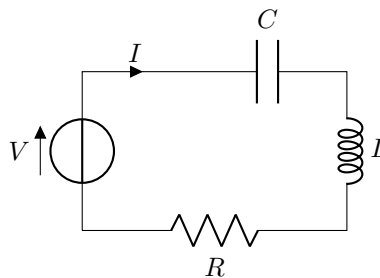
Notar que la solución se puede interpretar como dos funciones $x(t)$ e $y(t)$ con variable independiente t , o bien una única función $y(x)$ definida de forma paramétrica a través del parámetro t .

3.6. Aplicaciones de las EDO de Orden Superior

3.6.1. Circuitos Eléctricos

Un circuito eléctrico básico de tipo RLC está formado por una fuente de voltaje, una resistencia, un alternador y un condensador

- Una resistencia de R ohms
- Un inductor⁸² con una inductancia de L henries
- Un condensador con una capacitancia de C faradios
- Una fuente de corriente eléctrica $E(t)$ que suministra un voltaje V voltios



⁸²Un inductor, bobina o reactor es un componente pasivo de un circuito eléctrico que, debido al fenómeno de la autoinducción, almacena energía en forma de campo magnético.

La fuente genera un flujo de carga eléctrica Q a través del circuito que varía con el tiempo dando lugar a una intensidad de corriente $I(t) = Q'(t)$. Los otros tres elementos del circuito causan una caída de voltaje⁸³ siguiendo las leyes de Ohm y Faraday de la siguiente forma:

Elemento	Símbolo	Unidad	Caída de Voltaje
Fuente	E	voltios	
Carga	Q	culombios	$Q(t) = \int I(t) dt$
Corriente	I	amperios (A)	$I(t) = \frac{dQ}{dt}$
Resistencia	R	ohmios (Ω)	RI
Condensador	C	faradios (F)	Q/C
Inductor	L	henrios (H)	$L \frac{dI}{dt}$

Según la ley de Kirchhoff, la fuerza electromotriz generada por la fuente tiene que ser igual a la suma de las caídas de tensión de los tres elementos RLC:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E(t) \quad (3.18)$$

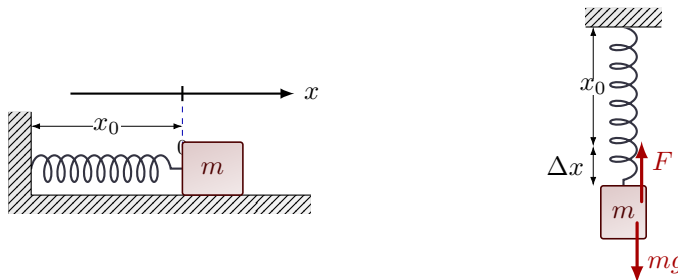
Esta expresión se puede poner en función de una sola variable, como por ejemplo Q :

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Y si derivamos (3.18) se puede expresar en función de I :

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt} \quad (3.19)$$

3.6.2. Sistemas Mecánicos



Las vibraciones forzadas de una masa m sujeta a un muelle (vertical u horizontal) con rozamiento pueden ser modeladas⁸⁴ mediante la EDO:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

donde $x(t)$ es el desplazamiento de la masa, a es la constante de amortiguamiento debida al rozamiento, k es la constante elástica del muelle⁸⁵ y $F(t)$ es una fuerza externa.

Notar la semejanza de esta ecuación con la Ecuación 3.19, página 89 donde hay una equivalencia entre las variables:

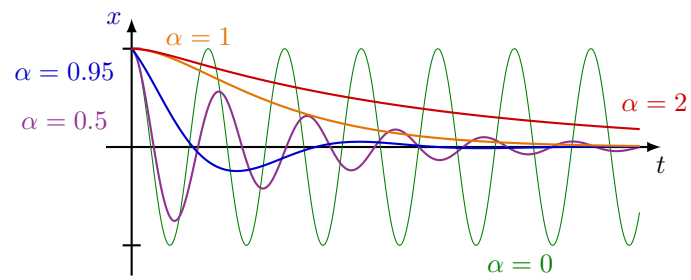
$$m \leftrightarrow L \quad x \leftrightarrow I \quad a \leftrightarrow R \quad k \leftrightarrow 1/C \quad F \leftrightarrow E$$

En ausencia de fuerza externa $f(t) = 0$, y en función de los valores del rozamiento a y del tipo de muelle k se pueden obtener diferentes soluciones (movimiento de la masa), que vienen determinados por el signo del término $a^2 - 4km$. Si definimos $\alpha = a/(2\sqrt{km})$, se tiene que para valores de $\alpha = 0$ (sin rozamiento) se obtienen un sistema oscilante, para valores $0 < \alpha < 1$ se tiene un sistema oscilante amortiguado y para $\alpha \geq 1$ se tiene un sistema sobreamortiguado.

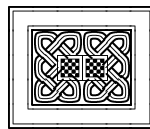
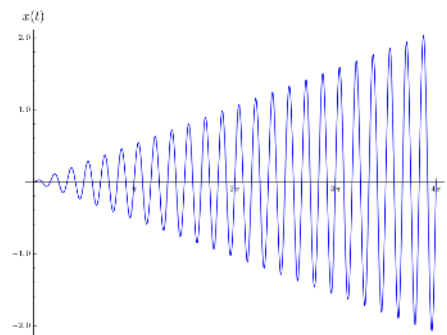
⁸³También llamada tensión o potencial.

⁸⁴A través de las leyes del Newton y la ley de Hooke.

⁸⁵Esta constante caracteriza las propiedades del muelle y se determina a través de la ley de Hooke, $F = -k\delta$, donde F es la fuerza ejercida por el resorte al aplicar una fuerza externa y δ es la elongación o variación de longitud del muelle (valor pequeño para que se verifique la ley de Hooke) producida por la fuerza externa. El signo negativo indica que la fuerza ejercida por el muelle es siempre contraria a la fuerza externa aplicada.



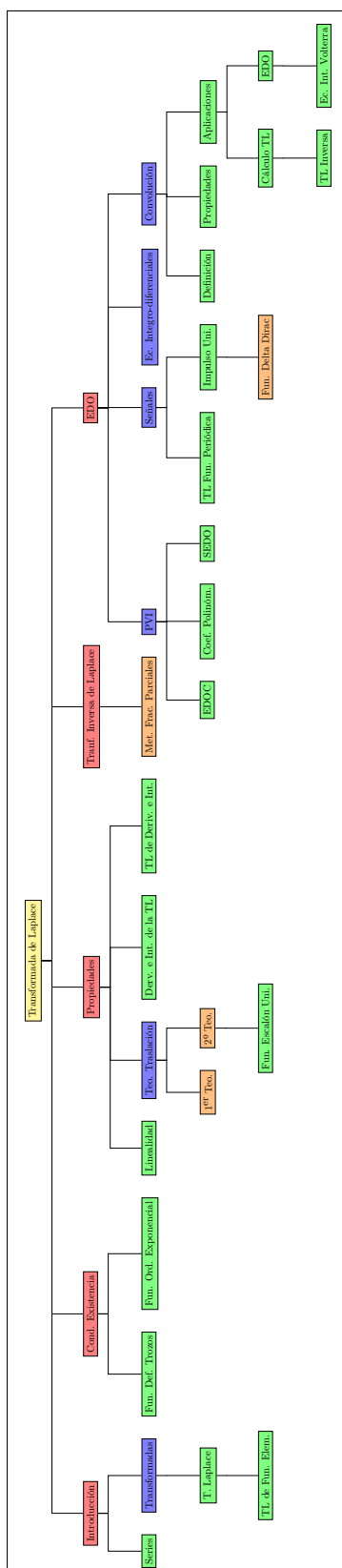
Para el caso oscilatorio $\alpha = 0$ y con fuerza externa puede aparecer el fenómeno de **resonancia** cuando la fuerza tiene una forma sinusoidal $F(t) = A \cos(\omega t)$ y cuya frecuencia ω coincide con la frecuencia natural de vibración $\sqrt{k/m}$. En estos caso se produce un movimiento oscilante con amplitud creciente.



Transformada de Laplace

Contenido

4.1	Introducción	93
4.1.1	Series de Potencias	93
4.2	Transformadas	94
4.3	Transformada de Laplace	95
4.3.1	Definición	95
4.3.2	Función Gamma $\Gamma(t)$	98
4.3.3	Tabla de Transformadas de Laplace Elementales	99
4.3.4	Condiciones Suficientes de Existencia	99
4.3.5	Propiedades de la Transformada de Laplace	101
4.3.6	Transformadas Inversa de Laplace	108
4.3.7	Transformada de la Derivada e Integral	111
4.4	Método de Descomposición en Fracciones Simples	113
4.5	Transformada de Laplace y EDO	115
4.5.1	PVI de EDOC	115
4.5.2	EDOL con Coeficientes Polinómicos	116
4.5.3	Sistemas de EDO Lineales de Orden n	117
4.5.4	Ecuaciones Integrales e Integrodiferenciales	118
4.5.5	Transformada de un Producto: Convolución	120
4.6	EDOS y Señales	127
4.6.1	Función Delta de Dirac	129



4.1. Introducción

Hay diferentes caminos¹ que llevan a la definición de la transformada de Laplace, aunque generalmente no de una forma sencilla. Aquí vamos a ver uno de ellos basado en las *series de potencias*².

4.1.1. Series de Potencias

Una determinada función $f(x)$ se puede expresar³ como una serie de potencias en torno a $x = 0$ de la forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

con un *radio de convergencia*² determinado. Aquí hay dos variables distintas de dos funciones distintas relacionadas mediante un sumatorio:

- n es una variable discreta y es la variable independiente de la función $a_n = a(n)$ que va de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.
- x es una variable continua y es la variable independiente de la función $f(x)$ que va de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Se puede pensar que las *series de potencias* son la expresión discreta de *algo* continuo. Si cambiamos la variable discreta n por la variable continua s y el sumatorio por una integral se tiene la versión *continua* de una *serie de potencias*:

$$f(x) = \int_0^{\infty} a(s) x^s ds$$

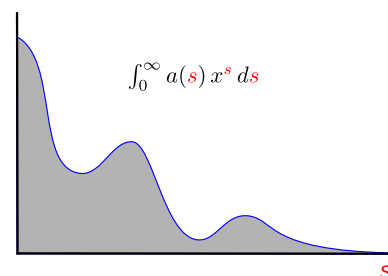
Ahora tenemos dos variables continuas x y s correspondientes a dos funciones reales de variable real $f(x)$ y $a(s)$ que están *relacionadas* mediante una expresión integral. En este caso se trata de una integral *impropia*⁴ que se define como:

$$f(x) = \int_0^{\infty} a(s) x^s ds = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r a(s) x^s ds$$

Al igual que pasaba con las series de potencias, esta integral solo tendrá sentido en los casos convergentes, es decir cuando este límite exista y sea finito.

Naturalmente para que esto ocurra el producto $a(s)x^s$ debe generar una gráfica cuyo área en el intervalo $[0, \infty)$ sea finita. Es importante notar que la variable x dentro de la integral se comporta como una constante ya que esta integral es sobre la variable s .

La relación entre la variable x y la variable s no es sencilla. Para cada valor de x hay un área debajo de la curva $h(s) = a(s)x^s$ que corresponde con el valor de $f(x)$.



Como la función potencial x^s tiene un crecimiento infinito cuando las variables $x, s \rightarrow \infty$, la función $a(s)$ debe contrarrestar este crecimiento para que la integral converja, lo cual limita el número de funciones $a(s)$ útiles, salvo que $x \in [0, 1]$ ya que en este caso x^s es potencialmente decreciente.

Vamos a modificar esta expresión para ampliar el rango de validez de x al intervalo $[0, \infty)$. Para ello primeramente expresamos la potencia como una exponencial:

$$x^s = e^{s \log x}$$

esto además va a ampliar bastante la aplicación de esta expresión debido a la relación de la exponencial con los números complejos. Si $x \in [0, 1]$ entonces $\log x \in (-\infty, 0]$. Vamos a realizar un cambio de variables apropiado para tener dos nuevas variables⁵ en el rango $[0, \infty)$, para ello se puede sustituir:

$$e^{s \log x} \implies e^{-sx}$$

¹Como por ejemplo a través de temas relacionados con las ecuaciones diferenciales, con las series, con la teoría de probabilidades y con las integrales impropias, entre otros.

²Ver por ejemplo "Clases de Ampliación de Matemáticas para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 313

³Las *series* presentan una forma mucho más general de definir funciones que las tradicionales *funciones elementales*.

⁴En una *integral impropia*, uno o ambos de los extremos del intervalo de integración tienden a $+\infty$ ó $-\infty$. Hay una clara analogía entre las series y las integrales impropias, ver por ejemplo *Advanced Calculus*, W. Kaplan.

⁵Aunque vamos a conservar los mismos nombres.

Con ello:

- Se cambia la antigua variable $x \in [1, 0]$ a una nueva variable $x \in [0, \infty)$.
- Se cambia la antigua variable $s \in (-\infty, \infty)$ por una nueva variable $s \in [0, \infty)$.

De esta forma se extiende el intervalo de validez de la fórmula para ambas variables a $[0, \infty)$, quedando:

$$f(x) = \int_0^\infty a(s) e^{-sx} ds$$

Como resumen, podemos ver esta expresión como una *generalización* de una *serie de potencias* en el campo continuo. En ella se relacionan dos funciones $f(x)$ y $a(s)$ cada una con su variable independiente correspondiente. La relación se establece mediante una integral impropia y un *núcleo* e^{-sx} que ajusta la relación $x \leftrightarrow s$ de forma apropiada en el rango de nuestro interés $[0, \infty)$.

Que existan dos funciones distintas $f(x)$ y $a(s)$ de variables distintas x y s relacionadas mediante una determinada expresión, puede ser entendido como la *interconexión* de dos propiedades distintas de un mismo sistema. Como veremos a continuación, esta relación nos va a permitir, entre otras cosas, *transformar* un problema que en la variable x puede ser complicado, en otro problema distinto que en la variable s puede ser más sencillo.

4.2. Transformadas

Como hemos visto un *operador matemático*⁶ transforma una función en otra función.

Ejemplo 4.1. Ejemplos de operadores matemáticos.

- Derivación: $D[f(x)] = f'(x)$
- Integración: $I[f(x)] = \int_0^x f(t) dt$
- Multiplicación: $M_g[f(x)] = f(x)g(x)$

La transformación de estos operadores es de una función en otra *de la misma variable*. Vamos a ver ahora un tipo especial de operadores matemáticos que transforma unas funciones en otras pero de variable distinta.

Definición 4.1. Transformada

En matemáticas una **transformada** es una aplicación *lineal*⁷ entre dos conjuntos de funciones.

Un tipo de *transformada* especialmente útil son las *transformadas integrales*.

Definición 4.2. Transformada Integral

Una **transformada integral** es cualquier transformada T aplicada sobre una función $f(t)$ de la forma siguiente⁸:

$$T[f(t)] = \int_{t_1}^{t_2} K(s, t) f(t) dt = F(s) \quad \left\{ \begin{array}{ll} f(t) & : \text{función original en la variable } t \text{ (tiempo)} \\ F(s) & : \text{transformada de } f(t) \text{ en la variable } s \\ K(s, t) & : \text{núcleo o kernel de la transformación integral } T \\ t_1, t_2 & : \text{límites de integración de la variable } t \end{array} \right.$$

⁶Ver la Definición 1.4, página 5.

⁷Una aplicación T es lineal si para cualquier función admisible $f(x)$ y $g(x)$ y cualquier par de constantes α y β se cumple:

$$T[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha T[f(x)] + \beta T[g(x)]$$

⁸Notar que la integral está *definida* sobre t y por tanto s se comporta como una constante dentro de la integral. El resultado de la integral es una función únicamente de s desapareciendo la dependencia de la variable original t .

Una *transformada integral* T relaciona dos funciones generalmente de naturaleza distinta.

$$f(t) \xrightarrow{T} F(s)$$

Algunos *núcleos* tienen una función K inversa asociada, $K^{-1}(s, t)$, que permiten⁹ obtener su *transformada inversa*:

$$f(t) = \int_{s_1}^{s_2} K^{-1}(s, t) F(s) ds$$

Existen diferentes *transformadas integrales*, siendo tres de las más conocidas las mostradas en la siguiente tabla.

TRANSFORMADA	SÍMBOLO	K	t_1	t_2	K^{-1}	s_1	s_2
Transformada de Laplace ¹⁰	$\mathcal{L}$	e^{-st}	0	∞	$\frac{e^{st}}{2\pi i}$	$\gamma - i\infty$	$\gamma + i\infty$
Transformada de Fourier	$\mathcal{F}$	e^{-ist}	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{e^{ist}}{2\pi}$	$-\infty$	$+\infty$
Transformada de Hilbert	$\mathcal{Hil}$	$\frac{1}{\pi} \frac{1}{s-t}$	$-\infty$	∞	$\frac{1}{\pi} \frac{1}{s-t}$	$-\infty$	∞

4.3. Transformada de Laplace

4.3.1. Definición

Definición 4.3. Transformada de Laplace

Dada una función $f(t)$ definida para $t \geq 0$, se denomina **transformada de Laplace** de $f(t)$, y se representa mediante $\mathcal{L}\{f(t)\}$, a la siguiente integral impropia:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt$$

siempre y cuando la integral converja¹¹.

Hay dos formas de calcular la *transformada de Laplace* de una función:

- A través de la definición, calculando la integral correspondiente.
- A través de las *propiedades de la transformada de Laplace* (ver la **Sección 4.3.5**, página 101).

Ejemplo 4.2. Cálculo de transformada de Laplace de funciones elementales a través de la definición.

- $f(t) = 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{1\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} 1 dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{-e^{-st}}{s} \right|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-sb}}{s} + \frac{e^{-s0}}{s} \right]_{s \geq 0} \\ &= \left[0 + \frac{1}{s} \right] = \left[\frac{1}{s} \right], \quad s > 0 \end{aligned}$$

⁹Las características de la transformación dependen de cada caso particular.

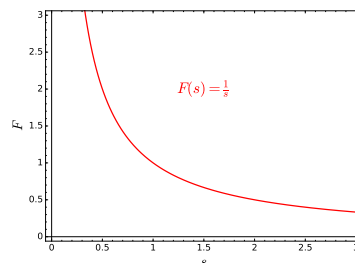
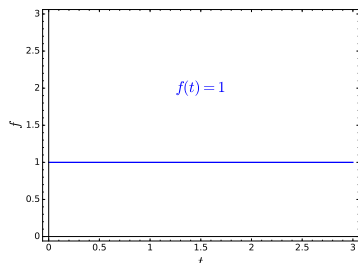
¹⁰En la transformada inversa de Laplace, la integración se realiza en el plano complejo a lo largo de la línea vertical $\text{Re}(s) = \gamma$, tal que γ es un número mayor que la parte real de todas las *singularidades* de $F(s)$. Ver por ejemplo "Clases de Ampliación de Matemáticas para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 313.

¹¹Es decir, el límite de la integral exista y sea finito.

Generalmente la notación del límite se simplifica de la siguiente forma:

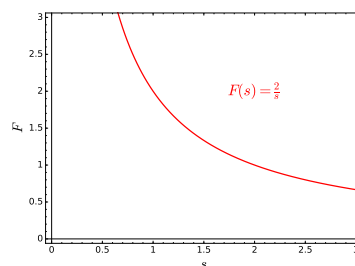
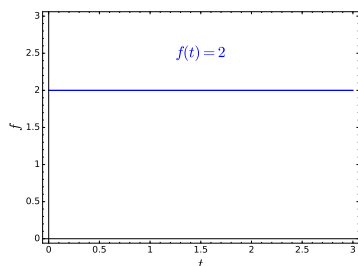
$$\lim_{b \rightarrow \infty} X \Big|_0^b = X \Big|_0^\infty$$

En las siguiente figura se muestran las gráficas de la función original y su transformada.



- $f(t) = k$, $k \in \mathbb{R}$

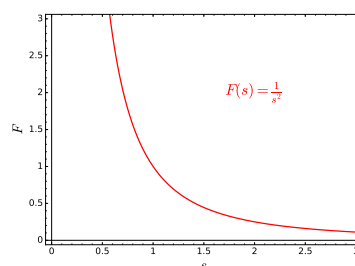
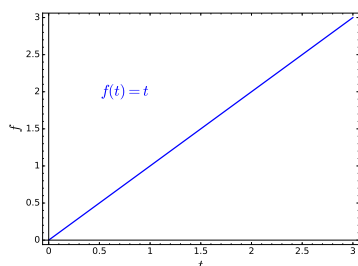
$$\mathcal{L}\{k\} = \int_0^\infty e^{-st} k \, dt = k \int_0^\infty e^{-st} \, dt = k \mathcal{L}\{1\} = k \frac{1}{s} = \frac{k}{s} \quad , \quad s > 0$$



- $f(t) = t$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t\} &= \int_0^\infty e^{-st} t \, dt \stackrel{\text{P. Partes}}{=} \left\{ \begin{array}{ll} u = t & \rightarrow du = dt \\ dv = e^{-ts} dt & \rightarrow v = -\frac{e^{-ts}}{s} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{-te^{-st}}{s} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s} \, dt = \frac{-te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \Big|_0^\infty = 0 - 0 + 0 + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} \quad , \quad s > 0 \end{aligned}$$

Notar que: $\lim_{t \rightarrow \infty} te^{-st} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{st}} \stackrel{\hat{H}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{se^{st}} = 0$



- $f(t) = t^n$; $n \in \mathbb{N}$

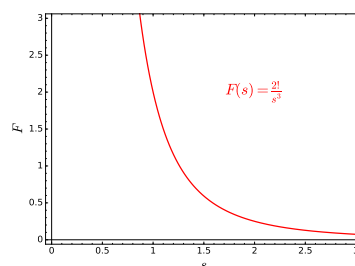
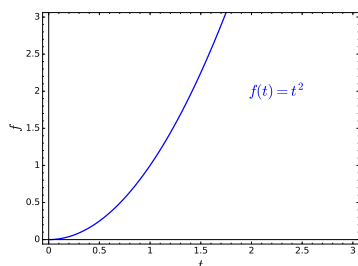
$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t^n\} &= \int_0^\infty e^{-st} t^n \, dt \stackrel{\text{P. Partes}}{=} \left\{ \begin{array}{ll} u = t^n & \rightarrow du = nt^{n-1} dt \\ dv = e^{-ts} dt & \rightarrow v = -\frac{e^{-ts}}{s} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{-t^n e^{-st}}{s} \Big|_0^\infty + \frac{n}{s} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-st} \, dt \end{aligned}$$

Como:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^n e^{-st} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^n}{e^{st}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n!}{s^n e^{st}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{-t^n e^{-st}}{s} \right|_0^\infty = 0 - 0 = 0$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t^n\} &= \frac{n}{s} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-st} dt = \frac{n(n-1)}{s^2} \int_0^\infty t^{n-2} e^{-st} dt = \dots = \frac{n!}{s^n} \int_0^\infty e^{-st} dt = \\ &= \boxed{\frac{n!}{s^{n+1}}} \quad ; \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\} \quad , \quad s > 0 \end{aligned}$$

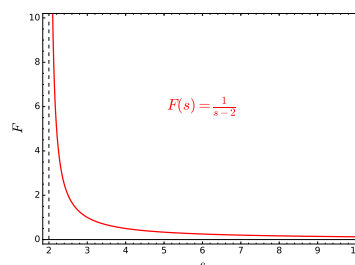
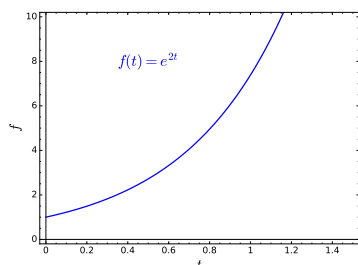


En la [Sección 4.3.2, página 98](#) se generaliza este resultado a través de la función $\Gamma(t)$ para valores de n reales con $n > -1$.

- $f(t) = e^{at}$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t} dt = \left. \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right|_0^\infty \stackrel{s > a}{=} 0 - \frac{1}{a-s} = \boxed{\frac{1}{s-a}} \quad ; \quad s > a$$

Para $s \leq a$ la integral no converge.

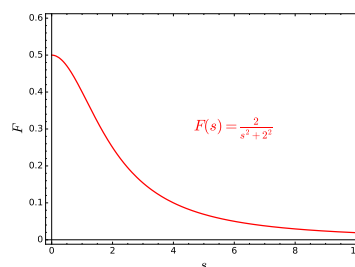
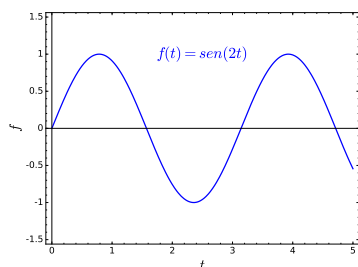


- $f(t) = \text{sen } at$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\text{sen } at\} &= \int_0^\infty e^{-st} \text{sen } at dt \stackrel{\text{P.Partes}}{=} \left\{ \begin{array}{ll} u = \text{sen } at & \rightarrow du = a \cos at dt \\ dv = e^{-ts} dt & \rightarrow v = -\frac{e^{-ts}}{s} \end{array} \right\} = \\ &= \left. -\frac{\text{sen } at}{s} e^{-st} \right|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{a}{s} e^{-st} \cos at dt \stackrel{\text{P.Partes}}{=} \left\{ \begin{array}{ll} u = \cos at & \rightarrow du = -a \text{sen } at dt \\ dv = e^{-ts} dt & \rightarrow v = -\frac{e^{-ts}}{s} \end{array} \right\} = \\ &= \left(-\frac{\text{sen } at}{s} - \frac{a \cos at}{s^2} \right) e^{-st} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{a^2}{s^2} e^{-st} \text{sen } at dt \end{aligned}$$

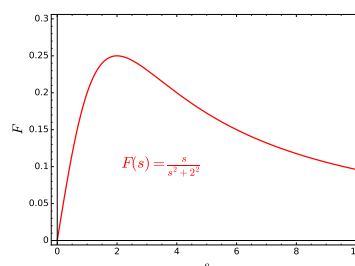
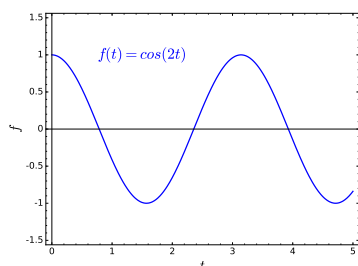
Por tanto, pasando la segunda integral al primer miembro:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{a^2}{s^2} \right) \int_0^\infty e^{-st} \text{sen } at dt &= \left(-\frac{\text{sen } at}{s} - \frac{a \cos at}{s^2} \right) e^{-st} \Big|_0^\infty \\ \mathcal{L}\{\text{sen } at\} &= \frac{s^2}{s^2 + a^2} \left(0 - 0 + 0 + \frac{a}{s^2} \right) = \boxed{\frac{a}{s^2 + a^2}} \quad , \quad s > 0 \end{aligned}$$



• $f(t) = \cos at$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos at\} &= \int_0^\infty e^{-st} \cos at \, dt \stackrel{\text{P. Partes}}{=} \left\{ \begin{array}{ll} u = \cos at & \rightarrow du = -a \operatorname{sen} at \, dt \\ dv = e^{-ts} dt & \rightarrow v = -\frac{e^{-ts}}{s} \end{array} \right\} = \\ &= -\frac{\cos at}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty - \frac{a}{s} \int_0^\infty e^{-st} \operatorname{sen} at \, dt = \frac{1}{s} - \frac{a}{s} \frac{a}{s^2 + a^2} = \frac{1}{s} \left(1 - \frac{a^2}{s^2 + a^2} \right) = \boxed{\frac{s}{s^2 + a^2}}, \quad s > 0 \end{aligned}$$



Generalmente se utilizan letras minúsculas para representar la *función original* y letras mayúsculas para su *transformada de Laplace*:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \quad ; \quad \mathcal{L}\{g(t)\} = G(s) \quad ; \quad \mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$$

4.3.2. Función Gamma $\Gamma(t)$

Vamos a calcular $\mathcal{L}\{t^r\}$ para cualquier $r > -1$:

$$\mathcal{L}\{t^r\} = \int_0^\infty e^{-st} t^r \, dt \stackrel{u=st}{=} \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^r \left(\frac{1}{s}\right) \frac{du}{s} = \frac{1}{s^{r+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^r \, du$$

Teniendo en cuenta la definición de la **función Gamma**¹²:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u} u^{z-1} \, du$$

se puede generalizar la transformada de una potencia¹³ se la siguiente forma:

$$\mathcal{L}\{t^r\} = \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}} \quad ; \quad r > -1$$

¹²Ver la Sección 3.4.4, página 82.

¹³Ver el Ejemplo 4.2, página 96.

4.3.3. Tabla de Transformadas de Laplace Elementales

Como resumen de los cálculos realizados en el [Ejemplo 4.2, página 95](#), podemos organizar una pequeña tabla con las *transformadas de Laplace* de algunas funciones elementales¹⁴.

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
1	$\frac{1}{s}$	k	$\frac{k}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}, n \in \mathbb{N}$
t^r	$\frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}, r > -1$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}, s > a$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$

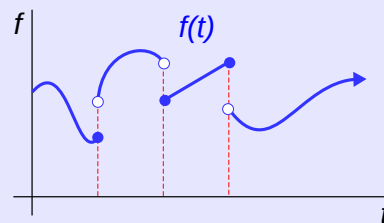
4.3.4. Condiciones Suficientes de Existencia

No existe la *transformada de Laplace* de toda función, por ejemplo no existe para la función $\frac{1}{t}$ ni para e^{t^2} , ya que la integral que define la *transformada de Laplace* no converge en estos casos.

Vamos a ver las condiciones bajo las cuales existe la *transformada de Laplace* de una función, para ello previamente veremos dos tipos de funciones.

Definición 4.4. Función Definida a Trozos

Se dice que una función $f(t)$ es **definida a trozos** en un intervalo, si posee un número finito de *discontinuidades finitas* (sin asíntotas verticales) en ese intervalo.



Ejercicio 4.1. Calcular la transformada de Laplace de la siguiente función definida a trozos:

$$f(t) = \begin{cases} at + b & \text{si } 0 \leq t \leq \alpha \\ ce^{dt} & \text{si } t > \alpha \end{cases}$$

Teniendo en cuenta la definición de la transformada de Laplace, las propiedades de la integral y los intervalos de definición de la función $f(t)$, se tiene:

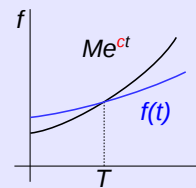
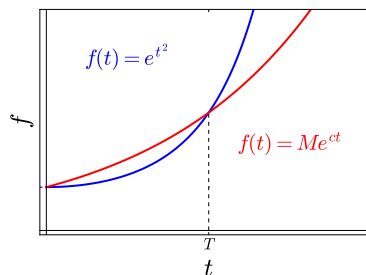
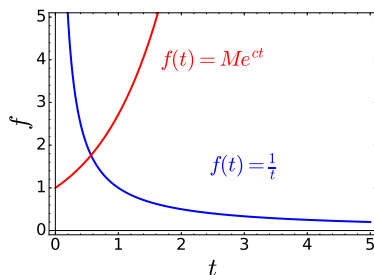
$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^\alpha e^{-st} (at + b) dt + \int_\alpha^\infty ce^{(d-s)t} dt = \\ &= \left. \frac{-ate^{-st}}{s} - \frac{ae^{-st}}{s^2} \right|_0^\alpha - \left. \frac{be^{-st}}{s} \right|_0^\alpha + \left. \frac{ce^{(d-s)t}}{d-s} \right|_\alpha^\infty \stackrel{s > d}{=} \\ &\stackrel{s > d}{=} \left(\frac{-a\alpha e^{-s\alpha}}{s} - \frac{ae^{-s\alpha}}{s^2} + 0 + \frac{a}{s^2} \right) + \left(\frac{-be^{-s\alpha}}{s} + \frac{b}{s} \right) + \left(0 + \frac{ce^{(d-s)\alpha}}{s-d} \right) = \\ &= \frac{b - (a\alpha + b)e^{-s\alpha}}{s} + \frac{a(1 - e^{-s\alpha})}{s^2} + \frac{ce^{(d-s)\alpha}}{s-d}, \quad s > d \end{aligned}$$

¹⁴En la [Tabla 4.1, página 110](#) se muestra una colección más grande de transformadas inversas de Laplace.

Definición 4.5. Función de Orden Exponencial

Se dice que una función $f(t)$ es de **orden exponencial c** si existen constantes $c, T > 0$ y $M > 0$ tales que:

$$|f(t)| \leq Me^{ct} \quad \forall t > T$$

**Ejemplo 4.3. Funciones Definidas a Trozos y de Orden Exponencial.**

La función $1/t$ (gráfica izquierda) no es *definida a trozos* en $\mathbb{R}$, pero sí de *orden exponencial* $c > 0$. La función e^{t^2} (gráfica derecha) sí es *continua a trozos* en $\mathbb{R}$, pero no de *orden exponencial*.

Teorema 4.1. Condiciones Necesarias de Existencia de la Transf. de Laplace

Si una función $f(t)$ es *continua a trozos* en $[0, \infty)$ y de *orden exponencial* c para $t > T$, entonces $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > c$.

Demostración 4.1.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \underbrace{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}_{I_1} + \underbrace{\int_T^\infty e^{-st} f(t) dt}_{I_2}$$

La integral I_1 existe porque se puede expresar como una suma de integrales sobre intervalos en donde $e^{-st}f(t)$ es continua.

Con respecto a I_2 , por ser la función $f(t)$ de orden exponencial c se tiene:

$$|I_2| \leq \int_T^\infty |e^{-st} f(t)| dt \leq M \int_T^\infty e^{-st} e^{ct} dt = M \int_T^\infty e^{-(s-c)t} dt = -M \frac{e^{-(s-c)t}}{s-c} \Big|_T^\infty = M \frac{e^{-(s-c)T}}{s-c} ; s > c$$

por tanto es acotada y la integral que define la transformada es convergente.

Estas condiciones son *suficientes* pero no *necesarias*.

Ejemplo 4.4. Existencia de la transformada.

La función: $f(t) = t^{-1/2}$ no es continua a trozos en $[0, \infty)$, sin embargo existe su transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

Teorema 4.2. Comportamiento de la Transformada de Laplace

Si f es continua a trozos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial para $t > T$, entonces:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}\{f(t)\} = 0$$

Demostración 4.2.

- Como $f(t)$ es continua en $[0, \infty) \Rightarrow f(t)$ acotada en $[0, \infty)$: $|f(t)| \leq M_1 = M_1 e^{0t}$
- Como $f(t)$ es de orden exponencial para $t > T$: $|f(t)| \leq M_2 e^{\gamma t} \quad \forall t > T$

Tomando $M = \max\{M_1, M_2\}$ y $c = \max\{0, \gamma\}$ tenemos:

$$|\mathcal{L}\{f(t)\}| \leq \int_0^\infty e^{-st} |f(t)| dt \leq M \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{ct} dt = -M \frac{e^{-(s-c)t}}{s-c} \Big|_0^\infty = \frac{M}{s-c}, \quad s > c$$

Tomando límites: $\lim_{s \rightarrow \infty} |\mathcal{L}\{f(t)\}| = 0 \Rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}\{f(t)\} = 0$

Ejemplo 4.5. Transformadas imposibles

Las siguientes funciones:

$$F_1(s) = 1 \quad ; \quad F_2(s) = \frac{s}{s+1}$$

no pueden ser transformadas de Laplace de ninguna función continua a trozos de orden exponencial, ya que no tienden a cero cuando $s \rightarrow \infty$.

4.3.5. Propiedades de la Transformada de Laplace

En las funciones complicadas no es práctico utilizar la definición de la transformada de Laplace para calcular la misma. Por ejemplo, la transformada de Laplace de funciones del tipo:

$$f(t) = e^t t^2 \sin 3t$$

requieren un esfuerzo importante a través de su definición.

Las propiedades de la transformada de Laplace permiten ahorrar trabajo en la determinación de transformadas de Laplace de funciones generales.

Aquí veremos las primeras propiedades:

- Linealidad
- Teoremas de Traslación
- Derivada e Integral de $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

Linealidad

Debido a las propiedades *lineales* de la integral:

$$\int_0^\infty e^{-st} [\alpha f(t) + \beta g(t)] dt = \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt + \beta \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt$$

Por tanto:

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}$$

Ejercicio 4.2. Calcular la transformada de Laplace del siguiente polinomio:

$$f(t) = 3t^2 - 2t + 5$$

Teniendo en cuenta la propiedad de linealidad y los valores de las transformadas de Laplace de funciones elementales (ver [Sección 4.3.3, página 99](#)) se tiene:

$$\mathcal{L}\{3t^2 - 2t + 5\} = 3\mathcal{L}\{t^2\} - 2\mathcal{L}\{t\} + 5\mathcal{L}\{1\} = 3\frac{2}{s^3} - 2\frac{1}{s^2} + 5\frac{1}{s} = \frac{6}{s^3} - \frac{2}{s^2} + \frac{5}{s}$$

Primer Teorema de Traslación: Traslación en el eje s

Teorema 4.3. Primer Teorema de Traslación: Traslación en el eje s

Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ y $a \in \mathbb{R}$ entonces:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

Nota 4.1. A veces se utiliza la nomenclatura: $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}|_{s \rightarrow s-a}$

Demostración 4.3.

Aplicando la definición:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t) dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{C.V.:} \\ w = s-a \end{array} \right\} = \\ &= \int_0^\infty e^{-wt} f(t) dt \stackrel{w \geq 0}{=} F(w) \stackrel{CV}{=} F(s-a), \quad s > a \end{aligned}$$

De forma resumida podemos expresar el *primer teorema de traslación* como:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a) \iff \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}|_{s \rightarrow s-a}, \quad a \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 4.3. Calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

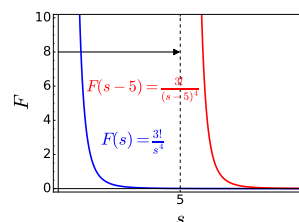
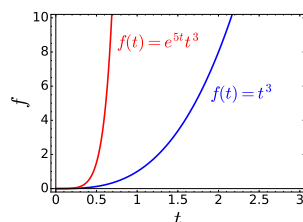
a) $f(t) = e^{5t}t^3$

b) $g(t) = e^{-2t} \sin 4t$

Teniendo en cuenta el primer teorema de traslación y los valores de las transformadas de Laplace de funciones elementales, se tiene:

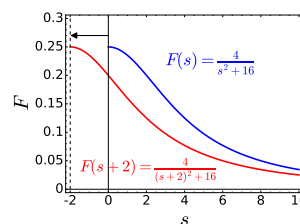
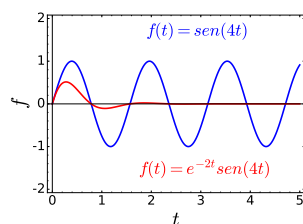
a)

$$\mathcal{L}\{e^{5t}t^3\} = \mathcal{L}\{t^3\}|_{s \rightarrow s-5} = \frac{3!}{s^4}|_{s \rightarrow s-5} = \frac{6}{(s-5)^4}, \quad s > 5$$



b)

$$\mathcal{L}\{e^{-2t} \operatorname{sen} 4t\} = \mathcal{L}\{\operatorname{sen} 4t\}|_{s \rightarrow s-(-2)} = \frac{4}{s^2 + 16} \Big|_{s \rightarrow s+2} = \frac{4}{(s+2)^2 + 16}, \quad s > -2$$



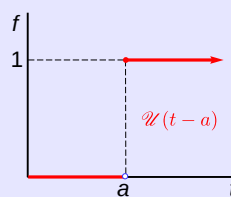
Segundo Teorema de Traslación: Traslación en el eje \$t\$

Con frecuencia se utilizan en la práctica funciones del tipo *encendido/apagado* (*on/off*), de forma que una señal de entrada se *activa* o *desactiva* después de un cierto tiempo. Para ello, suele ser útil definir una función que sea 0 (*apagado*) hasta un cierto tiempo $t = a$ a partir del cual vale 1 (*encendido*).

Definición 4.6. Función Escalón Unitario

La función **escalón unitario** o de **Heaviside** denotado¹⁵ por $\mathcal{U}(t-a)$ se define:

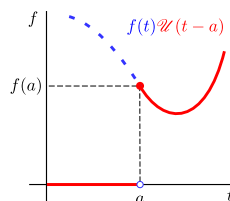
$$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < a \\ 1 & \text{si } t \geq a \end{cases}$$



Vamos a ver las propiedades de la *función escalón unitario*:

1. Para *desactivar* una determinada señal de entrada $f(t)$ hasta un tiempo $t < a$ y *activarla* a partir de $t = a$ se multiplica la función por la función escalón.

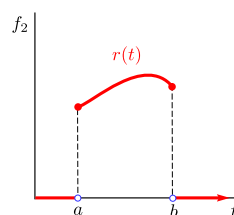
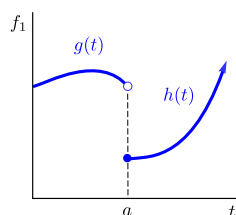
$$f(t) \mathcal{U}(t-a)$$



2. La *función escalón* puede utilizarse para describir funciones *definidas a trozos* generales de forma *compacta*:

$$f_1(t) = \begin{cases} g(t) & \text{si } 0 \leq t < a \\ h(t) & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < a \\ r(t) & \text{si } a \leq t < b \\ 0 & \text{si } t \geq b \end{cases}$$



$$f_1(t) = g(t) - g(t)\mathcal{U}(t-a) + h(t)\mathcal{U}(t-a)$$

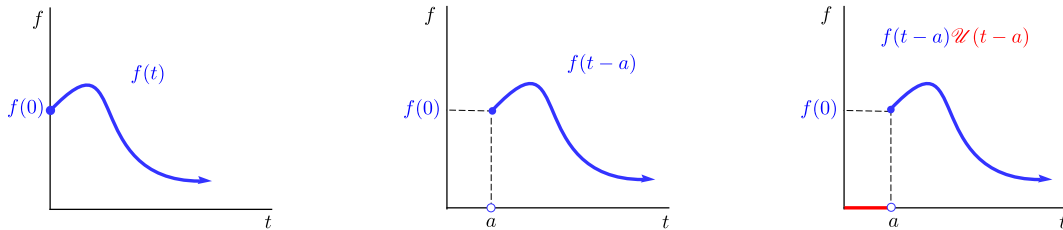
$$f_2(t) = r(t)[\mathcal{U}(t-a) - \mathcal{U}(t-b)]$$

¹⁵En algunos textos la función *escalón unitario* se denota por u_a y en otros por $H(t-a)$.

3. La *función escalón unitario* permite activar una función *desplazada*.

Sea una función general $f(t)$ definida para $t \geq 0$. La función $f(t-a)$ es la misma función $f(t)$ desplazada a unidades a la derecha. Sin embargo esta función no queda definida en el intervalo $[0, a)$. Esto puede arreglarse a través de la función escalón de la siguiente forma:

$$f(t-a)\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < a \\ f(t-a) & \text{si } t \geq a \end{cases}$$



Esta función desempeña un papel importante en el *segundo teorema de traslación*.

Teorema 4.4. Segundo Teorema de Traslación: Traslación en el eje t

Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ y $a > 0$ entonces:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as} F(s)$$

Demostración 4.4.

Aplicando la definición:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} &= \int_0^a e^{-st} f(t-a) \underbrace{\mathcal{U}(t-a)}_{\text{CERO } 0 \leq t < a} dt + \int_a^\infty e^{-st} f(t-a) \underbrace{\mathcal{U}(t-a)}_{\text{UNO } t \geq a} dt \\ &= \int_a^\infty e^{-st} f(t-a) dt \end{aligned}$$

Haciendo el C.V.: $v = t - a$; $dv = dt$

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-s(v+a)} f(v) dv = e^{-as} \int_0^\infty e^{-sv} f(v) dv = e^{-as} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Ejercicio 4.4. Calcular la transformada de Laplace de la siguiente función:

$$f(t) = \cos(t-5)\mathcal{U}(t-5)$$

Teniendo en cuenta que $F(s) = s/(s^2 + 1)$ se tiene:

$$\mathcal{L}\{\cos(t-5)\mathcal{U}(t-5)\} \xrightarrow{\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as} F(s)} \frac{se^{-5s}}{s^2 + 1}$$

La forma estándar del *segundo teorema de traslación* tiene sobre todo aplicaciones en el cálculo de *transformadas inversas*¹⁶:

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = f(t-a)\mathcal{U}(t-a)$$

¹⁶Ver la Sección 4.3.6, página 108.

Ejercicio 4.5. Calcular la transformada inversa de Laplace de la siguiente función:

$$F(s) = \frac{e^{-2s}}{s+3}$$

Teniendo en cuenta que $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s+3)\} = e^{-3t}$ se tiene:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s+3}\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}=f(t-a)\mathcal{U}(t-a)} e^{-3(t-2)}\mathcal{U}(t-2)$$

Teorema 4.5. Forma Alternativa del Segundo Teorema de Traslación

Con frecuencia la función f no tiene la forma deseada $f(t-a)$. En estos casos se puede hacer un cambio de variable: $u = t - a$.

$$\mathcal{L}\{f(t)\mathcal{U}(t-a)\} = \int_a^\infty e^{-st}f(t) dt = \int_0^\infty e^{-s(u+a)}f(u+a) du$$

Por tanto:

$$\mathcal{L}\{f(t)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-sa}\mathcal{L}\{f(t+a)\}$$

Ejercicio 4.6. Calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

a) $f(t) = \mathcal{U}(t-a)$

b) $g(t) = e^{2t}\mathcal{U}(t-1)$

c) $h(t) = e^{2(t-3)}\mathcal{U}(t+5)$

- a) Para calcular la transformada de Laplace de la función escalón podemos aplicar el segundo teorema de traslación¹⁷ para $f(t) = 1$, de forma que en este caso $f(t-a) = 1$ ya que al trasladar una función constante no varía dicha función, y teniendo en cuenta que $F(s) = 1/s$.

$$\mathcal{L}\{1\mathcal{U}(t-a)\} \xrightarrow{\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\}=e^{-as}F(s)} \frac{e^{-as}}{s}$$

- b) Aplicando la forma alternativa del segundo teorema de traslación¹⁸ y teniendo en cuenta que $\mathcal{L}\{e^{2t}\} = 1/(s-2)$, se tiene:

$$\mathcal{L}\{e^{2t}\mathcal{U}(t-1)\} \xrightarrow{\mathcal{L}\{f(t)\mathcal{U}(t-a)\}=e^{-sa}\mathcal{L}\{f(t+a)\}} e^{-s}\mathcal{L}\{e^{2(t+1)}\} = e^{-s}e^2\mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{e^{2-s}}{s-2}$$

- c) Primero tenemos que tener en cuenta que las funciones $f(t)$ que estamos considerando solo están definidas para¹⁹ $t > 0$, de forma que:

$$f(t)\mathcal{U}(t+a) = f(t)\mathcal{U}(t) = f(t) \quad , \quad a \geq 0$$

En nuestro caso:

$$h(t) = e^{2(t-3)}\mathcal{U}(t+5) = e^{2(t-3)}$$

Por tanto:

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{e^{2(t-3)}\} = e^{-6}\mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{e^6(s-2)}$$

¹⁷Ver el Teorema 4.4, página 104.

¹⁸Ver el Teorema 4.5, página 105.

¹⁹Ya que en la práctica t suele hacer referencia al tiempo.

Ejercicio 4.7. Calcular la transformada de Laplace de la siguiente función definida a trozos, utilizando el segundo teorema de traslación.

$$f(t) = \begin{cases} at + b & \text{si } 0 \leq t \leq \alpha \\ ce^{dt} & \text{si } t > \alpha \end{cases}$$

La transformada de esta función fue calculada, a través de la definición de transformada de Laplace, en el [Ejercicio 4.1, página 99](#). Entonces lo primero es expresar la función mediante la función escalón unitario. Hay varias formas:

$$f(t) = (at + b)[1 - \mathcal{U}(t - \alpha)] + ce^{dt}\mathcal{U}(t - \alpha) = (at + b) + [ce^{dt} - (at + b)]\mathcal{U}(t - \alpha)$$

Ahora tomamos transformada de Laplace teniendo en cuenta la linealidad de la transformada, la forma alternativa del segundo teorema de traslación y los valores de las transformadas de Laplace de funciones elementales. Tomamos por ejemplo la primera forma de $f(t)$ obtenida:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{at + b\} - \mathcal{L}\{(at + b)\mathcal{U}(t - \alpha)\} + \mathcal{L}\{ce^{dt}\mathcal{U}(t - \alpha)\} = \\ &= \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s} - e^{-\alpha s} \mathcal{L}\{a(t + \alpha) + b\} + e^{-\alpha s} \mathcal{L}\{ce^{d(t+\alpha)}\} = \\ &= \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s} - e^{-\alpha s} \mathcal{L}\{at + (a\alpha + b)\} + e^{-\alpha s} ce^{d\alpha} \mathcal{L}\{e^{dt}\} = \\ &= \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s} - e^{-\alpha s} \left[\frac{a}{s^2} + \frac{a\alpha + b}{s} \right] + ce^{\alpha(d-s)} \frac{1}{s-d} \end{aligned}$$

Reordenando se obtiene la misma solución del problema anterior.

$$F(s) = \frac{b - (a\alpha + b)e^{-s\alpha}}{s} + \frac{a(1 - e^{-s\alpha})}{s^2} + \frac{ce^{(d-s)\alpha}}{s-d}, \quad s > d$$

Derivada de una Transformada de Laplace

Interesa conocer si la derivada con respecto a s de una transformada $F(s)$ corresponde a la transformada de alguna función particular $f(t)$.

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} [e^{-st} f(t)] dt = - \int_0^\infty e^{-st} t f(t) dt = -\mathcal{L}\{t f(t)\}$$

Por tanto:

$$\mathcal{L}\{t f(t)\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

De igual forma:

$$\mathcal{L}\{t^2 f(t)\} = \mathcal{L}\{t \cdot t f(t)\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{t f(t)\} = \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}\{f(t)\} \implies \mathcal{L}\{t^2 f(t)\} = \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Y para la tercera derivada:

$$\mathcal{L}\{t^3 f(t)\} = \mathcal{L}\{t \cdot t^2 f(t)\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{t^2 f(t)\} = -\frac{d^3}{ds^3} \mathcal{L}\{f(t)\} \implies \mathcal{L}\{t^3 f(t)\} = -\frac{d^3}{ds^3} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Generalizando a la derivada n -ésima se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 4.6. Derivada de una Transformada

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

;

$$f(t) = \frac{(-1)^n}{t^n} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}\{f(t)\} \right\}$$

Ejercicio 4.8. Calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

a) $f(t) = t \operatorname{sen} kt$

b) $g(t) = t^2 e^{-3t}$

a) Aplicando la propiedad de la derivada de una transformada²⁰:

$$\mathcal{L}\{t \operatorname{sen} kt\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{\operatorname{sen} kt\} = -\frac{d}{ds} \left[\frac{k}{s^2 + k^2} \right] = \boxed{\frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}}$$

b) Teniendo en cuenta: $\mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \frac{1}{s+3}$

$$\mathcal{L}\{t^2 e^{-3t}\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \frac{d}{ds} \left[\frac{d}{ds} \frac{1}{s+3} \right] = \frac{d}{ds} \frac{-1}{(s+3)^2} = \boxed{\frac{2}{(s+3)^3}}$$

Ejercicio 4.9. Calcular la transformada de Laplace de la siguiente función:

$$f(t) = t^n e^{at}$$

Podemos resolverlo de dos formas:

- Forma 1: Aplicando el primer teorema de traslación²¹:

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at} t^n\} = \mathcal{L}\{t^n\}_{s \rightarrow s-a} = \frac{n!}{s^{n+1}} \Big|_{s \rightarrow s-a} = \boxed{\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}}$$

- Forma 2: Aplicando la derivada de la transformada:

$$\boxed{\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}\{f(t)\}}$$

$$\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}\{e^{at}\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \left[\frac{1}{s-a} \right] = (-1)^n \frac{(-1)^n n!}{(s-a)^{n+1}} = \boxed{\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}}$$

Ejercicio 4.10. Calcular la transformada inversa de Laplace de la siguiente función:

$$F(s) = \log \left(\frac{s-1}{s+1} \right)$$

Aplicando el teorema de la derivada de la transformada:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \log \left(\frac{s-1}{s+1} \right) \right\} = -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{d}{ds} \log \left(\frac{s-1}{s+1} \right) \right\} = -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} \right\} = \boxed{-\frac{e^t - e^{-t}}{t}}$$

²⁰Ver el Teorema 4.6, página 106.

²¹Ver el Teorema 4.3, página 102.

Integral de una Transformada de Laplace

Teorema 4.7. Integral de una Transformada

Si el siguiente límite existe y es finito:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} \implies \mathcal{L} \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\} = \int_s^\infty F(r) dr$$

Demostración 4.7.

Llamando $G(s) = \mathcal{L} \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\}$, y aplicando la derivada de una transformada se tiene:

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L} \{f(t)\} = -\mathcal{L} \{tf(t)\} \implies \frac{d}{ds} G(s) = -\mathcal{L} \left\{ t \frac{f(t)}{t} \right\} = \mathcal{L} \{f(t)\} = -F(s)$$

Integrando con respecto a s : $\int_{s_1}^{s_2} \frac{d}{ds} G(s) ds = G(s_2) - G(s_1) = -\int_{s_1}^{s_2} F(r) dr = \int_{s_2}^{s_1} F(r) dr$

Finalmente haciendo $s_1 \rightarrow \infty$ y teniendo en cuenta $\lim_{s_1 \rightarrow \infty} G(s_1) = 0$: $\mathcal{L} \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\} = \int_s^\infty F(r) dr$

Ejercicio 4.11. Calcular la transformada de Laplace de la siguiente función:

$$f(t) = \frac{\sin 2t}{t}$$

Para poder aplicar el teorema de la integral de una transformada debemos comprobar primeramente el siguiente límite:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{t} \stackrel{H}{=} \frac{2 \cos 2t}{1} = 2$$

Como existe y es finito, aplicamos el teorema:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\sin 2t}{t} \right\} \xrightarrow{\mathcal{L}\{f(t)/t\} = \int_s^\infty F(r) dr} \int_s^\infty \mathcal{L} \{ \sin 2t \} dr = \int_s^\infty \frac{2}{r^2 + 4} dr = \arctan \frac{r}{2} \Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{s}{2}$$

4.3.6. Transformadas Inversa de Laplace

Definición 4.7. Transformada Inversa de Laplace

Se dice que $f(t)$ es la **transformada inversa de Laplace**,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{F(s)\}$$

si $\mathcal{L} \{f(t)\} = F(s)$ es la *transformada de Laplace* de la función $f(t)$,

$$\mathcal{L} \{f(t)\} = F(s) \iff f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{F(s)\}$$

Resumen: Propiedades de $\mathcal{L}\{f(t)\}$

PROPIEDAD	EXPRESIÓN
Linealidad	$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}$
1 ^{er} T. Traslación	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
2 ^o T. Traslación (1)	$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}$
2 ^o T. Traslación (2)	$\mathcal{L}\{f(t)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-sa}\mathcal{L}\{f(t+a)\}$
Derivada de la Transformada	$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}\{f(t)\}$
Integral de la Transformada	$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(r) dr$

PROPIEDADES DE $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	
PROPIEDAD	EXPRESIÓN
Linealidad	$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$
1 ^{er} T. Traslación	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s) _{s \rightarrow s-a}\} = e^{at}f(t)$
2 ^o T. Traslación (1)	$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)\mathcal{U}(t-a)$
2 ^o T. Traslación (2)	$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-sa}\mathcal{L}\{f(t+a)\}\} = f(t)\mathcal{U}(t-a)$
Derivada de la Transformada	$\mathcal{L}^{-1}\left\{(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}\{f(t)\}\right\} = t^n f(t)$
Integral de la Transformada	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty F(r) dr\right\} = \frac{f(t)}{t}$

Ejemplo 4.6. Ejemplos de cálculo de transformadas inversas de Laplace.

- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^3}\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}\{t^n\}=n!/(s^{n+1})} \boxed{\frac{3t^2}{2}}$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-6}\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}\{e^{at}\}=1/(s-a)} \boxed{2e^{6t}}$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+7}\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}\{\text{sen } at\}=a/(s^2+a^2)} \boxed{\frac{1}{\sqrt{7}} \text{sen } t\sqrt{7}}$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2-2s+5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}\{e^{at} \cos bt\}=(s-a)/[(s-a)^2+b^2]} \boxed{e^t \cos 2t}$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{2s^2+8s+10}\right\} = \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s+5}\right\} = \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\}$
 $\xrightarrow{\mathcal{L}\{e^{at} \text{sen } bt\}=b/[(s-a)^2+b^2]} \boxed{\frac{3}{2}e^{-t} \text{sen } t}$

Tablas de Transformadas Inversas de Laplace

En la siguiente tabla se muestran algunas importantes transformadas inversas de Laplace.

TABLA DE TRANSFORMADAS INVERSAS DE LAPLACE			
$F(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$	$F(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$
$\frac{1}{s}$	1	$\frac{k}{s}$	k
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n , $n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$, $a \in (-1, \infty)$	t^a
$\frac{\pi}{2s^{1/2}}$	$\sqrt{t}$	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+1/2}}$	$t^{n-1/2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$
$\frac{1}{s-a}$, $s > a$	e^{at}	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$, $s > a$	$e^{at}t^n$
$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$
$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\text{sen } at$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$	$e^{at} \text{sen } bt$
$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$	$e^{at} \cos bt$
$\frac{s \text{sen}(b) + a \cos(b)}{s^2 + a^2}$	$\text{sen}(at + b)$	$\frac{s \cos(b) - a \text{sen}(b)}{s^2 + a^2}$	$\cos(at + b)$
$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\sinh at$	$\frac{b}{(s-a)^2 - b^2}$	$e^{at} \sinh bt$
$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh at$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 - b^2}$	$e^{at} \cosh bt$
$\frac{2as}{[s^2 + a^2]^2}$	$t \text{sen } at$	$\frac{2\beta(s-\alpha)}{[(s-\alpha)^2 + \beta^2]^2}$	$e^{\alpha t} t \text{sen } \beta t$
$\frac{s^2 - a^2}{[s^2 + a^2]^2}$	$t \cos at$	$\frac{(s-\alpha)^2 - \beta^2}{[(s-\alpha)^2 + \beta^2]^2}$	$e^{\alpha t} t \cos \beta t$
$\frac{2a^3}{[s^2 + a^2]^2}$	$\text{sen } at - at \cos at$	$\frac{2\beta^3}{[(s-\alpha)^2 + \beta^2]^2}$	$e^{\alpha t}(\text{sen } \beta t - \beta t \cos \beta t)$

Tabla 4.1: Transformadas inversas de Laplace de algunas funciones sencillas.

4.3.7. Transformada de la Derivada e Integral

En las secciones anteriores²² se estudió la *derivada e integral de una transformada de Laplace*. Ahora vamos a estudiar algo distinto, la *transformada de la derivada e integral* de una función.

Transformada de la Derivada de una Función

Sea una función continua $f(t)$ con derivada $\frac{df}{dt} = f'(t)$ continua a trozos, y ambas de orden exponencial para $t \geq 0$. Entonces:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

Por otra parte si $f(t)$ y $f'(t)$ son continuas y $\frac{d^2f}{dt^2} = f''(t)$ continua a trozos y todas de orden exponencial para $t \geq 0$, entonces:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

y de igual forma:

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s\mathcal{L}\{f''(t)\} - f''(0) = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

Generalizando se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 4.8. Transformada de la Derivada de una Función

Si $f(t)$, $f'(t)$, $\dots$, $f^{(n-1)}(t)$ son continuas y $f^{(n)}(t)$ continua a trozos, y todas de orden exponencial para $t \geq 0$, entonces:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i} f^{(i)}(0) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Este resultado complementa a la *derivada de una transformada*, vista anteriormente²³:

Transformada de una Derivada : $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$

$$f'(t) = \mathcal{L}^{-1}\{sF(s) - f(0)\}$$

Derivada de una Transformada : $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}$

$$tf(t) = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}\right\}$$

Ejercicio 4.12. Encontrar la transformada de Laplace de la función $y(t)$, sabiendo que cumple la siguiente EDO:

$$y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = 0$$

Empezamos tomando transformadas de Laplace a ambas partes de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{y'' + 2y' - 3y\} = \mathcal{L}\{0\} \quad ; \quad \mathcal{L}\{y''\} + 2\mathcal{L}\{y'\} - 3\mathcal{L}\{y\} = 0$$

Ahora denominando $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ y aplicando el teorema de la transformada de la derivada a cada término tenemos:

$$[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 2[sY(s) - y(0)] - 3Y(s) = 0$$

²²Ver la Sección 4.3.5, página 106 y 108.

²³Ver la Sección 4.3.5, página 106.

donde $y(0)$ e $y'(0)$ son los valores de la función $y(t)$ y su derivada en $t = 0$. Por último, sacando factor común a $Y(s)$ y despejando obtenemos:

$$(s^2 + 2s - 3)Y(s) = y(0)(s + 2) + y'(0)$$

Despejando y teniendo en cuenta las condiciones iniciales se tiene:

$$Y(s) = \frac{y(0)(s + 2) + y'(0)}{s^2 + 2s - 3}$$

En la [Sección 4.5, página 115](#) veremos la aplicación del [Teorema 4.8, página 111](#) en la resolución de un PVI²⁴.

Transformada de la Integral de una Función

Si en el teorema de la convolución:

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)g(\tau - t) d\tau\right\} = F(s)G(s)$$

se considera el caso:

$$g(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} g(t - \tau) = 1 \\ G(s) = \mathcal{L}^{-1}\{1\} = \frac{1}{s} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Teorema 4.9. Transformada de la Integral de una Función

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

La transformada de la integral de $f(t)$, complementa a la *integral de una transformada*, vista anteriormente²⁵:

Transformada de una Integral :	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$	$\int_0^t f(\tau) d\tau = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\}$
Integral de una Transformada :	$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(r) dr$	$\frac{f(t)}{t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty F(r) dr\right\}$

Ejercicio 4.13. Calcular la transformada inversa de la función:

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4)}$$

Este ejercicio se puede resolver mediante el método de descomposición en fracciones simples (ver la [Sección 4.4, página 113](#)), sin embargo lo vamos a resolver aquí aplicando el teorema de la transformada de una integral.

$$\frac{F(s)}{s} = \frac{1}{s(s^2 + 4)} \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{s^2 + 4}$$

²⁴Ver la [Definición 1.17, página 15](#).

²⁵Ver la [Sección 4.3.5, página 108](#).

Aplicando el teorema de la transformada de la integral:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\} &= \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \int_0^t \frac{1}{2} \sin 2r \, dr = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos 2r\right]_0^t = \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{2}\right] = \boxed{\frac{1}{4}(1 - \cos 2t)}\end{aligned}$$

4.4. Método de Descomposición en Fracciones Simples

Vamos a ver un método para calcular *transformadas inversas de Laplace* de transformadas racionales de la forma:

$$F(s) = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)}$$

donde $P_m(s)$ y $Q_n(s)$ son polinomios en s de órdenes m y n respectivamente, siendo $m < n$.

En estos casos la *transformada inversa* podrá calcularse fácilmente si descomponemos el cociente en una suma de fracciones racionales simples obtenidas a partir de las raíces del polinomio denominador $Q_m(s)$.

$$\frac{P_m(s)}{Q_n(s)} = \frac{A_1}{s-r_1} + \frac{A_2}{s-r_2} + \cdots + \frac{B_1}{s-r} + \frac{B_2}{(s-r)^2} + \cdots + \frac{C_1s+D_1}{(s-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{C_2s+D_2}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2} + \cdots$$

donde r_i son las raíces reales simples, r son las raíces reales múltiples y $\alpha \pm i\beta$ son las raíces complejas de $Q_m(s)$. Las transformadas inversas de estos tipos de fracciones se pueden obtener de la siguiente forma:

- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s-r}\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}\{e^{at}\}=1/(s-a)} Ae^{rt}$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{(s-r)^n}\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}\{e^{at}t^n\}=n!/(s-a)^{n+1}} \frac{A}{(n-1)!} e^{rt} t^{n-1}$
- $\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Cs+D}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Cs+D-C\alpha+C\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C(s-\alpha)+\beta\frac{D+C\alpha}{\beta}}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\right\} = \\ &= C\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\right\} + \left(\frac{D+C\alpha}{\beta}\right)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\right\} \xrightarrow[\mathcal{L}\{e^{at}\sin bt\}=b/[(s-a)^2+b^2}]{\mathcal{L}\{e^{at}\cos bt\}=(s-a)/[(s-a)^2+b^2]} \\ &= Ce^{\alpha t} \cos \beta t + \left(\frac{D+C\alpha}{\beta}\right)e^{\alpha t} \sin \beta t = e^{\alpha t} \left[C \cos \beta t + \left(\frac{D+C\alpha}{\beta}\right) \sin \beta t\right]\end{aligned}$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Cs+D}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\right\} = e^{\alpha t} \left[C \cos \beta t + \left(\frac{D+C\alpha}{\beta}\right) \sin \beta t\right]}$$
- $\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Cs+D}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Cs+D-C\alpha+C\alpha}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C(s-\alpha)+\beta^3\frac{D+C\alpha}{\beta^3}}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}\right\} = \\ &= C\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-\alpha}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}\right\} + \left(\frac{D+C\alpha}{\beta^3}\right)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\beta^3}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}\right\} \\ &\xrightarrow[\mathcal{L}\{e^{at}(\sin bt - bt \cos bt)\}=2b^3/[(s-a)^2+b^2]^2}{\mathcal{L}\{e^{at}t \sin bt\}=2b(s-a)/[(s-a)^2+b^2]^2} \frac{C}{2\beta} e^{\alpha t} t \sin \beta t + \left(\frac{D+C\alpha}{2\beta^3}\right) e^{\alpha t} (\sin \beta t - \beta t \cos \beta t) = \\ &= e^{\alpha t} \left[\frac{C}{2\beta} t \sin \beta t + \left(\frac{D+C\alpha}{2\beta^3}\right) (\sin \beta t - \beta t \cos \beta t)\right]\end{aligned}$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Cs+D}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}\right\} = e^{\alpha t} \left[\frac{C}{2\beta} t \sin \beta t + \left(\frac{D+C\alpha}{2\beta^3}\right) (\sin \beta t - \beta t \cos \beta t)\right]}$$

Tabla Resumen

TRANSFORMADAS INVERSAS RACIONALES	
$F(s)$	$f(t)$
$\frac{A}{s-r}$	$A e^{rt}$
$\frac{A}{(s-r)^n}$	$\frac{A}{(n-1)!} t^{n-1} e^{rt}$
$\frac{As+B}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$	$e^{\alpha t} \left[A \cos \beta t + \left(\frac{A\alpha+B}{\beta} \right) \sin \beta t \right]$
$\frac{As+B}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}$	$e^{\alpha t} \left[\frac{A}{2\beta} t \sin \beta t + \left(\frac{A\alpha+B}{2\beta^3} \right) (\sin \beta t - \beta t \cos \beta t) \right]$

Ejercicio 4.14. Encontrar la transformada inversa de la siguiente función.

$$F(s) = \frac{s^2 - 5s + 6}{s^4 - 3s^3 - 3s^2 + 11s - 6}$$

Primero factorizamos los polinomios del numerador y denominador:

$$F(s) = \frac{s^2 - 5s + 6}{s^4 - 3s^3 - 3s^2 + 11s - 6} = \frac{(s-2)(s-3)}{(s-1)^2(s+2)(s-3)} = \frac{(s-2)}{(s-1)^2(s+2)}$$

Lo descomponemos en fracciones sencillas:

$$F(s) = \frac{s-2}{(s-1)^2(s+2)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

y determinamos las constantes:

$$\begin{aligned}
 s-2 &= A(s-1)^2 + B(s-1)(s+2) + C(s+2) \\
 \Rightarrow \quad \begin{cases} s=1 & \rightarrow -1=3C & \Rightarrow C=-1/3 \\ s=-2 & \rightarrow -4=9A & \Rightarrow A=-4/9 \\ s=0 & \rightarrow -2=A-2B+2C & \Rightarrow B=(-4/9-2/3+2)/2=4/9 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-4/9}{s+2} + \frac{4/9}{s-1} + \frac{-1/3}{(s-1)^2}\right\} = \\
 &= -\frac{4}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \frac{4}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} = \boxed{-\frac{4}{9}e^{-2t} + \frac{4}{9}e^t - \frac{1}{3}te^t}
 \end{aligned}$$

4.5. Transformada de Laplace y EDO

Una de las mayores aplicaciones de la *transformada de Laplace* es la resolución de *ecuaciones diferenciales*. Aquí vamos a ver su utilización para la resolución de EDO²⁶ y de sistemas de EDO (SEDO).

4.5.1. PVI de EDOC

La transformada de Laplace es un buen método para resolver PVI²⁷ de EDO lineales de orden n con coeficientes constante²⁸ (EDOC) de la forma²⁹:

$$\begin{cases} a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x) \\ y(0) = y_0, y'(0) = y_1, y''(0) = y_2, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Procedimiento

1. Tomando transformadas de Laplace a ambas partes de la igualdad en la EDO:

$$\mathcal{L} \{ a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y \} = \mathcal{L} \{ f(x) \}$$

Ahora aplicamos el *teorema de la transformada de la derivada*³⁰ a cada término:

$$\begin{aligned} a_n \left[s^n Y(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} y^{(i-1)}(0) \right] + a_{n-1} \left[s^{n-1} Y(s) - \sum_{i=1}^{n-1} s^{n-1-i} y^{(i-1)}(0) \right] + \\ + \dots + a_1 [sY(s) - y(0)] + a_0 Y(s) = F(s) \end{aligned}$$

Donde $Y(s) = \mathcal{L}^{-1} \{ y(t) \}$ y $F(s) = \mathcal{L}^{-1} \{ f(t) \}$.

2. Reagrupando términos:

$$A(s)Y(s) - B(s) = F(s)$$

siendo:

- $A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$
- $B(s)$ es la expresión restante donde aparecen las condiciones iniciales.

Por tanto despejando:

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} + \frac{F(s)}{A(s)}$$

3. La solución del PVI será la transformada inversa de la Laplace de esta expresión:

$$\mathcal{L}^{-1} \{ Y(s) \} = y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{B(s)}{A(s)} + \frac{F(s)}{A(s)} \right\}$$

La transformada de Laplace convierte las **ecuaciones diferenciales** en **ecuaciones algebraicas**.

²⁶Ver la Sección 1.2.3, página 7.

²⁷Ver la Definición 1.17, página 15.

²⁸Ver la Definición 3.7, página 57.

²⁹Notar que el valor inicial debe ser $t = 0$. Si es otro valor es necesario hacer un cambio de variable apropiado.

³⁰Ver el Teorema 4.8, página 111.

Ejercicio 4.15. Resolver el siguiente PVI utilizando la transformada de Laplace.

$$\begin{cases} y''(t) + 3y'(t) - 4y(t) = 0 \\ y(0) = 3 \quad ; \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Empezamos tomando transformadas de Laplace a ambas partes de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{y'' + 3y' - 4y\} = \mathcal{L}\{0\} \quad ; \quad \mathcal{L}\{y''\} + 3\mathcal{L}\{y'\} - 4\mathcal{L}\{y\} = 0$$

Ahora aplicamos el teorema de la transformada de una derivada³¹ a cada término:

$$[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 3[sY(s) - y(0)] - 4Y(s) = 0 \quad ; \quad (s^2 + 3s - 4)Y(s) = y(0)(s + 3) + y'(0)$$

Despejando y teniendo en cuenta las condiciones iniciales del problema se tiene:

$$Y(s) = \frac{y(0)(s + 3) + y'(0)}{s^2 + 3s - 4} = \frac{3s + 10}{s^2 + 3s - 4} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s + 10}{s^2 + 3s - 4}\right\}$$

Aplicando ahora el método de descomposición en fracciones simples³²:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s + 10}{s^2 + 3s - 4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s + 10}{(s - 1)(s + 4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{13/5}{s - 1} + \frac{2/5}{s + 4}\right\}$$

Calculando esta transformadas inversas se obtiene la solución final del PVI:

$$y(t) = \frac{13}{5}e^t + \frac{2}{5}e^{-4t}$$

4.5.2. EDOL con Coeficientes Polinómicos

La *transformada de Laplace* se puede utilizar también para resolver algunos tipos de PVI de EDO lineales de orden n cuyos coeficientes son *polinomios* en t de la forma:

$$P_n(t)y^{(n)} + P_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + P_1(t)y' + P_0(t)y = f(t)$$

Estos problemas se pueden resolver teniendo en cuenta la *derivada de una transformada*³³:

$$\mathcal{L}\{t^n y^{(n)}\} = (-1)^n \frac{d}{ds} \mathcal{L}\{y^{(n)}\} = (-1)^n \frac{d}{ds} \left[s^n Y(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} y^{(i-1)}(0) \right]$$

De esta forma se obtiene una EDO lineal en $Y(s)$ de primer orden, siempre que los polinomios sean de grado 1 en t .

Nota 4.2. El problema más complicado puede resultar en la obtención de la transformadas inversas resultantes del procedimiento.

Ejercicio 4.16. Resolver el siguiente PVI utilizando la transformada de Laplace.

$$\begin{cases} ty'(t) + y(t) = a + t^2 \\ y(0) = a \end{cases} \quad ; \quad a \in \mathbb{R}$$

Tomamos transformadas de Laplace a ambas partes de la EDO:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{ty' + y\} &= \mathcal{L}\{a + t^2\} \quad ; \quad -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{y'\} + Y(s) = \frac{a}{s} + \frac{2}{s^3} \\ -\frac{d}{ds}[sY(s) - y(0)] + Y(s) &= \frac{a}{s} + \frac{2}{s^3} \quad ; \quad -Y(s) - sY'(s) + Y(s) = \frac{a}{s} + \frac{2}{s^3} \end{aligned}$$

³¹Ver el Teorema 4.8, página 111.

³²Ver la Sección 4.4, página 113.

³³Ver el Teorema 4.6, página 106.

$$Y'(s) = -\frac{a}{s^2} - \frac{2}{s^4} \implies Y(s) = \int \left(-\frac{a}{s^2} - \frac{2}{s^4} \right) ds = \frac{a}{s} + \frac{2}{3s^3} + c$$

La constante de integración c tiene que ser cero para que cumpla la propiedad $\lim_{s \rightarrow \infty} Y(s) = 0$. Obteniendo la transformadas inversas se obtiene la solución final.

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = a + \frac{x^2}{3} \quad ; \quad \boxed{y(t) = a + \frac{x^2}{3}}$$

4.5.3. Sistemas de EDO Lineales de Orden n

La transformada de Laplace también se puede utilizar para reducir ciertos sistemas de EDO lineales (SEDOL) con *condiciones iniciales*, a un sistema de ecuaciones algebraicas lineales, siendo las incógnitas las *transformadas* de las funciones.

Veamos un par de ejemplos del uso de esta técnica.

Ejercicio 4.17. Resolver el siguiente SEDOL utilizando transformadas de Laplace.

$$\begin{cases} x' - 2y = 4t & ; \quad x(0) = 4 \\ y' + 2y - 4x = -4t - 2 & ; \quad y(0) = -5 \end{cases}$$

Tomando transformadas a ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x' - 2y\} &= \mathcal{L}\{4t\} & ; \quad sX - x(0) - 2Y &= \frac{4}{s^2} \\ \mathcal{L}\{y' + 2y - 4x\} &= \mathcal{L}\{-4t - 2\} & ; \quad sY + y(0) + 2Y - 4X &= -\frac{4}{s^2} - \frac{2}{s} \end{aligned}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} sX - 2Y = \frac{4}{s^2} + 4 \\ -4X + (s+2)Y = -\frac{4}{s^2} - \frac{2}{s} + 5 \end{cases}$$

De esta forma, el SEDOL se ha transformado en un sistema de ecuaciones lineales, donde las incógnitas en este caso son X e Y . Este sistema se puede resolver por cualquier método apropiado a este tipo de sistemas. Por ejemplo, aquí lo vamos a resolver por el método de reducción, de forma que multiplicando la primera ecuación por $(s+2)$, la segunda por 2 y sumando, se tiene:

$$X = \frac{4s-2}{(s+4)(s-2)} = \frac{3}{s+4} + \frac{1}{s-2} \quad \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}\{\}} \quad \boxed{x(t) = 3e^{-4t} + e^{2t}}$$

Ahora para calcular $y(t)$ se puede despejar de la primera ecuación y sustituir en términos de $x(t)$:

$$y(t) = \frac{1}{2}x'(t) - 2t = -6e^{-4t} + e^{2t} - 2t \quad ; \quad \boxed{y(t) = -6e^{-4t} + e^{2t} - 2t}$$

De forma general, suele resultar más apropiado aplicar el método de Cramer en la resolución del sistema, como se puede ver en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 4.18. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 3\frac{dy}{dt} = -6x - 2y & ; \quad x(0) = 2 \\ \frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} = -5x - 3y & ; \quad y(0) = 4 \end{cases}$$

Reordenamos el sistema y tomamos transformadas de Laplace a ambos lados de las ecuaciones:

$$\begin{cases} x' + 6x + 3y' + 2y = 0 \\ x' + 5x + 2y' + 3y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} sX(s) - x(0) + 6X(s) + 3sY(s) - 3y(0) + 2Y(s) = 0 \\ sX(s) - x(0) + 5X(s) + 2sY(s) - 2y(0) + 3Y(s) = 0 \end{cases}$$

Simplificando:

$$\begin{cases} (s+6)X(s) + (3s+2)Y(s) = 14 \\ (s+5)X(s) + (2s+3)Y(s) = 10 \end{cases}$$

se obtiene un sistema de ecuaciones lineales donde las incógnitas son $X(s)$ e $Y(s)$. Aplicamos la regla de Cramer para resolver el sistema:

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} 14 & 3s+2 \\ 10 & 2s+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+6 & 3s+2 \\ s+5 & 2s+3 \end{vmatrix}} = \frac{-2s+22}{-s^2-2s+8} = \frac{2s-22}{(s+4)(s-2)}$$

$$Y(s) = \frac{\begin{vmatrix} s+6 & 14 \\ s+5 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+6 & 3s+2 \\ s+5 & 2s+3 \end{vmatrix}} = \frac{-4s-10}{-s^2-2s+8} = \frac{4s+10}{(s+4)(s-2)}$$

Descomponemos en fracciones simples y tomamos transformadas inversas de Laplace:

$$X(s) = \frac{5}{s+4} - \frac{3}{s-2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}\{\}} \boxed{x(t) = 5e^{-4t} + 3e^{2t}}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+4} + \frac{3}{s-2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}\{\}} \boxed{y(t) = e^{-4t} + 3e^{2t}}$$

4.5.4. Ecuaciones Integrales e Integrodiferenciales

Los teoremas de las transformadas de una derivada y de una integral se pueden utilizar para resolver ecuaciones integrales y ecuaciones integrodiferenciales como las mostradas en los siguientes ejercicios.

Ejercicio 4.19. Resolver el siguiente ecuación integral:

$$f(t) + \int_0^t f(r) dr = 2$$

Tomamos transformadas de Laplace a ambas partes de la ecuación y teniendo en cuenta el teorema de la transformada de una integral se tiene:

$$\mathcal{L}\{f\} + \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(r) dr\right\} = \mathcal{L}\{2\} \implies F(s) + \frac{F(s)}{s} = \frac{2}{s} \quad ; \quad F(s) = \frac{2}{s+1}$$

Tomando transformadas inversas:

$$\boxed{f(t) = 2e^{-t}}$$

Ejercicio 4.20. Resolver el siguiente PVI de una ecuación integrodiferencial:

$$\begin{cases} y' + 6y + 9 \int_0^t y(r) dr = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Tomamos transformadas de Laplace y aplicamos los teoremas de la transformada de una derivada y de una integral.

$$\mathcal{L}\{y'\} + 6\mathcal{L}\{y\} + 9\mathcal{L}\left\{\int_0^t y(r) dr\right\} = \mathcal{L}\{1\} \implies [sY(s) - y(0)] + 6Y(s) + 9\frac{Y(s)}{s} = \frac{1}{s}$$

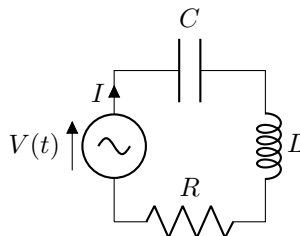
$$Y(s) \left(s + 6 + \frac{9}{s}\right) = \frac{1}{s} \quad ; \quad Y(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 9} = \frac{1}{(s+3)^2}$$

Tomando transformadas inversas:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^2}\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}\{e^{at}t^n\} = n!/(s-a)^{n+1}} te^{-3t} \quad ; \quad \boxed{y(t) = te^{-3t}}$$

Un ejemplo típico es el estudio de un circuito RLC³⁴ en serie, que puede ser descrito por la siguiente ecuación integro-diferencial:

$$L \frac{di}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = E(t)$$



donde:

- E : fuerza electromotriz de un generador, en voltios (V);
- L : inductancia de la bobina, en henrios (H);
- i : intensidad de corriente eléctrica, en amperios (A);
- C : capacidad eléctrica del condensador, en faradios (F);
- R : resistencia del circuito, en ohmios (Ω);
- t : tiempo en segundos (s)

Ejercicio 4.21. Determinar la corriente $i(t)$ en un circuito RCL en serie de un sola malla cuando $L = 0.1H$, $R = 2\Omega$, $C = 0.1F$ y el voltaje aplicado es:

$$E(t) = 4 \sin(5t)$$

teniendo en cuenta que $i(0) = 0$.

En este caso tenemos que resolver el siguiente PVI:

$$\begin{cases} 0.1 \frac{di}{dt} + 2i(t) + \frac{1}{0.1} \int_0^t i(r) dr = 4 \sin(5t) \\ i(0) = 0 \end{cases}$$

Tomando transformadas de Laplace y aplicando los teoremas de la transformada de una derivada y de una integral se tiene:

$$\mathcal{L}\left\{0.1 \frac{di}{dt}\right\} + \mathcal{L}\{2i(t)\} + \mathcal{L}\left\{\frac{1}{0.1} \int_0^t i(r) dr\right\} = \mathcal{L}\{4 \sin(5t)\}$$

³⁴Contiene una resistencia eléctrica R , una bobina (inductancia) L y un condensador (capacitancia) C .

$$[0.1sI(s) - i(0)] + 2I(s) + \frac{1}{0.1} \frac{I(s)}{s} = 4 \frac{5}{s^2 + 25} \quad ; \quad I(s) \left(0.1s + 2 + \frac{1}{0.1s} \right) = \frac{20}{s^2 + 25}$$

$$I(s) = \frac{2s}{(s^2 + 25)(0.01s^2 + 0.2s + 1)} = \frac{200s}{(s^2 + 25)(s + 10)^2} = \frac{As + B}{s^2 + 25} + \frac{C}{s + 10} + \frac{D}{(s + 10)^2}$$

Encontrando los coeficientes :

$$I(s) = \frac{8}{25} \frac{3s + 20}{s^2 + 25} - \frac{24}{25} \frac{1}{s + 10} - \frac{16}{(s + 10)^2}$$

Tomando transformadas inversas y teniendo en cuenta las fórmulas de la [Sección 4.4, página 113](#), se tiene:

$$\mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = i(t) = \frac{8}{25} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s + 20}{s^2 + 25}\right\} - \frac{24}{25} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 10}\right\} + 16 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + 10)^2}\right\}$$

$$i(t) = \frac{8}{25}(3 \cos 5t + 4 \sin 5t) - \frac{24}{25}e^{-10t} - 16te^{-10t}$$

De la solución observamos que la intensidad de salida tiene un transitorio inicial, consecuencia de las exponenciales negativas que rápidamente se estabiliza en el comportamiento estacionario dado por el término trigonométrico.

4.5.5. Transformada de un Producto: Convolución

La transformada de un producto de funciones **no** es el producto de las transformadas, ya que:

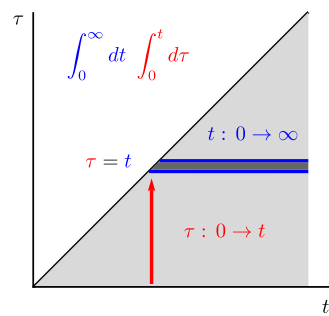
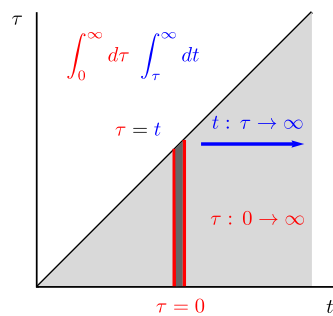
$$F(s)G(s) = \left[\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) d\tau \right] \left[\int_0^\infty e^{-s\beta} g(\beta) d\beta \right] = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(\tau+\beta)} g(\beta) d\beta f(\tau) d\tau$$

Haciendo el siguiente cambio de variable y manteniendo constante τ en la segunda integral se tiene:

$$\text{C.V.: } t = \tau + \beta \quad \Rightarrow \quad F(s)G(s) = \int_0^\infty f(\tau) d\tau \int_\tau^\infty e^{-st} g(t - \tau) dt$$

Se puede intercambiar el orden de integración de la siguiente forma:

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty f(\tau) d\tau \int_\tau^\infty e^{-st} g(t - \tau) dt = \int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (4.1)$$



Definición 4.8. Convolución

Se denomina **convolución** de las funciones $f(t)$ y $g(t)$ y se representa mediante $f * g$, a la siguiente función integral:

$$f * g = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

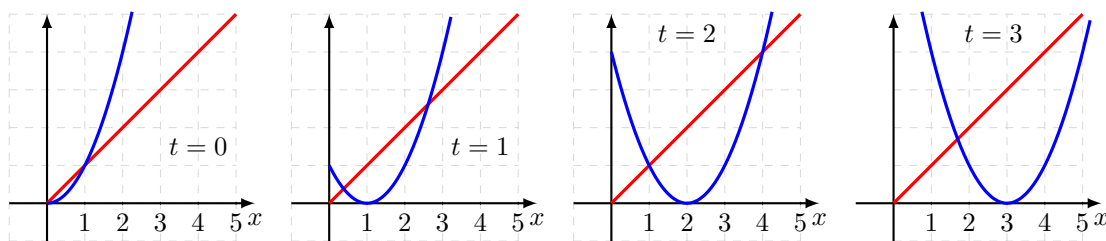
Ejercicio 4.22. Calcular la convolución $f * g$ de las funciones:

$$f(t) = t \quad ; \quad g(t) = t^2$$

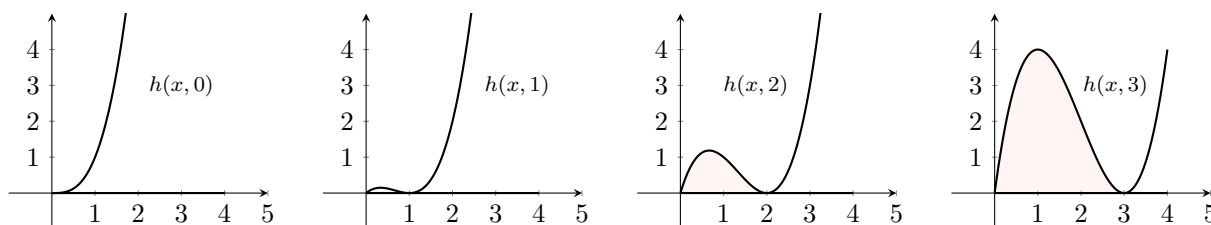
$$\begin{aligned} f * g &= \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau = \int_0^t \tau(t-\tau)^2 d\tau = \int_0^t \tau(t^2 + \tau^2 - 2t\tau) d\tau = t^2 \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^4}{4} - 2t \frac{\tau^3}{3} \Big|_0^t = \\ &= \frac{t^4}{2} + \frac{t^4}{4} - 2 \frac{t^4}{3} = \boxed{\frac{1}{12}t^4} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.7. Interpretación geométrica de la Convolución

Vamos a interpretar geoméricamente el proceso del ejercicio anterior. Por claridad en la interpretación geométrica vamos a denominar a la variable τ anterior mediante³⁵ x . Tenemos dos funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$ donde una de ellas (en este caso g) se desplaza a la izquierda en función del tiempo t dando lugar a la función $g(t-x)$. En las siguientes figuras se ha representado las dos funciones f (fija) y g (desplazada) en función del tiempo t .

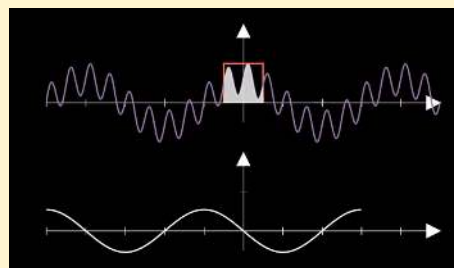


El producto de las dos funciones $h(x,t) = f(x)g(t-x)$ para los tiempos anteriores se muestra en la siguiente secuencia (en negro, donde aparece sombreada en rosa el área resultado de la integral $f * g = \int_0^t h(x,t) dx$, cuyo valor por el ejercicio anterior es $f * g = t^4/12$).



La convolución tiene muchas aplicaciones prácticas entre las que se encuentran el filtrado de señales $f(t)$ con filtros³⁶ particulares $g(t)$.

En la figura³⁷ se muestra una señal $f(t)$ (superior en color claro) formada por ondas de dos frecuencias bien diferenciadas. Se aplica un filtro de paso bajo $g(t)$ (en color rojo) y se calcula la convolución de ambos, dando lugar a la señal inferior en color blanco que contiene la frecuencia menor de la señal original.



³⁵Notar que τ es una variable muda de la integral que define la convolución y por tanto puede denominarse de múltiples formas.

³⁶Ver por ejemplo "Clases de Ampliación de Matemáticas para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 313.

³⁷<https://www.youtube.com/watch?v=IOXzLMqcLbg>

Teorema 4.10. Transformada de Laplace de la Convolución

Sean $f(t)$ y $g(t)$ funciones continuas a trozos y de orden exponencial³⁸ en $[0, \infty)$, entonces:

$$\mathcal{L}\{f * g\} = F(s)G(s)$$

Demostración 4.10.

Teniendo en cuenta (4.1) y la definición de transformada de Laplace³⁹, se tiene:

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-st} \left\{ \underbrace{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau}_{f*g} \right\} dt = \mathcal{L}\{f * g\}$$

Conclusión del teorema de la convolución:

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{L}\{f * g\} = F(s)G(s) \\ \mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = (f * g)(t) \end{cases}$$

Ejercicio 4.23. Calcular la transformada inversa de la función:

$$F(s) = \frac{3}{(s+2)(s^2+9)}$$

Este ejercicio se puede resolver mediante el método de descomposición en fracciones simples (ver la Sección 4.4, página 113) pero aquí se resolverá aplicando el teorema de la convolución y su definición.

La función $F(s)$ se puede descomponer como producto de dos más sencillas:

$$F(s) = \frac{3}{(s+2)(s^2+9)} = \frac{3}{s^2+9} \frac{1}{s+2} = G(s)H(s)$$

Por el teorema de la convolución: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)H(s)\} = (g * h)(t)$

$$\text{Como } \begin{cases} g = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}\{\sin at\}=a/(s^2+a^2)} \sin 3t \\ h = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}\{e^{at}\}=1/(s-a)} e^{-2t} \end{cases}$$

Entonces, aplicando la definición de convolución:

$$\begin{aligned} g * h &= \int_0^t g(\tau)h(t-\tau) d\tau = \int_0^t \sin(3\tau)e^{-2(t-\tau)} d\tau \stackrel{P.Partes}{=} \\ &= -\frac{1}{13}(3\cos 3\tau - 2\sin 3\tau)e^{2(\tau-t)} \Big|_0^t = -\frac{1}{13}(3\cos 3t - 2\sin 3t) + \frac{3}{13}e^{-2t} \end{aligned}$$

³⁸Ver la Sección 4.3.4, página 99.

³⁹Ver la Definición 4.3, página 95.

Propiedades de la Convolución

La convolución es distinta que la multiplicación normal, por ejemplo:

- $1 * 1 = \int_0^t 1 \cdot 1 \, d\tau = \tau|_0^t = t \neq 1$
- $1 * f = \int_0^t f(t - \tau) \, d\tau = \int_0^t f(\tau) \, d\tau \neq f$ (de forma general)

Sin embargo la convolución cumple algunas propiedades de la multiplicación.

- Conmutativa: $f * g = g * f$
- Asociativa: $(f * g) * h = f * (g * h)$
- Distributiva respecto la suma: $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$
- Elemento Neutro: $f * 0 = \int_0^x f(\tau) \cdot 0 \, d\tau = 0$; $(f * g)(0) = \int_0^0 f(\tau)g(t - \tau) \, d\tau = 0$
- Linealidad: $f * (ag + bh) = a(f * g) + b(f * h)$, $a, b \in \mathbb{R}$

Derivada de la Convólución

$$(f * g)' = f' * g \quad \text{si} \quad f(0) = 0$$

Demostración 4.10.

Demostremos que $(f * g)' = f' * g$ si $f(0) = 0$. Tomando transformadas de Laplace⁴⁰:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{(f * g)'\} = s\mathcal{L}\{f * g\} - \underbrace{(f * g)(0)}_0 = s\mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\} \\ \mathcal{L}\{f' * g\} = \mathcal{L}\{f'\}\mathcal{L}\{g\} = [s\mathcal{L}\{f\} - \underbrace{f(0)}_0]\mathcal{L}\{g\} = s\mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\} \end{cases}$$

Como son iguales, las funciones originales también lo son $\implies (f * g)' = f' * g$.

Aplicaciones de la Convólución

1. Cálculo de transformadas de Laplace

Ejercicio 4.24. Calcular la transformada de Laplace de la siguiente función:

$$f(t) = \int_0^t e^r \sin(t - r) \, dr$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\int_0^t e^r \sin(t - r) \, dr\right\} &= \mathcal{L}\{e^t * \sin t\} = \mathcal{L}\{e^t\}\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s-1} \frac{1}{s^2+1} = \\ &= \boxed{\frac{1}{(s-1)(s^2+1)}} \end{aligned}$$

⁴⁰Ver el Teorema 4.8, página 111.

2. Cálculo de transformadas inversas de Laplace

Ejercicio 4.25. Calcular la transformada de inversa de Laplace de la siguiente función:

$$F(s) = \frac{1}{(s^2 + a^2)^2}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + a^2} \frac{1}{s^2 + a^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + a^2}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + a^2}\right\} = \\ &= \left(\frac{1}{a} \operatorname{sen} at\right) * \left(\frac{1}{a} \operatorname{sen} at\right) = \frac{1}{a^2} \int_0^t \operatorname{sen} ar \operatorname{sen} a(t-r) dr\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la relación trigonométrica:

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2} \int_0^t \operatorname{sen} ar \operatorname{sen} a(t-r) dr &= \frac{1}{a^2} \int_0^t \frac{1}{2} [\cos(ar - at + ar) - \cos(ar + at - ar)] dr = \\ &= \frac{1}{2a^2} \int_0^t [\cos a(2r - t) - \cos at] dr = \frac{1}{2a^2} \left[\frac{1}{2a} \operatorname{sen} a(2r - t) - r \cos at \right]_0^t = \\ &= \frac{1}{2a^2} \left[\frac{1}{2a} \operatorname{sen} at - t \cos at - \frac{1}{2a} \operatorname{sen}(-at) + 0 \right] = \frac{1}{2a^2} \left[\frac{1}{a} \operatorname{sen} at - t \cos at \right] = \boxed{\frac{\operatorname{sen} at - at \cos at}{2a^3}}\end{aligned}$$

3. Resolución de EDO⁴¹

Ejercicio 4.26. Resolver el siguiente PVI:

$$\begin{cases} y'' + a^2 y = f(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Empezamos tomando transformadas de Laplace a ambas partes de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{y'' + a^2 y\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad ; \quad \mathcal{L}\{y''\} + a^2 \mathcal{L}\{y\} = F(s)$$

donde $F(s)$ es la transformada inversa de la función $f(t)$. Ahora aplicamos el *teorema de la transformada de la derivada* (ver la **Teorema 4.8, página 111**) a cada término:

$$[s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)] + a^2 Y(s) = F(s) \quad ; \quad (s^2 + a^2)Y(s) = F(s) + y'(0) + sy(0)$$

Despejando y teniendo en cuenta las condiciones iniciales se tiene:

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 + a^2}$$

Si se conoce $F(s)$, se puede aplicar la transformada inversa de Laplace a ambas expresiones y obtener la solución. Otra forma de expresar la solución es el teorema de la convolución (ver el **Teorema 4.10, página 122**):

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 + a^2} = F(s) \frac{1}{s^2 + a^2} = F(s) \mathcal{L}\left\{\frac{\operatorname{sen} at}{a}\right\} = \mathcal{L}\left\{f(t) * \frac{\operatorname{sen} at}{a}\right\}$$

⁴¹Ver la **Sección 4.5, página 115**.

Tomando la transformada inversa de Laplace a ambos términos y teniendo en cuenta la definición de convolución (ver el **Definición 4.8**, página 120):

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = \frac{1}{a}(f(t) * \sin at) = \frac{1}{a} \int_0^t f(r) \sin a(t-r) dr$$

Finalmente:

$$y(t) = \frac{1}{a} \int_0^t f(r) \sin a(t-r) dr$$

4. Resolución de Ecuaciones Integrales de Volterra.

Definición 4.9. Ecuación Integral de Volterra

La ecuación integral de Volterra en su forma más general es:

$$f(t) = g(t) + \int_a^t f(r)K(t,r) dr$$

donde la función $K(t,r)$ se denomina *núcleo* de la ecuación. La versión de la ecuación con convolución es:

$$f(t) = g(t) + \int_a^t f(r)h(t-r) dr$$

Ejercicio 4.27. Resolver el siguiente PVI:

$$\begin{cases} y' = \cos t + \int_0^t y(r) \cos(t-r) dr \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

En esta ecuación aparece una integral de convolución por lo que se trata de una ecuación de Volterra.

$$\int_0^t y(r) \cos(t-r) dr = y(r) * \cos(t)$$

De forma análoga a los casos anteriores, tomamos transformadas de Laplace y aplicamos los teoremas de la transformada de una derivada y de una integral^a.

$$\mathcal{L}\{y'\} = \mathcal{L}\{\cos t\} + \mathcal{L}\{y(t) * \cos(t)\} = \mathcal{L}\{\cos t\} + \mathcal{L}\{y(t)\} \mathcal{L}\{\cos(t)\}$$

$$sY(s) - y(0) = \frac{s}{s^2 + 1} + Y(s) \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$Y(s) \left(s - \frac{s}{s^2 + 1} \right) = \frac{s}{s^2 + 1} + 1 \quad ; \quad Y(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^3} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3}$$

Tomando transformadas inversas:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} \right\} \xrightarrow{\mathcal{L}\{t^n\} = n!/s^{n+1}} 1 + t + \frac{t^2}{2} \quad ; \quad y(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

^aVer la **Sección 4.3.7**, página 111.

5. Resolución de Ecuaciones Integrodiferenciales.

Ejercicio 4.28. Resolver el siguiente PVI:

$$\begin{cases} y'(t) + y(t) - \int_0^t y(r) \operatorname{sen}(t-r) dr = -\operatorname{sen} t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Vemos que en esta ecuación integrodiferencial aparece una integral de convolución. Aplicamos transformadas de Laplace a ambos términos de la ecuación y aplicamos los teoremas de la transformada de una derivada y de una integral y el teorema de la convolución se tiene:

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} - \mathcal{L}\{y(t) * \operatorname{sen}(t)\} = -\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}$$

$$[sY(s) - y(0)] + Y(s) - Y(s) \frac{1}{s^2 + 1} = -\frac{1}{s^2 + 1}$$

Teniendo en cuenta la condición inicial, agrupando y despejando $Y(s)$ tenemos:

$$Y(s) \left(s + 1 - \frac{1}{s^2 + 1} \right) = -\frac{1}{s^2 + 1} + 1 \quad ; \quad Y(s) = \frac{s^2}{s(s^2 + s + 1)} = \frac{s}{s^2 + s + 1}$$

Las raíces del denominador son: $-1/2 \pm i\sqrt{3}/2$, por tanto teniendo en cuenta las fórmulas de la [Sección 4.4, página 113](#) para las transformadas inversas se tiene:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s + 1/2)^2 + 3/4} \right\} \quad \Rightarrow \quad y(t) = e^{-t/2} \left(\cos \frac{t\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \frac{t\sqrt{3}}{2} \right)$$

6. Derivada de la Convolución

Ejercicio 4.29. Resolver el siguiente PVI:

$$\begin{cases} f(x) - 1 = \int_0^x f(r) (x-r) dr \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Como:

$$\int_0^x f(r) (x-r) dr = f * x \quad \text{con} \quad x|_{x=0} = 0$$

Podemos derivar ambas partes de la ecuación:

$$\frac{d}{dx}(f - 1) = \frac{d}{dx}(f * x) \quad \Rightarrow \quad f' = (f * x') = (f * 1) = \int_0^x f(r) dr$$

Notar que de aquí se deduce que $f'(0) = 0$. Derivando una vez más se obtiene el siguiente problema equivalente al original:

$$f'' = f \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f'' - f = 0 \\ f(0) = 1, \quad f'(0) = 0 \end{cases}$$

A través de la ecuación característica obtenemos la solución general del problema:

$$\lambda^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

Imponiendo las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} f(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ f'(0) = c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

4.6. EDOS y Señales

Definición 4.10. Señal

Una **señal** es una magnitud física que se utiliza para transmitir información, como por ejemplo corriente eléctrica, ondas acústicas, etc.

En determinados casos prácticos es útil interpretar las ecuaciones diferenciales en términos de *señales* (información) de entrada y de salida.



Por ejemplo, sea la siguiente EDOL de segundo grado:

$$\begin{cases} a(t) \frac{d^2 y}{dt^2} + b(t) \frac{dy}{dt} + c(t) = f(t) \\ y(0) = x_0 ; y(0) = y'_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(t) & : \text{Señal de Entrada} \\ y(t) & : \text{Señal de Salida} \end{cases}$$

Podemos considerar la ecuación como una expresión que define una determinada transformación de una señal de entrada $f(t)$ en una señal de salida $y(t)$.

Ejemplo 4.8. Oscilaciones Forzadas

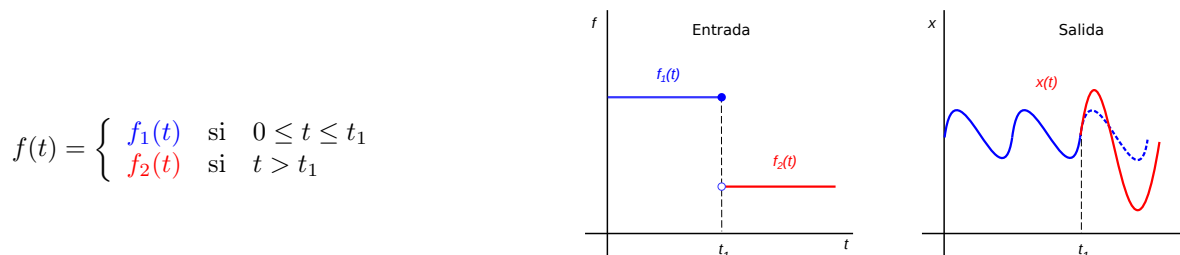
La ecuación:

$$y'' + ay' + cy = f(t)$$

representa el desplazamiento en función del tiempo $y(t)$ de una masa m sujeta con un resorte y sometida a fuerza $f(t)$. Las constantes a y b dependen de la masa suspendida, de las características del muelle y condiciones de rozamiento. En este caso la señal de entrada es la fuerza $f(t)$ ejercida y la señal de salida es el desplazamiento que sufre el objeto en estas condiciones.



En muchos casos de interés la entrada son funciones discontinuas o *impulsos*.



$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{si } 0 \leq t \leq t_1 \\ f_2(t) & \text{si } t > t_1 \end{cases}$$

Para determinar la salida (solución) hay que resolver dos PVI: uno desde $t = 0$ hasta $t = t_1$ y el otro desde $t = t_1$ en adelante.

$$\begin{cases} a(t)x'' + b(t)x' + c(t) = f_1(t) \\ x(0) = x_0 ; x(0) = x'_0 \end{cases}$$

↓

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \quad 0 \leq t \leq t_1$$

$$\begin{cases} a(t)\tilde{x}'' + b(t)\tilde{x}' + c(t) = f_2(t) \\ \tilde{x}(t_1) = \alpha ; \tilde{x}'(t_1) = \beta \end{cases}$$

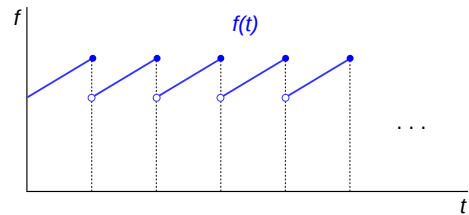
↓

$$\tilde{x}(t) = \tilde{c}_1 \tilde{x}_1(t) + \tilde{c}_2 \tilde{x}_2(t) \quad t > t_1$$

En el segundo PVI los valores α y β deben cumplir una *condición de empalme* referido al primer PVI:

$$\begin{cases} \alpha = x(t_1) \\ \beta = x'(t_1) \end{cases}$$

El problema se complica más si la señal de entrada es discontinua de forma periódica, del tipo mostrado en la esta gráfica, donde es necesario resolver n PVI con $n-1$ condiciones de empalme.



La utilización de la **transformada de Laplace** en estos y otros casos más generales simplifica enormemente su resolución.

Teorema 4.11. Transformadas de Funciones Periódicas

Si $f(t)$ es continua a trozos en $[0, \infty)$, de orden exponencial y periódica con periodo T :

$$f(t+T) = f(t) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

Demostración 4.11.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t) dt$$

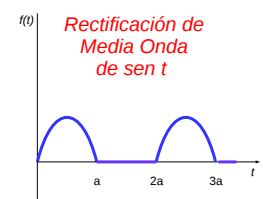
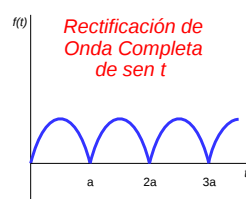
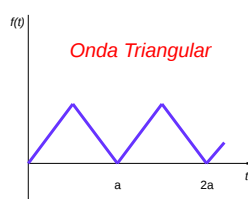
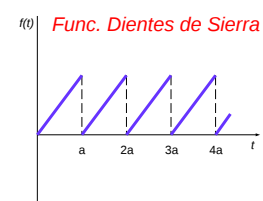
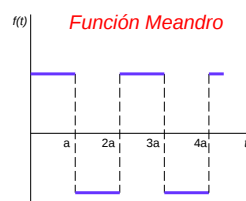
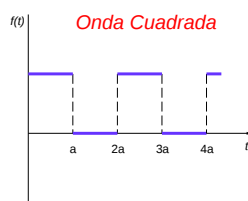
Haciendo el C.V. $t = u + T$ en la última integral:

$$\int_T^\infty e^{-st} f(t) dt = e^{-sT} \int_0^\infty e^{-su} f(u+T) du = e^{-sT} \int_0^\infty e^{-su} f(u) du = e^{-sT} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Por tanto:
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + e^{-sT} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

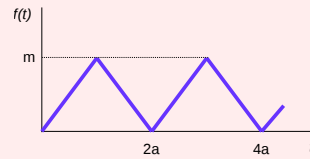
Al despejar $\mathcal{L}\{f(t)\}$ se obtiene el resultado del teorema:
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

Hay diferentes tipos de funciones periódicas que aparecen de forma habitual en los casos prácticos. Algunas de ellas se muestran en la siguiente figura.



Ejercicio 4.30. Determinar la transformada de Laplace de una onda periódica triangular de periodo $T = 2$ y valor máximo $m = 1$ que en el intervalo $[0, 2)$ se define como:

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 2 - t & \text{si } 1 \leq t < 2 \end{cases}$$



Aplicando el teorema de las transformadas de funciones periódicas tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} f(t) dt = \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left[\int_0^1 e^{-st} t dt + \int_1^2 e^{-st} (2 - t) dt \right] \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left[-\frac{1+st}{s^2} e^{-st} \Big|_0^1 + \frac{1+st}{s^2} e^{-st} - \frac{2}{s} e^{-st} \Big|_1^2 \right] = \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left[-\frac{1+s}{s^2} e^{-s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1+2s}{s^2} e^{-2s} - \frac{2}{s} e^{-2s} - \frac{1+s}{s^2} e^{-s} + \frac{2}{s} e^{-s} \right] = \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left[\frac{(1 + e^{-s})^2}{s^2} \right] = \frac{(1 + e^{-s})^2}{s^2(1 - e^{-2s})} = \frac{1 + e^{-s}}{s^2(1 - e^{-s})} \end{aligned}$$

4.6.1. Función Delta de Dirac

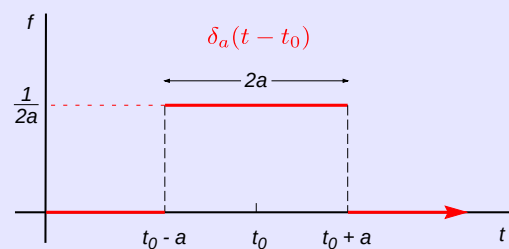
Introducción

En ingeniería suele ser práctico la utilización de fuerzas externas de una cierta magnitud que actúan durante un lapso muy breve de tiempo, por ejemplo un golpe en un sistema mecánico, un rayo en un ala de avión, etc. Estas fuerzas se denominan **impulsos** y vamos a ver como simular este comportamiento de forma matemática.

Definición 4.11. Función Impulso Unitario

Se denomina función **impulso unitario** a la siguiente función definida a trozos:

$$\delta_a(t - t_0) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < t_0 - a \\ \frac{1}{2a} & t_0 - a \leq t < t_0 + a \\ 0 & t \geq t_0 + a \end{cases}$$



La función impulso unitario tiene la propiedad:

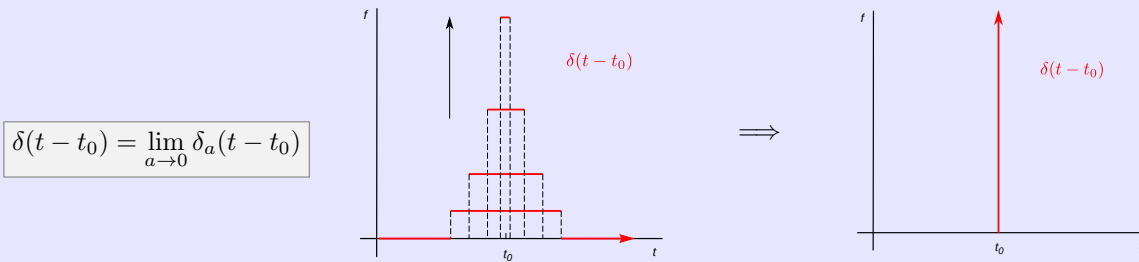
$$\int_0^\infty \delta_a(t - t_0) dt = 1$$

Para valores pequeños de a , la función $\delta_a(t - t_0)$ es esencialmente una constante de gran magnitud que se encuentra *activada* durante un breve tiempo alrededor de t_0 .

A partir de esta función se define otra de especial importancia en matemáticas e ingeniería.

Definición 4.12. Función Delta de Dirac

La función **delta de Dirac** se denota por $\delta(t - t_0)$ y se define como el siguiente límite⁴²:



La función delta de Dirac $\delta(t - t_0)$, no es una función *normal*, siendo un ejemplo de las denominadas **funciones generalizadas o distribuciones**.

Propiedades Básicas de la Función Delta de Dirac

1. $\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & t = t_0 \\ 0 & t \neq t_0 \end{cases}$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$

Relación entre Delta de Dirac y Escalón Unitario

Según la definición de $\delta(t - t_0)$:

$$\int_0^t \delta(x - a) dx = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases} = \mathcal{U}(t - a)$$

Derivando con respecto a t :

$$\delta(t - a) = \frac{d}{dt} \mathcal{U}(t - a)$$

Transformada de Laplace de Delta de Dirac

A pesar de que la función delta de Dirac no cumple las condiciones suficientes de existencia de la transformada de Laplace⁴³, sí existe su transformada.

Teorema 4.12. Transformada de Laplace de Delta de Dirac

$$\mathcal{L} \{ \delta(t - t_0) \} = e^{-st_0} \quad ; \quad t_0 > 0$$

$$\mathcal{L} \{ \delta(t) \} = 1 \quad ; \quad t_0 = 0$$

⁴²La función delta de Dirac también puede definirse como el límite de una sucesión de funciones gaussianas.

⁴³Ver la [Sección 4.3.4, página 99](#).

Demostración 4.12.

Expresando la función impulso unitario $\delta_a(t - t_0)$ a través del escalón unitario $\mathcal{U}(t - a)$ se tiene:

$$\delta_a(t - t_0) = \frac{1}{2a} \{ \mathcal{U}[t - (t_0 - a)] - \mathcal{U}[t - (t_0 + a)] \}$$

Por tanto:
$$\mathcal{L} \{ \delta_a(t - t_0) \} = \frac{1}{2a} \left[\frac{e^{-s(t_0-a)}}{s} - \frac{e^{-s(t_0+a)}}{s} \right] = e^{-st_0} \left[\frac{e^{sa} - e^{-sa}}{2sa} \right]$$

Al calcular el límite cuando $a \rightarrow 0$ se produce una indeterminación del tipo 0/0 que se resuelve fácilmente a través de la regla de L'Hôpital, obteniéndose:

$$\mathcal{L} \{ \delta(t - t_0) \} = \lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{L} \{ \delta_a(t - t_0) \} = e^{-st_0}$$

La función delta de Dirac se suele utilizar en problemas prácticos donde aparecen impulsos, aunque es necesario tener en cuenta la definición y propiedades vistas anteriormente.

Ejercicio 4.31. Encontrar la solución del siguiente PVI:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 3y = 5\delta(t - 2) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

correspondiente a un determinado caso de un peso suspendido por un muelle y sometido a un impulso a tiempo $t = 3$. La variable y mide el desplazamiento del objeto sobre su estado de equilibrio.

Tomando transformadas de Laplace a ambas partes de la ecuación se tiene:

$$\mathcal{L} \{ y'' + 2y' + 3y \} = \mathcal{L} \{ 5\delta(t - 2) \} \quad ; \quad \mathcal{L} \{ y'' \} + 2\mathcal{L} \{ y' \} + 3\mathcal{L} \{ y \} = 5\mathcal{L} \{ \delta(t - 2) \}$$

$$[s^2 Y(s) - sy(0) - sy'(0)] + 2sY(s) + 3Y(s) = 5e^{-2s} \quad ; \quad Y(s)(s^2 + 2s + 3) = 5e^{-2s}$$

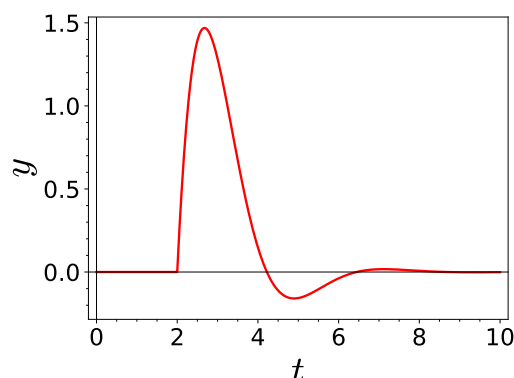
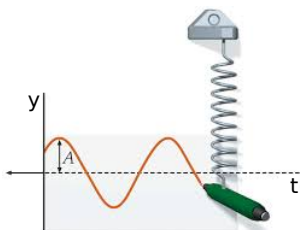
$$Y(s) = \frac{5e^{-2s}}{s^2 + 2s + 3} = \frac{5e^{-2s}}{(s + 1)^2 + 2}$$

Tomando transformada inversa de Laplace y teniendo en cuenta el *segundo teorema de traslación*⁴⁴:

$$\mathcal{L}^{-1} \{ Y(s) \} = y(t) = 5\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-2s}}{(s + 1)^2 + 2} \right\} \quad \xrightarrow[\mathcal{L}^{-1} \{ e^{-as} F(s) \} = f(t-a)\mathcal{U}(t-a)]{\mathcal{L} \{ e^{at} \sin bt \} = b / [(s-a)^2 + b^2]}$$

$$5 \left[\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \sin t\sqrt{2} \right]_{t \rightarrow t-2} \mathcal{U}(t-2) \quad ; \quad y(t) = \frac{5}{\sqrt{2}} e^{2-t} \sin[(t-2)\sqrt{2}] \mathcal{U}(t-2)$$

Vemos que desde $t = [0, 2)$ no hay desplazamiento, para $t = 2$ se produce el impulso. El resultado es un movimiento oscilatorio amortiguado.



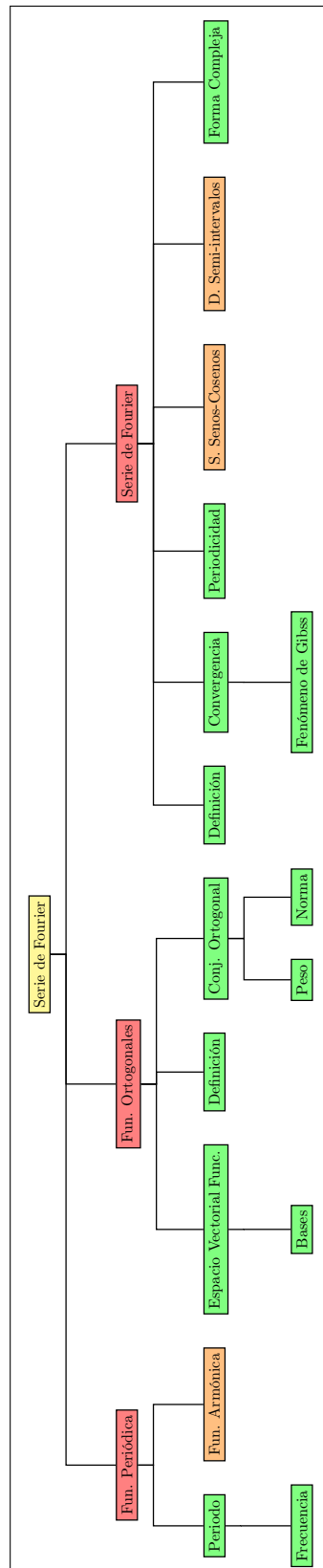
⁴⁴Ver el Teorema 4.4, página 104.



Series de Fourier

Contenido

5.1	Introducción	135
5.2	Funciones Periódicas	135
5.3	Espacios Vectoriales de Funciones	136
5.3.1	Funciones Ortogonales	137
5.3.2	Bases de Espacios Vectoriales de Funciones	138
5.4	Serie de Fourier	139
5.4.1	Convergencia de la Serie de Fourier	140
5.4.2	Fenómeno de Gibbs	143
5.4.3	Extensión Periódica de una Función	143
5.4.4	Series de Fourier de Senos y Cosenos	144
5.4.5	Desarrollo en Semi-intervalos. Series de Senos y Cosenos de una Función	146
5.4.6	Continuidad, Derivabilidad e Integrabilidad de las Series de Fourier	147
5.4.7	Forma Compleja de la Serie de Fourier	149



5.1. Introducción

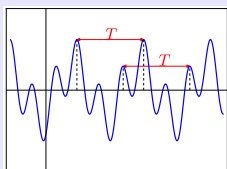
El *análisis de Fourier* fue introducido por el matemático y físico francés Joseph Fourier en 1822 en su *Teoría analítica del calor*, para tratar la solución de *problemas de valores frontera*¹ en la conducción del calor².

Las *series de Fourier* están formadas por términos seno y coseno que permiten representar funciones periódicas generales y constituyen una herramienta muy importante en la solución de problemas en los que intervienen *ecuaciones diferenciales ordinarias*³ y *parciales*⁴. Este tipo de series son, en cierto sentido, más generales que las *series de Taylor*⁵, ya que muchas funciones periódicas discontinuas pueden desarrollarse en *serie de Fourier*, pero no tienen representación en *serie de Taylor*.

La introducción a partir del siglo XIX de las series de Fourier y su representación en forma de *integrales de Fourier* supuso uno de los mayores avances en la física matemática y en sus aplicaciones en la ingeniería. Así, mientras que la *transformada de Laplace*⁶ es la transformada integral más importante en ingeniería, la segunda en importancia es la *transformada de Fourier*⁷. En la actualidad sus aplicaciones son muy amplias en diversos campos, como: sistemas lineales, comunicaciones, electrónica, óptica, redes eléctricas, etc.

5.2. Funciones Periódicas

Definición 5.1. Función Periódica



Una función $f(x)$ es **periódica** si satisface la relación:

$$f(x) = f(x + T) \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad T \in \mathbb{R}^+$$

donde la constante T se denomina **periodo**.

Si $f(x)$ es una función periódica definida en $\mathbb{R}$ con periodo T , cualquier valor kT con $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ también es un periodo de la función.

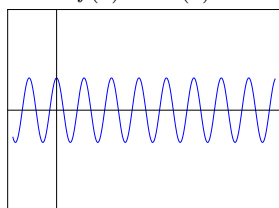
$$f(x + kT) = f(x) \quad ; \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Al menor de los periodos se denomina **periodo principal**.

Ejemplo 5.1. Periodicidad de las funciones

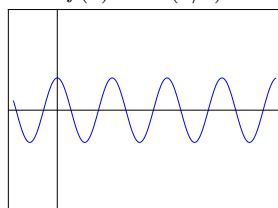
La función coseno es periódica con periodo 2π , sin embargo la combinación de funciones coseno puede cambiar el periodo e incluso generar funciones no periódicas como muestran los siguientes ejemplos⁸.

$$f(x) = \cos(x)$$



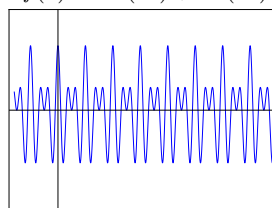
Periódica con $T = 2\pi$

$$f(x) = \cos(x/2)$$



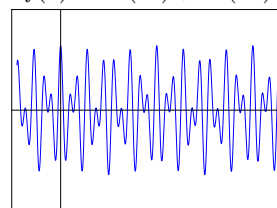
Periódica con $T = 4\pi$

$$f(x) = \cos(2x) + \cos(3x)$$



Periódica con $T = 2\pi$

$$f(x) = \cos(2x) + \cos(\pi x)$$



No periódica

Nota 5.1. Una función constante es una función periódica cuyo periodo es cualquier número real positivo.

¹Ver la Sección 1.3.5, página 15.

²Ver la Sección 7.4.2, página 188 y la Sección 7.6.1, página 218.

³Ver temas 1-5.

⁴Ver el Tema 7, página 175.

⁵Ver por ejemplo "Clases de Cálculo I para Ingeniería" en la Bibliografía, pág. 313.

⁶Ver el Tema 4, página 91.

⁷Este tema no será visto en este curso.

⁸Ver también la Sección ??, página ??.

Definición 5.2. Frecuencia

La **frecuencia** f de una función periódica con *periodo* T se define como:

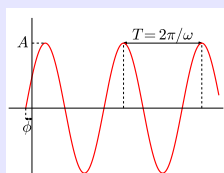
$$f = \frac{1}{T}$$

y determina el número de *periodos* (ciclos u oscilaciones completas) por unidad de tiempo. Se mide en *hercios* (Hz=ciclos/s).

También es muy utilizada la **frecuencia angular** ω definida como:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

que representa la rapidez de cambio de una magnitud angular, de modo que sus unidades son rad/s.

Definición 5.3. Función Armónica Simple

$$f(t) = A \operatorname{sen}(\phi + \omega t)$$

$$\begin{cases} A : & \text{amplitud} \\ \omega : & \text{frecuencia angular} \\ \omega t : & \text{fase} \\ \phi : & \text{fase inicial} \end{cases}$$

5.3. Espacios Vectoriales de Funciones

Recordamos de *Álgebra Lineal*⁹ que un **espacio vectorial** es una terna $(V, +, \cdot)$ formada por un conjunto de elementos¹⁰ V en el que se definen dos operaciones $+$ y $\cdot$ que cumplen una serie de propiedades (conmutativa, asociativa, distributiva, elemento neutro, unitario y opuesto, etc.).

Definición 5.4. Espacio Vectorial de Funciones

Un **espacio vectorial de funciones** es el conjunto formado por funciones reales $f_i(x)$ definidas en un intervalo $[a, b]$ junto con sus operaciones básicas y en el que se define el siguiente **producto interno**¹¹:

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx$$

⁹Ver por ejemplo "Clases de Álgebra Lineal para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 313.

¹⁰Denominados de forma general *vectores*.

¹¹El *producto interno* es una generalización del *producto escalar* entre vectores para espacios vectoriales generales. Un *espacio vectorial* real en el que se define un *producto interno* se le denomina *espacio euclídeo*, mientras que si el espacio vectorial es complejo se denomina *espacio unitario*.

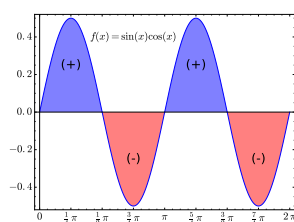
5.3.1. Funciones Ortogonales

Definición 5.5. Funciones Ortogonales

Dos funciones f_1 y f_2 pertenecientes a un *espacio vectorial de funciones* se dice que son **ortogonales** en un intervalo $[a, b]$ si su producto interno es nulo en ese intervalo.

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_a^b f_1(x)f_2(x) dx = 0$$

Ejemplo 5.2. Funciones ortogonales



Las funciones seno y coseno son ortogonales en $[0, 2\pi]$.

$$\int_0^{2\pi} \sin(x) \cos(x) dx = 0$$

Definición 5.6. Conjunto Ortogonal de Funciones

Un conjunto de funciones reales $\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots\}$ se dice que es **ortogonal** en un intervalo $[a, b]$ si para todo par de funciones distintas del conjunto se cumple:

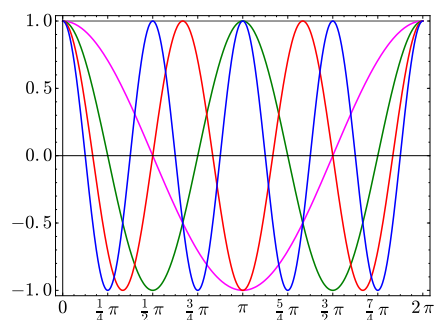
$$\langle f_i, f_j \rangle = \int_a^b f_i(x)f_j(x) dx = 0 \quad , \quad i \neq j$$

Definición 5.7. Ortogonalidad Respecto a Funciones Peso

Un conjunto de funciones reales $\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots\}$ se dice que es **ortogonal respecto a una función peso $w(x)$** si:

$$\int_a^b w(x)f_i(x)f_j(x) dx = 0 \quad , \quad i \neq j$$

Ejemplo 5.3. Conjunto ortogonal de funciones



El conjunto de funciones:

$$\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty} = \{1, \cos(x), \cos(2x), \dots\}$$

es ortogonal en $[-\pi, \pi]$, ya que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = 0 \quad \text{con } n \neq m$$

teniendo todas ellas además el mismo *periodo*¹².

¹²Ver la Sección 5.2, página 135.

Definición 5.8. Norma de una Función

La **norma** de una función $f(x)$ pertenecientes a un *espacio vectorial de funciones* definido en $[a, b]$ se define como:

$$\|f(x)\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$$

Al valor $\|f(x)\|^2$ se denomina **norma cuadrada** de $f(x)$.

Definición 5.9. Conjunto Ortonormal de Funciones

Un conjunto de funciones reales $\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots\}$ se dice que es **ortonormal** en un intervalo $[a, b]$ si es un *conjunto ortogonal* y además todas sus funciones tienen norma unidad en ese intervalo.

Ejercicio 5.1. Obtener un conjunto ortonormal de funciones en $[-\pi, \pi]$ a partir del conjunto ortogonal:

$$\{1, \cos(x), \cos(2x), \dots\}$$

Hay que *normalizar* cada función dividiéndola por su norma en ese intervalo.

$$\|1\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx} = \sqrt{2\pi} \quad ; \quad \|\cos(nx)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx} = \sqrt{\pi}$$

Por tanto el conjunto ortonormal de funciones en ese intervalo es:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

5.3.2. Bases de Espacios Vectoriales de Funciones

Recordamos que en el contexto del Álgebra Lineal, si tenemos una **base ortogonal**¹³ $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ de un subespacio vectorial $V \subseteq \mathbb{R}^n$ de dimensión **finita** n , entonces para cualquier $\vec{v} \in V$ se tiene:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n c_i \vec{u}_i = c_1 \vec{u}_1 + \dots + c_n \vec{u}_n \quad ; \quad c_i = \frac{\vec{u}_i \cdot \vec{v}}{\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i} = \frac{\vec{u}_i \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}_i\|^2}$$

donde $\vec{u}_i \cdot \vec{v}$ es el *producto escalar*¹⁴ de los vectores. Si además la base es **ortonormal**, cumpliéndose que $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i = 1$ y por tanto $\|\vec{u}_i\| = 1$, se tiene:

$$c_i = \vec{u}_i \cdot \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^n (\vec{u}_i \cdot \vec{v}) \vec{u}_i = (\vec{u}_1 \cdot \vec{v}) \vec{u}_1 + \dots + (\vec{u}_n \cdot \vec{v}) \vec{u}_n$$

Vamos a extender estos conceptos a los *espacios vectoriales de funciones*.

En el caso de *espacios vectoriales de funciones* con dimensión infinita¹⁵, la base debe ser un **conjunto completo**, es decir que la única función ortogonal a todas las funciones de la base sea la función nula.

¹³Una base de un subespacio vectorial V de dimensión n es un conjunto de n vectores del subespacio linealmente independientes. Para que la base sea ortogonal, sus vectores tienen que formar un conjunto ortogonal (producto escalar nulo entre vectores distintos).

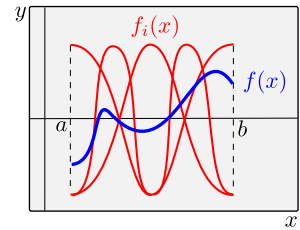
¹⁴Un tipo particular de *producto interno*.

¹⁵Es decir que están formados por un conjunto de infinitas funciones, como por ejemplo el mostrado en el **Ejercicio 5.1**, página 138. Los espacios vectoriales de dimensión infinita (denominados *espacios de Hilbert*) a pesar de tener analogías con el caso finito, presenta diferencias relevantes que no se analizarán aquí.

Sea un conjunto infinito de *funciones ortogonales*¹⁶ en un intervalo $[a, b]$ que forman un *conjunto completo*:

$$\{f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots\}$$

y sea una función $f(x)$ definida en $[a, b]$.



Bajo determinadas condiciones que se verán posteriormente¹⁷ se tiene:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i f_i(x) = c_0 f_0(x) + c_1 f_1(x) + \dots \quad ; \quad c_i = \frac{\langle f_i, f \rangle}{\|f_i\|^2} = \frac{\int_a^b f_i(x) f(x) dx}{\int_a^b f_i^2(x) dx}$$

Nota 5.2. Notar la analogía en estas relaciones entre las funciones y los vectores del Álgebra Lineal.

Si $\{f_i(x)\}$ es ortogonal respecto a una *función peso*¹⁸ $w(x)$ entonces:

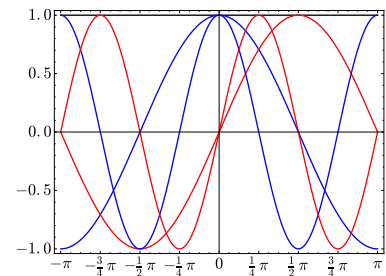
$$c_i = \frac{\int_a^b w(x) f_i(x) f(x) dx}{\int_a^b w(x) f_i^2(x) dx}$$

5.4. Serie de Fourier

El siguiente conjunto infinito de funciones:

$$\{\cos nx, \sin nx\} = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}$$

es *ortogonal* en el intervalo $[-\pi, \pi]$, y como consecuencia de la periodicidad de las funciones trigonométricas, es *ortogonal* en cualquier intervalo de longitud 2π .



Teniendo en cuenta:

$$\begin{aligned} \sin \alpha \pm \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad ; \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cos(nx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} 1 \sin(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx = 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m \end{cases} \quad ; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m \end{cases} \end{aligned}$$

De igual forma, el conjunto:

$$\left\{ \cos \frac{n\pi x}{L}, \sin \frac{n\pi x}{L} \right\} = \left\{ 1, \cos \frac{\pi x}{L}, \sin \frac{\pi x}{L}, \cos \frac{2\pi x}{L}, \sin \frac{2\pi x}{L}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{L}, \sin \frac{n\pi x}{L}, \dots \right\}$$

donde $L \in \mathbb{R} - \{0\}$ es ortogonal en el intervalo $[-L, L]$, ya que:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L 1 \cos \frac{n\pi x}{L} dx &= \int_{-L}^L 1 \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = 0 \quad ; \quad \int_{-L}^L 1 dx = 2L \\ \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ L & \text{si } n = m \end{cases} \quad ; \quad \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ L & \text{si } n = m \end{cases} \end{aligned}$$

¹⁶Ver la Definición 5.5, página 137.

¹⁷Ver la Sección 5.4.1, página 140.

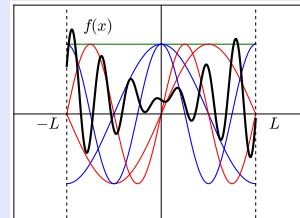
¹⁸Ver la Definición 5.7, página 137.

Teniendo en cuenta la **Sección 5.3.2, página 138**, este conjunto ortogonal de funciones puede ser utilizado para descomponer funciones generales en términos de senos y cosenos.

Definición 5.10. Serie de Fourier

La serie de Fourier de una función $f(x)$ definida en el intervalo $(-L, L)$ está dada por¹⁹:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$



donde los denominados **coeficientes de Fourier** a_i y b_i vienen dados por:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad ; \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad ; \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

El valor aproximado ($\sim$) del desarrollo vendrá dado por las condiciones de convergencia que se verán a continuación.

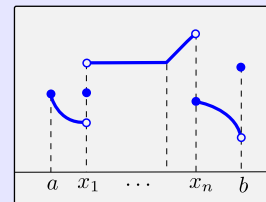
5.4.1. Convergencia de la Serie de Fourier

Vamos a empezar por una definición.

Definición 5.11. Función de Clase $\mathcal{C}^1$ a Trozos

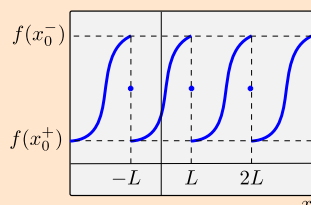
Se dice que una función $f(x)$ es de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos en $[a, b]$ si se puede dividir el intervalo en subintervalos $[a, b] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_n, b]$ de forma que:

- $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas en cada subintervalo (x_k, x_{k+1}) .
- Los límites laterales de $f(x)$ y $f'(x)$ en cada punto x_k existen y son finitos.



Teorema 5.1. Convergencia de la Serie de Fourier

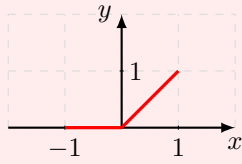
Si $f(x)$ es de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos en $(-L, L)$, entonces la serie de Fourier de $f(x)$ en ese intervalo converge en todos los puntos continuos del dominio, y en los puntos de discontinuidad x_0 converge al valor:



$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \begin{cases} f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \\ f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \end{cases}$$

¹⁹El término a_0 suele aparecer dividido por 2 por conveniencia, para que la fórmula posterior donde aparece su cálculo tenga una forma similar al del resto de coeficientes a_n y b_n .

Ejercicio 5.2. Obtener la serie de Fourier de la siguiente función:



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

$$\bullet a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 0 dx + \int_0^1 x dx = 0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \bullet a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-1}^1 f(x) \cos(n\pi x) dx = \int_{-1}^0 0 dx + \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx = \\ &= \frac{1}{n^2\pi^2} [n\pi x \sin(n\pi x) + \cos n\pi x]_0^1 = \begin{cases} n \text{ impar} : \frac{1}{n^2\pi^2} (0 - 1 - 0 - 1) = \boxed{-\frac{2}{n^2\pi^2}} \\ n \text{ par} : \frac{1}{n^2\pi^2} (0 + 1 - 0 - 1) = \boxed{0} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-1}^1 f(x) \sin(n\pi x) dx = \int_{-1}^0 0 dx + \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx = \\ &= \frac{1}{n^2\pi^2} [-n\pi x \cos(n\pi x) + \sin n\pi x]_0^1 = \begin{cases} n \text{ impar} : \frac{1}{n^2\pi^2} [n\pi - 0 + 0 - 0] = \boxed{\frac{1}{n\pi}} \\ n \text{ par} : \frac{1}{n^2\pi^2} [-n\pi + 0 + 0 - 0] = \boxed{-\frac{1}{n\pi}} \end{cases} \end{aligned}$$

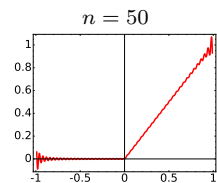
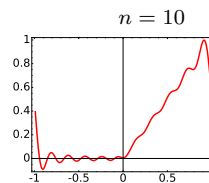
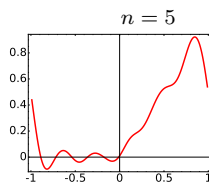
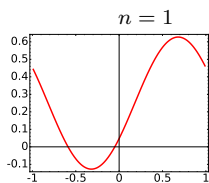
Por tanto, teniendo en cuenta los términos pares e impares se tiene:

$$f(x) \sim \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{(2n-1)^2\pi^2} \cos[(2n-1)\pi x] + \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin(n\pi x) \right)$$

donde los primeros términos son:

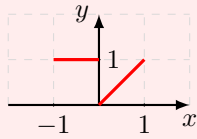
$$f(x) \sim \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \cos(\pi x) + \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) - \frac{2}{9\pi^2} \cos(3\pi x) - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x) - \dots$$

En las siguientes gráficas se muestra la evolución de la convergencia en función de n .



En los extremos del intervalo se observan oscilaciones consecuencia del *fenómeno de Gibbs* (ver la [Sección 5.4.2, página 143](#)).

Ejercicio 5.3. Obtener la serie de Fourier de la siguiente función:



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

$$\bullet a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 1 dx + \int_0^1 x dx = [x]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 1 + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$$\bullet a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-1}^1 f(x) \cos(n\pi x) dx = \int_{-1}^0 \cos(n\pi x) dx + \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx = \left[\frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \right]_{-1}^0 + \frac{1}{n^2\pi^2} [n\pi x \sin(n\pi x) + \cos n\pi x]_0^1 =$$

$$\begin{cases} n \text{ impar} : (0 - 0) + \frac{1}{n^2\pi^2} (0 - 1 - 0 - 1) = \boxed{-\frac{2}{n^2\pi^2}} \\ n \text{ par} : (0 - 0) + \frac{1}{n^2\pi^2} (0 + 1 - 0 - 1) = \boxed{0} \end{cases}$$

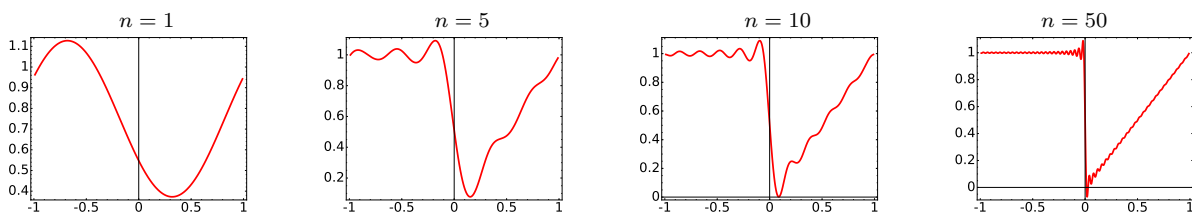
$$\bullet b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-1}^1 f(x) \sin(n\pi x) dx = \int_{-1}^0 \sin(n\pi x) dx + \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx = \left[-\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x \right]_{-1}^0 + \frac{1}{n^2\pi^2} [-n\pi x \cos(n\pi x) + \sin n\pi x]_0^1 =$$

$$\begin{cases} n \text{ impar} : \left[-\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{n\pi} \right] + \frac{1}{n^2\pi^2} [n\pi - 0 + 0 - 0] = -\frac{2}{n\pi} + \frac{1}{n\pi} = \boxed{\frac{-1}{n\pi}} \\ n \text{ par} : \left[-\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right] + \frac{1}{n^2\pi^2} [-n\pi + 0 + 0 - 0] = \boxed{\frac{-1}{n\pi}} \end{cases}$$

Por tanto, teniendo en cuenta los términos pares e impares se tiene:

$$f(x) \sim \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{(2n-1)^2\pi^2} \cos[(2n-1)\pi x] - \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) \right)$$

En las siguientes gráficas se muestra la evolución de la convergencia en función de n .



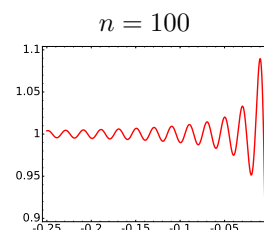
Notar que en $x = 0$ la función presenta una discontinuidad, de forma que la serie de Fourier converge en ese punto al valor medio del salto, en este caso $1/2$. Además en las cercanías de este punto de discontinuidad aparece también el *fenómeno de Gibbs*, como se explica en la siguiente sección.

5.4.2. Fenómeno de Gibbs

La serie de Fourier no converge uniformemente en las cercanías de un punto de discontinuidad, incluso para desarrollos con un número de términos tendiendo a infinito, produciéndose variaciones de aproximadamente un 10% del salto de discontinuidad y pudiendo llegar al 18%.

Este fenómeno ocurre cada vez que las señales tienen *discontinuidades de salto* (generalmente en los extremos) y siempre estarán presentes cuando la señal tiene oscilaciones fuertes.

En la gráfica se muestra una ampliación de la serie de Fourier cerca del salto que se produce en el [Ejercicio 5.3, página 142](#) para $n = 100$.



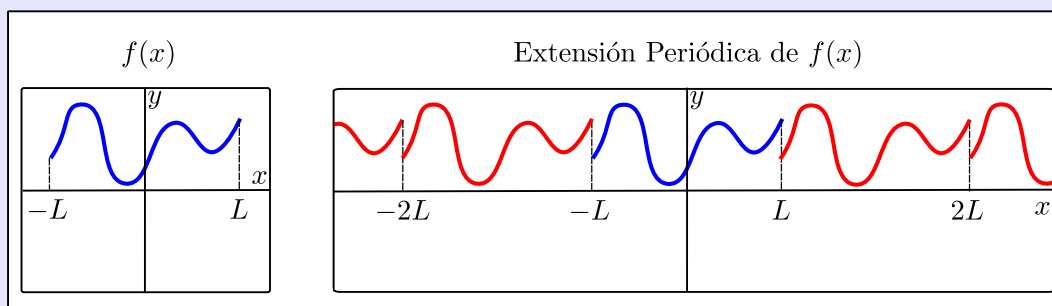
5.4.3. Extensión Periódica de una Función

Como hemos visto²⁰, la serie de Fourier de una determinada función $f(x)$ aproxima²¹ a la misma en un intervalo $(-L, L)$. Mientras que la serie de Fourier es una función periódica con periodo $2L$, la función original $f(x)$ no necesariamente lo es, por ello la serie de Fourier realmente converge a la extensión periódica de la función $f(x)$.

Definición 5.12. Extensión Periódica de una Función

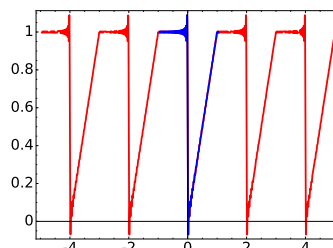
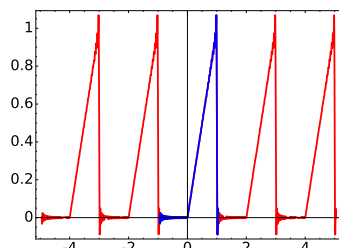
Dada una función $f(x)$ definida en un intervalo $(-L, L)$ se define su **extensión periódica** a una nueva función $F(x)$ periódica con periodo $2L$ definida de la siguiente forma:

$$F(x + 2kL) = f(x) \quad , \quad \forall x \in (-L, L) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$



Ejemplo 5.4. Extensión Periódica

En las siguientes gráficas se muestran las series de Fourier (en rojo) de los ejercicios [Ejercicio 5.2, página 141](#) y [Ejercicio 5.3, página 142](#) en una región extendida del intervalo $(-1, 1)$ donde está definidas las funciones originales.



Se puede observar como se obtienen series periódicas en todo $\mathbb{R}$ con periodo 2.

²⁰Ver la [Definición 5.10, página 140](#).

²¹Ver el [Teorema 5.1, página 140](#).

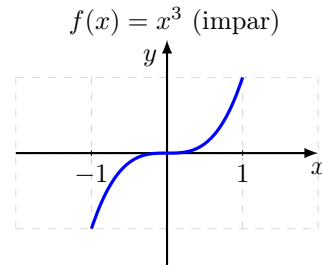
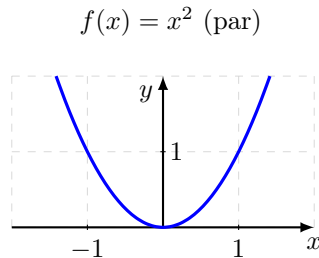
5.4.4. Series de Fourier de Senos y Cosenos

En el caso de que la función $f(x)$ sea **par** o **impar**,

$$f(x) \text{ par} \iff f(-x) = f(x) \quad ; \quad f(x) \text{ impar} \iff f(-x) = -f(x)$$

la serie de Fourier de la función se simplifica, debido a las propiedades de este tipo de funciones.

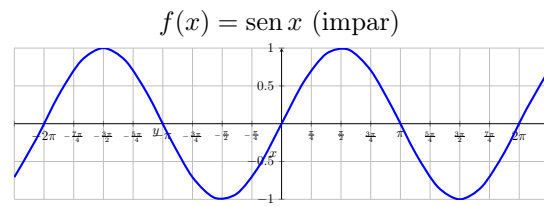
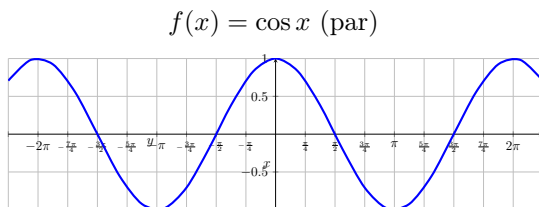
- Las funciones pares son simétricas respecto al eje y , mientras que las funciones impares son simétricas respecto al origen.



- El producto de funciones pares es una función par.
- El producto de funciones impares es una función par.
- El producto de una función par por otra impar es una función impar.
- La suma y resta de funciones pares es una función par.
- La suma y resta de funciones impares es una función impar.
- Propiedades en la integración de funciones pares e impares:

$$f(x) \text{ par: } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \quad ; \quad f(x) \text{ impar: } \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

Tener en cuenta que la función coseno es par mientras que la función seno es impar.



Serie de Fourier de Cosenos

En la serie de Fourier de una función **par** solo aparecen términos coseno.

$$\left. \begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L \underbrace{f(x)}_{\text{par}} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx \\
 a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L \underbrace{f(x)}_{\text{par}} \underbrace{\cos \frac{n\pi x}{L}}_{\text{par}} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\
 b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L \underbrace{f(x)}_{\text{par}} \underbrace{\sin \frac{n\pi x}{L}}_{\text{impar}} dx = 0
 \end{aligned} \right\} \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

Serie de Fourier de Senos

En la serie de Fourier de una función **impar** solo aparecen términos seno.

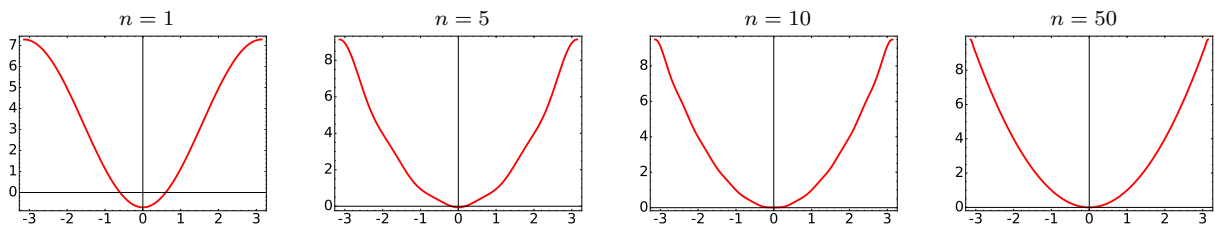
$$\boxed{f(x) \text{ impar}} \left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \underbrace{f(x)}_{\text{impar}} dx = 0 \\ a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \underbrace{f(x)}_{\text{impar}} \underbrace{\cos \frac{n\pi x}{L}}_{\text{par}} dx = 0 \\ b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \underbrace{f(x)}_{\text{impar}} \underbrace{\sin \frac{n\pi x}{L}}_{\text{impar}} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \end{array} \right\} \boxed{f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}}$$

Ejercicio 5.4. Obtener la serie de Fourier de la siguiente función.

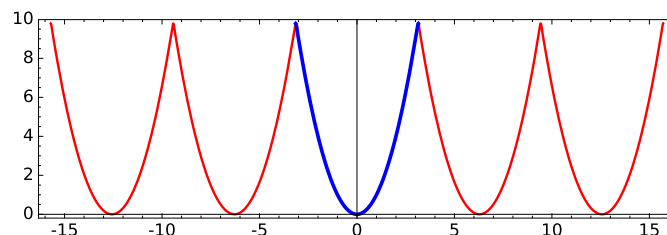
$$f(x) = x^2 \quad ; \quad -\pi < x < \pi$$

Al ser una función par, se tiene:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^{\pi} = \boxed{\frac{2\pi^2}{3}} \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi n^3} [2nx \cos(nx) + (n^2 x^2 - 2) \sin(nx)]_0^{\pi} = \\ &= \frac{2}{\pi n^3} (-1)^n 2n\pi = \boxed{(-1)^n \frac{4}{n^2}} \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \boxed{0} \\ x^2 &\sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx) \end{aligned}$$

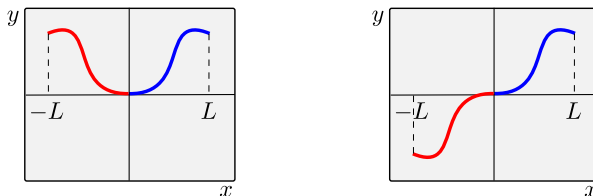


En este caso como no hay puntos de discontinuidad no se presenta el fenómeno de Gibbs en todo $\mathbb{R}$. En la siguiente gráfica se muestra la serie de Fourier de la función x^2 para $n = 50$ en el intervalo $[-5\pi, 5\pi]$.



5.4.5. Desarrollo en Semi-intervalos. Series de Senos y Cosenos de una Función

También se pueden obtener la serie Fourier de una función en un intervalo $(0, L)$, en lugar de un intervalo centrado en el origen $(-L, L)$. Para ello se puede completar la parte izquierda $(-L, 0)$ con una función arbitraria. Lo más sencillo es completar con funciones que la transformen en una función par o impar, de forma que sus respectivas series sean de senos o cosenos. La elección dependerá de cada caso particular.

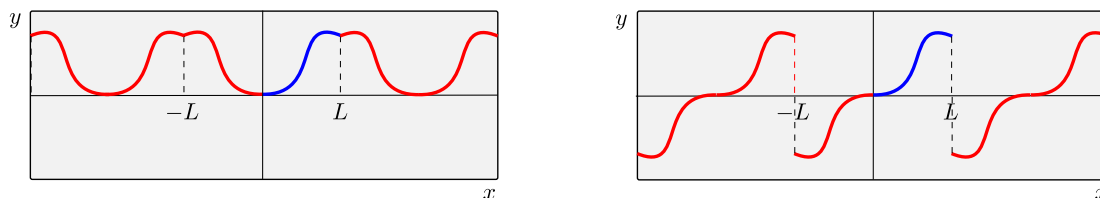


- Si se elige la forma par, la serie resultante se denomina **serie de Fourier de cosenos de $f(x)$** en el intervalo $[0, L]$ y la nueva función resultante se denomina **extensión par de $f(x)$** , que será continua en todo $\mathbb{R}$ (figura abajo izquierda).

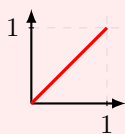
$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \quad ; \quad a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx \quad ; \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

- Si se elige la forma impar, la serie resultante se denomina **serie de Fourier de senos de $f(x)$** en el intervalo $[0, L]$ y la nueva función resultante se denomina **extensión impar de $f(x)$** , apareciendo puntos de discontinuidad (figura abajo derecha).

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad ; \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$



Ejercicio 5.5. Obtener la serie de senos y la serie de cosenos de la siguiente función.



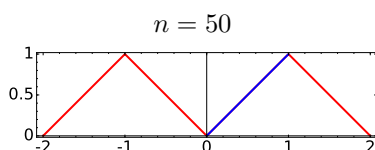
$$f(x) = x \quad ; \quad 0 < x < 1$$

a) Serie de cosenos

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx = \frac{2}{1} \int_0^1 x dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 1$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 2 \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ -\frac{4}{\pi^2 n^2} & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$b_n = 0$$

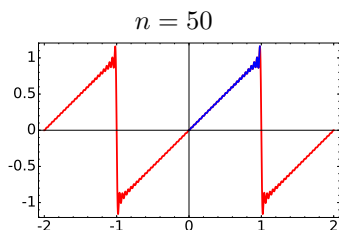


$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2n-1)^2} \cos[(2n-1)\pi x]$$

b) Serie de senos

$$a_0 = 0 \quad ; \quad a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = 2 \int_0^1 x \operatorname{sen}(n\pi x) dx = \begin{cases} -\frac{2}{\pi n} & n \text{ par} \\ \frac{2}{\pi n} & n \text{ impar} \end{cases}$$



$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{\pi n} \operatorname{sen}(n\pi x)$$

5.4.6. Continuidad, Derivabilidad e Integrabilidad de las Series de Fourier

Como consecuencia de la convergencia de las series de Fourier (en sus diversas versiones: completa, de senos y de cosenos) se obtienen las siguientes propiedades sobre la continuidad, derivabilidad e integrabilidad de las series Fourier.

Continuidad de las Series de Fourier

- **Series de Fourier:** Si $f \in \mathcal{C}^1$ a trozos en $[-L, L]$, entonces su serie de Fourier es continua si y solo si f es continua en $[-L, L]$ y $f(-L) = f(L)$.
- **Series de Senos:** Si $f \in \mathcal{C}^1$ a trozos en $[0, L]$, entonces su serie de Fourier de senos es continua si y solo si f es continua en $[0, L]$ y $f(0) = f(L) = 0$.
- **Series de Cosenos:** Si $f \in \mathcal{C}^1$ a trozos en $[0, L]$, entonces su serie de Fourier de cosenos es continua si y solo si f es continua en $[0, L]$.

Notar que la que menos requerimientos necesita para la continuidad es la serie de cosenos y la que más la serie de senos.

Derivabilidad de las Series de Fourier

- **Series de Fourier:** Si $f \in \mathcal{C}^1$ a trozos y su serie de Fourier es continua entonces ésta se puede derivar término a término, y la serie obtenida es la serie de Fourier de $f'(x)$.
- **Series de Senos:** Si $f \in \mathcal{C}^1$ a trozos en $[0, L]$, entonces su serie de Fourier de senos se puede derivar término a término si y solo si f es continua en $[0, L]$ y $f(0) = f(L) = 0$. En estos casos la serie obtenida es la serie de Fourier de Cosenos de $f'(x)$.
- **Series de Cosenos:** Si $f \in \mathcal{C}^1$ a trozos en $[0, L]$, entonces su serie de Fourier de cosenos se puede derivar término a término si y solo si f es continua en $[0, L]$. En estos casos la serie obtenida es la serie de Fourier de Senos de $f'(x)$.

Notar que la derivada de la serie senos de una función en $[0, L]$ si $f(0) \neq f(L)$ (que suele ser lo más habitual) no corresponde con la serie de la derivada de la función, que como hemos visto, corresponde con la serie de cosenos de $f'(x)$ en $[0, L]$.

Vamos a obtener una fórmula que permite obtener la forma apropiada de la serie de $f'(x)$, a partir de la serie de senos de $f(x)$ en los casos $f(0) \neq f(L)$, dada por:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad ; \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

La derivada punto por punto de esta expresión sería:

$$\frac{n\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

Pero como hemos visto, ésta no es la serie de la función derivada $f'(x)$ si no cumple $f(0) = f(L) = 0$. La verdadera serie de la derivada corresponde con la serie de cosenos de $f'(x)$. La calculamos:

$$f'(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \quad ; \quad a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f'(x) dx \quad ; \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad (5.1)$$

Calculamos los coeficientes:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{L} \int_0^L f'(x) dx = \frac{2}{L} f(x) \Big|_0^L = \frac{2}{L} [f(L) - f(0)] \\ a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \cos \frac{n\pi x}{L} \quad , \quad du = -\frac{n\pi}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \\ dv = f'(x) dx \quad , \quad v = f(x) \end{array} \right\} = \\ &= \frac{2}{L} \left[f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \right]_0^L + \frac{2}{L} \frac{n\pi}{L} \underbrace{\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx}_{b_n \frac{L}{2}} = \frac{2}{L} [f(L) \cos(n\pi) - f(0)] + \frac{n\pi}{L} b_n = \frac{2}{L} [(-1)^n f(L) - f(0)] + \frac{n\pi}{L} b_n \end{aligned}$$

Por tanto, sustituyendo en (5.1):

$$f'(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} = \underbrace{\frac{1}{L} [f(L) - f(0)]}_{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{2}{L} [(-1)^n f(L) - f(0)] + \frac{n\pi}{L} b_n \right]}_{a_n} \cos \frac{n\pi x}{L}$$

Derivación de la Serie de Fourier respecto a un Parámetro

En muchos casos prácticos²² se necesita derivar series de Fourier respecto a variables (*parámetros*²³) que no aparecen en los términos de la serie. En el siguiente teorema se explica la forma de hacerlo.

Teorema 5.2. Derivación de la Serie de Fourier respecto a un Parámetro

Sea una función $u = u(x, t)$ continua en $[-L, L] \times [0, \infty)$ tal que $\partial u / \partial t \in \mathcal{C}^1$ a trozos como función de $x \in [-L, L]$ para cada $t \in [0, \infty)$, entonces la serie de Fourier de $u(x, t)$ dada por:

$$Su(x, t) = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

se puede derivar término a término con respecto al *parámetro* t , obteniendo:

$$\frac{\partial}{\partial t} Su(x, t) = a'_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(t) \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b'_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

²²Ver el Tema 7, página 175.

²³Ver la Definición 1.14, página 13.

Integrabilidad de las Series de Fourier

Si $f \in \mathcal{C}^1$ a trozos, entonces sus tres series de Fourier se pueden integrar término a término, y el resultado es una serie que converge para todo $x \in [-L, L]$ a la integral de $f(x)$.

Notar que la serie obtenida no siempre es una serie de Fourier. Por ejemplo, si $f \in \mathcal{C}^1$ a trozos en $[-L, L]$ con serie de Fourier:

$$Sf(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Su integración término a término da lugar a:

$$\begin{aligned} \int_L^x Sf(r) dr &= a_0 r \Big|_{-L}^x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n L}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^x = \\ &= a_0(x+L) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n L}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi x}{L} - \underbrace{\sin(-n\pi)}_0 \right) \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n L}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi x}{L} - \underbrace{\cos(-n\pi)}_{(-1)^n} \right) \right] \\ &= a_0(x+L) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n L}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n L}{n\pi} \left[(-1)^n - \cos \frac{n\pi x}{L} \right] \end{aligned}$$

Esta serie solo es de tipo Fourier si $a_0 = 0$.

5.4.7. Forma Compleja de la Serie de Fourier

Sea la *serie de Fourier* de una función periódica $f(x)$ con periodo $T = 2L$,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nx}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{T} \right)$$

donde los denominados *coeficientes de Fourier* a_i y b_i vienen dados por:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad ; \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad ; \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (5.2)$$

Definiendo la *frecuencia angular*²⁴ :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{L} \quad \Rightarrow \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \sin(n\omega_0 x)]$$

Usando ahora la definición de coseno y seno general²⁵:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(n\omega_0 x) = \frac{e^{in\omega_0 x} + e^{-in\omega_0 x}}{2} \\ \sin(n\omega_0 x) = \frac{e^{in\omega_0 x} - e^{-in\omega_0 x}}{2i} \end{array} \right. \Rightarrow f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{e^{in\omega_0 x} + e^{-in\omega_0 x}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega_0 x} - e^{-in\omega_0 x}}{2i} \right]$$

Teniendo en cuenta que $1/i = -i$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\omega_0 x} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\omega_0 x} \right]$$

²⁴La *frecuencia* $f = 1/T$ se mide en Hz = ciclos/seg donde T es el *periodo* (tiempo que tarda un ciclo), mientras que la *frecuencia angular* $\omega_0 = 2\pi/T$ se mide en rad/seg, cumpliéndose $\omega_0 = 2\pi f$. El subíndice 0 se pone para diferenciarla de la variable ω que se usará en la definición de la *transformada de Fourier* del Tema ??, página ??.

²⁵Estas fórmulas se obtienen fácilmente a partir de la *fórmula de Euler* $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, dando lugar a $\cos(z) = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ y $\sin(z) = (e^{iz} - e^{-iz})/(2i)$, generalizando las funciones trigonométricas a valores complejos. Ver por ejemplo "Clases de Álgebra Lineal para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 313.

definiendo:

$$\begin{cases} c_0 = a_0/2 \\ c_n = (a_n - ib_n)/2 \\ c_{-n} = (a_n + ib_n)/2 \end{cases} \implies f(x) \sim c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\omega_0 x} + c_{-n} e^{-in\omega_0 x}) \quad (5.3)$$

Reemplazando²⁶ n por $-n$ en el segundo sumatorio y teniendo en cuenta que $a_{-n} = a_n$, $b_{-n} = -b_n$ y $b_0 = 0$ se tiene finalmente,

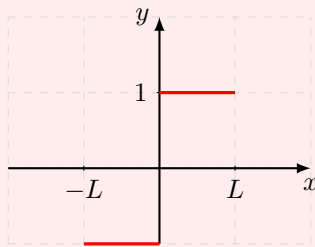
$$f(x) \sim c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 x} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{in\omega_0 x} = \boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 x}}$$

se obtiene la denominada **forma compleja de la serie de Fourier**, donde los coeficientes c_n se pueden obtener mediante las fórmulas de la **Ecuación (5.3)** y **Ecuación (5.2)** o bien directamente de la siguiente forma:

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2L} \left[\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx - i \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right] = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left(\cos \frac{n\pi x}{L} - i \sin \frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx} \quad ; \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ejercicio 5.6. Encontrar la forma compleja de la serie de Fourier de la siguiente función.



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < L \\ -1 & \text{si } -L < x < 0 \end{cases}$$

Notar que en este caso $T = 2L$ y $\omega_0 = 2\pi/T = \pi/L$. Calculamos los coeficientes:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx = \frac{1}{2L} \left[\int_0^L e^{-in\pi x/L} dx - \int_{-L}^0 e^{-in\pi x/L} dx \right] = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{-in\pi x/L} dx = \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L e^{-in\pi x/L} dx = \frac{-1}{in\pi} \left[e^{-in\pi x/L} \right]_0^L = \frac{i}{n\pi} (e^{-in\pi} - 1) = \frac{i}{n\pi} [\cos(n\pi) - \cancel{i \sin(n\pi)} - 1] = \\ &= \frac{i}{n\pi} [(-1)^n - 1] = \frac{-2i}{(2n+1)\pi} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Y por tanto:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 x} = \boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-2i}{(2n+1)\pi} e^{in\omega_0 x}} =$$

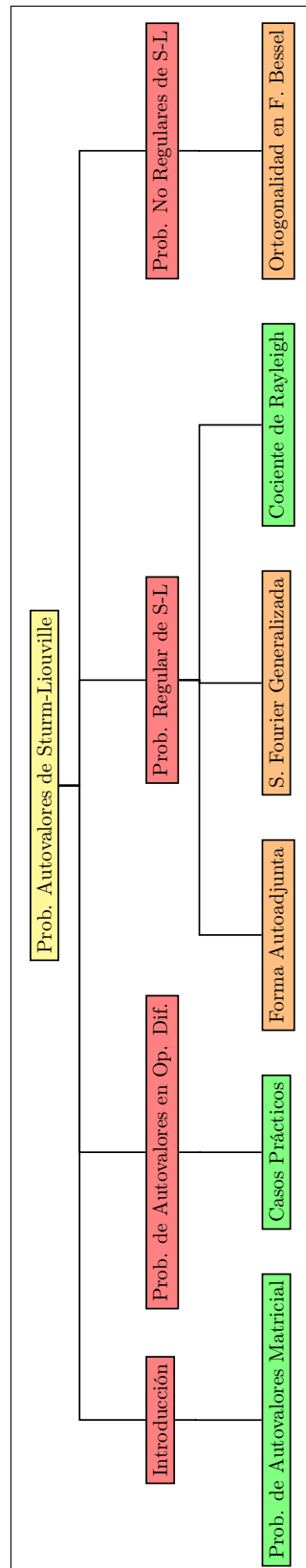
$$= \boxed{\frac{2i}{\pi} \left(\dots + \frac{1}{5} e^{-5i\omega_0 x} + \frac{1}{3} e^{-3i\omega_0 x} + e^{-i\omega_0 x} - e^{i\omega_0 x} - \frac{1}{3} e^{3i\omega_0 x} - \frac{1}{5} e^{5i\omega_0 x} - \dots \right)}$$

²⁶Se puede hacer el mismo cambio de variable en el primer sumatorio dando como resultado una exponencial negativa y posteriormente en la fórmula del coeficiente c_n daría lugar a una exponencial positiva. Ambos casos son equivalentes y se pueden de ver las dos formas en la bibliografía.

Problemas de Autovalores de Sturm-Liouville

Contenido

6.1	Introducción: Problema de Autovalores Matricial	153
6.2	Problema de Autovalores en Operadores Diferenciales	153
6.2.1	Casos Prácticos	153
6.3	Problema Regular de Sturm-Liouville	160
6.3.1	Forma Autoadjunta	163
6.3.2	Serie de Fourier Generalizada	164
6.3.3	Cociente de Rayleigh	167
6.4	Problemas No Regulares de Sturm-Liouville	169
6.4.1	Ortogonalidad en las Funciones de Bessel	171
6.4.2	Serie de Fourier-Bessel	172



6.1. Introducción: Problema de Autovalores Matricial

Recordamos de álgebra lineal¹ que dada una matriz cuadrada $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se definen sus **autovalores** o **valores propios** $\lambda \in \mathbb{C}$ y **autovectores** o **vectores propios** $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$ asociados, a aquellos que verifican:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad ; \quad \vec{v} \neq \vec{0}$$

El cálculo de los *autovalores* da lugar a una ecuación polinómica de n soluciones dada por:

$$|A - \lambda I| = 0 \quad \implies \quad \lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

El conjunto de valores λ_i se denomina *espectro* de la matriz A . Para cada uno de los *autovalores* λ_i existe un subespacio vectorial asociado (*autoespacio*) de al menos dimensión² 1 que se determina calculando $\ker(A - \lambda_i I)$:

$$(A - \lambda_i I)\vec{v}_i = \vec{0}$$

A los vectores de una base del *autoespacio* asociado a cada *autovalor* λ_i se denominan *autovectores* asociados a ese *autovalor*.

Este proceso se puede generalizar para *operadores diferenciales*³.

6.2. Problema de Autovalores en Operadores Diferenciales

Definición 6.1. Problema de Autovalores en Operadores Diferenciales

Sea L un *operador diferencial lineal*⁴ de orden n y $u(x) \in \mathcal{C}^k$ una función no nula definida en un intervalo $[a, b]$, que satisface ciertas condiciones frontera⁵. Se dice que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un **autovalor** o **valor propio** del operador L con **autofunción** o **función propia** asociada $u(x)$ si se verifica el problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} Lu = \lambda u \\ + \\ \text{Condicions Frontera} \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{ll} L & \text{Operador Diferencial Lineal} \\ \lambda \in \mathbb{C} & \text{Autovalor o Valor Propio de } L \\ u(x) \neq 0 & \text{Autofunción o Fun. Propia de } L \end{array} \right.$$

Nota 6.1. Es fácil comprobar que si $u(x)$ es una autofunción asociada al autovalor λ entonces $cu(x)$, siendo c una constante no nula, también será *autofunción* asociada a λ , por tanto, basta con que las *autofunciones* se definan con una única constante multiplicativa.

Las condiciones frontera más comunes para una función u definida en $[a, b]$ son:

- **Condiciones de Dirichlet:** $u(a) = u(b) = 0$.
- **Condiciones de Neumann:** $u'(a) = u'(b) = 0$.
- **Condiciones Periódicas:** $u(a) = u(b)$, $u'(a) = u'(b)$.

Veamos ejemplos de problemas de autovalores de un operador diferencial sencillo.

6.2.1. Casos Prácticos

Vamos a encontrar los autovalores y autofunciones del operador diferencial $L = -D^2 \equiv -\frac{d^2}{dx^2}$.

Buscamos *autovalores* $\lambda \in \mathbb{C}$ y funciones no nulas u definida en $[a, b]$ sujeta a ciertas condiciones frontera.

$$Lu = \lambda u \quad ; \quad -\frac{d^2 u}{dx^2} = \lambda u \quad ; \quad u'' + \lambda u = 0$$

¹Ver por ejemplo "Clases de Álgebra Lineal para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 313.

²La dimensión máxima del autoespacio es la multiplicidad algebraica de su autovalor asociado.

³Ver la *Definición 1.4*, página 5.

⁴Ver la *Definición 1.5*, página 6.

⁵Ver la *Definición 1.18*, página 15.

Caso 1: Condiciones Frontera de tipo Dirichlet

Tenemos el siguiente *problema de valores en la frontera* (PVF)⁶ formado con una EDO lineal de segundo orden homogénea con coeficientes constantes⁷:

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u(0) = 0 ; u(L) = 0 \end{cases} ; \quad u(x) \in [0, L] , \quad L > 0 \quad (6.1)$$

Analizamos bajo que valores de λ se obtienen soluciones u no triviales (distintas de cero), probando para valores $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ y $\lambda > 0$.

- $\lambda = 0$

$$\frac{d^2}{dx^2} u = 0 ; \quad \frac{d}{dx} u = c_1 ; \quad u(x) = c_1 x + c_2$$

Aplicando las condiciones frontera:

$$\begin{cases} u(0) = 0 : c_1 \cdot 0 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \\ u(L) = 0 : c_1 L = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow u(x) = 0$$

En este caso se obtiene la solución trivial, por lo que $\lambda = 0$ **no** es un autovalor.

- $\lambda < 0$

Por simplicidad en los resultados vamos a utilizar el cambio de variable $\lambda = -k^2$ con el *parámetro* $k > 0$.

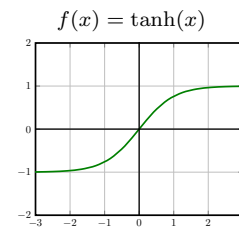
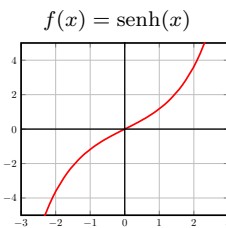
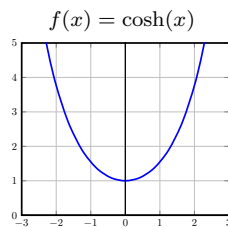
$$u'' - k^2 u = 0$$

A través de su *ecuación característica*⁸ podemos obtener la solución de la EDO.

$$m^2 - k^2 = 0 ; \quad m = \pm k \Rightarrow u(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$$

Para encontrar los valores de c_1 y c_2 de acuerdo a las condiciones frontera es más sencillo expresar la solución de la siguiente forma: para los valores particulares $c_1 = c_2 = 1/2$ y $c_1 = 1/2$ y $c_2 = -1/2$ se tiene:

$$u(x) = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} = \cosh kx ; \quad u(x) = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2} = \sinh kx$$



Teniendo en cuenta que las funciones $\cosh(x)$ y $\sinh(x)$ son linealmente independientes, la solución se puede expresar como combinación lineal de ambas:

$$u(x) = c_1 \cosh(kx) + c_2 \sinh(kx)$$

Entonces, aplicando las condiciones frontera:

$$\begin{cases} u(0) = 0 : 1c_1 + 0c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ u(L) = 0 : c_2 \underbrace{\sinh(kL)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow u(x) = 0$$

Por lo que se vuelve a obtener la solución trivial y **ningún** valor $\lambda < 0$ es autovalor del problema.

⁶Ver la Definición 3.6, página 53.

⁷Ver la Sección 3.2, página 57.

⁸Ver el Teorema 3.3, página 57.

- $\lambda > 0$

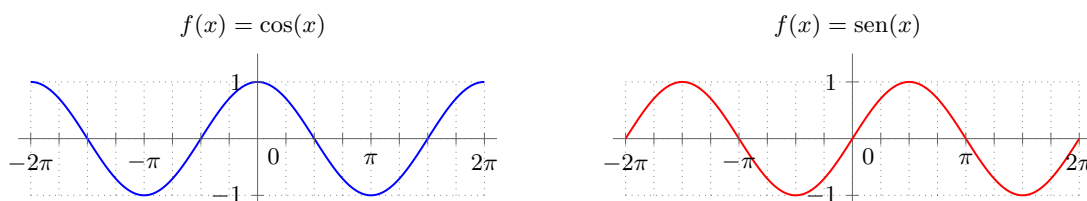
Al igual que antes, por simplicidad en los resultados vamos a utilizar el cambio de variable $\lambda = k^2$ con el parámetro $k > 0$.

$$u'' + k^2 u = 0$$

A través de la *ecuación característica* asociada a la EDO podemos obtener la solución de la ecuación.

$$m^2 + k^2 = 0 \quad ; \quad m = \pm ki \quad \implies \quad \boxed{u(x) = c_1 \cos kx + c_2 \operatorname{sen} kx}$$

Entonces, aplicando las condiciones frontera y teniendo en cuenta el comportamiento de las funciones coseno y seno:

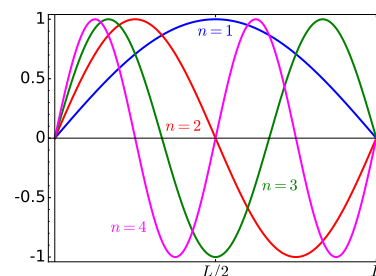


$$\begin{cases} u(0) = 0 & : & 1c_1 + 0c_2 = 0 & \implies & c_1 = 0 \\ u(L) = 0 & : & \underbrace{c_2}_{\neq 0} \underbrace{\operatorname{sen}(kL)}_0 = 0 & \implies & k_n L = n\pi \quad ; \quad k_n = \frac{n\pi}{L} \end{cases}$$

Por tanto las soluciones del problema (autofunciones) son en este caso:

$$\boxed{u_n(x) = c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

La constante $c_2 \neq 0$ indica que cualquier múltiplo no nulo de las autofunciones también es autofunción. Teniendo esto en cuenta, vamos a tomar de forma genérica $c_2 = 1$ (gráfica izquierda).



Finalmente el conjunto de autovalores y autofunciones asociadas del PVF definido en el caso 1 es un conjunto infinito dado por:

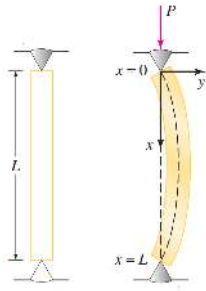
$$\left. \begin{array}{l} \boxed{\lambda_n = k_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \\ \boxed{u_n(x) = c \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)} \end{array} \right\} n = 1, 2, \dots \xRightarrow{c=1} \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\lambda_n = \left\{ \frac{\pi^2}{L^2}, \frac{4\pi^2}{L^2}, \frac{9\pi^2}{L^2}, \dots \right\}} \\ \boxed{u_n(x) = \left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \dots \right\}} \end{array} \right.$$

Notar que el conjunto de estas autofunciones es un **conjunto ortogonal de funciones**⁹, que corresponden en este ejemplo a las funciones que aparecen en el **serie de Fourier de senos**¹⁰.

⁹Ver la **Definición 5.6**, página 137.

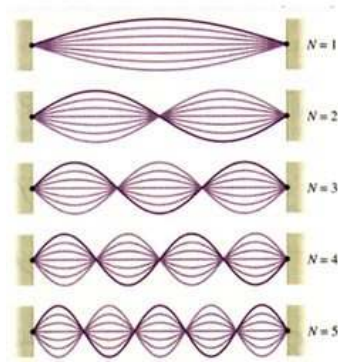
¹⁰Ver la **Sección 5.4.4**, página 145.

El problema representado en la [Ecuación \(6.1\)](#) representa diferentes problemas físicos como por ejemplo los dos siguientes:



Deflexión de una columna delgada frente una carga vertical,

$$\begin{cases} E I y'' + P y = 0 \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} E : \text{módulo de Young (elasticidad)} \\ I : \text{momento inercia sec. transversal} \\ P : \text{carga} \\ L : \text{longitud columna} \\ y : \text{deflexión columna (despl. horiz.)} \end{cases}$$



Oscilación de una cuerda respecto a un eje vertical a velocidad constante:

$$\begin{cases} T y'' + \rho \omega^2 y = 0 \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} T : \text{tensión tangencial cuerda} \\ \rho : \text{densidad lineal cuerda} \\ \omega : \text{velocidad angular de giro} \\ L : \text{longitud de la cuerda} \\ y : \text{forma de la cuerda} \end{cases}$$

Los diferentes modos de giro dependen de los valores del parámetro $\lambda = (\rho \omega^2)/T$.

Nota 6.2.

- Estos problemas explican de forma práctica porqué λ solo puede ser mayor que cero para producir soluciones no triviales.
- La [Ecuación \(6.1\)](#) aparece en el estudio de la ecuación de ondas unidimensional (ver la [Sección 7.5.1, página 202](#)).

Caso 2: Condiciones Frontera de tipo Neumann

En este caso tenemos el siguiente PVF:

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u'(0) = 0 ; u'(L) = 0 \end{cases} \quad ; \quad u(x) \in [0, L] \quad , \quad L > 0$$

Al igual que el caso anterior, estudiamos los tres posibles casos de λ .

- $\lambda = 0$

$$u'' = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x) = c_1 x + c_2 \quad ; \quad u'(x) = c_1$$

Teniendo en cuenta las condiciones frontera:

$$\begin{cases} u'(0) = 0 : c_1 = 0 \\ u'(L) = 0 : c_1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u(x) = c_2$$

En este caso $\lambda = 0$ **sí** es un autovalor del problema, siendo la autofunción asociada una función constante.

- $\lambda < 0$

Como se vio anteriormente, si hacemos $\lambda = -k^2$ la solución en este caso es:

$$u(x) = c_1 \cosh(kx) + c_2 \sinh(kx) \quad ; \quad u'(x) = c_1 k \sinh(kx) + c_2 k \cosh(kx)$$

Teniendo en cuenta las condiciones frontera:

$$\begin{cases} u'(0) = 0 : c_2 k \cosh(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \\ u'(L) = 0 : c_1 k \sinh(L) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u(x) = 0$$

Por tanto $\lambda < 0$ **no** es autovalor del problema.

- $\lambda > 0$

Como se vio en el caso anterior, haciendo $\lambda = k^2$ la solución es:

$$\boxed{u(x) = c_1 \cos kx + c_2 \operatorname{sen} kx} \quad ; \quad u'(x) = -c_1 k \operatorname{sen} kx + c_2 k \cos kx$$

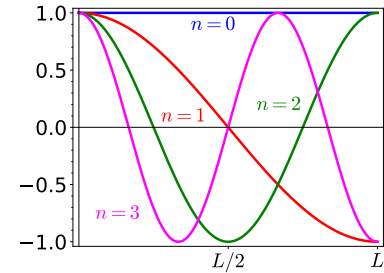
Teniendo en cuenta las condiciones frontera:

$$\begin{cases} u'(0) = 0 & : & c_2 k \cos(0) = 0 & \implies & c_2 = 0 \\ u'(L) = 0 & : & c_1 k \operatorname{sen}(kL) = 0 & \implies & k_n L = n\pi \quad ; \quad k_n = \frac{n\pi}{L} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Por tanto la solución del problema (autofunciones) es en este caso:

$$\boxed{u_n(x) = c_1 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)} \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Notar que ahora el valor de n empieza en 0, en lugar de 1 como el caso anterior. Igual que en el caso anterior, vamos a tomar de forma genérica $c_1 \neq 0$ como $c_1 = 1$.



Finalmente el conjunto de autovalores y autofunciones asociadas del PVF definido en el caso 2 es un conjunto infinito dado por:

$$\left. \begin{cases} \lambda_n = k_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \\ u_n(x) = c \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{cases} \right\} n = 0, 1, 2, \dots \xrightarrow{c=1} \begin{cases} \lambda_n = \left\{ \frac{\pi^2}{L^2}, \frac{4\pi^2}{L^2}, \frac{9\pi^2}{L^2}, \dots \right\} \\ u_n(x) = \left\{ \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right), \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \dots \right\} \end{cases}$$

Notar que el conjunto ortogonal de funciones $\{\cos(n\pi x/L)\}_{n=0}^{\infty}$ corresponden con las funciones que aparecen en el **serie de Fourier de cosenos** (ver la **Sección 5.4.4, página 144**).

Caso 3: Condiciones Frontera de tipo Periódico

Por simplicidad, para este caso vamos estudiar el siguiente PVF:

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u(-L) = u(L) \quad , \quad u'(-L) = u'(L) \end{cases} \quad ; \quad u(x) \in [-L, L] \quad , \quad L > 0$$

Nota 6.3. Si en lugar del intervalo $[-L, L]$ el problema estuviera definido en un intervalo general $[a, b]$, con $b > a$, las condiciones frontera serían $u(a) = u(b)$ y $u'(a) = u'(b)$ y haciendo el cambio de variable:

$$x = a + \frac{r+L}{2L}(b-a) \quad ; \quad x \in [a, b] \quad ; \quad r \in [-L, L]$$

se obtendría el siguiente PVF en la variable r :

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dr^2} + \mu u = 0 \\ u(-L) = u(L) \quad ; \quad u'(-L) = u'(L) \end{cases} \quad ; \quad L > 0$$

Una vez resuelto siguiendo el procedimiento que veremos aquí, se obtendrían los autovalores μ y autofunciones asociadas $u(r)$ y deshaciendo el cambio de variable se pueden obtener los autovalores y autofunciones originales mediante:

$$r = -L + \frac{2L}{b-a}(x-a) \quad ; \quad \lambda = \frac{(2L)^2}{(b-a)^2} \mu$$

Al igual que en los casos anteriores, estudiamos los tres posibles casos de λ .

- $\lambda = 0$

$$u'' = 0 \implies \boxed{u(x) = c_1 x + c_2} \quad ; \quad u'(x) = c_1$$

Teniendo en cuenta las condiciones frontera:

$$\begin{cases} u(-L) = u(L) & : -c_1 L + c_2 = c_1 L + c_2 \implies c_1 = 0 \\ u'(-L) = u'(L) & : c_1 = c_1 = 0 \end{cases} \implies \boxed{u(x) = c_2}$$

En este caso $\lambda = 0$ **sí** es un autovalor del problema, siendo la autofunción asociada una función constante.

- $\lambda < 0$

Como se vio anteriormente, si hacemos $\lambda = -k^2$ la solución en este caso es:

$$\boxed{u(x) = c_1 \cosh(kx) + c_2 \sinh(kx)} \quad ; \quad u'(x) = c_1 k \sinh(kx) + c_2 k \cosh(kx)$$

Con las condiciones frontera y teniendo en cuenta que $\cosh(-x) = \cosh(x)$ y $\sinh(-x) = -\sinh(x)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(-L) = u(L) \quad : \quad \cancel{c_1 \cosh(kL)} - c_2 \sinh(kL) = \cancel{c_1 \cosh(kL)} + c_2 \sinh(kL) \\ \qquad \qquad \qquad 2c_2 \underbrace{\sinh(kL)}_{\neq 0} = 0 \implies c_2 = 0 \\ u'(-L) = u'(L) \quad : \quad -c_1 k \sinh(kL) + \cancel{c_2 k \cosh(kL)} = c_1 k \sinh(kL) + \cancel{c_2 k \cosh(kL)} \\ \qquad \qquad \qquad 2c_1 \underbrace{\sinh(kL)}_{\neq 0} = 0 \implies c_1 = 0 \end{array} \right. \implies \boxed{u(x) = 0}$$

Por tanto $\lambda < 0$ **no** es autovalor del problema.

- $\lambda > 0$

Como se vio en el caso anterior, haciendo $\lambda = k^2$ la solución es:

$$\boxed{u(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx} \quad ; \quad u'(x) = -c_1 k \sin kx + c_2 k \cos kx$$

Con las condiciones frontera y teniendo en cuenta que $\cos(-x) = \cos(x)$ y $\sin(-x) = -\sin(x)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(-L) = u(L) \quad : \quad \cancel{c_1 \cos(kL)} - c_2 \sin(kL) = \cancel{c_1 \cos(kL)} + c_2 \sin(kL) \\ \qquad \qquad \qquad 2 \underbrace{c_2}_{\neq 0} \sin(kL) = 0 \implies k_n L = n\pi \quad , \quad n = 1, 2, \dots \\ u'(-L) = u'(L) \quad : \quad c_1 k \sin(kL) + \cancel{c_2 k \cos(kL)} = -c_1 k \sin(kL) + \cancel{c_2 k \cos(kL)} \\ \qquad \qquad \qquad 2 \underbrace{c_1 k}_{\neq 0} \sin(kL) = 0 \implies k_n L = n\pi \quad , \quad n = 1, 2, \dots \end{array} \right.$$

En ambos casos se puede obtener una solución no nula para $\lambda_n = k_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} > 0$ siendo los autovalores y autofunciones asociadas, tomando $c_1 = c_2 = 1$:

$$u_{1n}(x) = \cos(kx) = \cos(x\sqrt{\lambda}) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad ; \quad u_{2n}(x) = \sin(kx) = \sin(x\sqrt{\lambda}) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\left\{ \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right\} \quad ; \quad u_n(x) = \left\{ \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Notar que para cada autovalor λ_n hay dos autofunciones asociadas¹¹, indicando que la dimensión del autoespacio asociado es 2 (cualquier combinación lineal de esas dos autofunciones es también una autofunción asociada al autovalor).

¹¹Correspondería con una base del autoespacio asociado al autovalor.

Como $\lambda = 0$ también es un autovalor con autofunción asociada¹² $\{1\}$, podemos expresar el conjunto completo de autovalores y autofunciones de este problema, incluyendo el valor $n = 0$ de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_n = k_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \\ u_n(x) = c_1 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + c_2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{array} \right\} \quad n = 0, 1, 2, \dots \xrightarrow[c_2=1]{c_1=1} \left\{ \begin{array}{l} \lambda_n = \left\{ \frac{n^2\pi^2}{L^2} \right\} \\ u_n(x) = \left\{ \cos \frac{n\pi x}{L} + \sin \frac{n\pi x}{L} \right\} \end{array} \right.$$

Notar que el conjunto ortogonal de funciones $\{\cos(n\pi x/L), \sin(n\pi x/L)\}_{n=0}^{\infty}$ corresponden con las funciones que aparecen en el *serie de Fourier* (ver la [Sección 5.4, página 139](#)).

Resumen

Problema Básico de Autovalores

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u = 0$$

Cond. Frontera	$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u(L) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} u'(0) = 0 \\ u'(L) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} u(-L) = u(L) \\ u'(-L) = u'(L) \end{cases}$
Autovalores	$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ λ_n $n = 1, 2, \dots$	$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ $n = 0, 1, 2, \dots$	$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ $n = 0, 1, 2, \dots$
Autofunciones	$\sin \frac{n\pi x}{L}$	$\cos \frac{n\pi x}{L}$	$\sin \frac{n\pi x}{L}, \cos \frac{n\pi x}{L}$
Serie	$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L}$	$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L}$	$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} + B_n \sin \frac{n\pi x}{L}$
Coeficientes	$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$	$A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$ $A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$	$A_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$ $A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$ $B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$

Notar que las soluciones forman conjuntos completos ortogonales y por tanto, podemos con ellos desarrollar con ellas determinadas funciones $f(x)$ en forma de series.

¹²Cualquier constante valdría, indicando que cualquier de sus múltiplos (combinación lineal) es también autofunción.

6.3. Problema Regular de Sturm-Liouville

Los problemas anteriores son casos particulares del problema regular de Sturm-Liouville.

Definición 6.2. Problema Regular de Sturm-Liouville

Dadas $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ funciones reales continuas en el intervalo $[a, b]$, donde $p(x)$ y $r(x)$ no cambian de signo en ese intervalo¹³, se define el **problema regular de Sturm-Liouville** al siguiente PVF:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}[p(x)y'] + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0 \\ A_1 y(a) + B_1 y'(a) = 0 \\ A_2 y(b) + B_2 y'(b) = 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

donde las constantes A_1 y B_1 no pueden ser cero a la vez, al igual que A_2 y B_2 .

Características de los Problemas Regulares de Sturm-Liouville

Los problemas regulares de Sturm-Liouville tienen una gran importancia en la práctica ya que aparecen en la resolución de un número importante de EDP¹⁴. Además desde un punto de vista teórico reúne un conjunto de características de una gran relevancia¹⁵ que veremos a continuación.

- Las incógnitas de este tipo de problemas son el **autovalor**¹⁶ λ y sus **autofunciones** asociadas $y(x)$.
- La EDO es homogénea, al igual que las condiciones frontera¹⁷, por tanto es un PVF *homogéneo*¹⁸.
- Los PVF homogéneos siempre tienen la solución trivial nula, que no tiene interés.
- Las condiciones frontera de este caso son **separadas**, ya que cada condición implica solo un punto en la frontera¹⁹.
- Existe un número infinito de autovalores reales $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$, donde $\lambda_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.
- Para cada **autovalor** existe un **autoespacio** de una determinada dimensión, formada por las autofunciones asociadas al autovalor.
- Cada **autofunción** $y_n(x)$ con $n > 1$ tiene $n - 1$ ceros en el dominio (a, b) .
- El conjunto de **autofunciones** es **ortogonal** respecto a la **función peso** $r(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

$$\int_a^b r(x)y_n(x)y_m(x)dx = 0 \quad ; \quad \lambda_n \neq \lambda_m$$

¹³Muchas veces se considera, sin pérdida de generalidad, que $q(x) > 0$ y $r(x) > 0$. A la función $r(x)$ se le denomina *función peso*.

¹⁴Ver el Tema 7, página 175.

¹⁵Algunas de estas características o propiedades forman parte del conocido como **Teorema de Sturm-Liouville**.

¹⁶Ver la Definición 6.1, página 153.

¹⁷Una condición frontera $Ay(x_0) + By'(x_0) = C$ con $C \neq 0$ se dice no homogénea.

¹⁸Si la ecuación o las condiciones frontera no son homogéneas, el problema se denomina *no homogéneo*.

¹⁹Condiciones del tipo $A_1y(x_1) + B_1y'(x_2) = C_1$ y $A_2y(x_1) + B_2y'(x_2) = C_2$ se denominan *acopladas*.

²⁰Ver la Sección 5.3.2, página 138.

²¹También llamada "de clase C^1 a trozos", ver la Definición 5.11, página 140.

²²Ver la Sección 6.3.2, página 164.

²³Ver la Sección 6.3.3, página 167.

- Las *autofunciones* forman un **conjunto completo**²⁰ y por tanto cualquier *función suave a trozos*²¹ $f(x)$ se puede representar en forma de **serie de Fourier generalizada**²² de las *autofunciones*:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n(x)$$

- Cada autovalor está relacionado con su autofunción asociada mediante el **cociente de Rayleigh**²³.

$$\lambda = \frac{[-p y y']_a^b + \int_a^b [p(y')^2 - q y^2] dx}{\int_a^b r y^2 dx}$$

Nota 6.4. De forma general, en la resolución de este tipo de problemas es necesario resolver EDO *numéricamente* para encontrar el valor de los *autovalores*.

Ejercicio 6.1. Obtener los autovalores y autofunciones del siguiente problema.

$$\begin{cases} y'' + 2y' + (1 + \lambda)y = 0 \\ y(0) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

Aunque inicialmente puede no parecerlo, se trata de un problema regular de Sturm-Liouville donde $p(x) = q(x) = r(x) = e^{2x}$, (ver la [Sección 6.3.1, página 163](#) y el [Ejercicio 6.2, página 163](#)).

Hay dos tipos de EDO en función de que $\lambda = -1$ o $\lambda \neq -1$.

1. Si $\lambda = -1$, la ec original es en este caso: $y'' + 2y' = 0$ cuya ec. característica es:

$$r^2 + 2r = r(r + 2) = 0 \implies r = \{0, -2\} \implies \begin{cases} y(x) = c_1 + c_2 e^{-2x} \\ y'(x) = -2c_2 e^{-2x} \end{cases}$$

Imponiendo las cond. iniciales:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = 0 : 0 = c_1 + c_2 \\ y'(1) = 0 : 0 = -2c_2 e^{-2} \end{array} \implies c_2 = 0 = c_1 \right\} \implies \lambda = 1 \text{ no es un autovalor}$$

2. Para $\lambda \neq -1$, la ec. característica es:

$$r^2 + 2r + (1 + \lambda) = 0 \implies r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1 + \lambda)}}{2} = \boxed{-1 \pm \sqrt{-\lambda}}$$

En función del signo del interior de la raíz dará tipos de soluciones distintas. Estudiamos tres casos: $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ (con $\lambda \neq -1$) y $\lambda > 0$.

- $\lambda = 0$: $r = -1$ (raíz real y doble) $\implies \begin{cases} y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-1} \\ y'(x) = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} - c_2 x e^{-x} \end{cases}$

Teniendo en cuenta las condiciones frontera:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = 0 : c_1 = 0 \\ y'(1) = 0 : c_2 e^{-1} - c_2 e^{-1} = 0 \end{array} \right\} \implies y(x) = c_2 x e^{-x}$$

Por tanto $\boxed{\lambda_0 = 0}$ es un autovalor con autofunción asociada $\boxed{y_0(x) = x e^{-x}}$

- $\lambda < 0$ ($\lambda \neq -1$): $\lambda = -k^2$, $k > 0 \implies r = -1 \pm k$ (raíces reales y distintas)

$$y = c_1 e^{(-1+k)x} + c_2 e^{(-1-k)x} \quad ; \quad y' = c_1(-1+k)e^{(-1+k)x} - c_2(1+k)e^{(-1-k)x}$$

Teniendo en cuenta las condiciones frontera:

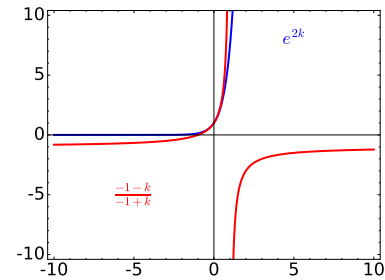
$$\begin{cases} y(0) = 0 & : c_1 + c_2 = 0 \quad ; \quad c_2 = -c_1 \\ y'(1) = 0 & : c_1(-1+k)e^{-1+k} - c_2(1+k)e^{-1-k} = 0 \end{cases}$$

$$c_1(-1+k)e^{-1+k} + c_1(1+k)e^{-1-k} = 0 \quad ; \quad c_1 e^{-1} [e^k(-1+k) + e^{-k}(1+k)] = 0$$

Para encontrar soluciones no nulas $c_1 \neq 0$ y como $e^{-1} > 0$, busquemos si es posible que el término restante sea nulo:

$$e^k(-1+k) = -e^{-k}(1+k) \quad ; \quad e^{2k} = \frac{-1-k}{-1+k}$$

Representando gráficamente ambas funciones se observa que solo $k = 0$ es solución. Como buscamos $k > 0$, se deduce que no hay autovalores para $\lambda < 0$.



- $\lambda > 0$: $\lambda = k^2$, $k > 0 \implies r = -1 \pm ki$ (raíces complejas)

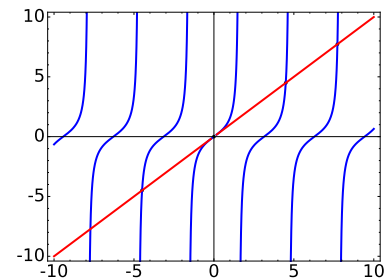
$$y(x) = e^{-x} [c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx)] \quad ; \quad y'(x) = e^{-x} [(kc_2 - c_1) \cos(kx) - (c_1 k + c_2) \sin(kx)]$$

Teniendo en cuenta las condiciones frontera:

$$\begin{cases} y(0) = 0 & : c_1 = 0 \\ y'(1) = 0 & : c_2 e^{-1} [k \cos(k) - \sin(k)] = 0 \end{cases} \implies \boxed{\tan k = k} \quad ; \quad \lambda = k^2, \quad k > 0$$

Esta es una ecuación trascendente que no tiene soluciones analíticas. Resolviendo numéricamente con algún software informático se pueden encontrar las soluciones positivas, que denominaremos μ_n :

$$k_n = \mu_n = \{4.49341, 7.72525, \dots\} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$



Los autovalores y autofunciones asociadas a este caso son:

$$\boxed{\lambda_n = \mu_n^2} \quad ; \quad \boxed{y_n(x) = e^{-x} \sin(\mu_n x)} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

Teniendo en cuenta el primer autovalor λ_0 y su autofunción asociada, el conjunto completo de autovalores y autofunciones del problema son:

$$\boxed{\lambda_0 = 0} \quad ; \quad \boxed{y_0(x) = x e^{-x}} \quad ; \quad \boxed{\lambda_n = \mu_n^2} \quad ; \quad \boxed{y_n(x) = e^{-x} \sin(\mu_n x)} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

6.3.1. Forma Autoadjunta

La EDO de la [Ecuación A.4, página 293](#),

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'] + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0$$

se dice que está en su forma **autoadjunta**. Cualquier ecuación de la forma,

$$a(x)y'' + b(x)y' + [c(x) + \lambda d(x)]y = 0$$

donde las funciones coeficiente son continuas y $a(x) \neq 0$ en un determinado dominio, se puede poner en la forma autoadjunta en ese dominio. Para ello:

1. Se divide la ecuación entre $a(x)$,

$$y'' + \frac{b(x)}{a(x)}y' + \left[\frac{c(x)}{a(x)} + \lambda \frac{d(x)}{a(x)} \right] y = 0$$

2. Se multiplica la ecuación por el **factor integrante** $\exp[\int b(x)/a(x)]$,

$$\underbrace{y'' e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}} + e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}} \frac{b(x)}{a(x)} y'}_{\frac{d}{dx} \left[y' e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}} \right]} + e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}} \left[\frac{c(x)}{a(x)} + \lambda \frac{d(x)}{a(x)} \right] y = 0$$

3. Se identifican los términos:

$$\frac{d}{dx} \left[\underbrace{e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}}}_{p(x)} y' \right] + \left[\underbrace{e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}} \frac{c(x)}{a(x)}}_{q(x)} + \lambda \underbrace{e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}} \frac{d(x)}{a(x)}}_{r(x)} \right] y = 0$$

No es necesario expresar una ecuación en su forma autoadjunta para poder resolverla, pero sí es necesario si se quiere conocer la función peso $r(x)$ que define la ortogonalidad entre las autofunciones (ver la [Sección 6.3, página 160](#) y la [Sección 6.3.2, página 164](#)).

Ejercicio 6.2. Obtener la forma autoadjunta del [Ejercicio 6.1, página 161](#).

$$y'' + 2y' + (1 + \lambda)y = 0$$

En este caso $a(x) = c(x) = d(x) = 1$, $b(x) = 2$ y por tanto no es necesario dividir por $a(x)$. Calculamos entonces el valor de la exponencial $\exp[\int b(x)/a(x)]$:

$$e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}} = e^{\int 2dx} = e^{2x}$$

y multiplicamos toda la ecuación por este valor:

$$\underbrace{e^{2x}y'' + 2e^{2x}y'}_{\frac{d}{dy}[e^{2x}y']} + e^{2x}(1 + \lambda)y = 0$$

La forma autoadjunta es por tanto:

$$\frac{d}{dy}[e^{2x}y'] + e^{2x}(1 + \lambda)y = 0$$

donde $p(x) = q(x) = r(x) = e^{2x}$.

6.3.2. Serie de Fourier Generalizada

En la [Definición 5.10](#), [página 140](#) se vio cómo la serie de Fourier:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

permite aproximar una función $f(x)$ de clase C^1 a trozos²⁴ en el intervalo $(-L, L)$ mediante una serie infinita formada por funciones seno y coseno que forman un *conjunto completo de funciones ortogonales*²⁵. Como hemos visto²⁶, en un *problema regular de Sturm-Liouville*²⁷:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}[p(x)y'] + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0 \\ A_1 y(a) + B_1 y'(a) = 0 \\ A_2 y(b) + B_2 y'(b) = 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

se obtiene como solución un **conjunto completo** de *autofunciones* que son **ortogonales** con respecto a la *función peso* $r(x)$:

$$\langle y_n, y_m \rangle = \int_a^b r(x) y_n(x) y_m(x) dx = 0$$

Este conjunto completo de funciones ortogonales se pueden utilizar para aproximar funciones de forma análoga a como se utilizan las series de Fourier, generalizando este proceso.

Teorema 6.1. Serie de Fourier Generalizada

Si $f(x)$ es de clase C^1 a trozos en $[a, b]$ que satisface las condiciones frontera del problema (6.3), entonces su **serie de Fourier generalizada** viene dada por:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n y_n(x)$$

;

$$a_n = \frac{\langle y_n, f(x) \rangle}{\langle y_n, y_n \rangle} = \frac{\int_a^b r(x) f(x) y_n(x) dx}{\int_a^b r(x) y_n^2(x) dx}$$

donde $r(x)$ es la *función peso*, $\{y_n(x)\}$ es el conjunto de *autofunciones* de dicho problema y a_n los correspondientes coeficientes²⁸.

Dicha serie converge a $f(x)$ en los $x \in (a, b)$ en los que f es continua y hacia $\frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)]$ en los $x \in (a, b)$ en los que f es discontinua.

Las series de Fourier Generaliza, en sus distintas formas²⁹, tienen un papel muy importante en la solución de problemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP), como se verá en el [Tema 7](#), [página 175](#).

²⁴Ver la [Definición 5.11](#), [página 140](#).

²⁵Ver la [Sección 5.3.2](#), [página 138](#).

²⁶Ver la [Sección 6.3](#), [página 160](#).

²⁷Ver la [Sección 6.3](#), [página 160](#).

²⁸Ver la [Sección 5.3.2](#), [página 138](#).

²⁹Ver la [Sección 6.4.2](#), [página 172](#).

Ejercicio 6.3. Dado el siguiente problema de Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} y'' - y' + \lambda y = 0 & , \quad 0 < x < 2 \\ y'(0) = 0 & , \quad y'(2) = 0 \end{cases}$$

- Calcula sus autovalores y autofunciones asociadas.
- Encuentra la forma autoadjunta de la ecuación y la relación de ortogonalidad entre las autofunciones.
- Expresa la forma de la serie generalizada de Fourier de una apropiada función $f(x)$ en términos de las autofunciones del problema, en el intervalo $[0, 2]$.

- Buscamos soluciones no nulas en función del *parámetro* λ . Notar que el valor $\lambda = 0$ da lugar a un problema de naturaleza distinta y por tanto es necesario estudiar este caso aparte.

- $\lambda = 0$

$$y'' - y' = 0 \xrightarrow{EcC} m^2 - m = 0 ; \quad m(m-1) = 0 \implies m = \{0, 1\} \implies \boxed{y(x) = c_1 + c_2 e^x}$$

$$y'(x) = c_2 e^x \left\{ \begin{array}{l} y'(0) = c_2 = 0 \\ y'(2) = c_2 e^2 = 0 \end{array} \right\} \implies \boxed{y(x) = c_1 \neq 0} \quad \boxed{\lambda = 0 \text{ sí es autovalor}}$$

- $\lambda \neq 0 \xrightarrow{EcC} m^2 - m + \lambda = 0 ; \quad \boxed{m = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\lambda}}{2}} ; \quad 1-4\lambda = 0 \implies \lambda = \frac{1}{4}$

Estudiamos los posibles casos de $\lambda \neq 0$.

- $\lambda = 1/2$: $m = 1/2$ (doble) $\implies \boxed{y(x) = e^{x/2}(c_1 + c_2 x)}$

$$y'(x) = e^{x/2} \left(c_2 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2} x \right) \left\{ \begin{array}{l} y'(0) = \frac{c_1}{2} + c_2 = 0 \\ y'(2) = \frac{c_1}{2} + 2c_2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\implies \boxed{c_1 = c_2 = 0} \quad \boxed{\lambda = \frac{1}{2} \text{ no es autovalor}}$$

- $\lambda < 1/4$: $m = \{r_1, r_2\}$ (reales y $\neq$) $\implies \boxed{y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}}$

$$y'(x) = c_1 r_1 e^{r_1 x} + c_2 r_2 e^{r_2 x} \left\{ \begin{array}{l} y'(0) = c_1 r_1 + c_2 r_2 = 0 \\ y'(2) = c_1 r_1 e^{2r_1} + c_2 r_2 e^{2r_2} = 0 \end{array} \right\}$$

Donde el determinante del sistema es:

$$\begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ r_1 e^{2r_1} & r_2 e^{2r_2} \end{vmatrix} = r_1 r_2 (e^{2r_2} - e^{2r_1})$$

Para que este sistema tenga soluciones no nulas el determinante tiene que ser cero, pero para ello la única forma es que $r_1 = r_2$ lo que no es posible y por tanto:

$$\implies \det \neq 0 \implies \text{S.C.D.} \implies \boxed{c_1 = c_2 = 0} \implies \boxed{\lambda < \frac{1}{4} \text{ no autovalor}} , \quad \lambda \neq 0$$

Notar que aquí no se tiene en cuenta el caso $\lambda = 0$, que como hemos visto antes, sí es un autovalor.

$$\bullet \lambda > 1/4: m = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{4\lambda - 1}}{2} ; \quad \mu^2 = 4\lambda - 1 \implies m = \frac{1}{2} \pm \frac{\mu}{2} i \quad , \quad \mu > 0$$

$$y(x) = e^{x/2} \left[c_1 \cos \frac{x\mu}{2} + c_2 \sin \frac{x\mu}{2} \right]$$

$$y'(x) = e^{x/2} \left(-\frac{\mu}{2} c_1 \sin \frac{\mu x}{2} + \frac{1}{2} c_1 \cos \frac{\mu x}{2} + \frac{1}{2} c_2 \sin \frac{\mu x}{2} + \frac{\mu}{2} c_2 \cos \frac{\mu x}{2} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(0) = c_1 + \mu c_2 = 0 \\ y'(2) = (c_1 + \mu c_2) \cos \mu + (c_2 - \mu c_1) \sin \mu = 0 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} c_1 = -\mu c_2 \\ c_2 \sin \mu = 0 \end{array} \right.$$

$$\mu = \sqrt{4\lambda - 1} = n\pi ; \quad \boxed{\lambda_n = \frac{n^2\pi^2 + 1}{4}} ; \quad \boxed{y_n(x) = c_2 e^{x/2} \left(-n\pi \cos \frac{n\pi x}{2} + \sin \frac{n\pi x}{2} \right)} , \quad \boxed{n > 0}$$

Por tanto los autovalores y autofunciones del problema son:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda_0 = 0 & : y_0(x) = c \neq 0 \\ \lambda_n = \frac{n^2\pi^2 + 1}{4} & : y_n(x) = c e^{x/2} \left(-n\pi \cos \frac{n\pi x}{2} + \sin \frac{n\pi x}{2} \right) , \quad n = 1, 2, \dots \end{array} \right.$$

b) La forma autoadjunta del problema de Sturm-Liouville viene dada por:

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + [q(x) + \lambda r(x)] y(x) = 0$$

$$\text{Para nuestro caso: } y'' - y' + \lambda y = 0 ; \quad e^{-\int dx} = e^{-x} \implies \underbrace{e^{-x}(y'' - y')}_{(e^{-x}y')'} + e^{-x}\lambda y(x) = 0$$

Así, la forma autoadjunta de la ecuación del problema:

$$\boxed{\frac{d}{dx} \left(e^{-x} \frac{dy}{dx} \right) + e^{-x} \lambda y(x) = 0} \quad \boxed{\left\{ \begin{array}{l} p(x) = r(x) = e^{-x} \\ q(x) = 0 \end{array} \right.}$$

La relación de ortogonalidad entre las autofunciones $y_i(x)$ viene dada a través de la función peso $r(x) = e^{-x}$.

$$\int_a^b r(x) y_n(x) y_m(x) dx = 0 \implies \boxed{\int_0^2 e^{-x} y_n(x) y_m(x) dx = 0} , \quad m \neq n$$

c) Serie generalizada de Fourier de este caso:

$$\boxed{f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n y_n(x)} ; \quad x \in [0, 2] ; \quad \boxed{A_n = \frac{\int_0^2 e^{-x} f(x) y_n(x) dx}{\int_0^2 e^{-x} y_n^2(x) dx}}$$

6.3.3. Cociente de Rayleigh

Como hemos visto³⁰ el cociente de Rayleigh relaciona los autovalores y autofunciones de un problema de Sturm-Liouville. Para obtenerlo basta multiplicar la EDO del problema por una autofunción $y(x)$ e integrar en todo el dominio $[a, b]$:

$$(py')' + qy + \lambda ry = 0 \quad ; \quad \int_a^b y(py')' dx + \int_a^b qy^2 dx + \lambda \int_a^b ry^2 dx = 0$$

Aplicando integración por partes a la primera integral se tiene:

$$\int_a^b \underbrace{y}_u \underbrace{(py')'}_{dv} dx = pyy'|_a^b - \int_a^b p(y')^2 dx$$

Por otra parte, como $r(x) \neq 0$ se tiene que $\int_a^b ry^2 dx \neq 0$, y por tanto se puede despejar el autovalor λ quedando:

$$\lambda = \frac{[-pyy']_a^b + \int_a^b [p(y')^2 - qy^2] dx}{\int_a^b ry^2 dx}$$

Como generalmente las autofunciones de un problema de Sturm-Liouville no se conocen, la fórmula del cociente de Rayleigh no sirve para calcular los autovalores, sin embargo resulta muy útil en la estimación de los mismos, sobre todo cuando no se pueden determinar de forma analítica. Para ello se utiliza el principio de minimización.

Teorema 6.2. Principio de Minimización

El primer autovalor λ_1 de un problema regular de Sturm-Liouville coincide con el valor mínimo del cociente de Rayleigh sobre todas las funciones continuas a trozos u (funciones test) que satisfacen las condiciones frontera del problema (aunque no necesariamente la ecuación diferencial).

$$\lambda_1 = \min_u \frac{[-puu']_a^b + \int_a^b [p(u')^2 - qu^2] dx}{\int_a^b ru^2 dx}$$

El primer autovalor λ_1 (el más pequeño) tiene importancia práctica en diferentes problemas³¹. Haciendo uso del cociente de Rayleigh visto en la sección anterior se puede obtener una estimación del valor del primer autovalor, a través de una cota superior, mediante el principio de minimización siguiente.

³⁰Ver la Sección 6.3, página 160.

³¹Por ejemplo está relacionado con la solución estacionaria a largo tiempo de la ecuación del calor (ver Sección 7.4, página 186). También, por ejemplo, está relacionado con la frecuencia del armónico fundamental en la ecuación de ondas.

Ejercicio 6.4. Sin resolver el problema, encontrar una acotación del primer autovalor λ_1 del siguiente problema con condiciones Dirichlet:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(1) = 1 \end{cases}$$

Este problema fue resuelto en la [Sección 6.2.1, página 154](#) y sabemos que el primer autovalor para $L = 1$ es $\lambda_1 = \pi^2 \approx 9.87$. Vamos a buscar funciones test sencillas $u(x)$ que verifiquen las condiciones frontera $u(0) = u(1) = 0$. Vamos a usar una función lineal, otra cuadrática y otra trigonométrica:

$$u_1 = \begin{cases} x & x \leq 1/2 \\ 1-x & x > 1/2 \end{cases} \quad u_2 = x(x-1) = x^2 - x \quad u_3 = \sin(\pi x)$$

Notar que en este problema se tiene:

$$(py')' + qy + \lambda ry = 0 \implies p(x) = r(x) = 1, \quad q(x) = 0$$

Usando el principio de minimización:

$$\lambda_1 \leq \frac{-puu'|_0^1 + \int_0^1 [p(u')^2 - qu^2] dx}{\int_0^1 ru^2 dx} = \frac{\int_0^1 (u')^2 dx}{\int_0^1 u^2 dx}$$

Notar que el primer término $-puu'|_0^1 = -p(1)u(1)u'(0) + p(0)u(0)u'(1) = 0$, ya que las funciones cumplen las condiciones frontera y por tanto $u(0) = u(1) = 0$.

Usando cada una de las tres funciones test u_i seleccionadas podemos obtener una cota superior de λ_1 , siendo la mejor aproximación aquella que se obtenga la menor cota, ya que según el principio de minimización, el valor mínimo sobre todas las funciones continuas que cumplan las condiciones frontera corresponde con la autofunción y_1 .

- $\lambda_1 \leq \frac{\int_0^1 (u_1')^2 dx}{\int_0^1 u_1^2 dx} = \frac{\int_0^{1/2} (1)^2 dx + \int_{1/2}^1 (-1)^2 dx}{\int_0^{1/2} x^2 dx + \int_{1/2}^1 (1-x)^2 dx} = 12$
- $\lambda_1 \leq \frac{\int_0^1 (u_2')^2 dx}{\int_0^1 u_2^2 dx} = \frac{\int_0^1 (2x-1)^2 dx}{\int_0^1 (x^2-x)^2 dx} = 10$
- $\lambda_1 \leq \frac{\int_0^1 (u_3')^2 dx}{\int_0^1 u_3^2 dx} = \frac{\int_0^1 (\pi \cos(\pi x))^2 dx}{\int_0^1 (\sin(\pi x))^2 dx} = \pi^2 \approx 9.87$

Notar que la aproximación obtenida con la función test u_2 es mejor que la obtenida con u_1 , al ser mas pequeña y la aproximación de u_3 coincide exactamente con el valor λ_1 , ya que $y_1 = \sin(\pi x)$ es la primera autofunción del problema.

6.4. Problemas No Regulares de Sturm-Liouville

En determinadas ocasiones aparece el problema de Sturm-Liouville dado la [Ecuación A.4, página 293](#),

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}[p(x)y'] + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0 \\ A_1 y(a) + B_1 y'(a) = 0 \\ A_2 y(b) + B_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

pero sin cumplirse las condiciones para que sea un **problema regular**³² de Sturm-Liouville. En estos casos los problemas se clasifican como:

- **Problema Singular de Sturm-Liouville:** Si las funciones $p(x)$ y/o $r(x)$ se anulan o no son continuas en los extremos del intervalo $[a, b]$. En estos casos es posible que la solución no esté acotada en estos valores y para obtener soluciones con la propiedad de ortogonalidad es necesario imponer **condiciones de acotación** también denominados de **compatibilidad**³³.
- **Problema Periódico de Sturm-Liouville:** Si $p(a) = p(b)$ y las condiciones frontera son de tipo periódico:

$$\begin{cases} y(a) = y(b) \\ y'(a) = y'(b) \end{cases}$$

En este caso solución $y(x)$ se puede extender como una función periódica en el dominio infinito³⁴.

Vamos a ver un par de ejemplos prácticos sencillos del tratamiento matemático de estos casos.

Ejercicio 6.5. Obtener los autovalores y autofunciones del siguiente problema.

$$\begin{cases} xy'' + 2y' + \lambda xy = 0 \\ y \text{ acotada en } x = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Este es un problema singular de Sturm-Liouville, ya que $p(x) = x$ se anula en el extremo izquierdo $x = 0$. Si las condiciones frontera fueran $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ la única solución es la trivial $y = 0$ para cualquier valor de λ , por ello se relajan estas condiciones imponiendo la acotación en el extremo $x = 0$.

Si hacemos el cambio de variable $u = xy$ se tiene:

$$\begin{cases} u' = y + xy' \\ u'' = y' + y' + xy'' = 2y' + xy'' \end{cases} \implies xy'' + 2y' + \lambda xy = u'' + \lambda u = 0$$

Esta ecuación ya se resolvió en el [Sección 6.2.1, página 154](#), y solo aparecen soluciones no triviales para $\lambda > 0$ de la forma:

$$u = c_1 \cos x\sqrt{\lambda} + c_2 \sin x\sqrt{\lambda} \implies y = c_1 \frac{\cos x\sqrt{\lambda}}{x} + c_2 \frac{\sin x\sqrt{\lambda}}{x}$$

Para que la solución sea acotada en $x = 0$ es necesario que $c_1 = 0$. Con la otra condición de contorno:

$$y(1) = 0 \implies 0 = c_2 \sin \sqrt{\lambda} \implies \sqrt{\lambda} = n\pi, \quad \lambda = n^2\pi^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$y_n = \frac{\sin n\pi x}{x}$$

Para conocer la relación de ortogonalidad es necesario encontrar la forma autoadjunta de esta ecuación. Siguiendo los pasos de la [Sección 6.3.1, página 163](#):

$$1. \quad y'' + \frac{2}{x}y' + \lambda y = 0$$

$$2. \quad e^{\int 2/x} = e^{2\log x} = x^2 \implies x^2 y'' + 2xy' + \lambda x^2 y = 0$$

³²Ver la [Definición 6.2, página 160](#).

³³Ver el [Ejercicio 6.5, página 169](#).

³⁴Ver el [Ejercicio 6.6, página 170](#).

$$3. \frac{d}{dx}[x^2 y'] + \lambda x^2 y = 0 \implies r(x) = x^2$$

Por tanto las autofunciones y_n son ortogonales respecto al peso $r(x) = x^2$.

Ejercicio 6.6. Obtener los autovalores y autofunciones del siguiente problema.

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(L) \\ y'(0) = y'(L) \end{cases}$$

Este es un problema periódico de Sturm-Liouville, debido a las condiciones periódicas. Vamos a analizarlo para los casos $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ y $\lambda > 0$, teniendo en cuenta que el polinomio característico es en este caso:

$$m^2 + \lambda = 0$$

- $\lambda = 0$

$$y'' = 0 \implies y = c_1 + c_2 x$$

Teniendo en cuenta las condiciones frontera:

$$\begin{cases} y(0) = y(L) & : & c_1 = c_1 + c_2 L & ; & c_2 L = 0 & \implies & c_2 = 0 \\ y'(0) = y'(L) & : & y = c_1 & ; & y' = 0 & \text{(se cumple)} \end{cases}$$

Por tanto $\lambda = 0$ es un autovalor del problema con autofunción asociada $y = c_1$.

- $\lambda < 0$

Como se vio en la Sección 6.2.1, página 154, si hacemos $\lambda = k^2$ la solución en este caso es:

$$y = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$$

como esta solución no está acotada cuando $x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow -\infty$, la solución no puede ser periódica, por tanto no hay autovalores negativos.

- $\lambda > 0$

En este caso la solución es:

$$y(x) = c_1 \cos xk + c_2 \sen xk \quad ; \quad y'(x) = -c_1 k \sen xk + c_2 k \cos xk$$

Teniendo en cuenta las condiciones frontera:

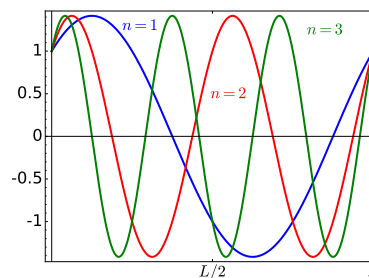
$$\begin{cases} y(0) = y(L) & : & c_1 = c_1 \cos Lk + c_2 \sen Lk \\ y'(0) = y'(L) & : & c_2 = -c_1 \sen Lk + c_2 \cos Lk \end{cases}$$

se obtiene un sistema de ecuaciones lineales. Si $c_1 = 0$ y $c_2 \neq 0$, o bien $c_1 \neq 0$ y $c_2 = 0$ entonces $k = 2n\pi/L$. En el caso de que ninguno de los dos sea cero, multiplicando la primera ecuación por c_1 y la segunda por c_2 y sumando se obtiene el mismo resultado $k = 2n\pi/L$.

Por tanto el problema tiene soluciones no triviales para los autovalores y autofunciones:

$$\lambda = \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

$$y_n(x) = \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + \sen\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)$$



6.4.1. Ortogonalidad en las Funciones de Bessel

El siguiente problema de autovalores para el caso particular de la ecuación de Bessel paramétrica³⁵ representa un ejemplo de un **Problema Singular de Sturm-Liouville**³⁶.

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \left(\lambda x - \frac{m^2}{x} \right) y = 0 \\ y(L) = 0 \\ |y(0)| < \infty \end{cases} \quad (6.4)$$

Con el cambio de variable $z = x\sqrt{\lambda}$ se tiene:

$$x = \frac{z}{\sqrt{\lambda}} ; \quad y(x) = y(z/\sqrt{\lambda}) = f(z) ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dz} \frac{dz}{dx} = f'(z)\sqrt{\lambda} ; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dz} [f'(z)\sqrt{\lambda}] \frac{dz}{dx} = f''(z)\lambda$$

se obtiene:

$$\sqrt{\lambda} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{\sqrt{\lambda}} f' \right) + \left(\lambda \frac{z}{\sqrt{\lambda}} - \frac{m^2}{z} \sqrt{\lambda} \right) f = 0 ; \quad \frac{d}{dz} \left(z \frac{df}{dz} \right) + \left(z - \frac{m^2}{z} \right) f = 0$$

multiplicando por z se obtiene la ecuación de Bessel³⁷:

$$z^2 \frac{d}{dz} \left(z \frac{df}{dz} \right) + (z^2 - m^2) f = 0 ; \quad z^2 f'' + z f' + (z^2 - m^2) f = 0$$

La solución general, teniendo en cuenta el cambio de variable es:

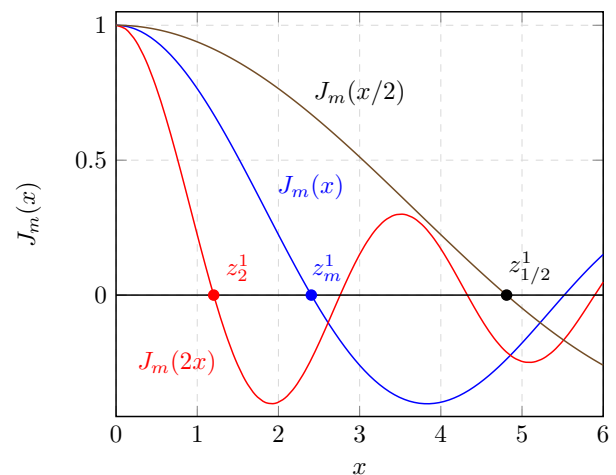
$$f(z) = c_1 J_m(z) + c_2 Y_m(z) \xrightarrow{c.v.} y(x) = c_1 J_m(x\sqrt{\lambda}) + c_2 Y_m(x\sqrt{\lambda})$$

Las funciones $J_m(x\sqrt{\lambda})$ y $Y_m(x\sqrt{\lambda})$ son funciones escaladas de las originales $J_m(x)$ e $Y_m(x)$.

De forma general una función $J_m(\alpha x)$ encoge la gráfica de la función original si $\alpha > 1$ y la *ensancha* si $\alpha \in (0, 1)$ (ver gráfica).

De esta forma, si z_m^k es el cero k -ésimo de la función $J_m(x)$, los correspondientes ceros z_α^k de sus funciones escaladas también quedan escalados de la siguiente forma:

$$J_m(z_\alpha^k) = 0 \implies \alpha z_\alpha^k = z_m^k \implies \boxed{z_\alpha^k = z_m^k / \alpha}$$



Teniendo en cuenta que $y(0)$ debe ser finito, implica que $c_2 = 0$ ya que $Y_m(0)$ es infinito³⁸ y por tanto:

$$y(x) = c_1 J_m(x\sqrt{\lambda})$$

Con la condición $y(L) = 0$ se determinan los autovalores:

$$J_m(L\sqrt{\lambda}) = 0$$

Por lo que el valor $L\sqrt{\lambda}$ debe ser un cero de la función de Bessel $J_m(z)$. Si designamos mediante z_m^n el n -ésimo cero de la función $J_m(z)$ se tiene³⁹:

$$L\sqrt{\lambda_n} = z_m^n \implies \boxed{\lambda_n = \left(\frac{z_m^n}{L} \right)^2} \quad (6.5)$$

³⁵Ver la Sección 3.4.4, página 84.

³⁶Ver la Sección 6.4, página 169.

³⁷Ver la Sección 3.4.4, página 82.

³⁸Ver la Sección 3.4.4, página 84.

³⁹Notar que para cada ecuación con valor m hay un número infinito de autovalores λ_n y esta expresión es análoga a $\lambda_n = (n\pi/L)^2$, donde $n\pi$ son los ceros de $\sin x$.

Las autofunciones son entonces:

$$y_n(x) = J_m(x\sqrt{\lambda_n}) = J_m(x z_m^n / L) \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Para cada m hay un conjunto infinito de autofunciones $y_n(x)$ para el problema singular de Sturm-Liouville dado por (6.4) que forman un conjunto completo de funciones ortogonales con la función peso x de forma:

$$\int_0^L J_m(x\sqrt{\lambda_i}) J_m(x\sqrt{\lambda_j}) x dx = 0 \quad , \quad i \neq j$$

$$\int_0^L J_m^2(x\sqrt{\lambda_i}) x dx = \frac{L^2}{2} J_{m+1}^2(z_m^i) \quad , \quad i = j$$

6.4.2. Serie de Fourier-Bessel

En base a todo lo realizado en el apartado anterior, se puede establecer un teorema muy importante en aplicaciones prácticas⁴⁰.

Teorema 6.3. Serie de Fourier-Bessel de Orden m

Toda función $f(x)$ suave a trozos en $[0, L]$ se puede representar mediante una *serie de Fourier generalizada*⁴¹ con las autofunciones obtenidas en el apartado anterior, de forma:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_m(x\sqrt{\lambda_n}) \quad ; \quad \lambda_n = \left(\frac{z_m^n}{L} \right)^2$$

conocida como **serie de Fourier-Bessel de orden m** , y cuyos coeficientes A_n pueden determinarse por la condición de ortogonalidad⁴² de las funciones de Bessel con respecto a la función peso x :

$$A_n = \frac{\int_0^L f(x) J_m(x\sqrt{\lambda_n}) x dx}{\int_0^L J_m^2(x\sqrt{\lambda_n}) x dx} = \frac{2}{L^2 J_{m+1}^2(z_m^n)} \int_0^L f(x) J_m(x\sqrt{\lambda_n}) x dx$$

donde z_m^n es el n -ésimo cero de la función $J_m(x)$ y λ_n es el n -ésimo autovalor del problema (6.4) dado por la ecuación (6.5).

⁴⁰Ver por ejemplo la Sección 7.4.3, página 198 y la Sección 7.5.3, página 212.

⁴²Ver el Sección 6.4.1, página 171 y el Teorema 6.1, página 164.

⁴²Ver la Sección 6.3.2, página 164.

Ejercicio 6.7. Aproximar la función:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

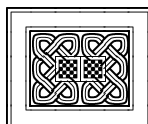
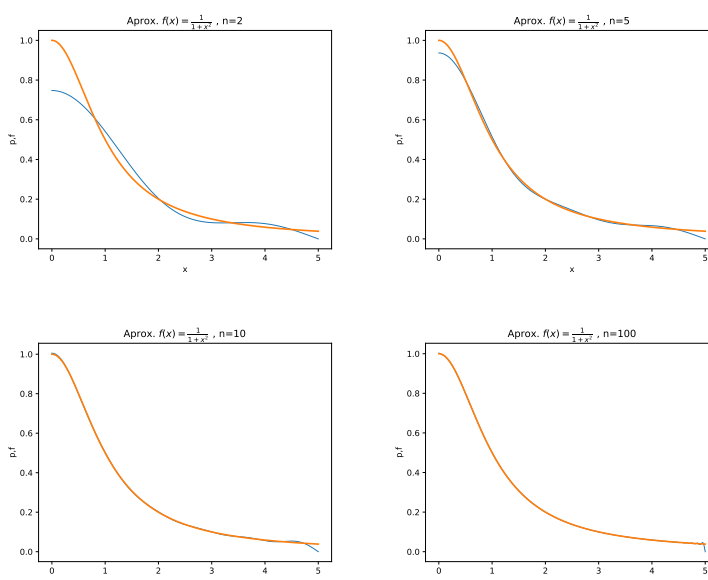
en el intervalo $[0, 5]$ mediante funciones de Bessel de primera clase $J_m(x)$.

En este caso $L = 5$ y teniendo en cuenta el teorema anterior se tiene:

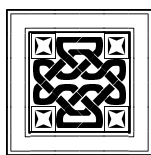
$$\frac{1}{1+x^2} \sim \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_m(x\sqrt{\lambda_n}) \quad ; \quad \lambda_n = \left(\frac{z_0^n}{5}\right)^2 \quad ; \quad A_n = \frac{\int_0^5 f(x) J_0(x\sqrt{\lambda_n}) x dx}{\int_0^5 J_0^2(x\sqrt{\lambda_n}) x dx}$$

Con un ordenador y a través de algún lenguaje de programación apropiado⁴³ se pueden calcular estos coeficientes de forma sencilla, haciendo uso de las definiciones internas de las funciones de Bessel y sus correspondientes ceros.

En la siguiente gráfica se muestra un resultado de estas simulaciones usando diferentes términos de la serie infinita, $n = 2$, $n = 5$, $n = 10$ y $n = 100$. En rojo aparece la función original $f(x)$ y en azul su aproximación para distintos valores de n . Vemos que al aumentar el número de términos aumenta la precisión del ajuste, aunque en los extremos se puede observar en algunos casos fenómenos similares al efecto Gibbs (ver [Sección 5.4.2, página 143](#)). Dependiendo de la función y el intervalo de definición $[0, L]$ se puede obtener una mayor o menor velocidad de convergencia.



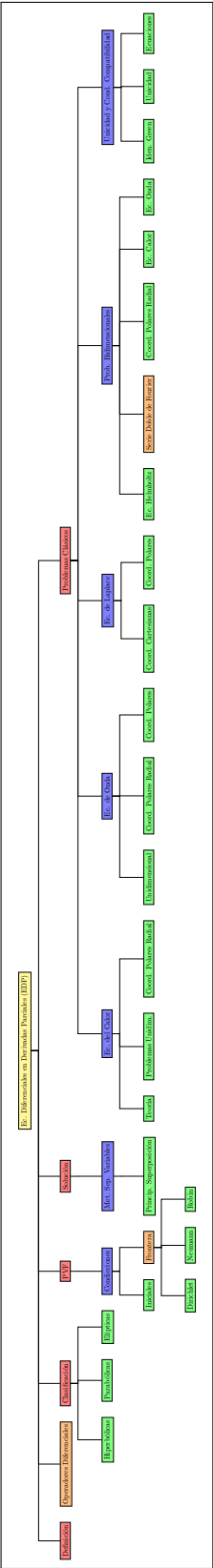
⁴³Por ejemplo *Python* y los paquetes (librerías científicas) *Numpy* y *Scipy*.



Ecuaciones en Derivadas Parciales

Contenido

7.1	Introducción	177
7.1.1	Solución de una EDP	177
7.1.2	Características de las EDP	178
7.1.3	Operadores Diferenciales Lineales	179
7.1.4	Clasificación de las EDP	180
7.1.5	Problemas en EDP	182
7.1.6	Solución de un Problema en EDP	183
7.2	Método de Separación de Variables	183
7.2.1	Procedimiento General	183
7.2.2	Principio de Superposición	186
7.3	Problemas Clásicos en EDP	186
7.4	Ecuación de Calor	186
7.4.1	Transferencia de Calor	186
7.4.2	Ecuación del Calor Unidimensional	188
7.4.3	Ecuación del Calor en Polares con Simetría Radial	198
7.5	Ecuación de Onda	201
7.5.1	Ecuación de Onda Unidimensional	202
7.5.2	Ecuación de Onda en Coordenadas Polares con Simetría Radial	209
7.5.3	Ecuación de Onda en Coordenadas Polares	212
7.6	Ecuación de Laplace	216
7.6.1	Ecuación de Laplace Bidimensional	218
7.7	Problemas de Evolución Bidimensionales	228
7.7.1	Ecuación del Calor Bidimensional en Coordenadas Cartesianas	228
7.7.2	Ecuación de Onda Bidimensional en Coordenadas Cartesianas	230
7.7.3	Ecuación del Calor en un Cilindro con Simetría Radial	233
7.8	Unicidad y Condiciones de Compatibilidad en EDP	236
7.8.1	Identidades de Green	237
7.8.2	Estudio de la Unicidad	237



7.1. Introducción

Recordamos¹ que una *ecuación diferencial en derivadas parciales* (EDP) es aquella ecuación cuya incógnita es una función² escalar u que depende de varias variables independientes³ $x, y, t, \dots$ y donde aparecen derivadas parciales de la función con respecto a una o varias de las variables independientes $u_x, u_{tt}, u_{xy}, \dots$

$$u(x, y, z, t, \dots) \xrightarrow{\text{EDP}} \boxed{F(x, y, z, t, u, u_x, u_t, u_{xy}, \dots) = 0} \quad (7.1)$$

De forma general:

$$u(\vec{z}) = u(\vec{x}, t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \begin{cases} n = N + 1, & N = \{1, 2, 3\} \\ \vec{x} = [x, y, z] \in \mathbb{R}^N \\ \vec{z} = [x, y, z, t] \in \mathbb{R}^{N+1} \end{cases}$$

Dependiendo del tipo de variables de la función incógnita u las ecuaciones se clasifican en:

- **Ecuaciones estacionarias:** Cuando la función depende solo de una o varias variables espaciales $u(\vec{x}) = u(x, y, z)$.
- **Ecuaciones de evolución:** Cuando la función depende de una o varias variables espaciales y de la temporal $u(\vec{z}) = u(\vec{x}, t) = u(x, y, z, t)$.

Dominio de definición de la función:

$$u(\vec{z}) = (\vec{x}, t) \in U = \Omega \times (0, \infty) \subset \mathbb{R}^{N+1} \quad \begin{cases} \Omega \subseteq \mathbb{R}^N & : \text{dominio espacial} \\ \partial\Omega \subset \mathbb{R}^N & : \text{frontera o borde de } \Omega \\ (0, \infty) \subset \mathbb{R} & : \text{dominio temporal} \end{cases}$$

La frontera o borde de Ω , $\partial\Omega$, son puntos de espacio $\mathbb{R}^N$ de forma que cualquier bola abierta⁴ que los contenga incluye puntos tanto del interior de Ω como de su complemento⁵.

Notación

- Du : Conjunto de todas las derivadas parciales de primer orden de u , $\left(\frac{\partial u}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial z_n}\right)$
- $D^k u$: Conjunto de todas las derivadas parciales de orden k de u , del tipo $\frac{\partial^k u}{\partial z_i \dots \partial z_j}$

7.1.1. Solución de una EDP

El concepto de solución de una EDP es un tema complejo y de una importancia fundamental. De hecho, el análisis de dicho concepto ha conducido al desarrollo de buena parte de las Matemáticas en los últimos años⁶. En este curso utilizaremos la siguiente definición básica.

Definición 7.1. Solución Clásica de una EDP

Una función escalar $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ es solución *clásica* de (7.1) si es suficientemente derivable y verifica dicha ecuación en U .

¹Ver los tipos ecuaciones diferenciales en [Sección 1.2.3, página 7](#).

²En este tema vamos a denotar de forma general a la función de varias variables u , aunque en cada contexto se suelen utilizar diferentes nombres de variables.

³Las variables independientes pueden ser muy variadas aunque las más habituales son una o varias espaciales x, y y z y la temporal t .

⁴Ver por ejemplo "Clases de Cálculo II para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 313.

⁵En un problema unidimensional (segmento) la frontera son los dos extremos, en un problema bidimensional (superficie) la frontera es la curva que encierra el dominio y en un problema tridimensional (sólido) la frontera es la superficie que encierra el dominio.

⁶Algunas de las nociones relacionadas con este desarrollo se estudian en la asignatura Análisis Funcional.

7.1.2. Características de las EDP

Como se vio en la [Sección 1.2.3, página 8](#) todas las ecuaciones diferenciales poseen diferentes características en base a las cuales se pueden clasificar, siendo las dos más importantes:

- **Orden** : Es el orden de la derivada de mayor orden.
- **Linealidad** : Ecuaciones diferenciales que cumplen dos propiedades:
 - La variable dependiente (función u) y todas sus derivadas son a lo sumo funciones polinómicas de primer grado.
 - Todos los coeficientes que multiplican a u y a sus derivadas solo son función de las variables independientes⁷.

A diferencia de lo que sucede con las EDO, no existe una teoría general de las EDP, ni siquiera para las ecuaciones más sencillas de bajo orden. El estudio se centra en el desarrollo de teorías particulares aplicables a determinados tipos de EDP importantes por sus aplicaciones en diversas áreas de las matemáticas, en la física y otras ciencias.

Algunas de las EDP más importantes en las aplicaciones prácticas son las lineales de segundo orden.

Definición 7.2. EDP lineal de Segundo Orden

Una **EDP lineal de segundo orden** es una ecuación de la forma:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\vec{z}) \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial z_j} + \sum_{i=1}^n b_i(\vec{z}) \frac{\partial u}{\partial z_i} + c(\vec{z})u(\vec{z}) = f(\vec{z}) \quad (7.2)$$

donde las funciones a_{ij} , b_i y c se denominan **coeficientes** de la ecuación y la función f es el **término independiente**, todas ellas definidas en U , un abierto de $\mathbb{R}^n$.

- Si las funciones $a_{ij}(\vec{z})$, $b_i(\vec{z})$ y $c(\vec{z})$ son constantes se dice que es una **EDP de coeficientes constantes**.
- Si $f(\vec{z}) = 0$ se dice que es una **EDP homogénea**.
- Si la solución es *clásica*⁸ se puede suponer que $a_{ij}(\vec{z}) = a_{ji}(\vec{z})$.
- Una EDP de segundo orden se dice que es **semilineal** si solo es lineal en las derivadas de segundo orden, de la forma:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\vec{z}) \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial z_j} = f(\vec{z}, u, Du)$$

- Una EDP de segundo orden se dice que es **cuasilineal** si tiene la forma:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\vec{z}, u, Du) \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial z_j} = f(\vec{z}, u, Du)$$

⁷Y no de u ni de sus derivadas.

⁸Ver la [Definición 7.1, página 177](#).

7.1.3. Operadores Diferenciales Lineales

Las EDP lineales de segundo orden⁹ se pueden definir de forma compacta como:

$$Lu = f$$

donde f es una función conocida y si $f = 0$ se dice que la EDP es **homogénea**. L es un *operador diferencial lineal*¹⁰, combinación lineal de u y de sus derivadas parciales de primer y segundo orden, de la forma:

$$L = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\vec{z}) \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} + \sum_{i=1}^n b_i(\vec{z}) \frac{\partial}{\partial z_i} + c(\vec{z})$$

Definición 7.3. Operador Laplaciano

El operador **laplaciano**¹¹ de una función *escalar* $f(\vec{x}) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ en *coordenadas cartesianas* se define como el *producto escalar* entre el *operador gradiente*¹² ∇ y el vector gradiente de la función ∇f :

$$\Delta = \operatorname{div} \nabla = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$$

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Ejemplo 7.1. Operadores laplacianos en coordenadas cartesianas de dimensión 1, 2 y 3.

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad ; \quad \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad ; \quad \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Operador Laplaciano 3D en otras Coordenadas

- **C. Rectangulares** (x, y, z) : $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
- **C. Cilíndricas**¹³ (r, θ, z) : $\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
- **C. Esféricas** (r, θ, ϕ) : $\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$

Ejemplo 7.2. Desarrollo completo del laplaciano en coordenadas esféricas.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} = \\ & = \frac{1}{r^2} \left(2r \frac{\partial f}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} = \\ & = \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left(\cotan \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \operatorname{cosec}^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned}$$

⁹Ver la **Definición 7.2**, página 178.

¹⁰Ver la **Definición 1.5**, página 6.

¹¹Para representar el operador *laplaciano* se puede utilizar de forma indistinta la letra Δ , (delta mayúscula), o el símbolo ∇^2 , (nabla cuadrado), sin embargo debido a su simplicidad se acostumbra a utilizar Δ .

¹²Ver por ejemplo "Clases de Cálculo II para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 313.

¹³Las **coordenadas cilíndricas** en 2D son las **coordenadas polares** (r, θ) .

Otros Operadores Lineales

A través del operador laplaciano se definen los tres operadores diferenciales lineales más usados en la práctica:

$$L = \Delta$$

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta$$

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

Estos operadores dan lugar a las conocidas como **EDP fundamentales**, ya que todas las *EDP lineales de segundo orden* se clasifican en función de los coeficientes de los términos de grado dos del operador.

- **Ecuación de Poisson¹⁴ N-dimensional** : $\Delta u = f(\vec{x})$ $u(\vec{x})$; $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$
- **Ecuación del Calor N-dimensional** : $\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = f(\vec{x}, t)$; $k > 0$ $u(\vec{x}, t)$; $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$
- **Ecuación de Onda N-dimensional** : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c\Delta u = f(\vec{x}, t)$; $c > 0$ $u(\vec{x}, t)$; $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$

Notar que la ecuación de Poisson (caso general de la ecuación de Laplace) es de tipo estacionaria, mientras que las ecuaciones del calor y de onda son de evolución¹⁵.

7.1.4. Clasificación de las EDP

Desde un punto de vista aplicado, uno de los tipos de EDP más interesantes son las *lineales de segundo orden* para funciones del tipo $u(x, y)$ o $u(x, t)$.

Las EDP de segundo orden *lineales* con *coeficientes constantes*¹⁶ y *homogéneas*¹⁷ para funciones de dos variables $u(x, y)$ o $u(x, t)$ de la forma:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F u = 0 \quad (7.3)$$

se pueden clasificar en función de las constantes de las derivadas de segundo orden A , B y C , en tres tipos¹⁸:

- **Parabólicas:** $B^2 - 4AC = 0$
- **Hiperbólicas:** $B^2 - 4AC > 0$
- **Elípticas:** $B^2 - 4AC < 0$

Cada uno de estos tres tipos tienen unas características comunes que sirven para modelizar distintos problemas en las ciencias aplicadas.

- Las ecuaciones **parabólicas** determinan la variación de una función en espacio y tiempo¹⁹, presentando derivadas en las dos variables. Este tipo de ecuaciones aparecen de forma frecuente en muchas aplicaciones cuando se intenta describir el comportamiento de fenómenos *difusivos*, ligados a una propagación rápida de la variable dependiente.

El ejemplo más característico es la **ecuación del calor unidimensional**:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad \implies \quad B^2 - 4AC = 0 - 4(-1)0 = 0$$

¹⁴Si $f = 0$ la ecuación se denomina de **Laplace**.

¹⁵Ver la **Sección 7.1, página 177**.

¹⁶Los coeficientes $A, \dots, E$ son constantes reales.

¹⁷El término independiente, a la derecha del signo igual, es cero.

¹⁸Esta clasificación está basada la teoría de las secciones cónicas que cumplen la ecuación de segundo grado $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

¹⁹En estos casos la variable y se suele denotar por t .

o en su versión N-dimensional²⁰:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = f(\vec{x}, t)$$

donde el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es el interior de un medio conductor²¹ en el que actúa una fuente de calor $f(\vec{x}, t)$ durante un intervalo temporal $(0, T)$. Entonces, bajo determinadas circunstancias, se puede aceptar que la temperatura del medio $u(\vec{x}, t)$ verifica dicha ecuación para una constante positiva k (conductividad del medio). De ahí el nombre que se le da a la ecuación.

- Las ecuaciones **hiperbólicas** sirven para describir fenómenos ondulatorios caracterizados por la propagación de señales a velocidad finita.

El ejemplo más característico es la **ecuación de onda unidimensional**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad \implies \quad B^2 - 4AC = 0 - 4(1)(-c) = 4c > 0$$

que permite determinar, bajo ciertas condiciones, las vibraciones de una cuerda elástica²², cuyas características están determinadas por la constante positiva c . En este caso la función $u(x, t)$ determinan la posición de cada punto de la cuerda en función del tiempo.

La ecuación de onda en su versión N-dimensional es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c\Delta u = f(\vec{x}, t)$$

Notar que la diferencia más importante con respecto a las ecuaciones *parabólicas* es la presencia de la segunda derivada con respecto al tiempo, lo que hace que la solución *oscile*. Esta diferencia de orden en la derivada temporal entre las ecuaciones *parabólicas* e *hiperbólicas*, también se manifiesta en la forma que se propaga la solución. Así, para los problemas definidos por ecuaciones *hiperbólicas* en las que se produce una perturbación en el contorno, esta perturbación viaja al interior del cuerpo pero existiendo un intervalo de tiempo antes de que los puntos internos perciban esa perturbación²³. Por el contrario, en los problemas con ecuaciones diferenciales *parabólicas*, los puntos en el interior perciben inmediatamente la perturbación en la frontera, intensificándose el efecto con el tiempo.

- Las ecuaciones **elípticas** se usan para caracterizar sistemas en estado estable, independiente del tiempo.

El ejemplo más característico es la **ecuación de Poisson bidimensional**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad \implies \quad B^2 - 4AC = 0 - 4(1)(1) = -4 < 0$$

que recibe el nombre de **ecuación de Laplace** si $f = 0$. Ambas ecuaciones aparecen con frecuencia en muchas aplicaciones prácticas cuando se intenta describir el comportamiento de fenómenos estacionarios, es decir, independientes del tiempo²⁴.

Por ejemplo, el campo eléctrico generado en un medio que ocupa el abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ por una distribución de carga f definida en Ω , está dado por $E = -\nabla u$, donde u es solución de la *ecuación de Poisson*²⁵:

$$-\Delta u = \frac{1}{\alpha} f(\vec{x}) \quad ; \quad \alpha > 0$$

²⁰Ver la Sección 7.1.3, página 179.

²¹Alambre unidimensional, placa metálica bidimensional o sólido tridimensional.

²²Siempre que éstas sean de pequeña amplitud.

²³Ver la Sección 7.5.1, página 202.

²⁴Ver la Sección 7.6.1, página 218.

²⁵Ver la Sección 7.1.3, página 180 y Sección 7.8.2, página 237.

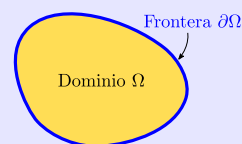
- Hay otras muchas ecuaciones interesantes desde el punto de vista de las aplicaciones, que en buena parte son variantes de los tres tipos anteriores. Así por ejemplo, el operador del calor suele estar presente en la dinámica de fluidos y en los fenómenos de difusión, y el operador de onda aparece en fenómenos de elasticidad y en la propagación de ondas acústicas y electromagnéticas. Otras veces aparecen sistemas acoplados con todas las componentes del mismo tipo o con componentes parabólicos e hiperbólicos, (como por ejemplo en sistemas termoelásticos).
- Cuando las ecuaciones modelan fenómenos en medios heterogéneos, adoptan formas más complejas y en particular presentan coeficientes A , B , etc. de la ecuación (7.3) variables, dependientes de la posición $\vec{x}$, del tiempo t o de ambos.
- Además de las EDP lineales, muchas EDP no lineales presentan un enorme interés en muchos ámbitos de la Ciencia y la Tecnología, aunque no serán tratadas en este curso.

7.1.5. Problemas en EDP

Definición 7.4. Problema de Valores en la Frontera (PVF)

Se denomina **problema de valores en la frontera**²⁶ (PVF) al conjunto de una EDP definida en un dominio Ω junto con las *condiciones iniciales y/o de frontera o contorno*.

$$\text{Problema EDP (PVF)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{EDP en un dominio} \\ + \\ \text{Condiciones iniciales y/o de contorno} \end{array} \right.$$



Tipos de Condiciones

• Condiciones Iniciales (o Problema de Cauchy)

Se necesitan cuando una de las variables es el tiempo t . Hay dos tipos básicos de *condiciones iniciales*:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u(\vec{x}, t=0) = f(\vec{x}) & : \text{Especifica la posición o distribución inicial de la función } u \text{ en el dominio.} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}, t=0) = g(x) & : \text{Especifica la velocidad inicial } u_t \text{ de cambio de la función } u \text{ en el dominio.} \end{array} \right.$$

• Condiciones de Contorno o Frontera

Se necesitan cuando una de las variables es de tipo espacial ($\vec{x}$) y fijan las condiciones de la función u en los extremos, bordes o frontera del dominio Ω , denotado por $\partial\Omega$. Hay tres tipos básicos de condiciones frontera o de contorno:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{Condiciones Dirichlet} & u(\partial\Omega) = u_0(\vec{x}) & : \text{Especifica un valor } u_0 \text{ en } \partial\Omega. \\ \text{Condiciones Neumann} & \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \nabla u \cdot \vec{n} = u_0(\vec{x}) & : \text{Especifica cómo varía } u \text{ en } \partial\Omega \text{ en función de su forma, dada por el vector normal a la misma, } \vec{n}. \\ \text{Condiciones Mixtas o Robin} & \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = u_0(\vec{x}) & : \text{Condiciones Dirichlet + Neumann.} \end{array} \right.$$

²⁶También denominados con condiciones de borde o contorno.

7.1.6. Solución de un Problema en EDP

Con frecuencia es difícil o imposible obtener la *solución general*²⁷ de una EDP, siendo además poco útil en muchos problemas aplicados, por lo que en la práctica solo se está interesado en encontrar *soluciones particulares*²⁸ de algunas EDP con interés en algún campo.

Definición 7.5. Problemas Bien Planteados

Se dice que un problema en EDP está **bien planteado** si tiene solución única y ésta depende continuamente de los datos²⁹.

- En algunos casos solo se obtienen problemas bien planteados para determinadas condiciones frontera de un dominio.
- Cuando el problema no está bien planteado y existen más de una solución, es necesario clasificar y caracterizar las soluciones obtenidas.

Hay varios métodos para encontrar soluciones de una EDP, siendo uno de los más sencillos y útiles en determinados casos, el conocido como *método de separación de variables* que veremos a continuación.

7.2. Método de Separación de Variables

El método de separación de variables permite calcular explícitamente las soluciones de problemas asociados a algunas EDPs de segundo orden lineales³⁰. Fue inicialmente esbozado en el s. XVIII por Bernoulli y Euler para estudiar el problema de la cuerda vibrante y posteriormente en el s. XIX Fourier consolidó el método con la teoría de las series que llevan su nombre³¹.

Aunque en teoría el método es eficaz para problemas con cualquier número de variables independientes, solo resulta verdaderamente práctico para funciones incógnitas u que dependen de únicamente dos variables independientes (una temporal y otra espacial o bien dos espaciales). En la [Sección 7.7.1, página 228](#) se verá cómo se puede aplicar de forma reiterada para problemas de más de dos variables.

7.2.1. Procedimiento General

El método consiste en buscar soluciones definidas como producto de funciones que dependen de variables distintas. Vamos a resumir los pasos para un problema en EDP con dos variables³² formado por una ecuación definida a través de un operador diferencial lineal³³ L y unas condiciones iniciales y/o de contorno apropiadas.

$$u(x, y) \quad \begin{cases} Lu = f(x, y) \\ \text{Condiciones} \end{cases}$$

Aquí x e y representan dos variables espaciales o una espacial y otra temporal.

²⁷Conjunto de todas las funciones que cumplen una EDP, independientemente de las condiciones iniciales y/o de contorno.

²⁸Funciones que verifican problemas específicos de EDP (ecuación + condiciones).

²⁹Esta condición es trivial en las EDO, sin embargo en el caso de las EDP suele ser un tema muy importante en aplicaciones físicas.

³⁰Ver la [Definición 7.2, página 178](#).

³¹Ver el [Tema 5, página 133](#).

³²En la [Sección 7.7, página 228](#) se extenderá este método a más dimensiones.

³³Ver la [Sección 7.1.3, página 179](#).

El método supone que la solución particular $u(x, y)$ del problema puede expresarse como producto de funciones X e Y que dependen de una única variable.

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \implies \begin{cases} u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dX}{dx}Y = X'Y \\ u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = X \frac{dY}{dy} = XY' \\ u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{dX}{dx} \frac{dY}{dy} = X'Y' \\ u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 X}{dx^2}Y = X''Y \\ u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X \frac{d^2 Y}{dy^2} = XY'' \end{cases}$$

De esta forma las derivadas parciales se transforman en derivadas totales y, en algunos casos, la solución particular de una EDP se puede obtener resolviendo dos EDO, que generalmente dependen de algún *parámetro*, a través de problemas de *autovalores de Sturm-Liouville*³⁴.

Pasos del método de separación de variables para resolver una EDP.

1. Suponer que la solución se puede expresar como producto de dos funciones X e Y que dependen de una sola variable cada una.
2. Sustituir la función u y sus derivadas en la EDP en función de X e Y .
3. Separar³⁵ a un lado de la igualdad la función X y sus derivadas, y al otro lado la función Y y sus derivadas.
4. Igualar por separado ambos términos de la igualdad a una misma constante³⁶ dando lugar a dos EDO, cada una dependiente de una única variable.
5. Resolver ambas EDO teniendo en cuenta, en caso de existir, las condiciones iniciales y/o de contorno de la EDP.
6. La solución particular de la EDP se obtendrá multiplicando las dos soluciones de las EDO.

Ejercicio 7.1. En caso de ser posible, encontrar la solución de las siguientes EDP.

a) $y \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$

b) $u_{xx} + uu_x = u_{yy}$

- a) Esta es una EDP lineal de primer orden. Vamos a ver si es posible resolverla mediante el *método de separación de variables*. Para ello seguimos los pasos descritos anteriormente.

$$yu_x = u_y$$

1. Suponemos que la solución de la EDP se puede expresar mediante producto de dos funciones X e Y dependientes de una única variable y calculamos las derivadas que aparecen en la EDP.

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \implies \begin{cases} u_x = X'Y \\ u_y = XY' \end{cases}$$

³⁴Ver el Tema 6, página 151.

³⁵En caso de no ser posible, el método de separación de variables no sería aplicable en este caso.

³⁶La razón de esto es que la única forma de que se cumpla la igualdad, dependiendo cada parte de variables independientes distintas, es que ambas partes sean igual a una constante. Esta constante se suele denominar *constante de separación* y corresponde al valor de λ en un problema de autovalores en operadores diferenciales (ver la Definición 6.1, página 153).

2. Sustituimos en la EDP los resultados anteriores.

$$yX'Y = XY'$$

3. Intentamos separar en un lado de la igualdad todo lo que depende de una variable y en el otro lo que depende de la segunda variable.

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{yY}$$

En este caso claramente sí es posible y por tanto sí es aplicable el *método de separación de variables*.

4. Igualamos ambas expresiones a una constante que vamos a denominar λ y formamos dos EDO.

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{yY} = \lambda \implies \begin{cases} \frac{X'}{X} = \lambda \\ \frac{Y'}{yY} = \lambda \end{cases}$$

5. Resolvemos ambas EDO por separado.

$$\begin{cases} \frac{X'}{X} = \lambda & ; & \int \frac{dX}{X} = \int \lambda dx & ; & \log X = \lambda x + c_1 & ; & X(x) = c_1 e^{\lambda x} \\ \frac{Y'}{yY} = \lambda & ; & \int \frac{dY}{Y} = \int \lambda y dy & ; & \log Y = \lambda \frac{y^2}{2} + c_2 & ; & Y(y) = c_2 e^{\lambda y^2/2} \end{cases}$$

6. Solución final

$$u(x, y) = X(x)Y(y) = ce^{\lambda(x+y^2/2)}$$

Podemos comprobar que efectivamente esta función es solución de la EDP dada:

$$u(x, y) = ce^{\lambda(x+y^2/2)} \left\{ \begin{array}{l} yu_x = c\lambda ye^{\lambda(x+y^2/2)} \\ u_y = c\lambda ye^{\lambda(x+y^2/2)} \end{array} \right\} \implies yu_x = u_y$$

Esta solución depende de dos *parámetros* c y λ cuyos posibles valores dependerán de las condiciones iniciales y/o de contorno que pudieran añadirse a la EDP.

- b) En este caso se trata de una EDP no lineal de segundo orden. Al igual que en el caso anterior, vamos a ver si es aplicable el método de separación de variables a este caso.

$$u_{xx} + uu_x = u_{yy}$$

- 1.

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \implies \begin{cases} u_{xx} = X''Y \\ u_x = X'Y \\ u_{yy} = XY'' \end{cases}$$

2. Sustituimos en la EDP.

$$X''Y + XY^2X' = XY''$$

3. Intentamos separar variables, por ejemplo dividiendo ambas partes de la igualdad por XY .

$$\frac{X''}{X} + YX' = \frac{Y'}{Y} \implies \text{No es posible}$$

Claramente el segundo término del lado izquierdo de la igualdad depende tanto de la variable x como de la variable y , y por tanto no es posible separar variables de esta forma. Se puede intentar de otras formas, por ejemplo dividiendo por XY^2 obteniéndose:

$$\frac{X''}{YX} + X' = \frac{Y'}{Y^2} \implies \text{No es posible}$$

En este caso es el primer término de la izquierda el que depende de x e y . Se pueden probar otras formas de separar las variables y en ninguna de ellas será posible obtener dos partes independientes y por tanto no es aplicable el método de separación de variables para resolver esta ecuación³⁷.

7.2.2. Principio de Superposición

El siguiente teorema es análogo al [Teorema 3.4, página 58](#) para EDO de orden superior.

Teorema 7.1. Principio de Superposición

Si $u_1, u_2, \dots, u_n$ son soluciones de una EDP lineal homogénea ([Ecuación 7.3, página 180](#)), entonces cualquier combinación lineal de ellas,

$$u = c_1 u_1 + \dots + c_n u_n$$

también es solución.

Si el conjunto de soluciones $\{u_i\}$ es infinito, entonces la serie,

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i \quad ; \quad c_i \in \mathbb{R}$$

también es solución.

7.3. Problemas Clásicos en EDP

Vamos a estudiar tres tipos de problemas asociados a las **ecuaciones clásicas** que se ajustan a los modelos de ecuaciones y problemas vistos en la [Sección 7.1.4, página 180](#).

Nombre	Ecuación	Tipo
Ecuación del Calor	$u_t - k\Delta u = f(\vec{x}, t)$	Parabólica
Ecuación de Onda	$u_{tt} - c\Delta u = f(\vec{x}, t)$	Hiperbólica
Ecuación de Laplace	$\Delta u = 0$	Elíptica

7.4. Ecuación de Calor

7.4.1. Transferencia de Calor

El **calor** es una forma de energía que se transfiere de manera espontánea entre distintas zonas de un cuerpo o desde un cuerpo hacia otro. La cantidad de calor se mide a través de la **temperatura**, que es una magnitud escalar medible con un termómetro e indicativa de la cantidad de energía térmica o calorífica de un cuerpo. Se puede medir en Kelvin (K), grados centígrados o Celsius ($^{\circ}C$) o grados Fahrenheit ($^{\circ}F$).

Calor y temperatura son cosas distintas, aunque están estrechamente relacionadas entre sí. El calor es la transferencia de energía térmica que pasa de una zona de mayor temperatura a otra de menor temperatura. Esta transferencia siempre tiene una dirección definida por la diferencia de temperatura entre las zonas. El calor fluye del cuerpo más caliente al más frío, hasta que se alcanza una temperatura de equilibrio ³⁸.

El calor se puede transmitir de tres formas diferentes:

- **Conducción térmica.** El calor se transmite por el choque de las moléculas al vibrar sobre posiciones fijas, lo que provoca que la temperatura se incremente. En este caso no hay transferencia de materia.
- **Convección térmica.** El calor se transfiere por medio del movimiento de las moléculas de un fluido, como puede ser un gas y un líquido, produciéndose además una transferencia de materia en el proceso.
- **Radiación térmica.** El calor se propaga a través de ondas electromagnéticas. Todos los cuerpos emiten calor de esta forma, a menos que estén a una temperatura igual al cero absoluto (0K), sin embargo este fenómeno solo resulta importante a efectos prácticos a altas temperaturas.

³⁷Para su resolución se pueden probar otros métodos analíticos y numéricos que no se verán en este curso.

³⁸La velocidad de transferencia de calor depende de la diferencia de temperaturas, de forma realmente la temperatura de equilibrio solo se alcanza a 0K, aunque a efectos prácticos se considera que se alcanza cuando la diferencia es muy pequeña.

Transferencia de Calor por Conducción

Vamos a deducir la EDP que modela la **conducción**³⁹ de calor en un dominio⁴⁰ $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ conductor del calor de dimensión $N = \{1, 2, 3\}$. El objetivo es la determinación espacio-temporal de la distribución de **temperatura** $u(\vec{x}, t)$ en el dominio, bajo unas determinadas condiciones espacio-temporales. Primeramente necesitamos la relación entre la temperatura y la **densidad de energía térmica**⁴¹ $e(\vec{x}, t)$, que viene dada a través del **calor específico**⁴² c del sólido:

$$\boxed{e(\vec{x}, t) = cu(\vec{x}, t)} \quad \begin{cases} e & : \text{Densidad de Energía Térmica} \\ u & : \text{Distribución de Temperatura} \\ c & : \text{Calor específico} \\ \vec{x} & : \text{Posición en el espacio } N\text{-dimensional, } \vec{x} \in \mathbb{R}^N \\ t & : \text{tiempo} \end{cases}$$

La relación fundamental es la ley de conservación de la energía:

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{Variación} \\ \text{Energía Térmica} \\ \text{en el tiempo} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{Flujo de Calor} \\ \text{por la frontera} \\ \text{por unidad de tiempo} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{Generación de Calor} \\ \text{en el interior} \\ \text{por unidad de tiempo} \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho e = - \int_{\partial\Omega} \Phi \cdot \vec{n} + \int_{\Omega} Q(\vec{x}, t)$$

donde:

- ρ : **Densidad de masa**⁴³
- Φ : **Flujo de calor**⁴⁴, $\Phi = -\mu \nabla u$

Por el *teorema de Gauss o de la divergencia*⁴⁵:

$$\int_{\partial\Omega} \Phi \cdot \vec{n} = \int_{\Omega} \operatorname{div} \Phi = \int_{\Omega} \nabla \cdot (-\mu \nabla u) = - \int_{\Omega} \mu \Delta u$$

Metiendo la derivada parcial temporal dentro de la primera integral⁴⁶ e introduciendo el resultado anterior se obtiene la conocida como **Ecuación Clásica del Calor**:

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial u}{\partial t} = \int_{\Omega} \mu \Delta u + \int_{\Omega} Q(\vec{x}, t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k \Delta u + f(\vec{x}, t)} \quad (7.4)$$

donde $k = \mu/(\rho c)$ es el **coeficiente de difusión de calor** o **difusividad térmica**, característica del sistema, y $f(\vec{x}, t)$ es una función que determina una **fuentes o sumidero de calor** en el sistema, en unidades apropiadas.

³⁹Ver la **Sección 7.4.1, página 186**.

⁴⁰Comúnmente es un sistema conductor en estado sólido.

⁴¹Cantidad de energía calorífica o térmica, bien por unidad de volumen (J/m^3), de superficie (J/m^2) o de longitud (J/m), en función de que la dimensión del sistema N sea 3, 2 ó 1 respectivamente.

⁴²Cantidad de calor que por unidad de masa necesita una sustancia para que su temperatura se eleve un grado. Sus unidades en el sistema internacional son $J/(kg \times ^\circ C)$ y de forma general depende del material y de la temperatura, y por tanto si el sistema es heterogéneo depende de la posición y de la temperatura, $c(\vec{x}, u)$. Para sistemas homogéneos (formados por un mismo material conductor) y si las variaciones de temperatura no son muy grandes, el calor específico c se puede considerar constante.

⁴³Masa por unidad de volumen (denominada densidad volumétrica, kg/m^3), de superficie (denominada densidad superficial, kg/m^2) o de longitud (denominada densidad lineal, kg/m).

⁴⁴Cantidad de energía calorífica que atraviesa una superficie (energía por unidad de superficie y unidad de tiempo) ($J/(m^2 \times s)$) o que atraviesa una curva (energía por unidad de longitud y unidad de tiempo) ($J/(m \times s)$). Tiene un carácter vectorial y de ahí que sea necesario multiplicarlo por el vector normal de la superficie o de la curva $\vec{n}$ para determinar el flujo efectivo. Se considera flujo positivo al que sale hacia el exterior del sólido y negativo hacia el interior. Viene definido de forma empírica por la conocida *ley de Fourier*, $\Phi = -\mu \nabla u$, donde μ es la *conductividad térmica* que mide la capacidad de la conducción de calor en un material. Generalmente $\mu u(\vec{x}, u)$ aunque al igual que el calor específico c , para sistemas homogéneos con variaciones de temperatura no muy grandes se puede considerar constante.

⁴⁵Ver la **Sección 7.8, página 236**.

⁴⁶Según la *regla integral de Leibniz*, si $f(x, t)$ es una función continua y derivable en un dominio, entonces $\frac{d}{dt} \int f(x, t) dx = \int \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx$.

7.4.2. Ecuación del Calor Unidimensional

Estudiaremos el fenómeno de la transferencia de calor por *conducción*⁴⁷ en una varilla delgada de material conductor con *difusividad térmica*⁴⁸ k dada por:



$$k = \frac{\mu}{\rho c} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu : \text{conductividad térmica}^{49} \\ \rho : \text{densidad} \\ c : \text{calor específico}^{50} \end{array} \right.$$

Consideraremos las siguientes suposiciones para la simplificación del problema:

- La longitud de la varilla L es constante.
- El material conductor es homogéneo y con k constante.
- El área lateral de la varilla es muy pequeña, de forma que la conducción del calor se considera solo en una dirección x (problema unidimensional).
- No hay generación de calor en el interior de la varilla.

Bajo estas suposiciones la variación de *temperatura* $u(x, t)$ en el interior de la varilla viene dada por la EDP conocida como **ecuación unidimensional del calor** o **ecuación de difusión**:

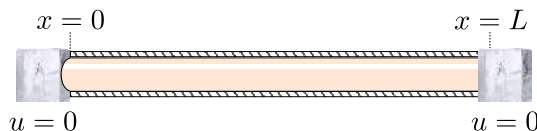
$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad ; \quad k > 0$$

que es del tipo *parabólico*⁵¹. El dominio Ω de esta ecuación es la varilla, considerada una línea recta en la dirección x y su frontera $\partial\Omega$ está formada por los extremos derecho e izquierdo y la superficie lateral de la varilla.

Vamos a analizar la solución de diferentes problemas en EDP formados por esta ecuación y determinadas condiciones iniciales y de contorno sencillas.

Caso 1: Superficie Lateral Aislada y Condiciones Dirichlet

Vamos a considerar el caso de una varilla aislada en su superficie lateral y donde los extremos $x = 0$ y $x = L$ se encuentran a temperatura constante⁵² igual a cero⁵³, por lo que solo existe conducción de calor en el interior de la varilla en la dirección x .



Inicialmente a tiempo $t = 0$ suponemos que hay una distribución de temperatura en el interior de la varilla que viene dada por una función $f(x)$. Estamos interesados en conocer la evolución de la temperatura con el tiempo en todos los puntos $0 < x < L$. Claramente, debido al fenómeno de la conducción del calor, éste fluirá de la zonas más calientes a las zonas más frías, hasta alcanzarse un estado estacionario⁵⁴ que corresponderá con una distribución lineal de temperatura en función de los valores frontera⁵⁵.

El problema en EDP para este caso se puede expresar de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{ll} k u_{xx} = u_t & 0 < x < L \quad ; \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0 \quad , \quad u(L, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < L \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(EDP interior varilla)} \\ \text{(Cond. contorno Dirichlet)} \\ \text{(Cond. iniciales)} \end{array} \quad (7.5)$$

⁴⁷Ver la Sección 7.4.2, página 194 para el caso de transferencia de calor por *convección*.

⁴⁸Capacidad térmica de un material.

⁴⁹Proporcional al flujo de calor Q .

⁵⁰Calor necesario para subir 1°C la temperatura.

⁵¹Ver la Sección 7.1.4, página 180.

⁵²En el caso 3 de la Sección 7.4.2, página 193 se verá el caso de temperaturas constantes no nulas.

⁵³Se puede suponer de forma ideal que los extremos están en contacto con un bloque de hielo a temperatura 0°C como muestra la figura.

⁵⁴Realmente este se obtiene a tiempo infinito pero la velocidad de cambio va disminuyendo con el tiempo.

⁵⁵En este caso, claramente la temperatura de toda la barra a tiempos grandes tiene que ser cero, igual a la temperatura que hay en sus dos extremos. Parte del calor que inicialmente contenía la barra será absorbido por el hielo, que suponemos se encuentra en condiciones ideales para que no varíe su temperatura.

Vamos calcular la solución particular de este problema mediante el *método de separación de variables*. Suponemos que la solución se puede expresar como producto de dos funciones que dependen solo de una variable. Determinando la derivadas y sustituyendo en la EDP se tiene.

$$u(x, t) = X(x)T(t) \implies \begin{cases} u_{xx} = X''T \\ u_t = XT' \end{cases} \implies kX''T = XT' \quad ; \quad \frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT}$$

Claramente este método sí es válido para esta ecuación. Para que pueda cumplirse esta igualdad entre variables independientes x y t , es necesario que ambas partes de la igualdad sean iguales a una misma constante⁵⁶, que por comodidad la expresaremos como⁵⁷ $-\lambda$, obteniéndose dos ecuaciones:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = -\lambda \implies \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & \text{(Ec. 1)} \\ T' + \lambda kT = 0 & \text{(Ec. 2)} \end{cases} \quad (7.6)$$

que junto con las condiciones iniciales y de contorno apropiados en cada caso dan lugar a dos *problemas de autovalores*⁵⁸.

Problema 1

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & \text{(Ec. 1)} \\ X(0) = X(L) = 0 & \text{(Cond. frontera)} \end{cases}$$

Este es un problema básico de Sturm-Liouville que ya fue resuelto en la [Sección 6.2.1, página 154](#), siendo sus autovalores y autofunciones asociadas:

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad ; \quad X_n(x) = c_{2n} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.7)$$

Problema 2

Teniendo en cuenta los autovalores λ_n calculados anteriormente se tiene:

$$\begin{cases} T' + k\lambda_n T = 0 & \text{(Ec. 2)} \\ u(x, 0) = X(x)T(0) = f(x) & \text{(Cond. inicial)} \end{cases} \quad (7.8)$$

En este caso se trata de una EDO de primer orden separable⁵⁹, siendo la solución:

$$\int \frac{dT}{T} = -k\lambda_n t \quad ; \quad \log T = -k\lambda_n t + c_3 \quad ; \quad T(t) = c_3 e^{-k\lambda_n t}$$

Teniendo en cuenta el valor de los autovalores λ_n obtenidos en el problema anterior, Ecuación (??), se tiene:

$$T_n(t) = c_n e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2} \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

Por tanto una solución completa para $n > 0$ será:

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = c_{3n} e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Para cada valor de n se obtiene una posible solución al problema, por tanto por el *principio de superposición*⁶⁰ la solución general del problema dado en la [Ecuación 7.5, página 188](#) es:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

⁵⁶De otra forma habría alguna relación entre x y t y dejarían de ser independientes.

⁵⁷El resultado es el mismo si lo expresamos como $+\lambda$.

⁵⁸Ver la [Definición 6.1, página 153](#).

⁵⁹Ver la [Sección 2.2, página 23](#).

⁶⁰Ver la [Sección 7.2.2, página 186](#).

Las constantes c_n se pueden obtener a través de la condición inicial de la [Ecuación 7.8, página 189](#):

$$u(x, 0) = X(x)T(0) = f(x) \quad \Rightarrow \quad u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

Esto corresponde con la *serie de Fourier de senos*⁶¹ de $f(x)$ y por tanto las constantes c_n correspondientes a los coeficientes de la serie se pueden obtener como:

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(s) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}s\right) ds$$

Siendo por tanto la solución particular final de nuestro problema:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L f(s) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}s\right) ds \right) e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.9)$$

En la [Figura 7.1](#) se muestran la gráficas de resultados obtenidos en un par de ejemplos.

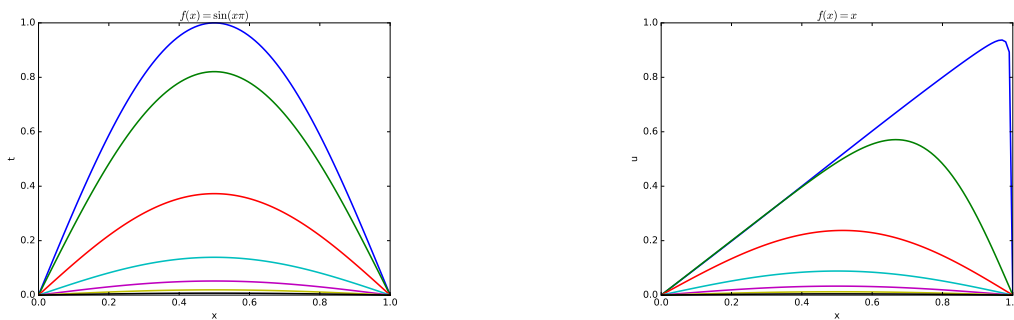


Figura 7.1: Resultados obtenidos en la ecuación del calor unidimensional con condiciones Dirichlet y valores $L = k = 1$, utilizando diferentes funciones $f(x)$ como condición inicial. En cada una de las gráficas se muestran los perfiles de temperatura de la varilla a distintos tiempos (colores). En ambos casos se han utilizado una aproximación de 200 términos en la serie que define la solución $u(x, t)$. Podemos observar como a medida que evoluciona el tiempo desde $t = 0$ (gráfica azul) la temperatura de todos los puntos interiores de la varilla tienden a la temperatura 0 de los extremos. Hay por tanto una pérdida de calor por los extremos.

Función de Green del Problema

La solución (7.9) del problema puede expresarse alternativamente de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L f(s) \operatorname{sen} \frac{n\pi s}{L} ds \right) e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = \\ &= \int_0^L \underbrace{\left(\frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi s}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \right)}_{G(x, t, s)} f(s) ds = \int_0^L G(x, t, s) f(s) ds \end{aligned}$$

donde $G(x, t, s)$ es la **función de Green**⁶² de este problema.

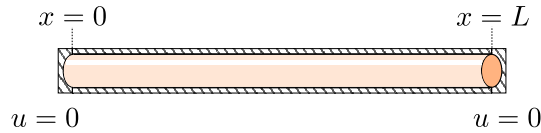
Caso 2: Superficie Lateral Aislada y Condiciones Neumann

Vamos a considerar un problema similar al caso 1 de la [Sección 7.4.2, página 188](#), salvo que los extremos $x = 0$ y $x = L$ también se encuentran aislados térmicamente al igual que la superficie lateral, y por tanto no habrá transferencia de calor con el exterior⁶³ en ningún punto.

⁶¹Ver la [Sección 5.4.4, página 145](#).

⁶²Ver la [Definición 3.11, página 75](#).

⁶³A pesar de ello, como en el interior de la barra existe un perfil de temperatura inicial, se produce transferencia de calor y una variación de la temperatura en todos sus puntos con el tiempo.



Matemáticamente las condiciones en los extremos se expresan indicando que la variación de temperatura con respecto a la variable x es siempre cero, $u_x(0, t) = 0$ y $u_x(L, t) = 0$, siendo el PVF asociado a este caso el siguiente:

$$\begin{cases} ku_{xx} = u_t & 0 < x < L ; t > 0 & \text{(EDP interior varilla)} \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0 & t > 0 & \text{(Cond. frontera Neumann)} \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < L & \text{(Cond. iniciales)} \end{cases}$$

Siguiendo el mismo procedimiento del caso 1, al aplicar el *método de separación de variables* se obtienen las dos mismas EDO de la [Ecuación 7.6, página 189](#) y sus correspondientes problemas con las condiciones iniciales y de frontera que resolveremos por separado.

Problema 1

En este caso solo cambian las condiciones frontera:

$$u_x(0, t) = X'(0)T(t) = 0 \implies X'(0) = 0$$

ya que al igual que el caso anterior $T(t)$ no puede ser nula para todo t . De igual forma se obtiene:

$$u_x(L, t) = X'(L)T(t) = 0 \implies X'(L) = 0$$

de forma que el primer problema queda como:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & \text{(Ec. 1)} \\ X'(0) = X'(L) = 0 & \text{(Cond. frontera)} \end{cases}$$

Este es un problema básico de Sturm-Liouville que ya fue resuelto en la [Sección 6.2.1, página 156](#), siendo sus autovalores y autofunciones asociadas:

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad ; \quad X_n(x) = c_{2n} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Notar que en este caso aparece el coseno en lugar del seno del Problema 1 del Caso 1 en la [Ecuación 7.7, página 189](#), además de haber incluido el valor de $n = 0$ que da lugar a una solución constante.

Problema 2

Teniendo en cuenta los autovalores λ_n calculados anteriormente se tiene:

$$\begin{cases} T' + k\lambda_n T = 0 & \text{(Ec. 2)} \\ u(x, 0) = X(x)T(0) = f(x) & \text{(Cond. inicial)} \end{cases}$$

En este caso repitiendo los mismos pasos del **Problema 2** del **Caso 1** ([Ecuación 7.8, página 189](#)) se obtiene:

$$T' + k\lambda_n T = 0 \quad ; \quad \int \frac{dT}{T} = -k\lambda_n dt \quad ; \quad \log T = -k\lambda_n t + c_3 \quad ; \quad T(t) = c_3 e^{-k\lambda_n t}$$

$$T_n(t) = c_{3n} e^{-kn^2\pi^2 t/L^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Por tanto la solución completa es:

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = c_n e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

y por el *principio de superposición* la solución general será:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Las constantes c_n se pueden obtener a través de la condición inicial del problema:

$$u(x, 0) = f(x) \quad \Rightarrow \quad u(x, 0) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

que corresponde en este caso con la *serie de Fourier de cosenos*⁶⁴ de $f(x)$ y por tanto las constantes c_n se pueden obtener como:

$$c_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(s) ds \quad ; \quad c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(s) \cos\left(\frac{n\pi}{L}s\right) ds$$

Siendo finalmente la solución particular del problema la siguiente:

$$u(x, t) = \frac{1}{L} \int_0^L f(s) ds + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L f(s) \cos\left(\frac{n\pi s}{L}\right) ds \right) e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (7.10)$$

En la **Figura 7.2** se muestran la gráficas de resultados obtenidos en un par de ejemplos, utilizando las mismas funciones de la **Figura 7.1**, página 190.

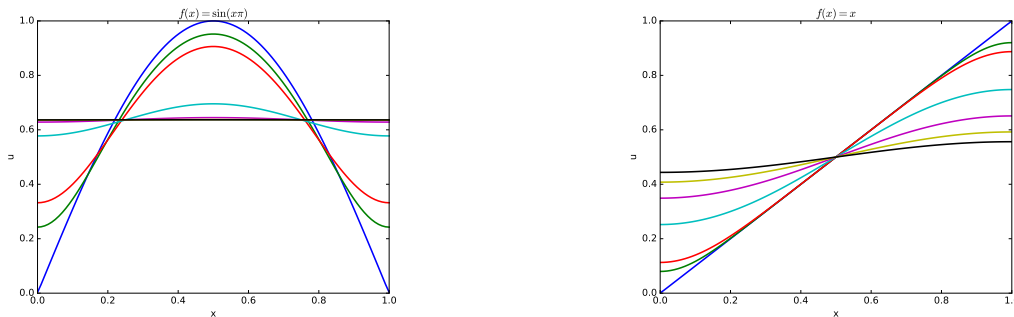


Figura 7.2: Resultados obtenidos en la ecuación del calor con condiciones Neumann y los mismos valores de los *parámetros* que los utilizados en la **Figura 7.1**, página 190. En estos casos podemos observar como a medida que evoluciona el tiempo desde $t = 0$ (gráfica azul), la temperatura de todos los puntos internos de la varilla tienden a homogeneizarse al valor constante correspondiente a la temperatura promedio. Esto se debe a que no hay pérdidas de calor al estar aislados tanto la superficie lateral como los dos extremos. Notar que salvo a $t = 0$, los extremos de todas las gráficas tienen pendiente horizontal (derivada cero) correspondiente a las condiciones Neumann.

Las condiciones Dirichlet y Neumann pueden aparecer en un mismo problema, por ejemplo, con un extremo de la varilla a temperatura constante y el otro aislado.

Función de Green del Problema

La solución (7.10) del problema puede expresarse alternativamente de la siguiente forma:

$$u(x, t) = \int_0^L \underbrace{\left(\frac{1}{L} + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi s}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \right)}_{G(x, t, s)} f(s) ds = \int_0^L G(x, t, s) f(s) ds$$

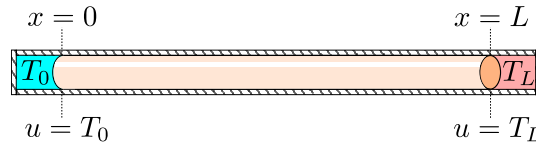
donde $G(x, t, s)$ es la **función de Green**⁶⁵ de este problema.

⁶⁴Ver la **Sección 5.4.4**, página 144.

⁶⁵Ver la **Definición 3.11**, página 75.

Caso 3: Condiciones Dirichlet No Homogéneas

Estudiamos ahora el caso de una barra metálica aislada en su superficie lateral y con temperatura constante en sus dos extremos⁶⁶: T_0 es la temperatura en el extremo $x = 0$ y T_L es la temperatura en $x = L$.



El problema matemático que describe este sistema está formado por la ecuación del calor, unas condiciones iniciales y unas condiciones frontera de tipo Dirichlet no nulas, conocidas como **condiciones no homogéneas**⁶⁷, de la forma:

$$\begin{cases} ku_{xx} = u_t & 0 < x < L ; t > 0 & \text{(EDP interior varilla)} \\ u(0, t) = T_0, \quad u(L, t) = T_L & t > 0 & \text{(Cond. frontera Dirichlet)} \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < L & \text{(Cond. iniciales)} \end{cases}$$

Este problema a pesar de ser similar al Caso 1 (Sección 7.4.2, página 188), las condiciones Dirichlet no nulas hacen que el uso del método tradicional no resulte sencillo para encontrar los autovalores del problema⁶⁸. En esta sección vamos a ver un método alternativo de cálculo más sencillo, basado en la descomposición del problema en dos más simples.

Debido a las condiciones frontera, es lógico pensar que la temperatura $u(x, t)$, solución de este problema, tendrá inicialmente un perfil dado por la condición inicial $f(x)$ y a medida que avanza el tiempo sufrirá unas determinadas variaciones hasta alcanzar un estado **estacionario**, a tiempo infinito, donde la temperatura solo dependerá de la posición x y no del tiempo t . Por tanto podemos descomponer la solución del problema $u(x, t)$ en la suma de dos funciones como:

$$u(x, t) = v(x, t) + u_\infty(x)$$

donde $v(x, t)$ es la **solución transitoria** que depende tanto de x como de t y que tiende a cero a medida que $t \rightarrow \infty$, y donde $u_\infty(x)$ es la **solución estacionaria** que es el perfil de temperatura fijo que se alcanza a tiempos suficientemente grandes y que solo depende de la posición.

La solución estacionaria $u_\infty(x)$ es fácil de calcular en este caso, ya que al no depender del tiempo, su derivada con respecto a t es igual a cero y por tanto sustituyendo en la EDP del problema se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_\infty = 0 \xrightarrow{ku_{xx}=u_t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_\infty = 0 \quad ; \quad u_\infty = c_1 + c_2 x \quad \left\{ \begin{array}{l} u(0, t) = T_0 \\ u(L, t) = T_L \end{array} \right\} \quad u_\infty(x) = T_0 + \frac{T_L - T_0}{L} x$$

Notar que esta función corresponde con una línea recta que une los puntos $(0, T_0)$ y (L, T_L) . Una vez conocido el *estado estacionario* $u_\infty(x)$, la *solución transitoria* $v(x, t)$ se puede obtener resolviendo el siguiente problema con condiciones de contorno homogéneas:

$$\begin{cases} kv_{xx} = v_t & 0 < x < L ; t > 0 & \text{(EDP interior varilla)} \\ v(0, t) = 0, \quad v(L, t) = 0 & t > 0 & \text{(Cond. frontera Dirichlet)} \\ v(x, 0) = f(x) - u_\infty(x) & 0 < x < L & \text{(Cond. iniciales)} \end{cases}$$

que es similar al Caso 1 de la Sección 7.4.2, página 188 (solo cambia la función de la condición inicial) y por tanto cuya solución es:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L [f(s) - u_\infty(s)] \sin \frac{n\pi s}{L} ds \right) e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

⁶⁶En la figura se representa en cada extremo de la barra un medio, por ejemplo un líquido, aislado a temperatura constante en contacto con la superficie del extremo. Los colores indican que la temperaturas T_0 y T_L pueden ser iguales o distintas.

⁶⁷Si ambas son nulas, como en los dos casos anteriores se denominan *condiciones Dirichlet homogéneas*.

⁶⁸Se recomienda probar a resolverlo para darse cuenta de ello.

que puede expresarse a través de su **función de Green** de la forma:

$$v(x, t) = \int_0^L \left(\frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi s}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \right) [f(s) - u_{\infty}(s)] ds = \int_0^L G(x, t, s) [f(s) - u_{\infty}(s)] ds$$

y la solución final del problema puede expresarse entonces como:

$$u(x, t) = v(x, t) + u_{\infty}(x) = \int_0^L G(x, t, s) \left[f(s) - T_0 - \frac{T_L - T_0}{L} s \right] ds + T_0 + \frac{T_L - T_0}{L} x$$

En la **Figura 7.3** se muestra la gráfica de resultados obtenidos en un ejemplo práctico de este caso.

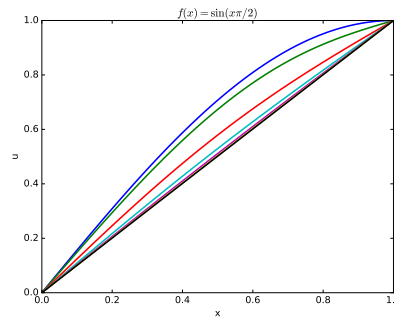
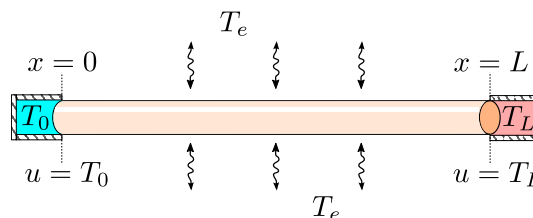


Figura 7.3: Resultados obtenidos en la ecuación del calor con condiciones Dirichlet no homogéneas, tomando como valores $L = k = 1$ y como condición inicial $f(x) = \sin(x\pi/2)$, de forma que $u(0, t) = 0$ y $u(L, t) = 1$. Podemos observar como a medida que evoluciona el tiempo desde $t = 0$ (gráfica azul), la temperatura tiende a la recta $u_{\infty}(x) = 0 + \frac{1-0}{1}x = x$, (gráfica negra). En este caso no hay pérdida de calor, al estar la varilla totalmente aislada, y simplemente hay una redistribución del perfil de temperatura inicial.

Este procedimiento de *descomponer un problema* en su parte estacionaria más otro problema con condiciones de contorno homogéneas, es una técnica que se puede utilizar en la resolución de otros casos más complicados, como veremos a continuación.

Caso 4: Superficie Lateral No Aislada

En los dos casos anteriores se ha supuesto que la superficie lateral de la varilla estaba aislada y por tanto no había transferencia de calor con el exterior en esa parte. Vamos a estudiar ahora el caso en el que los extremos se encuentren a temperatura constante pero la superficie esté en contacto directo con el medio exterior, sin ningún tipo de aislamiento.



En este caso, el calor fluirá no solo en el interior de la varilla por *conducción* sino que también habrá una pérdida o ganancia del mismo por *convección*, en función de la temperatura del exterior⁶⁹ constante T_e .

⁶⁹La temperatura del medio T_e se supone que está medida a una distancia suficientemente alejada de la varilla, ya que en el medio exterior cerca del extremo $x = L$ tiene que haber una temperatura variable en función del tiempo como consecuencia de la transferencia de calor con la varilla.

Una forma simplificada de modelizar la transferencia de calor en el interior de la varilla es mediante la siguiente ecuación.

$$\underbrace{ku_{xx}}_{\text{I}} + \underbrace{h(T_e - u)}_{\text{II}} = u_t \quad \begin{cases} u & : \text{temperatura interior varilla} \\ T_e & : \text{temperatura exterior} \\ k & : \text{difusividad térmica (conducción), } k > 0 \\ h & : \text{coef. intercambio calor (convección), } h > 0 \end{cases} \quad (7.11)$$

- **Término I** : Transmisión de calor por conducción en el interior de la varilla.
- **Término II** : Transmisión de calor por convección en la superficie de la varilla.

donde la difusividad térmica k depende exclusivamente del material de la barra, mientras que el coeficiente de intercambio de calor h depende tanto del material de la barra como del medio exterior que rodea a su superficie lateral.

Vamos a seguir el procedimiento del anterior Caso 3 de *descomposición del problema*. Se entiende que inicialmente hay un perfil de temperatura dado en el interior de la barra $f(x)$ y a medida que avanza el tiempo hay una serie de variaciones espacio-temporales de la temperatura que vienen dadas por la *solución transitoria* $v(x, t)$ y que a tiempos suficientemente grandes se alcanza un *estado estacionario* $u_\infty(x)$ independiente del tiempo, cumpliéndose:

$$u(x, t) = v(x, t) + u_\infty(x) \quad (7.12)$$

Para determinar la solución estacionaria $u_\infty(x)$ se puede sustituir en la **Ecuación (7.11)** teniendo en cuenta que $u_t = 0$ obteniéndose:

$$ku_\infty'' + h(T_e - u_\infty) = 0 \quad ; \quad ku_\infty'' - hu_\infty = -hT_e \quad (7.13)$$

donde $u_\infty'' = \frac{d^2}{dx^2}u_\infty$. Esta ecuación es una EDO lineal de segundo orden no homogénea⁷⁰ cuya solución general es⁷¹:

$$u_\infty(x) = c_1 e^{x\sqrt{h/k}} + c_2 e^{-x\sqrt{h/k}} + T_e$$

y teniendo en cuenta las condiciones frontera $u_\infty(0) = T_0$ y $u_\infty(L) = T_L$ se pueden determinar las constantes de integración (solución particular):

$$c_2 = \frac{T_L - T_e - (T_0 - T_e)e^{L\sqrt{h/k}}}{e^{-L\sqrt{h/k}} - e^{L\sqrt{h/k}}} \quad ; \quad c_1 = T_0 - T_e - c_2$$

Para encontrar el problema que define la solución transitoria $v(x, t)$ se deriva la **Ecuación (7.12)** obteniéndose:

$$\begin{cases} u_x = v_x + u_\infty' \\ u_{xx} = v_{xx} + u_\infty'' \\ u_t = v_t \end{cases}$$

e introduciendo estos valores en la **Ecuación (7.11)** y teniendo en cuenta la **Ecuación (7.13)** se tiene:

$$k(v_{xx} + u_\infty'') + h(T_e - v - u_\infty) = v_t \quad \Rightarrow \quad kv_{xx} + \underbrace{ku_\infty'' + h(T_e - u_\infty)}_0 - hv = v_t$$

Por tanto el problema que define la solución transitoria es:

$$\begin{cases} kv_{xx} - hv = v_t & 0 < x < L \quad ; \quad t > 0 & \text{(EDP interior varilla)} \\ v(0, t) = 0, \quad v(L, t) = 0 & t > 0 & \text{(Cond. frontera Dirichlet homogéneas)} \\ v(x, 0) = f(x) - u_\infty(x) & 0 < x < L & \text{(Cond. iniciales)} \end{cases}$$

Esta EDP se puede resolver mediante el método de separación de variables de la siguiente forma⁷²:

$$v = XT \quad ; \quad \frac{X''}{X} = \frac{T' + hT}{kT} = -\lambda^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ T' + (h + k\lambda^2)T = 0 \end{cases}$$

⁷⁰Ver la **Sección 3.3, página 64**.

⁷¹Se puede encontrar fácilmente por ejemplo aplicando el *método de los coeficientes indeterminados* (**Sección 3.3.1, página 64**).

⁷²Aquí se utiliza como constante $-\lambda^2$ por conveniencia en la simplificación del proceso, pero se puede tomar cualquier otro valor obteniéndose el mismo resultado.

cuyas respectivas soluciones son:

$$X_n(x) = c_{3n} \cos \lambda_n x + c_{4n} \sin \lambda_n x \quad ; \quad T_n(t) = c_{5n} e^{-(h+k\lambda_n^2)t}$$

y teniendo en cuenta las condiciones de contorno $X(0) = X(L) = 0$ se tiene que $c_{3n} = 0$ y $\lambda_n = n\pi/L$ con $n = 1, 2, \dots$. Por tanto:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(h+k\lambda_n^2)t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad ; \quad A_n = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - u_{\infty}(x)] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

En la **Figura 7.4** se muestran la gráficas de resultados obtenidos en un par de ejemplos prácticos de este caso.

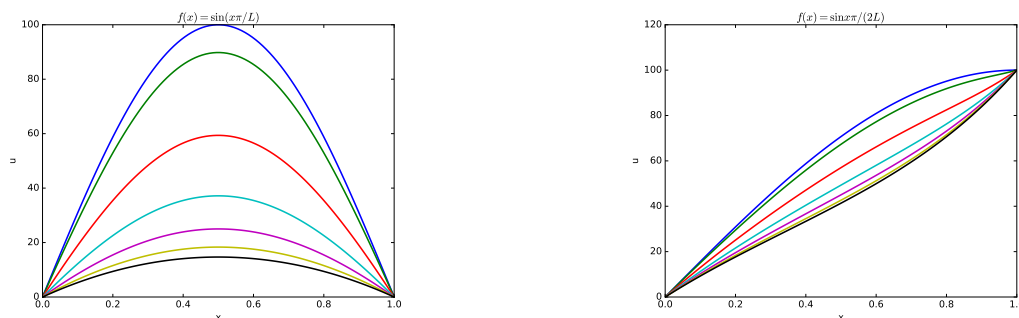
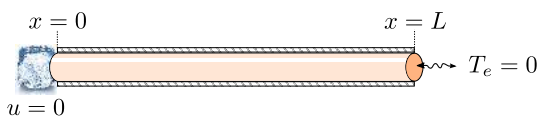


Figura 7.4: Resultados obtenidos en la ecuación del calor con condiciones Dirichlet no homogéneas y valores $L = 1$, $k = 1$, $h = 5$ y $T_e = 25$. En la gráfica de la izquierda se ha tomado como condición inicial $f(x) = 100 \sin(\pi x/L)$ (curva azul) y valores en la frontera $T_0 = T_L = 0$, observándose que como consecuencia de la transmisión de calor con el exterior el perfil de temperatura estacionario (curva negra) no es plano, como sí ocurre cuando la superficie lateral está aislada (ver la **Figura 7.1**, página 190). En la gráfica de la derecha se ha tomado como condición inicial $f(x) = 100 \sin \pi x/(2L)$ (curva azul) y valores en la frontera $T_0 = 0$ y $T_L = 100$, observándose que como consecuencia de la transmisión de calor con el exterior el perfil de temperatura estacionario (curva negra) no es una línea recta, como sí ocurre cuando la superficie lateral está aislada (ver la **Figura 7.3**, página 194).

Caso 5: Condiciones Dirichlet + Robin

Vamos a considerar ahora el caso de una varilla con la superficie lateral aislada, uno de los extremos a temperatura constante, por ejemplo⁷³ $u = 0$ (condición de tipo Dirichlet), y el otro en contacto directo con el medio exterior (condición de tipo Robin), siendo la temperatura constante del medio exterior T_e , que por simplicidad vamos a suponer $T_e = 0$.



El PVF de este caso se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{cases} ku_{xx} = u_t & 0 < x < L \quad ; \quad t > 0 & \text{(EDP interior varilla)} \\ u(0, t) = 0 & t > 0 & \text{(Cond. frontera Dirichlet)} \\ u_x(L, t) = -hu(L, t) & t > 0 & \text{(Cond. frontera Robin)} \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < L & \text{(Cond. iniciales)} \end{cases}$$

donde h es un valor constante representativo de la transferencia de calor entre la varilla y el medio ambiente en ese extremo⁷⁴. Esta condición frontera Robin establece que la velocidad de transferencia de calor u_x entre el

⁷³Podemos suponer idealmente que ese extremo está en contacto con un trozo de hielo.

⁷⁴El valor y las unidades de este coeficiente h son distintos del valor de h que aparece en el Caso 4 anterior.

extremo derecho de la varilla y el medio ambiente es proporcional a la diferencia de temperatura, en cada tiempo, entre el extremo y el medio circundante. Notar que si la temperatura exterior T_e es superior a la temperatura del extremo $x = L$, entonces $u_x(L, t) > 0$ y hay una transferencia de calor del medio a la varilla⁷⁵, y de igual forma si $T_e < u(L, t)$ entonces $u_x(L, t) < 0$ y la transferencia de calor se produce de la varilla al medio⁷⁶.

Aplicando separación de variables se obtienen los dos problemas siguientes:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = -\lambda \implies \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & \text{(Ec. 1)} \\ T' + \lambda kT = 0 & \text{(Ec. 2)} \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X'(L) + hX(L) = 0 \end{cases} ; \quad (2) \begin{cases} T' + k\lambda T = 0 \\ u(x, 0) = X(x)T(0) = f(x) \end{cases}$$

El problema (1) es un *problema regular de autovalores de Sturm-Liouville*⁷⁷, de forma que analizando los tres casos de λ : $\lambda = 0$, $\lambda > 0$ y $\lambda < 0$ se tiene:

- $\lambda = 0$

$$X = c_1 + c_2x \implies \begin{cases} X(0) = 0 \implies c_1 = 0 \\ X'(L) + hX(L) = 0 \implies c_2 + hc_2L = 0 ; c_2(1 + hL) = 0 \implies c_2 = 0 \end{cases}$$

Por tanto $\lambda = 0$ no es un autovalor, ya que $hL > 0$.

- $\lambda \neq 0$. La ecuación característica queda $m^2 + \lambda = 0 \implies m = \sqrt{-\lambda}$

$$1. \lambda < 0 \implies m = \pm\alpha, \text{ con } \alpha > 0 \implies X = c_1 \cosh(\alpha x) + c_2 \sinh(\alpha x)$$

$$\begin{cases} X(0) = 0 \implies c_1 = 0 \\ X'(L) + hX(L) = 0 \implies c_2\alpha \cosh(\alpha L) + hc_2 \sinh(\alpha L) = 0 ; c_2[\alpha \cosh(\alpha L) + h \sinh(\alpha L)] = 0 \end{cases}$$

Para que c_2 no fuera nulo se tendría que cumplir $\tanh(\alpha L) = -\alpha/h < 0$, que ocurre para⁷⁸ $\alpha L < 0$, lo que es imposible ya que α y L son positivos, y por tanto $c_2 = 0$ y $\lambda < 0$ tampoco es autovalor.

$$2. \lambda > 0 \implies m = \pm i\sqrt{\lambda} \implies X = c_1 \cos(x\sqrt{\lambda}) + c_2 \sin(x\sqrt{\lambda})$$

$$\begin{cases} X(0) = 0 \implies c_1 = 0 \\ X'(L) + hX(L) = 0 \implies c_2\sqrt{\lambda} \cos(L\sqrt{\lambda}) + hc_2 \sin(L\sqrt{\lambda}) = 0 \end{cases}$$

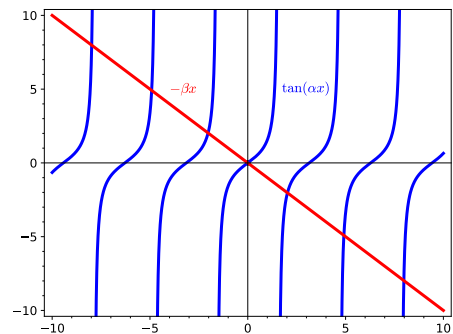
$$c_2[\sqrt{\lambda} \cos(L\sqrt{\lambda}) + h \sin(L\sqrt{\lambda})] = 0 \xrightarrow{c_2 \neq 0} \tan(L\sqrt{\lambda}) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h}$$

Notar que la ecuación:

$$\tan(\alpha x) = -\beta x \quad ; \quad \alpha, \beta > 0$$

tiene infinitas soluciones positivas $x = \mu_n$, por tanto los autovalores y autofunciones asociadas a este problema son:

$$\sqrt{L\lambda_n} = \mu_n \implies \boxed{\lambda_n = \frac{\mu_n^2}{L^2}} \quad \boxed{X_n(x) = c_2 \sin \frac{\mu_n x}{L}}$$



Con estos autovalores, la ecuación del problema (2) queda:

$$T' + k\lambda_n T = 0 \implies T' + \frac{k\mu_n^2}{L^2} T = 0 \implies \boxed{T_n(t) = c_n e^{-\frac{k\mu_n^2}{L^2} t}}$$

⁷⁵Aumentando por tanto la temperatura en ese extremo de la varilla.

⁷⁶Disminuyendo la temperatura en el extremo.

⁷⁷Ver la Sección 6.3, página 160.

⁷⁸Ver la gráfica de la función $\tanh(x)$ en la Sección 6.2.1, página 154.

Y la solución completa, teniendo en cuenta el principio de superposición:

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = A_n e^{-\frac{\kappa \mu_n^2}{L} t} \sin \frac{\mu_n x}{L} \quad \Rightarrow \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^n A_n e^{-\frac{\kappa \mu_n^2}{L} t} \sin \frac{\mu_n x}{L}$$

La determinación de los coeficientes se hace a través de la condición inicial del problema:

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^n A_n \sin \frac{\mu_n x}{L}$$

Notar que esta serie **no** corresponde con la *serie de Fourier de senos*⁷⁹, si no que corresponde con el desarrollo de la función $f(x)$ en términos de las autofunciones del anterior problema de Sturm-Liouville (1), que como sabemos forman un *conjunto completo ortogonal de funciones*⁸⁰ con respecto a la función peso $r(x)$, que en este caso es $r(x) = 1$.

Por tanto tenemos una **serie de Fourier Generalizada**⁸¹ y los coeficientes A_n pueden ser determinados mediante:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} A_n y_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{\mu_n x}{L} \quad \Rightarrow \quad A_n = \frac{\int_a^b r(x) f(x) y_n(x) dx}{\int_a^b r(x) y_n^2(x) dx} = \frac{\int_0^L f(x) \sin \frac{\mu_n x}{L} dx}{\int_0^L \sin^2 \frac{\mu_n x}{L} dx}$$

El resultado final se puede expresarse también a través de su **función de Green** como:

$$u(x, t) = \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\int_0^L \sin^2 \frac{\mu_n s}{L} ds} \sin \frac{\mu_n s}{L} \sin \frac{\mu_n x}{L} e^{-\frac{\kappa \mu_n^2}{L} t} f(s) ds = \int_0^L G(x, t, s) f(s) ds$$

En la **Sección 7.7.1, página 228** se analizarán problemas de la ecuación del calor en varias dimensiones, después de estudiar problemas con la ecuación de Laplace en la **Sección 7.6.1, página 218**, ya que estos últimos serán necesarios.

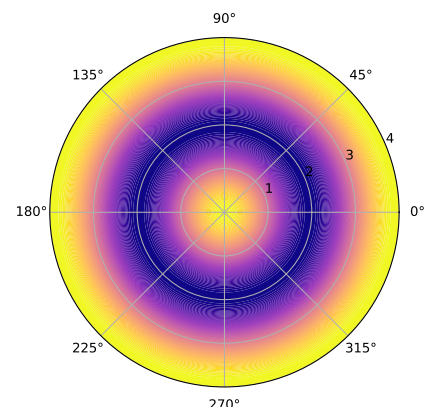
7.4.3. Ecuación del Calor en Polares con Simetría Radial

Consideramos la ecuación del calor en una placa bidimensional circular de radio r con **simetría radial** donde la solución no depende del ángulo⁸² θ .

En la figura se muestra el *mapa de contorno* coloreado de una función con simetría radial, donde cada color representa un valor en una determinada escala. Se observa que la variación de valores se produce en la dirección radial, pero esa distribución es la misma independientemente del ángulo. Usando coordenadas polares⁸³:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}}_0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

Notar que este caso corresponde con un problema unidimensional en el espacio, donde $u(r, t)$ solo depende de la variable espacial r .



⁷⁹Ver la **Sección 5.4.5, página 146**.

⁸⁰Ver la **Sección ??, página ??**.

⁸¹Ver el **Teorema 6.1, página 164**.

⁸²Notar que el tratamiento seguido aquí también sería equivalente al del problema del calor en una esfera de radio r y con *simetría radial*.

⁸³Un problema similar pero con la ecuación de onda se estudia en la **Sección 7.5.2, página 209**.

Resolvamos el siguiente problema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) & r \in (0, a), t > 0 \\ u(a, t) = 0 & t > 0 \\ |u(0, t)| < \infty & t > 0 \\ u(r, 0) = f(r) & r \in (0, a) \end{array} \right. \quad (\text{Cond. Compatibilidad}) \quad (7.14)$$

Aplicando separación de variables: $u(r, t) = R(r)T(t)$

$$RT' = \frac{k}{r}T(rR')' \quad ; \quad \frac{T'}{kT} = \frac{1}{rR}T(rR')' = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} (rR')' + \lambda rR = 0 & (1) \\ T' + k\lambda T = 0 & (2) \end{array} \right. \quad (7.15)$$

El primer problema es:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (rR')' + \lambda rR = 0 & r \in (0, a) \\ R(a) = 0 \\ |R(0)| < \infty & \text{Cond. Compatibilidad} \end{array} \right.$$

Notar que al ser una EDO de segundo orden hay que imponer dos condiciones frontera, pero solo tenemos una en el borde $r = a$. En necesario imponer una nueva condición en el otro borde $r = 0$, denominada **condición de compatibilidad**⁸⁴, que será que la solución en $r = 0$ sea real.

Analizamos el primer problema de autovalores:

- $\lambda = 0$

$$(rR')' = 0 \quad ; \quad rR' = c_1 \quad ; \quad dR = \frac{C_1}{r}dr \quad ; \quad R(r) = c_1 \ln(r) + c_2 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Cond. Compatibilidad:} & c_1 = 0 \\ R(a) = 0 : & c_2 = 0 \end{array} \right\}$$

Por tanto, $\lambda = 0$ no es autovalor del problema.

- $\lambda \neq 0$

$$rR'' + R' + \lambda rR = 0 \quad \xrightarrow{\text{Multiplicando por } r} \quad r^2R'' + rR' + \lambda r^2R = 0 \quad (7.16)$$

que corresponde con una **ecuación paramétrica de Bessel**⁸⁵ y por tanto haciendo el cambio de variable:

$$z = r\sqrt{\lambda} \quad ; \quad r = \frac{z}{\sqrt{\lambda}}$$

$$R(r) = R(z/\sqrt{\lambda}) = \phi(z) \quad ; \quad R'(r) = \frac{d\phi}{dz} \frac{dz}{dr} = \phi'(z)\sqrt{\lambda} \quad ; \quad R''(r) = \frac{d}{dz} \left[\phi'(z)\sqrt{\lambda} \right] \frac{dz}{dr} = \phi''(z)\lambda$$

Sustituyendo estos valores en la (7.16) se tiene:

$$\cancel{\frac{z^2}{\lambda} \phi''} \cancel{\lambda} + \cancel{\frac{z}{\sqrt{\lambda}} \phi' \sqrt{\lambda}} + \phi \cancel{\frac{z^2}{\lambda} \lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 \phi'' + z \phi' + z^2 \phi = 0$$

que es una **ecuación de Bessel**⁸⁶ de orden $m = 0$ y cuya solución es:

$$\phi(z) = c_1 J_0(z) + c_2 Y_m(z) \quad \xrightarrow{\text{c.v.}} \quad \boxed{R(r) = c_1 J_0(r\sqrt{\lambda}) + c_2 Y_0(r\sqrt{\lambda})}$$

Recordamos que la función Y_m no está acotada en el origen⁸⁷ y por tanto, por la concición de compatibilidad obliga a eliminar ese término, por tanto:

$$c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R(r) = c_1 J_0(r\sqrt{\lambda})$$

⁸⁴Ver la Sección 6.4, página 169.

⁸⁵Notar que es necesario que $\lambda > 0$ para que las soluciones sean reales. Ver la Sección 3.4.4, página 84.

⁸⁶Ver la Sección 3.4.4, página 82.

⁸⁷Ver la Sección 3.4.4, página 84.

Imponiendo la condición de contorno:

$$R(a) = 0 \implies c_1 J_0(r\sqrt{\lambda}) = 0$$

Para que $c_1 \neq 0$ el valor $a\sqrt{\lambda}$ deben coincidir con los ceros de esa función. Si denominamos z_m^n al n -ésimo cero de la función $J_m(x)$, entonces los autovalores y autofunciones asociadas a este caso son:

$$J_0(a\sqrt{\lambda}) = 0 \implies a\sqrt{\lambda_n} = z_0^n \implies \boxed{\lambda_n = \left(\frac{z_0^n}{a}\right)^2} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\boxed{R_n(r) = c_n J_0(r\sqrt{\lambda_n}) = c_n J_0\left(\frac{r z_0^n}{a}\right)}$$

Teniendo en cuenta los autovalores obtenidos, la solución del problema (2) de (7.15) viene dada por:

$$T' + k\lambda_n T = 0 \implies \boxed{T_n(t) = c_n e^{-k\lambda_n t}}$$

La solución final del problema, teniendo en cuenta el principio de superposición es:

$$\boxed{u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{r z_0^n}{a}\right) e^{-k\lambda_n t}}$$

Para determinar los coeficientes es necesario tener en cuenta la condición inicial del problema original (7.14).

$$u(r, 0) = f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{r z_0^n}{a}\right)$$

Notar que esto corresponde con la **serie de Fourier generalizada**⁸⁸ de la función $f(r)$ en términos de las funciones de Bessel. Teniendo en cuenta las propiedades de ortogonalidad de las funciones de Bessel⁸⁹ con la función peso r se tiene finalmente:

$$\boxed{A_n = \frac{\int_0^a f(r) J_0\left(\frac{r z_0^n}{a}\right) r dr}{\int_0^a J_0^2\left(\frac{r z_0^n}{a}\right) r dr} = \frac{2}{a^2 J_1^2(z_0^n)} \int_0^a f(r) J_0\left(\frac{r z_0^n}{a}\right) r dr} \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

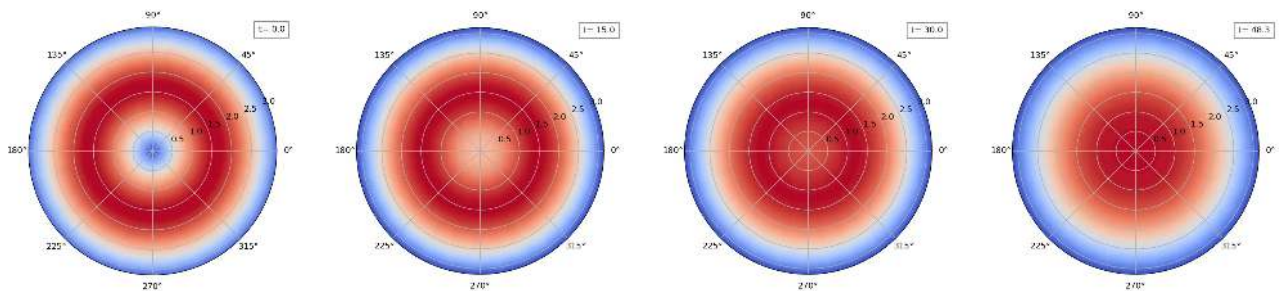


Figura 7.5: Simulación de un problema de la ecuación del calor en polares con simetría radial, donde se observa la distribución de temperatura en distintos tiempos para un disco de radio $R = \pi$ con condición inicial $f(r) = \sin r$ y condición frontera $u(R, t) = 0$. Las zonas azules indican bajas temperaturas y las rojas altas.

⁸⁸Ver la Sección 6.3.2, página 164.

⁸⁹Ver la Sección 6.4.1, página 171.

7.5. Ecuación de Onda

Una *onda* es una perturbación periódica que se propaga en un medio. Como hemos visto⁹⁰ la **ecuación de onda** es el ejemplo típico de una EDP hiperbólica. La función escalar $u(\vec{x}, t)$ puede ser, por ejemplo, una variación de la presión del medio en el que se propaga la onda; también puede ser un desplazamiento (respecto a unas posiciones de equilibrio) de partículas del gas, líquido o sólido al propagarse la onda.

Para desplazamientos pequeños en medios homogéneos, perfectamente elásticos con tensión constante y despreciando efectos de rozamiento y fuerzas externas, la función u satisface la siguiente EDP⁹¹:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u \quad u(\vec{x}, t) \quad ; \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^N$$

donde c es la **velocidad de propagación de la onda**⁹² y Δ es el *operador laplaciano*⁹³ en dimensión N . Esta ecuación básica se puede completar con otros términos que hacen referencia a fuerzas externas (como la gravedad) y rozamientos (amortiguación proporcional a la velocidad de la perturbación), de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha^2 \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \Delta u + f(\vec{x}, t)$$

La ecuación de onda aparece en muchas aplicaciones prácticas, siendo las más características:

- En una dimensión $N = 1$, vibración de una cuerda.
- En dos dimensiones $N = 2$, vibración de una membrana.
- En tres dimensiones $N = 3$, propagación de ondas acústicas y electromagnéticas.

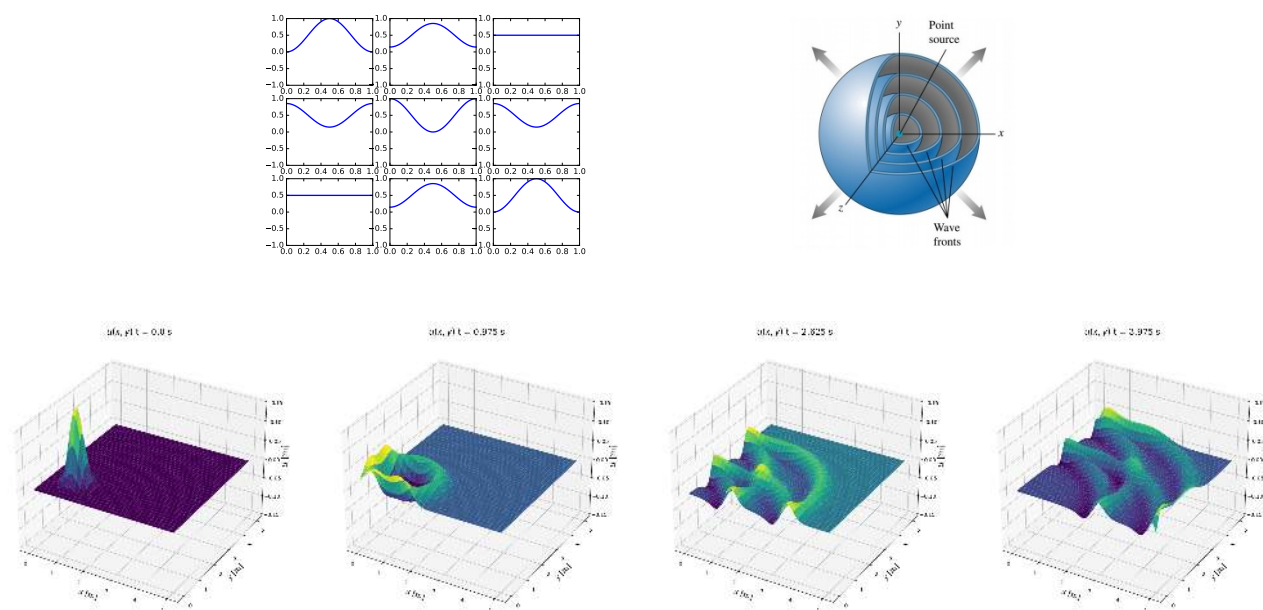


Figura 7.6: Representaciones de aplicaciones de la ecuación de onda. Arriba a la izquierda aparece la simulación espacio-temporal de las oscilaciones de una onda unidimensional modelada por la ecuación de onda. En la parte inferior aparecen cuatro gráficas de una simulación espacio-temporal de las vibraciones de una membrana bidimensional. Por último en la parte superior derecha aparece una onda tridimensional con simetría esférica.

⁹⁰Ver la Sección 7.1.4, página 180.

⁹¹La deducción de esta ecuación no se realizará aquí.

⁹²Nosotros la consideraremos un valor constante, aunque en muchos casos es una función dependiente de u .

⁹³Ver la Definición 7.3, página 179.

7.5.1. Ecuación de Onda Unidimensional

Consideremos el caso de una cuerda de longitud finita L , homogénea con densidad ρ constante y perfectamente flexible, la cual está sujeta en sus dos extremos con dispositivos que pueden ser fijos⁹⁴ o móviles verticalmente⁹⁵ y sometida a una tensión T constante y tangencial a cada punto de la cuerda. Si apartamos la cuerda de su posición de equilibrio y la soltamos, comenzará a vibrar, estando interesados en analizar la vibración producida. Para simplificar el problema se hacen las siguientes suposiciones:

- La cuerda vibra en un plano.
- El desplazamiento vertical $u(x, t)$ no se aparta mucho de su posición de equilibrio.

De esta forma el problema viene modelado, de una forma algo general, por la siguiente ecuación conocida como **ecuación de onda unidimensional**.

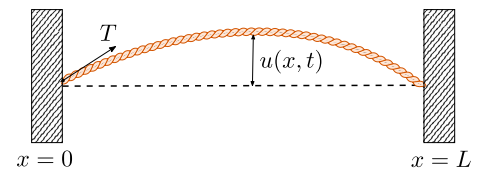
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{f(x, t)}{\rho} \quad ; \quad c^2 = \frac{T}{\rho}$$

En ella el término c^2 tiene unidades de velocidad, $k > 0$ suele ser un coeficiente relacionado con rozamiento o amortiguación. El término $f(X, y)$ está relacionado con fuerzas externas, donde ρ es la densidad lineal de la cuerda (masa por unidad de longitud).

Vamos a analizar la solución de diferentes PVF formados por esta ecuación y determinadas condiciones iniciales y de frontera.

Caso 1: Extremos Fijos (Condiciones Dirichlet)

Analizamos el caso en el que los extremos de la cuerda están fijos sin posibilidad de movilidad ni horizontal ni verticalmente.



En este caso el PVF es el siguiente:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & 0 < x < L \ ; \ t > 0 \\ u(0, t) = 0 \ , \ u(L, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < L \\ u_t(x, 0) = g(x) & 0 < x < L \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(EDP interior varilla)} \\ \text{(Cond. frontera Dirichlet)} \\ \text{(Cond. inicial I)} \\ \text{(Cond. inicial II)} \end{array} \quad (7.17)$$

Los extremos en $x = 0$ y $x = L$ se encuentran fijos a $u = 0$. Como además aparece una segunda derivada temporal es necesario especificar dos condiciones iniciales, indicando la posición de la cuerda $f(x)$ y la velocidad en cada punto $g(x)$ a $t = 0$.

Vamos a calcular la solución particular de este problema mediante el *método de separación de variables*⁹⁶. Suponemos que la solución se puede expresar como producto de dos función que dependen solo de una variable.

$$u(x, t) = X(x)T(t) \implies \begin{cases} u_{xx} = X''T \\ u_{tt} = XT'' \end{cases} \implies c^2 X''T = XT'' \quad ; \quad \frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T}$$

De esta forma comprobamos que este método es válido para esta ecuación. Para que pueda cumplirse esta igualdad entre las variables independientes x y t , es necesario que ambas partes de la igualdad sean iguales a una misma constante $-\lambda$, obteniéndose dos *problemas de autovalores*⁹⁷:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T} = -\lambda \implies \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & \text{(Ec. 1)} \\ T'' + \lambda c^2 T = 0 & \text{(Ec. 2)} \end{cases}$$

Resolveremos cada ecuación por separado atendiendo a las condiciones iniciales y de frontera.

⁹⁴Permite variar libremente el ángulo formado por la cuerda y la pared vertical.

⁹⁵En este caso el ángulo entre la cuerda y la pared vertical es fijo a 90° .

⁹⁶Ver la [Sección 7.2, página 183](#).

⁹⁷Ver la [Definición 6.1, página 153](#).

Problema 1

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

Este problema es idéntico al tratado en el Problema 1 del Caso 1 de la ecuación del calor en la [Sección 7.4.2, página 189](#), obteniéndose la solución trivial no válida para $\lambda \leq 0$ y solo para $\lambda > 0$ se tiene:

$$L\sqrt{\lambda} = n\pi \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad \implies \quad \boxed{\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}} \quad ; \quad \boxed{X_n(x) = c_{2n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$$

Problema 2

Teniendo en cuenta los autovalores λ_n calculados anteriormente se tiene:

$$T'' + c^2\lambda_n T = 0$$

Teniendo en cuenta que los valores de λ_n determinados en el problema 1, la solución de este caso queda:

$$m^2 + c^2\lambda_n = 0 \quad \implies \quad m = \sqrt{-c^2\lambda_n} = \pm i \frac{n\pi c}{L}$$

$$\boxed{T_n(t) = c_{3n} \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + c_{4n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)} \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

Por tanto las soluciones completas serán⁹⁸:

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

Para cada valor de n se obtiene una solución al problema, por tanto por el *principio de superposición*⁹⁹ la solución completa será la combinación lineal de todas:

$$\boxed{u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$$

Las constantes A_n y B_n se pueden obtener a través de las dos condiciones iniciales del problema inicial (7.17):

- $u(x, 0) = f(x)$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

Esto corresponde con la serie de Fourier de senos¹⁰⁰ de $f(x)$ y por tanto las constantes A_n correspondientes a los coeficientes de la serie se pueden obtener como:

$$\boxed{A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx}$$

- $u_t(x, 0) = g(x)$

$$u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} \left[-A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi c}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = g(x)$$

Esto corresponde con la serie de Fourier de senos de $g(x)$ y por tanto las constantes B_n correspondientes a los coeficientes de la serie se pueden obtener como:

$$B_n \frac{n\pi c}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L g(s) \operatorname{sen} \frac{n\pi s}{L} ds \quad \implies \quad \boxed{B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx}$$

⁹⁸Se ha denominado $A_n = c_2 c_3$ y $B_n = c_2 c_4$.

⁹⁹Ver la [Sección 7.2.2, página 186](#).

¹⁰⁰Ver la [Sección 5.4.4, página 145](#).

La solución final se puede expresar a través de las **funciones de Green** del problema de la siguiente forma:

$$u(x, t) = \int_0^L \frac{1}{L} \left(2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi s}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \right) f(s) ds + \int_0^L \frac{1}{n\pi c} \left(2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi s}{L} \sin \frac{n\pi ct}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \right) g(s) ds$$

$$u(x, t) = \int_0^L G(x, t, s) \left[\frac{1}{L} f(s) + \frac{1}{n\pi c} g(s) \right] ds$$

donde $G(x, t, s)$ es la función de Green de este problema.

En la **Figura 7.7** se muestran las gráficas correspondientes a un caso práctico con $L = 1$, $a = 1$ y diferentes condiciones iniciales.

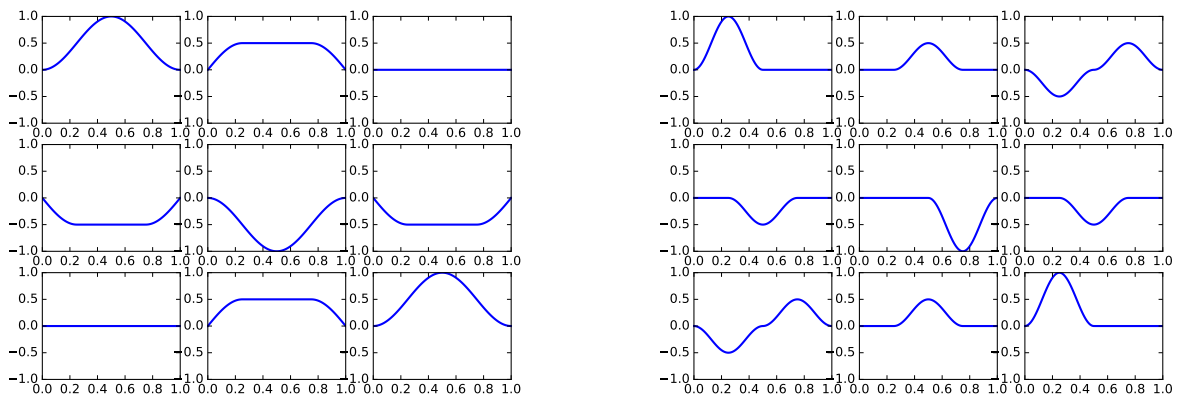


Figura 7.7: Resultados obtenidos en la ecuación de onda unidimensional con condiciones Dirichlet.

En la parte izquierda se muestra la evolución temporal para las condiciones iniciales $u(x, 0) = \sin^2(\pi x)$ y $u_t(x, 0) = 0$. La onda inicial oscila en torno a la posición de equilibrio, denominándose este tipo de movimiento *onda pulsada* y siendo un ejemplo de *ondas estacionarias*¹⁰¹.

En la parte derecha se muestra la evolución temporal para las condiciones iniciales:

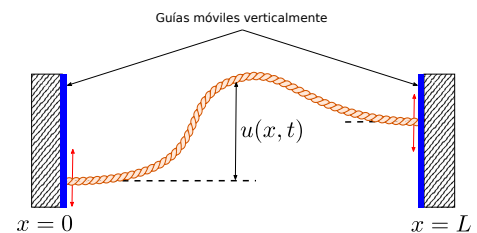
$$u(x, 0) = \begin{cases} \sin^2(2\pi x) & 0 \leq x < L/2 \\ 0 & L/2 \leq x \leq L \end{cases} \quad ; \quad u_t(x, 0) = 0$$

En este caso la onda inicial viaja en la parte positiva del eje vertical, rebotando en el extremo derecho, volviendo a viajar hacia el extremo izquierdo por la parte negativa del eje vertical y repitiéndose el proceso. Este es un ejemplo de una *onda viajera*¹⁰².

En ambos ejemplos se observa como el ángulo formado por la cuerda en los extremos y la pared vertical varían en función del tiempo.

Caso 2: Extremos Móviles (Condiciones Neumann)

Analizamos el caso en el que los extremos de la cuerda están sujetos en sus extremos a unas guías móviles que permiten el desplazamiento vertical de los extremos, manteniendo la unión de la cuerda con la guía de forma horizontal (pendiente cero).



¹⁰¹No hay desplazamiento del perfil de la onda.

¹⁰²Existe un desplazamiento del perfil de la onda.

En este caso el PVF es el siguiente:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & 0 < x < L ; t > 0 & \text{(EDP interior varilla)} \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0 & t > 0 & \text{(Cond. frontera Neumann)} \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < L & \text{(Cond. inicial I)} \\ u_t(x, 0) = g(x) & 0 < x < L & \text{(Cond. inicial II)} \end{cases} \quad (7.18)$$

Vamos calcular la solución particular de este problema mediante el *método de separación de variables* de igual forma que el caso anterior:

$$u(x, t) = X(x)T(t) \implies \begin{cases} u_{xx} = \frac{X''T}{XT} \\ u_{tt} = \frac{XT''}{XT} \end{cases} \implies c^2 X''T = XT'' ; \quad \frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T}$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T} = -\lambda \implies \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & \text{(Ec. 1)} \\ T'' + \lambda c^2 T = 0 & \text{(Ec. 2)} \end{cases} \quad (7.19)$$

Resolveremos cada ecuación por separado atendiendo a las condiciones iniciales y de frontera.

Problema 1

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$$

Este problema es idéntico al tratado en el *Problema 1* del *Caso 1* de la ecuación del calor ([Sección 7.4.2, página 191](#)), obteniéndose la solución trivial no válida para $\lambda \leq 0$ y solo para $\lambda > 0$, por tanto:

$$L\sqrt{\lambda_n} = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \implies \boxed{\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}}$$

$$\boxed{X_n(x) = c_{2n} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Problema 2

Teniendo en cuenta que el valor de λ ha quedado determinado en el *Problema 1*, la solución de este caso queda:

$$T'' + c^2 \lambda_n T = 0$$

$$m^2 + c^2 \lambda_n = 0 \implies m = \sqrt{-c^2 \lambda_n} = \pm i \frac{n\pi c}{L} \implies \boxed{T_n(t) = c_{3n} \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + c_{4n} \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Por tanto la solución completa será:

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right] \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Para cada valor de n se obtiene una posible solución al problema, por tanto por el *principio de superposición* la solución general será:

$$\boxed{u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right] \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$$

Las constantes A_n y B_n se pueden obtener a través de las dos condiciones iniciales del problema inicial (7.18):

- $u(x, 0) = f(x)$

$$u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

Esto corresponde con la *serie de Fourier de cosenos* de $f(x)$ y por tanto las constantes A_n correspondientes a los coeficientes de la serie se pueden obtener como:

$$\boxed{A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx} \quad ; \quad \boxed{A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx}$$

• $u_t(x, 0) = g(x)$

$$u_t(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} \left[-A_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi c}{L} t \right) + B_n \cos \left(\frac{n\pi c}{L} t \right) \right] \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right)$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{n\pi c}{L} \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) = g(x)$$

Esto corresponde con la serie de Fourier de cosenos de $g(x)$ y por tanto:

$$B_n \frac{n\pi c}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} n = 0 : & \int_0^L g(x) dx = 0 \\ n > 1 : & B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx \end{cases}$$

La primera fórmula nos indica una condición que debe cumplir la función $g(x)$ que especifica la velocidad inicial de la cuerda, necesaria para que el problema tenga solución.

En la **Figura 7.8** se muestran las gráficas correspondientes a un caso práctico con $L = 1$, $a = 1$ y diferentes condiciones iniciales.

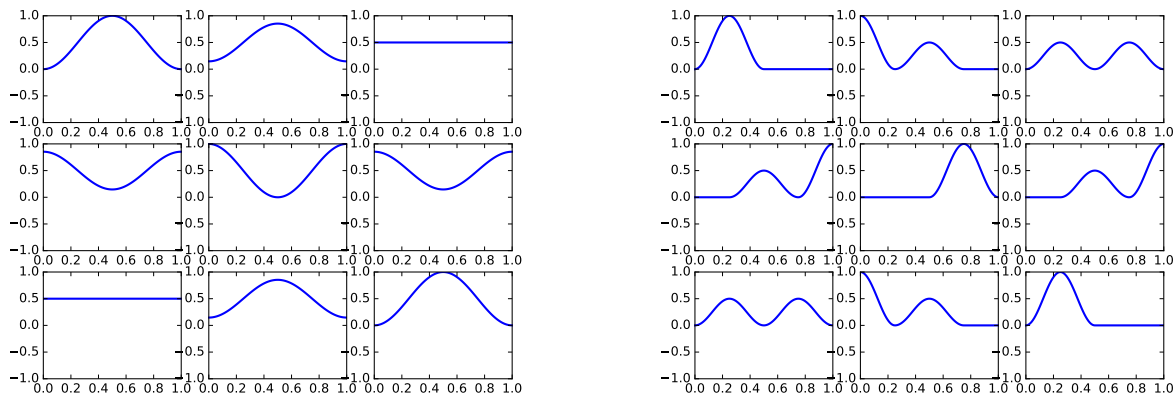


Figura 7.8: Resultados obtenidos en la ecuación de onda unidimensional con condiciones Neumann.

En la parte izquierda se muestra la evolución temporal para las condiciones iniciales $u(x, 0) = \sin^2(\pi x)$ y $u_t(x, 0) = 0$, iguales al caso 1 anterior. El tipo de movimiento generado es una *onda pulsada* diferente al caso 1, donde la onda inicial tiende primeramente a aplanarse elevando los extremos hasta el punto medio, posteriormente se crea una onda en la parte inferior elevándose los extremos y vuelve a aplanarse en el punto medio para crear una nueva onda en la parte superior y repetirse el proceso.

En la parte derecha se muestra la evolución temporal para las mismas condiciones iniciales del segundo ejemplo del caso 1 anterior:

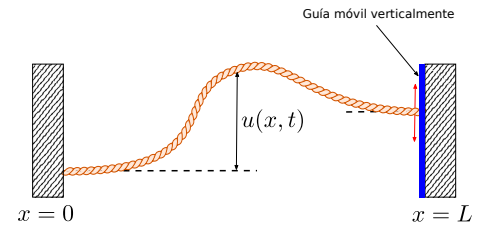
$$u(x, 0) = \begin{cases} \sin^2(2\pi x) & 0 \leq x < L/2 \\ 0 & L/2 \leq x \leq L \end{cases} \quad ; \quad u_t(x, 0) = 0$$

En este caso se obtiene una *onda viajera* que empieza desplazándose hacia la izquierda y al tocar el borde, rebota, empieza a disminuir su tamaño y a generarse una segunda onda más pequeña viajando ambas hacia la derecha. Cuando la primera toca el borde, ambas ondas se fusionan en una sola más grande, que rebota en el borde derecho, disminuye su tamaño, se genera una segunda onda y viajan ambas hacia la izquierda repitiéndose el proceso.

En ambos ejemplos se observa como el ángulo formado por la cuerda en los extremos y la pared vertical es siempre constante con tangente cero, siguiendo las condiciones frontera establecidas.

Caso 3: Extremos Fijo-Móvil (Condiciones Dirichlet-Neumann)

Analizamos el caso mixto en el que un extremo es fijo y el otro móvil con desplazamiento vertical.



En este caso el PVF es el siguiente:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & 0 < x < L ; t > 0 & \text{(EDP interior varilla)} \\ u(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0 & t > 0 & \text{(Cond. frontera Dirichlet y Neumann)} \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < L & \text{(Cond. inicial I)} \\ u_t(x, 0) = g(x) & 0 < x < L & \text{(Cond. inicial II)} \end{cases} \quad (7.20)$$

Volvemos a calcular la solución particular del problema mediante el *método de separación de variables*:

$$u(x, t) = X(x)T(t) \implies \begin{cases} u_{xx} = X''T \\ u_{tt} = XT'' \end{cases} \implies c^2 X''T = XT'' ; \quad \frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T}$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T} = -\lambda \implies \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & \text{(Ec. 1)} \\ T'' + \lambda c^2 T = 0 & \text{(Ec. 2)} \end{cases} \quad (7.21)$$

Resolveremos cada ecuación por separado atendiendo a las condiciones iniciales y de frontera.

Problema 1

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$$

Notar que éste no es uno de los tres problemas básicos de Sturm-Liouville. Vamos a analizar todos los posibles valores del autovalor λ .

$$\lambda = 0$$

En este caso la EDO queda:

$$X'' = 0 \implies X(x) = c_1 x + c_2$$

Imponiendo las condiciones frontera:

$$\begin{cases} X(0) = 0 \implies c_2 = 0 \\ X'(L) = 0 \implies c_1 = 0 \end{cases} \implies X(x) = 0$$

Esta es la solución trivial, no válida, y por tanto $\lambda = 0$ no es un valor posible para obtener una solución analítica al problema.

$$\lambda < 0$$

En este caso tenemos una EDO de segundo orden homogénea, cuya *ecuación característica* es:

$$X'' + \lambda X = 0 \implies m^2 + \lambda = 0 ; \quad m = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm\alpha \quad (\alpha > 0)$$

Por tanto la solución queda en este caso (raíces reales distintas):

$$X(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}$$

Imponiendo las condiciones frontera¹⁰³:

$$\begin{cases} X(0) = 0 \implies c_1 + c_2 = 0 \\ X'(L) = 0 \implies c_1 A + c_2 B = 0 \end{cases}$$

Este es un SEL *homogéneo* compatible y determinado cuya única solución es $c_1 = c_2 = 0$, obteniéndose nuevamente la solución trivial $X(x) = 0$, no válida, y por tanto $\lambda < 0$ tampoco es un valor posible para obtener una solución analítica al problema.

¹⁰³Aquí $A = \alpha e^{\alpha L}$ y $B = -\alpha e^{-\alpha L}$, siendo $A \neq B$ si $L \neq 0$.

$\lambda > 0$

En este caso también tenemos una EDO de segundo orden homogénea, con ecuación característica:

$$X'' + \lambda X = 0 \implies m^2 + \lambda = 0 \quad ; \quad m = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm i\sqrt{\lambda}$$

Por tanto la solución queda en este caso (raíces complejas):

$$X(x) = c_1 \cos(x\sqrt{\lambda}) + c_2 \operatorname{sen}(x\sqrt{\lambda})$$

Imponiendo las condiciones frontera:

$$\begin{cases} X(0) = 0 & \implies c_1 = 0 \\ X'(L) = 0 & \implies c_2 \sqrt{\lambda} \cos(L\sqrt{\lambda}) = 0 \end{cases}$$

Para que la segunda ecuación se verifique sin que c_2 se anule tenemos que encontrar valores de $L\sqrt{\lambda}$ que anulen el coseno, lo que se cumple para:

$$L\sqrt{\lambda_n} = (2n-1)\frac{\pi}{2} \quad , \quad n = 1, 2, \dots \implies \lambda_n = \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4L^2} \quad (7.22)$$

siendo estos valores los **autovalores** del problema 1 y las correspondientes **autofunciones**:

$$X_n(x) = c_{2n} \operatorname{sen} \left[\frac{(2n-1)\pi}{2L} x \right] \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.23)$$

Problema 2

Teniendo en cuenta los valores λ_n determinados en el problema 1, la solución de este caso queda:

$$T'' + c^2 \lambda_n T = 0$$

$$m^2 + c^2 \lambda_n = 0 \implies m = \sqrt{-c^2 \lambda_n} = \pm i \frac{(2n-1)\pi c}{2L}$$

$$T_n(t) = c_{3n} \cos \left[\frac{(2n-1)\pi c}{2L} t \right] + c_{4n} \operatorname{sen} \left[\frac{(2n-1)\pi c}{2L} t \right] \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

Por tanto la solución completa será:

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = \left\{ A_n \cos \left[\frac{(2n-1)\pi c}{2L} t \right] + B_n \operatorname{sen} \left[\frac{(2n-1)\pi c}{2L} t \right] \right\} \operatorname{sen} \left[\frac{(2n-1)\pi}{2L} x \right]$$

Para cada valor de n se obtiene una posible solución al problema, por tanto por el *principio de superposición* la solución general será:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \cos \left[\frac{(2n-1)\pi c}{2L} t \right] + B_n \operatorname{sen} \left[\frac{(2n-1)\pi c}{2L} t \right] \right\} \operatorname{sen} \left[\frac{(2n-1)\pi}{2L} x \right]$$

Las constantes A_n y B_n se pueden obtener a través de las dos condiciones iniciales del problema inicial (7.20):

- $u(x, 0) = f(x)$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \left[\frac{(2n-1)\pi}{2L} x \right] = f(x) \quad (7.24)$$

Notar que de forma general, el conjunto:

$$\left\{ \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L}, \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \cos \frac{\pi x}{2L}, \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2L}, \cos \frac{3\pi x}{2L}, \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{2L}, \dots \right\}$$

donde $L \in \mathbb{R} - \{0\}$ es ortogonal en el intervalo $[-L, L]$, formando una particular serie generalizada de Fourier, y por tanto la ecuación (7.24) corresponde con la *serie de senos* de $f(x)$ de este conjunto ortogonal y por tanto las constantes A_n correspondientes a los coeficientes de la serie se pueden obtener como:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \left[\frac{(2n-1)\pi}{2L} x \right] dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

- $u_t(x, 0) = g(x)$

$$u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)\pi c}{2L} \left\{ -A_n \sin \left[\frac{(2n-1)\pi c}{2L} t \right] + B_n \cos \left[\frac{(2n-1)\pi c}{2L} t \right] \right\} \sin \left[\frac{(2n-1)\pi}{2L} x \right]$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{(2n-1)\pi c}{2L} \sin \left[\frac{(2n-1)\pi}{2L} x \right] = g(x)$$

Esto corresponde con la serie de Fourier de senos de $g(x)$ y por tanto las constantes B_n correspondientes a los coeficientes de la serie se pueden obtener como:

$$B_n \frac{(2n-1)\pi c}{2L} = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \left[\frac{(2n-1)\pi}{2L} x \right] dx$$

$$B_n = \frac{4}{(2n-1)\pi c} \int_0^L g(x) \sin \left[\frac{(2n-1)\pi}{2L} x \right] dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

En la **Figura 7.9** se muestran las gráficas correspondientes a un caso práctico con $L = 1$, $a = 1$ y con las dos condiciones iniciales utilizadas en los dos casos anteriores.

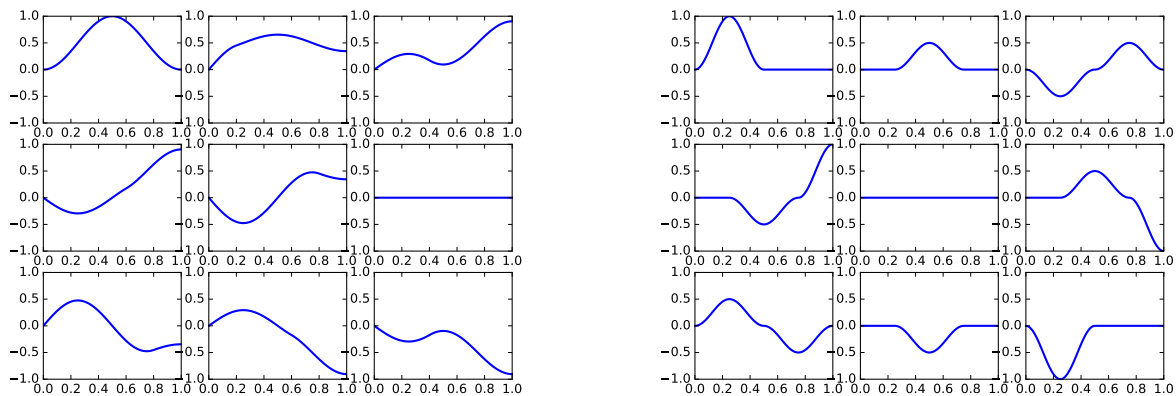


Figura 7.9: Resultados obtenidos en la ecuación de onda unidimensional con condiciones Dirichlet y Neumann.

En ambos casos se observan comportamientos más complicados que los anteriores, como consecuencia del extremo izquierdo fijo y el derecho móvil.

7.5.2. Ecuación de Onda en Coordenadas Polares con Simetría Radial

Consideramos aquí la ecuación de onda en una membrana bidimensional circular de radio r con simetría radial¹⁰⁴, donde la solución no depende del ángulo θ . Usando coordenadas polares se obtiene un problema **unidimensional** en el espacio, donde $u(r, t)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}}_0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

¹⁰⁴Este problema tiene semejanza con el del calor en polares, ver la **Sección 7.4.3**, página 198.

Resolvamos el siguiente problema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{c^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) & r \in (0, a), t > 0 \\ u(a, t) = 0 & t > 0 \\ |u(0, t)| < \infty & t > 0 \\ u(r, 0) = f(r) & r \in (0, a) \\ u_t(r, 0) = g(r) & r \in (0, a) \end{array} \right. \quad (\text{Cond. Compatibilidad}) \quad (7.25)$$

Aplicando separación de variables: $u(r, t) = R(r)T(t)$

$$RT'' = \frac{c^2}{r} T(rR')' \quad ; \quad \frac{T'}{c^2 T} = \frac{1}{rR} T(rR')' = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} (rR')' + \lambda rR = 0 \quad (1) \\ T'' + c^2 \lambda T = 0 \quad (2) \end{array} \right. \quad (7.26)$$

El primer problema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (rR')' + \lambda rR = 0 & r \in (0, a) \\ R(a) = 0 \\ |R(0)| < \infty & \text{Cond. Compatibilidad} \end{array} \right.$$

es el mismo analizado en la [Sección 7.4.3, página 198](#), siendo sus autovalores y autofunciones:

$$\lambda_n = \left(\frac{z_n^0}{a} \right)^2 \quad ; \quad R_n(r) = c_n J_0(r\sqrt{\lambda_n}) = c_n J_0 \left(\frac{r z_n^0}{a} \right) \quad ; \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

donde z_n^0 es el n -ésimo cero de la *función de Bessel*¹⁰⁵ de primera especie de orden cero $J_0(x)$. Con estos autovalores, la solución del problema (2) de (7.26) viene dada por:

$$T'' + c^2 \lambda_n T = 0$$

Cuya solución ya ha sido obtenida en el Problema 2 del caso anterior¹⁰⁶ de la siguiente forma:

$$m^2 + c^2 \lambda_n = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \sqrt{-c^2 \lambda_n} = \pm i \frac{c z_n^0}{a}$$

$$T_n(t) = c_{3n} \cos \frac{c z_n^0 t}{a} + c_{4n} \sen \frac{c z_n^0 t}{a} \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

Por tanto la solución completa será:

$$u_n(x, t) = R_n(x)T_n(t) = \left(A_n \cos \frac{c z_n^0 t}{a} + B_n \sen \frac{c z_n^0 t}{a} \right) J_0 \left(\frac{r z_n^0}{a} \right)$$

Para cada valor de n se obtiene una posible solución al problema, por tanto por el *principio de superposición* la solución general será:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{c z_n^0 t}{a} + B_n \sen \frac{c z_n^0 t}{a} \right) J_0 \left(\frac{r z_n^0}{a} \right)$$

Las constantes A_n y B_n se pueden obtener a través de las dos condiciones iniciales del problema inicial (7.25):

$$\bullet \quad u(r, 0) = f(r)$$

$$u(r, 0) = f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0 \left(\frac{r z_n^0}{a} \right)$$

¹⁰⁵Ver la [Sección 3.4.4, página 83](#).

¹⁰⁶Ver la [Sección 7.5.1, página 208](#).

Esto corresponde¹⁰⁷ con la **serie de Fourier generalizada**¹⁰⁸ de la función $f(r)$ en términos de las funciones de Bessel. Teniendo en cuenta las propiedades de ortogonalidad de las funciones de Bessel¹⁰⁹ con la función peso r se tiene finalmente:

$$A_n = \frac{\int_0^a f(r) J_0\left(\frac{r z_n^0}{a}\right) r dr}{\int_0^a J_0^2\left(\frac{r z_n^0}{a}\right) r dr} = \frac{2}{a^2 J_1^2(z_n^0)} \int_0^a f(r) J_0\left(\frac{r z_n^0}{a}\right) r dr, \quad n = 1, 2, \dots$$

• $u_t(r, 0) = g(r)$

$$u_t(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{c z_n^0}{a} A_n \sin \frac{c z_n^0 t}{a} + \frac{c z_n^0}{a} B_n \cos \frac{c z_n^0 t}{a} \right) J_0\left(\frac{r z_n^0}{a}\right); \quad u_t(r, 0) = g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c z_n^0}{a} B_n J_0\left(\frac{r z_n^0}{a}\right)$$

Esto corresponde con la serie de Fourier generalizada de $g(r)$ y al igual que antes, teniendo en cuenta las propiedades de ortogonalidad de las funciones de Bessel, las constantes B_n se pueden obtener como:

$$\frac{c z_n^0}{a} B_n = \frac{\int_0^a g(r) J_0\left(\frac{r z_n^0}{a}\right) r dr}{\int_0^a J_0^2\left(\frac{r z_n^0}{a}\right) r dr}; \quad B_n = \frac{a}{c z_n^0} \frac{\int_0^a g(r) J_0\left(\frac{r z_n^0}{a}\right) r dr}{\int_0^a J_0^2\left(\frac{r z_n^0}{a}\right) r dr}, \quad n = 1, 2, \dots$$

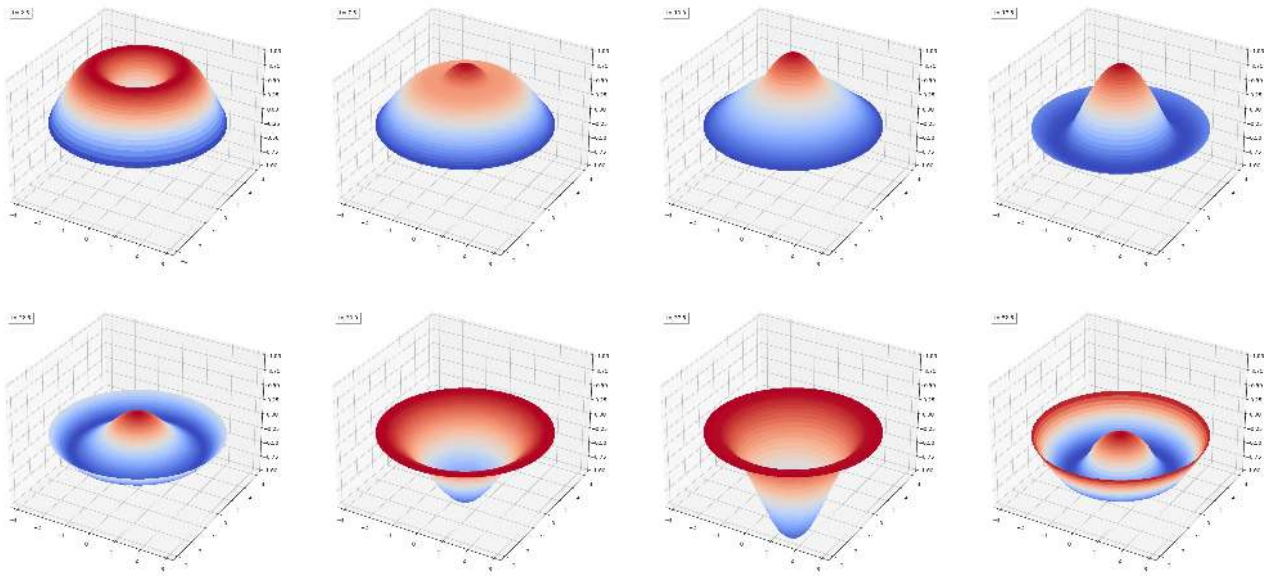


Figura 7.10: Simulación de un problema de la ecuación de onda en polares con simetría radial, donde se observa los desplazamientos $u(r, t)$ en distintos tiempos para un disco de radio $R = \pi$ con condiciones iniciales $u(r, 0) = \sin r$, $u_t(r, 0) = 0$ y condición frontera $u(R, t) = 0$. A diferencia de la ecuación del calor (Figura 7.5, página 200), se observa un proceso periódico de oscilaciones.

¹⁰⁷Al igual que en el problema del calor en coordenadas polares, ver la Sección 7.4.3, página 198.

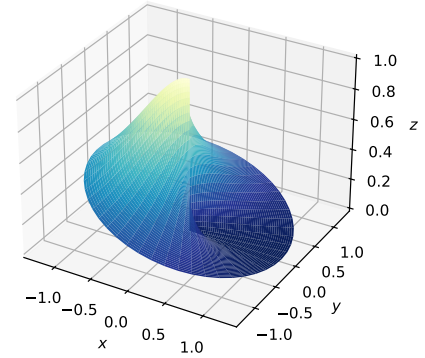
¹⁰⁸Ver la Sección 6.3.2, página 164.

¹⁰⁹Ver la Sección 6.4.1, página 171.

7.5.3. Ecuación de Onda en Coordenadas Polares

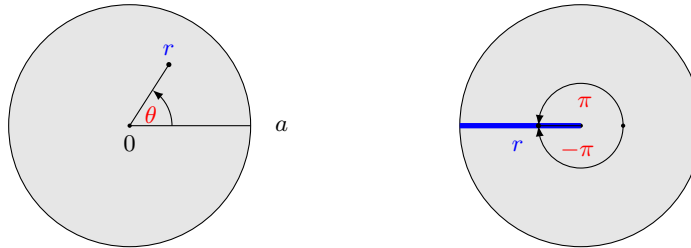
Vamos a estudiar ahora el caso de una membrana vibrante con forma circular de radio a , sin necesidad de simetría radial¹¹⁰ correspondiente a un problema **bidimensional** en coordenadas polares siendo $u(r, \theta, t)$ el desplazamiento en la dirección del eje z . La formulación del problema es el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] & r \in [0, a], \theta \in (-\pi, \pi], t > 0 \\ u(r, \pi, t) = u(r, -\pi, t) & r \in (0, a], t \geq 0 \\ u_\theta(r, \pi, t) = u_\theta(r, -\pi, t) & r \in (0, a], t \geq 0 \\ u(a, \theta, t) = 0 & \theta \in (-\pi, \pi], t \geq 0 \\ |u(r, \theta, t)| < \infty & r \in [0, a], \theta \in (-\pi, \pi], t \geq 0 \\ u(r, \theta, 0) = f(r, \theta) & r \in [0, a], \theta \in (-\pi, \pi] \\ u_t(r, \theta, 0) = 0 & r \in [0, a], \theta \in (-\pi, \pi] \end{array} \right.$$



Notar que consecuencia de las derivadas de segundo orden en las variables independientes, es necesario 6 condiciones, cuatro espaciales en r y θ y dos temporales.

- Las dos primeras condiciones espaciales en θ son de tipo periódico, y consecuencia del comportamiento del ángulo θ en radianes, que implica que todo punto de coordenadas (r, π) corresponda con el punto $(r, -\pi)$. Esto hará que las soluciones sean continuas y derivables en esos puntos.



- Las dos siguientes condiciones son de tipo espacial en r . La tercera es una condición de tipo Dirichlet en la frontera $r = a$, y la cuarta es una condición de compatibilidad en r , necesaria para obtener soluciones acotadas con sentido físico.
- Las dos últimas condiciones imponen la forma y velocidad inicial de la membrana.

Resolvemos el problema aplicando el método de separación de variables. Notar que este caso tenemos tres variables independientes.

$$u(r, \theta, t) = R(r)H(\theta)T(t) \implies RHT'' = c^2(R''HT + \frac{1}{r}R'HT + \frac{1}{r^2}RH''T)$$

Dividimos toda la ec. por RHT y separamos una de las variables¹¹¹. Como cada término son función de variables independientes, tiene que ser igual a una constante (autovalor) $-\lambda$, obteniéndose dos ecuaciones.

$$\frac{T''}{Tc^2} = \frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{H''}{r^2H} = -\lambda \implies \left\{ \begin{array}{l} T'' + \lambda c^2 T = 0 \\ \frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{H''}{r^2H} = -\lambda \end{array} \right. \quad (3)$$

¹¹⁰Este caso es más general que el analizado en la sección anterior [Sección 7.5.2, página 209](#), donde se había impuesto una simetría radial en el dominio.

¹¹¹La que resulte más sencillo, en este caso el término temporal en T .

De la segunda ecuación con dos variables, separamos una de ellas (la más sencilla) dejando el autovalor λ al lado complicado e introduciendo un nuevo autovalor μ .

$$\frac{r^2 R''}{R} + \frac{r R'}{R} + \lambda r^2 = -\frac{H''}{H} = \mu \implies \begin{cases} \frac{H''}{H} = -\mu \implies \boxed{H'' + \mu H = 0} & (1) \\ \boxed{r^2 R'' + r R' + (\lambda r^2 - \mu) R = 0} & (2) \end{cases}$$

De esta forma la EDP original ha sido descompuesta en tres EDO acopladas a través de dos autovalores λ y μ . Las estrategias para obtener estas tres ecuaciones puede ser diversas, dando lugar a problemas distintos pero equivalentes¹¹². Junto con las condiciones iniciales se obtendrán tres problemas con EDO que habrá que resolver. El orden en su resolución vuelve a ser opcional, resolviéndose normalmente el más sencillo el primero.

1. Primer Problema

El primer problema que resolveremos será el de la ecuación (1) en la variable $H(\theta)$, determinando las dos condiciones frontera necesarias, al ser una EDO de segundo orden, a través de las condiciones del problema original.

$$\begin{cases} u(r, \pi, t) = u(r, -\pi, t) \implies R(r)H(\pi)T(t) = R(r)H(-\pi)T(t) \implies H(\pi) = H(-\pi) \\ u_\theta(r, \pi, t) = u_\theta(r, -\pi, t) \implies R(r)H'(\pi)T(t) = R(r)H'(-\pi)T(t) \implies H'(\pi) = H'(-\pi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} H'' + \mu H = 0 \\ H(-\pi) = H(\pi) \\ H'(-\pi) = H'(\pi) \end{cases}$$

Notar que este problema ya ha sido resuelto¹¹³, correspondiendo a la serie completa de Fourier, donde en este caso $L = \pi$.

$$\mu_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \implies \boxed{\mu_n = n^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \boxed{H_n(\theta) = c_1 \cos(n\theta) + c_2 \sin(n\theta)}$$

2. Segundo Problema

Una vez determinado el primer autovalor μ_n , que debe ser común en los tres problemas, determinamos el segundo autovalor a través de ecuación (2) en la variable $R(r)$ que relaciona los dos autovalores y nos permitirá determinar λ . Las dos condiciones son en este caso:

$$\begin{cases} u(a, \theta, t) = 0 \implies R(a)H(\theta)T(t) = 0 \implies R(a) = 0 \\ |u(r, \theta, t)| < \infty \implies |R(r)H(\theta)T(t)| < \infty \implies |R(\theta)| < \infty \end{cases} \quad \boxed{\begin{cases} r^2 R'' + r R' + (\lambda r^2 - \mu_n) R = 0 \\ R(a) = 0 \\ |R(0)| < \infty \end{cases}}$$

Notar que esta EDO corresponde con la ecuación paramétrica de Bessel¹¹⁴:

$$x^2 y'' + x y' + (\alpha^2 x^2 - m^2) y = 0 \quad ; \quad \text{c.v.: } z = \alpha x, \quad \alpha > 0$$

cuya solución, después de deshacer el cambio de variable:

$$y = c_1 J_m(\alpha x) + c_2 Y_m(\alpha x)$$

En nuestro caso:

$$r^2 R'' + r R' + (\lambda r^2 - \mu_n) R = 0 \implies \begin{cases} \alpha = \sqrt{\lambda} \\ m = \sqrt{\mu_n} = \sqrt{n^2} = n \end{cases} \quad \boxed{R(r) = c_3 J_n(r\sqrt{\lambda_n}) + c_4 Y_n(r\sqrt{\lambda_n})}$$

Para que sea finita la solución (condición de compatibilidad) es necesario que $c_4 = 0$, ya que la función $Y_m(x)$ no está acotada en el origen¹¹⁵, quedando la solución de este segundo problema como:

$$R(r) = c_3 J_n(r\sqrt{\lambda_n})$$

¹¹²En algunos casos pueden generarse algunos problemas más sencillos que otros.

¹¹³Ver la Sección 6.2.1, página 157.

¹¹⁴Ver la Sección 3.4.4, página 84.

¹¹⁵Ver la Sección 3.4.4, página 84.

Para determinar el autovalor λ , es necesario imponer la condición frontera, y denotando por z_m^k los ceros k -ésimos de la función $J_m(x)$ para $k = 1, 2, \dots$, se tiene:

$$R(a) = 0 = \underbrace{c_3}_{\neq 0} \underbrace{J_n(a\sqrt{\lambda_n})}_0 \implies a\sqrt{\lambda_{n,k}} = z_n^k \implies \lambda_{n,k} = \left(\frac{z_n^k}{a}\right)^2, \quad \{n = 0, 1, \dots\}, \{k = 1, 2, \dots\}$$

Siendo finalmente la solución del segundo problema:

$$R_{n,k}(r) = c_3 J_n(r\sqrt{\lambda_{k,n}})$$

3. Tercer Problema

Una vez determinados los dos autovalores μ_n y $\lambda_{n,k}$ podemos usarlos para determinar la última ecuación (3).

$$T'' + \lambda_{k,n} c^2 T = 0 \quad ; \quad m^2 + \lambda_{k,n} c^2 = 0 \quad ; \quad m = c\sqrt{-\lambda_{k,n}} = \pm ic\sqrt{\lambda_{k,n}}$$

$$T_{k,n}(t) = c_3 \cos(ct\sqrt{\lambda_{k,n}}) + c_4 \sin(ct\sqrt{\lambda_{k,n}})$$

Una vez resueltos los tres problemas de EDO, combinando las tres soluciones de los problemas se puede obtener la solución del problema original:

$$u_{n,k}(r, \theta, t) = H_n(\theta) R_{n,k}(r) T_{n,k}(t)$$

Por el principio de superposición, la combinación lineal de todas las soluciones también es solución del problema, y por tanto:

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [A_{k,n} \cos(n\theta) + B_{k,n} \sin(n\theta)] [C_{k,n} \cos(ct\sqrt{\lambda_{k,n}}) + D_{k,n} \sin(ct\sqrt{\lambda_{k,n}})] J_n(r\sqrt{\lambda_{k,n}})$$

quedando una serie doble sobre cada uno de los autovalores $\mu = n^2$ y $\lambda = (z_n^k/a)^2$, y cuatro constantes a determinar.

Determinación de las Constantes

La determinación de las constantes $A_{k,n}$, $B_{k,n}$, $C_{k,n}$ y $D_{k,n}$ se realiza a través de las dos condiciones iniciales.

$$\bullet \quad u_t(r, \theta, 0) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [A_{k,n} \cos(n\theta) + B_{k,n} \sin(n\theta)] [J_n(r\sqrt{\lambda_{k,n}})] (c\sqrt{\lambda_{k,n}}) [-C_{k,n} \sin(ct\sqrt{\lambda_{k,n}}) + D_{k,n} \cos(ct\sqrt{\lambda_{k,n}})]$$

$$u_t(r, \theta, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [A_{k,n} \cos(n\theta) + B_{k,n} \sin(n\theta)] [J_n(r\sqrt{\lambda_{k,n}})] D_{k,n} = 0 \implies D_{k,n} = 0$$

La solución queda entonces en este caso como:

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [A_{k,n} \cos(n\theta) + B_{k,n} \sin(n\theta)] J_n(r\sqrt{\lambda_{k,n}}) \cos(ct\sqrt{\lambda_{k,n}})$$

donde las nuevas constantes $A_{k,n}$, $B_{k,n}$, son el producto de las antiguas $A_{k,n}C_{k,n}$ y $B_{k,n}C_{k,n}$ respectivamente.

$$\bullet \quad u(r, \theta, 0) = f(r, \theta)$$

$$u(r, \theta, 0) = f(r, \theta) \implies \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [A_{k,n} \cos(n\theta) + B_{k,n} \sin(n\theta)] J_n(r\sqrt{\lambda_{k,n}}) = f(r, \theta)$$

Esta es una **serie doble de Fourier** cuyos coeficientes $A_{k,n}$ y $B_{k,n}$ se pueden calcular mediante una integral doble de la siguiente forma:

1. Para cada valor de k podemos identificar unas funciones $G_k(\theta)$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} [A_{k,n} \cos(n\theta) + B_{k,n} \sin(n\theta)]}_{G_k(\theta)} J_n(r\sqrt{\lambda_{k,n}}) = f(r, \theta)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \boxed{G_k(\theta)} J_n(r\sqrt{\lambda_{k,n}}) = f(r, \theta) \quad (7.27)$$

Esta segunda expresión corresponde con la **serie generalizada de Fourier-Bessel**¹¹⁶ de la función $f(r, \theta)$ cuyos coeficientes $G_k(\theta)$ se pueden determinar como¹¹⁷:

$$G_k(\theta) = \frac{\int_0^a f(r, \theta) J_n(r\sqrt{\lambda_{kn}}) r dr}{\int_0^a J_n^2(r\sqrt{\lambda_{kn}}) r dr} \quad (7.28)$$

2. Según la anterior definición (7.27), para cada valor de k se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [A_{k,n} \cos(n\theta) + B_{k,n} \sin(n\theta)] = G_k(\theta)$$

que corresponde con la **serie completa de Fourier**¹¹⁸ de la función $G_k(\theta)$, siendo A_{kn} y B_{kn} sus coeficientes, y por tanto para cada valor de $k = 1, 2, \dots$ y $n = 0, 1, 2, \dots$ se tiene:

$$A_{k,0} = \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi G_k(\theta) d\theta \xrightarrow{(7.28)} A_{k,0} = \frac{\int_0^\pi \int_0^a f(r, \theta) J_0(r\sqrt{\lambda_{k0}}) r dr}{\pi \int_0^a J_0^2(r\sqrt{\lambda_{k0}}) r dr}$$

$$A_{k,n} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi G_k(\theta) \cos(n\theta) d\theta \xrightarrow{(7.28)} A_{k,n} = \frac{2 \int_0^\pi \int_0^a f(r, \theta) \cos(n\theta) J_n(r\sqrt{\lambda_{kn}}) r dr}{\pi \int_0^a J_n^2(r\sqrt{\lambda_{kn}}) r dr} \quad n > 0$$

$$B_{k,n} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi G_k(\theta) \sin(n\theta) d\theta \xrightarrow{(7.28)} B_{k,n} = \frac{2 \int_0^\pi \int_0^a f(r, \theta) \sin(n\theta) J_n(r\sqrt{\lambda_{kn}}) r dr}{\pi \int_0^a J_n^2(r\sqrt{\lambda_{kn}}) r dr}$$

¹¹⁶Ver la Sección 6.4.2, página 172.

¹¹⁷Notar que es necesario incluir la función peso r en las integrales de ortogonalidad de esta serie.

¹¹⁸Ver la Sección 5.4.5, página 146.

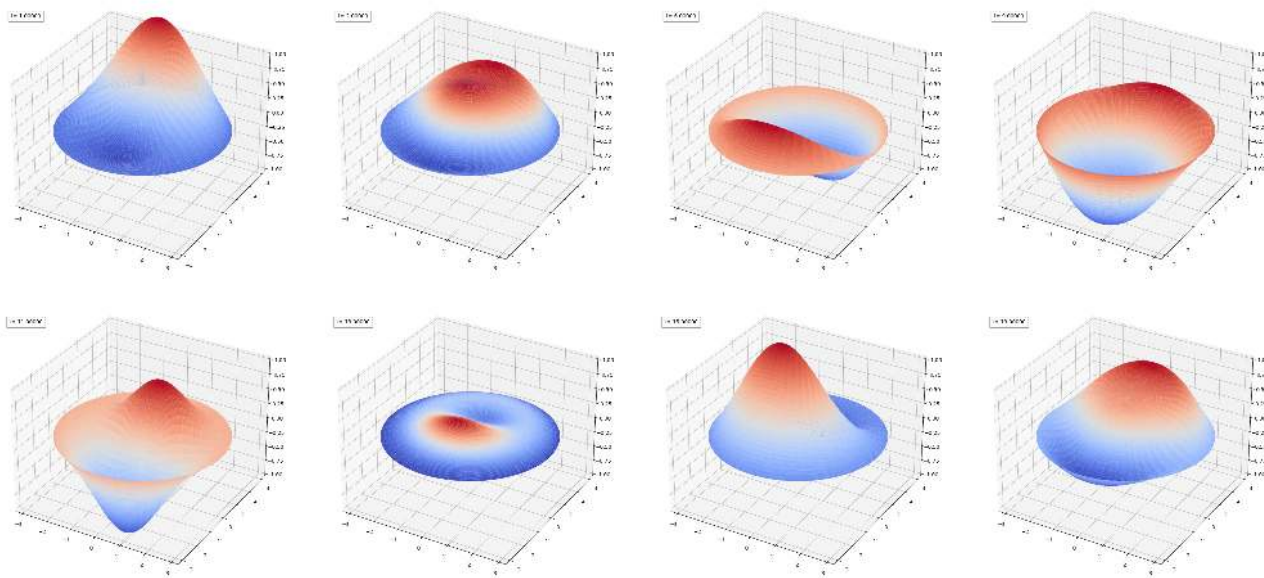


Figura 7.11: Simulación de un problema de la ecuación de onda en polares con condiciones periódicas, donde se observa los desplazamientos $u(r, t)$ en distintos tiempos para un disco de radio $R = \pi$ con condiciones iniciales $u(r, 0) = \cos(r/2)$, $u_t(r, 0) = 0$ y condición frontera $u(R, t) = 0$. Notar la falta de simetría radial, a diferencia del caso anterior, [Figura 7.10, página 211](#).

7.6. Ecuación de Laplace

La **ecuación de Laplace** es una EDP de segundo orden de tipo *elíptico*¹¹⁹ definida a través del *operador laplaciano*¹²⁰ que en dimensión n se define como:

$$\Delta u = 0$$

Dicha ecuación es un caso particular de la *ecuación de Helmholtz*¹²¹ que a su vez es un caso particular de la *ecuación de Poisson*¹²². Las soluciones de la ecuación de Laplace se denominan *funciones armónicas*¹²³.

Las aplicaciones de la ecuación de Laplace son numerosas y abarcan múltiples disciplinas, siendo algunas de las más destacadas:

- **Electrostática y electromagnetismo:** descripción del potencial eléctrico en regiones donde no hay cargas libres (en el vacío o en medios neutros). Aplicaciones:
 - Cálculo del potencial eléctrico en conductores
 - Diseño de condensadores y sistemas de almacenamiento de energía
 - Análisis de campos eléctricos en dispositivos electrónicos
- **Mecánica de fluidos:** descripción del potencial de velocidad en fluidos incompresibles y no viscosos, que está relacionado con el campo de velocidades del fluido. Aplicaciones:
 - Flujo potencial alrededor de obstáculos (por ejemplo, alas de aviones o perfiles aerodinámicos)
 - Modelado de flujos irrotacionales en ingeniería hidráulica

¹¹⁹Ver la [Sección 7.1.4, página 180](#).

¹²⁰Ver la [Definición 7.3, página 179](#).

¹²¹Ver la [Sección 7.7.1, página 228](#).

¹²²Ver la [Sección 7.1.3, página 180](#) y [Sección 7.8.2, página 237](#).

¹²³Se denomina *funciones holomorfas* o analíticas complejas $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, donde $z = x + iy$ aquellas cuyas partes real $u(x, y)$ y compleja $v(x, y)$ cumplen o son soluciones de la ecuación de Laplace. Ver por ejemplo "Clases de Ampliación de Matemáticas para Ingeniería" en la [Bibliografía](#), pág. 313.

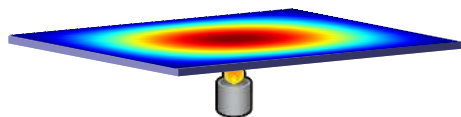
- **Transferencia de calor:** describe la distribución de temperatura en un medio sin fuentes de calor en estado estacionario (sin variación temporal). Aplicaciones:
 - Diseño de sistemas de enfriamiento y aislamiento térmico
 - Análisis de la conducción de calor en sólidos
- **Gravitación:** descripción del potencial gravitacional en regiones donde no hay masa. Aplicaciones:
 - Estudio del campo gravitacional de planetas y estrellas
 - Modelado de órbitas y trayectorias en mecánica celeste
- **Procesamiento de imágenes:** uso en técnicas de suavizado y detección de bordes en imágenes digitales. Aplicaciones:
 - Filtrado de imágenes
 - Mejora de la calidad visual en fotografía y visión por computadora
- **Ingeniería civil y estructural:** en elasticidad, la ecuación de Laplace puede describir la deformación de membranas o placas delgadas bajo ciertas condiciones. Aplicaciones:
 - Diseño de estructuras como puentes y edificios
 - Análisis de tensiones y deformaciones en materiales
- **Matemáticas puras:** estudio de las funciones armónicas con importantes propiedades matemáticas. Aplicaciones:
 - Teoría de funciones complejas
 - Análisis de problemas de contorno y valores en la frontera
- **Geofísica:** modelización de campos de potencial, como el campo magnético terrestre. Aplicaciones:
 - Estudio de anomalías magnéticas
 - Exploración de recursos naturales (petróleo, minerales)
- **Óptica:** descripción de la propagación de luz en medios homogéneos. Aplicaciones:
 - Diseño de lentes y sistemas ópticos
 - Análisis de la difracción de la luz
- **Economía y finanzas:** en algunos modelos económicos se utiliza para describir la distribución de probabilidades en procesos estocásticos. Aplicaciones:
 - Valoración de opciones financieras
 - Modelado de riesgos en mercados financieros

En resumen, la ecuación de Laplace es una herramienta matemática poderosa y versátil que se aplica en una amplia gama de problemas científicos y técnicos, desde la física teórica hasta la ingeniería práctica y su estudio es fundamental para comprender y resolver problemas en múltiples disciplinas.

En las siguientes secciones estudiaremos la resolución de diferentes problemas que involucran a la ecuación de Laplace.

7.6.1. Ecuación de Laplace Bidimensional

Sea una placa metálica rectangular¹²⁴ con una determinada distribución de temperatura a tiempo $t = 0$ y aislada del medio exterior. Si dejamos enfriar la placa, las variaciones de temperatura con el tiempo vienen dadas por la denominada *ecuación del calor*¹²⁵ *bidimensional* en coordenadas cartesianas,



$$k\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}$$

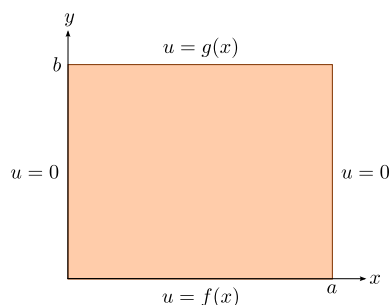
Para tiempos suficientemente grandes, la distribución de temperatura en el estado estacionario donde no existen variaciones de temperatura con el tiempo, $u_t = 0$, viene dada por la siguiente ecuación de tipo *elíptico*¹²⁶,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Conocida con el nombre de **Ecuación de Laplace** o **ecuación del potencial**¹²⁷. En este caso, cada uno de los cuatro bordes de la placa tiene que tener una condición de contorno de tipo Dirichlet, Neumann o Robin¹²⁸. Vamos a estudiar cuatro casos sencillos.

Caso 1: Condiciones Dirichlet (I)

Sea una placa bidimensional de dimensiones $a \times b$ sujeta a unas condiciones de temperatura de tipo Dirichlet en sus bordes, dados según se especifica en la siguiente figura. Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen que ser apropiadas para que la solución sea continua en las cuatro esquinas.



El PVF correspondiente a este caso se puede expresar de la siguiente forma¹²⁹:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad t > 0 & \text{(EDP interior placa)} \\ u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0 & 0 < y < b & \text{(Cond. frontera Dirichlet)} \\ u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = g(x) & 0 < x < a & \text{(Cond. frontera Dirichlet)} \end{cases} \quad (7.29)$$

Vamos calcular la solución particular de este problema mediante el *método de separación de variables*¹³⁰. Suponemos que la solución se puede expresar como producto de dos función que dependen solo de una variable, en este caso x o y :

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \implies \begin{cases} u_{xx} = X''Y \\ u_{yy} = XY'' \end{cases} \implies X''Y + XY'' = 0 \quad ; \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}$$

¹²⁴La dimensión z es despreciable frente a x e y .

¹²⁵Ver la [Sección 7.4.2, página 188](#).

¹²⁶Ver la [Sección 7.1.5, página 182](#).

¹²⁷Esta ecuación está relacionada con los campos eléctricos y gravitacionales. Por otra parte, toda función $u(x, y)$ que verifica la ecuación de Laplace se dice que es *armónica*. Ver por ejemplo "Clases de Ampliación de Matemáticas para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 313..

¹²⁸Ver la [Sección 7.1.5, página 182](#).

¹²⁹Notar que al no existir dependencia del tiempo (estado estacionario) el problema no tiene condiciones iniciales, solo condiciones frontera.

¹³⁰Ver la [Sección 7.2, página 183](#).

De esta forma comprobamos que este método es válido para esta ecuación. Para que pueda cumplirse la igualdad entre las variables independientes x e y , es necesario que ambas partes sean igual a una misma constante $-\lambda$, obteniéndose dos *problemas de autovalores*:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & \text{(Ec. 1)} \\ Y'' - \lambda Y = 0 & \text{(Ec. 2)} \end{cases}$$

Resolveremos cada ecuación por separado atendiendo a las condiciones frontera.

Problema 1

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases}$$

Este problema es idéntico a al tratado por ejemplo en el Problema 1 de la [Sección 7.4.2, página 189](#), obteniéndose la solución trivial no válida para $\lambda \leq 0$ y solo para $\lambda > 0$, por tanto:

$$a\sqrt{\lambda_n} = n\pi \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}}$$

$$\boxed{X_n(x) = c_{2n} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)} \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

Problema 2

Teniendo en cuenta que el valor de λ_n ha quedado determinado en el anterior Problema 1, la solución de este caso queda¹³¹:

$$Y'' - \lambda_n Y = 0$$

$$m^2 - \lambda_n = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \sqrt{\lambda_n} = \pm \frac{n\pi}{a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Y_n(y) = c_{3n} \cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + c_{4n} \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)} \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

Por tanto la solución completa será:

$$u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y) = \left[A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

Para cada valor de n se obtiene una posible solución al problema y aplicando el *principio de superposición*¹³² se obtiene la solución general:

$$\boxed{u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)} \quad (7.30)$$

Las constantes A_n y B_n se pueden obtener a través de las dos condiciones frontera del problema original ([Ecuación 7.29, página 218](#)):

- $u(x, 0) = f(x)$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = f(x)$$

Esta es la *serie de Fourier de senos*¹³³ de $f(x)$ y por tanto las constantes A_n correspondientes a los coeficientes de la serie se pueden obtener como:

$$\boxed{A_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx}$$

¹³¹El resultado también se puede expresar a través de exponenciales pero suele resultar más sencillo expresarla mediante el coseno y el seno hiperbólico (ver la [Sección 6.2.1, página 154](#)).

¹³²Ver la [Sección 7.2.2, página 186](#).

¹³³Ver la [Sección 5.4.4, página 145](#).

- $u(x, b) = g(x)$

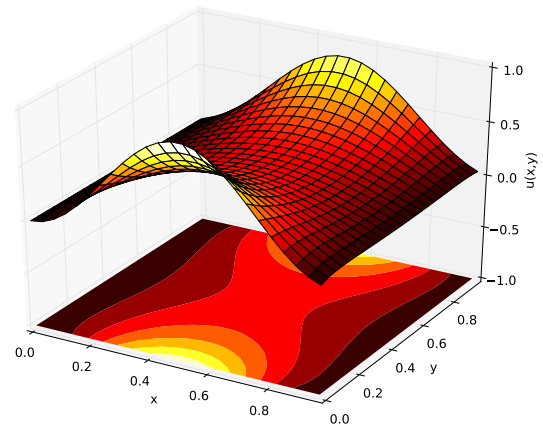
$$u(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) + B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = g(x)$$

Esta es la *serie de Fourier de senos* de $g(x)$ y por tanto las constantes B_n correspondientes a los coeficientes se pueden obtener como:

$$A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) + B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx$$

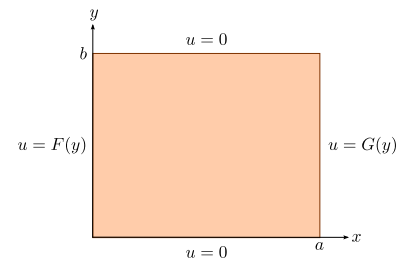
$$B_n = \frac{2}{a} \operatorname{cosech}\left(\frac{n\pi}{a}b\right) \int_0^a g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx - A_n \operatorname{cotanh}\left(\frac{n\pi}{a}b\right)$$

En la siguiente figura se muestra el resultado obtenido para un caso práctico con valores $a = b = 1$ y $f(x) = g(x) = \sin^2(x\pi)$, donde se aprecia gráficamente la distribución de temperatura $u(x, y)$ estacionaria en la placa bajo estas condiciones.



Caso 2: Condiciones Dirichlet (II)

Vamos a considerar un problema similar al Caso 1 de la página 218, cambiando la posición de los valores nulos en los lados verticales y pasándolos a los lados horizontales, como muestra la siguiente figura.



El PVF correspondiente a este caso se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad t > 0 & \text{(EDP interior placa)} \\ u(0, y) = F(y), \quad u(a, y) = G(y) & 0 < y < b & \text{(Cond. frontera Dirichlet)} \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 0 & 0 < x < a & \text{(Cond. frontera Dirichlet)} \end{cases} \quad (7.31)$$

Siguiendo un procedimiento análogo¹³⁴ al Caso 1, se tiene:

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \implies \begin{cases} u_{xx} = X''Y \\ u_{yy} = XY'' \end{cases} \implies X''Y + XY'' = 0 \quad ; \quad \frac{Y''}{Y} = -\frac{X''}{X}$$

$$\frac{Y''}{Y} = -\frac{X''}{X} = -\lambda \implies \begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 & \text{(Ec. 1)} \\ X'' - \lambda X = 0 & \text{(Ec. 2)} \end{cases}$$

Resolveremos cada ecuación por separado atendiendo a las condiciones frontera.

¹³⁴En este caso se intercambian los razonamientos entre las variables X e Y .

Problema 1

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y(0) = Y(b) = 0 \end{cases} ; \quad b\sqrt{\lambda_n} = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \implies \boxed{\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{b^2}}$$

$$\boxed{Y_n(y) = c_{2n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Problema 2

$$X'' - \lambda X = 0 ; \quad m^2 - \lambda_n = 0 \implies m = \sqrt{\lambda_n} = \pm \frac{n\pi}{b} \implies \boxed{X_n(x) = c_{3n} \cosh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) + c_{4n} \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)} \quad n = 1, 2, \dots$$

Por tanto la solución completa será:

$$\boxed{u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \cosh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) + D_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)} \quad (7.32)$$

Las constantes C_n y D_n se pueden obtener a través de las dos condiciones frontera del problema inicial (7.31):

- $u(0, y) = F(y)$

$$u(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = F(y) \implies \boxed{C_n = \frac{2}{b} \int_0^b F(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy}$$

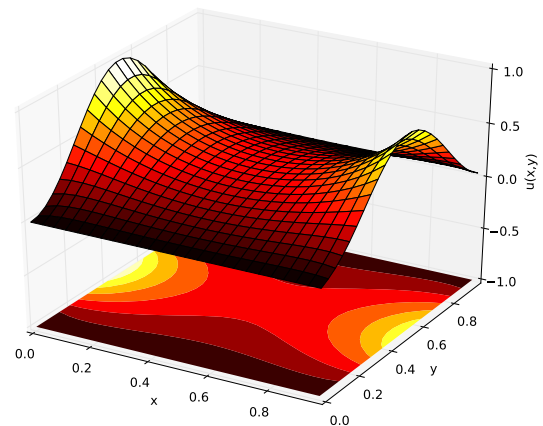
- $u(a, y) = G(y)$

$$u(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \cosh\left(\frac{n\pi}{b}a\right) + D_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}a\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = G(y)$$

$$C_n \cosh\left(\frac{n\pi}{b}a\right) + D_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}a\right) = \frac{2}{b} \int_0^b G(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy$$

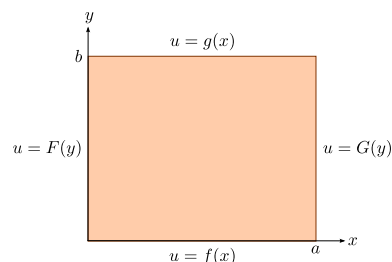
$$\boxed{D_n = \frac{2}{b} \operatorname{cosech}\left(\frac{n\pi}{b}a\right) \int_0^b G(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy - C_n \operatorname{cotanh}\left(\frac{n\pi}{b}a\right)}$$

En la siguiente figura se muestra el resultado obtenido para los valores $a = b = 1$, $F(y) = G(y) = \operatorname{sen}^2(y\pi)$.



Caso 3: Condiciones Dirichlet (III)

Vamos a considerar un problema general en el que cada uno de los cuatro bordes de la placa tiene asignado una condición frontera dada por funciones determinadas $f(x)$, $g(x)$, $F(x)$ y $G(x)$, según muestra la siguiente figura¹³⁵.



El PVF correspondiente se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad t > 0 & \text{(EDP interior placa)} \\ u(0, y) = F(y), \quad u(a, y) = G(y) & 0 < y < b & \text{(Cond. frontera Dirichlet)} \\ u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = g(x) & 0 < x < a & \text{(Cond. frontera Dirichlet)} \end{cases}$$

Aplicando el *principio de superposición* este problema se puede descomponer en la suma de la solución del problema del Caso 1 $u_1(x, y)$ (Ecuación 7.30, página 219), más la solución del problema del Caso 2 $u_2(x, y)$ (Ecuación 7.32, página 221) como se esquematiza en la siguiente figura:

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$$

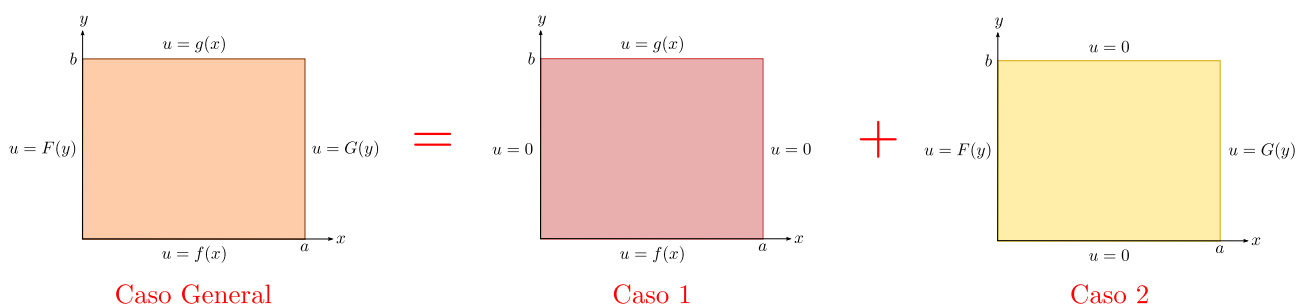
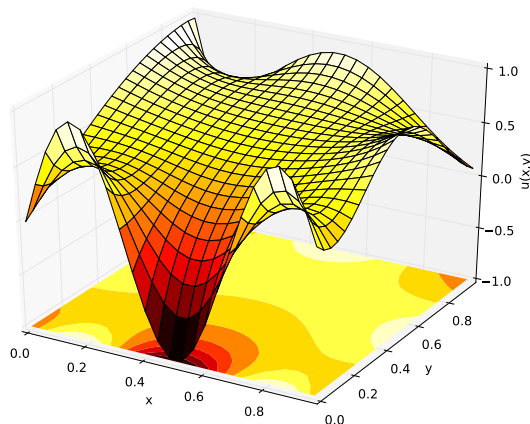


Figura 7.12: Esquema mostrando el principio de superposición para la resolución del problema general con condiciones Dirichlet de la ecuación de Laplace.

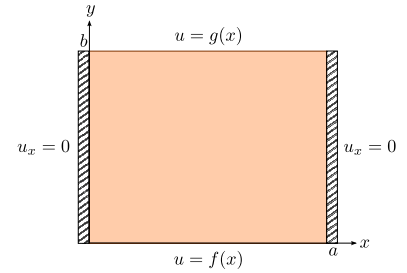
En la siguiente figura se muestra el resultado obtenido para los valores $a = b = 1$, $f(x) = \sin(3x\pi)$, $g(x) = \sin^2(x\pi)$, $F(y) = \sin(y\pi/2)$ y $G(y) = \sin^2(y\pi)$.



¹³⁵Las cuatro funciones tienen que ser apropiadas para que la solución sea continua en las esquinas.

Caso 4: Condiciones Neumann

Vamos a ver un ejemplo característico de las condiciones Neumann en la ecuación de Laplace. Sea una placa bidimensional $a \times b$ con las condiciones frontera mostradas en la siguiente figura, donde los lados verticales izquierdo y derecho se encuentran aislados, mientras que los lados horizontal superior e inferior tienen un perfil de temperaturas dados por unas funciones $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente.



El PVF correspondiente se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad t > 0 & \text{(EDP interior placa)} \\ u_x(0, y) = 0, \quad u_x(a, y) = 0 & 0 < y < b & \text{(Cond. frontera Neumann)} \\ u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = g(x) & 0 < x < a & \text{(Cond. frontera Dirichlet)} \end{cases} \quad (7.33)$$

Siguiendo el procedimiento del *método de separación de variables* se tiene:

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \implies \begin{cases} u_{xx} = X''Y \\ u_{yy} = XY'' \end{cases} \implies X''Y + XY'' = 0 \quad ; \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda \implies \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & \text{(Ec. 1)} \\ Y'' - \lambda Y = 0 & \text{(Ec. 2)} \end{cases}$$

Resolveremos cada ecuación por separado atendiendo a las condiciones frontera.

Problema 1

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(a) = 0 \end{cases}$$

Buscamos valores de λ que generen soluciones no triviales.

$$\lambda = 0$$

$$X'' = 0 \implies \begin{cases} X(x) = c_1 + c_2 x \\ X'(x) = c_2 \end{cases} \implies \begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(a) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases} \implies \boxed{X(x) = c_1}$$

Por tanto hay una solución no trivial para $\lambda = 0$, siendo éste un autovalor del problema 1.

$$\lambda < 0$$

$$X'' + \lambda X = 0 \implies m^2 + \lambda = 0 \quad ; \quad m = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm\alpha \quad (\alpha > 0)$$

$$X(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} \implies \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 A + c_2 B = 0 \end{cases}$$

Este es un SEL homogéneo compatible y determinado cuya única solución es la trivial $c_1 = c_2 = 0$, no válida, y por tanto $\lambda < 0$ no es un autovalor del problema.

$$\lambda > 0$$

$$X'' + \lambda X = 0 \implies m^2 + \lambda = 0 \quad ; \quad m = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm i\sqrt{\lambda}$$

$$\begin{cases} X(x) = c_1 \cos(x\sqrt{\lambda}) + c_2 \sin(x\sqrt{\lambda}) \\ X'(x) = -c_1 \sqrt{\lambda} \sin(x\sqrt{\lambda}) + c_2 \sqrt{\lambda} \cos(x\sqrt{\lambda}) \end{cases}$$

Imponiendo las condiciones frontera:

$$\begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(a) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} c_2 = 0 \\ -c_1 \sqrt{\lambda} \sin(a\sqrt{\lambda}) = 0 \end{cases} \implies a\sqrt{\lambda_n} = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \implies \boxed{\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{a^2}}$$

siendo λ_n otros autovalores del problema 1. Finalmente, todas las autofunciones asociadas al Problema 1 son:

$$X_n(x) = c_{1n} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Problema 2

Teniendo en cuenta los valores λ_n determinados en el Problema 1, la solución de este caso queda:

$$Y'' - \lambda_n Y = 0$$

$$m^2 - \lambda_n = 0 \implies m = \sqrt{\lambda_n} = \pm \frac{n\pi}{a} \implies Y_n(y) = c_{3n} \cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + c_{4n} \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Por tanto la solución completa $u(x, y) = X_n(x)Y_n(y)$ por el principio de superposición será:

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

Las constantes A_n y B_n se pueden obtener a través de las dos condiciones frontera del problema inicial (7.33):

- $u(x, 0) = f(x)$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = f(x)$$

que corresponde con la serie de Fourier de cosenos¹³⁶ de $f(x)$ y por tanto las constantes A_n correspondientes se pueden obtener como:

$$A_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- $u(x, b) = g(x)$

$$u(x, b) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) + B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = g(x)$$

que corresponde con la serie de Fourier de cosenos de $g(x)$ y por tanto las constantes B_n se pueden obtener como:

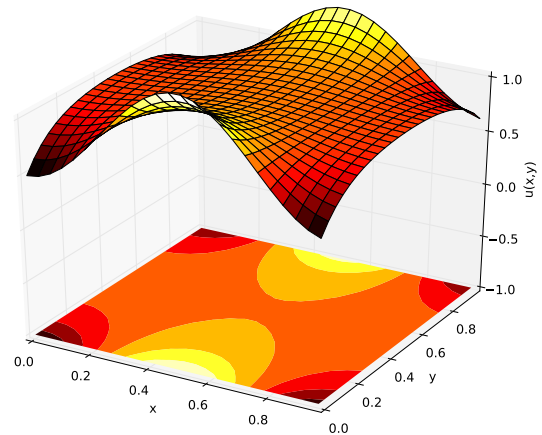
$$A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) + B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx$$

$$B_n = \frac{2}{a} \operatorname{cosech}\left(\frac{n\pi}{a}b\right) \int_0^a g(x) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx - A_n \coth\left(\frac{n\pi}{a}b\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Notar que en este caso el valor de B_0 no se puede determinar¹³⁷ pero no es necesario ya que para $n = 0$ se anula el término que multiplica a B_n .

En la siguiente figura se muestra el resultado obtenido para los valores $a = b = 1$, $f(x) = g(x) = \sin^2(x)$.

Comparando esta solución con la obtenida en el *Caso 1* (ver la página 228) con las mismas condiciones pero de tipo Dirichlet, observamos como en los bordes correspondientes a $x = 0$ y $x = a$ la temperatura no permanece constante al estar aislados y por tanto variar libremente en función de la distribución de temperatura impuesta por las otras dos condiciones Dirichlet.



¹³⁶Ver la Sección 5.4.4, página 144.

¹³⁷Ya que $\sinh(0) = 0$ y por tanto $\operatorname{cosech}(0)$ y $\coth(0)$ no están definidos.

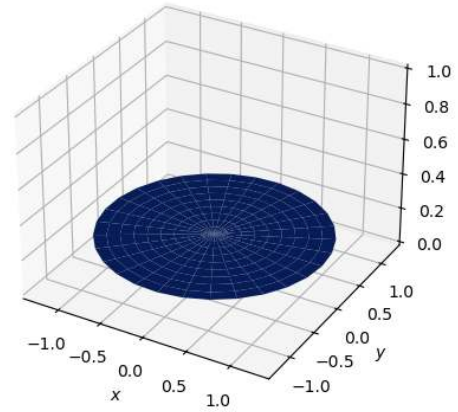
Aplicando el principio de superposición, de la misma forma que se hizo en la [Sección 7.6.1, página 222](#), se puede resolver problemas en los que se mezclen condiciones Dirichlet y Neumann en los distintos lados, descomponiendo el problema general en otros más sencillos y sumando las soluciones obtenidas.

Caso 5: Coordenadas Polares

En este caso tenemos una placa circular de radio a y espesor despreciable sujeta a una condición de temperatura de tipo Dirichlet en su borde a través de una función $f(\theta)$. En la ecuación de Laplace en este caso hay que poner el operador laplaciano en polares:

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

donde cada punto (r, θ) del sistema queda determinada por el valor del radio r y el ángulo θ .



El PVF correspondiente a este caso se puede expresar de la siguiente forma¹³⁸:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0 & 0 < r < a, \quad -\pi < \theta \leq \pi & \text{(EDP interior placa)} \\ u(a, \theta) = f(\theta) & -\pi < \theta \leq \pi & \text{(Cond. frontera Dirichlet)} \end{cases} \quad (7.34)$$

Notar que solo tenemos una condición de contorno, pero sin embargo tenemos dos derivadas de segundo orden y por tanto son necesarias cuatro condiciones en total. Las tres condiciones que faltan se denominan **condiciones de solubilidad** y se establecen por consideraciones físicas y matemáticas del problema:

1. Consecuencia de la naturaleza de variable angular θ , donde $\theta = \theta + 2k\pi$, la solución u tiene que ser obligatoriamente periódica y suave, debiendo cumplir $u(r, -\pi) = u(r, \pi)$ y $u_\theta(r, -\pi) = u_\theta(r, \pi)$.
2. Como el centro del disco es parte del dominio, la solución u para $r = 0$ tiene que ser un valor finito¹³⁹.

Vamos calcular la solución particular de este problema mediante el *método de separación de variables*. Suponemos que la solución se puede expresar como producto de dos función que dependen solo de una variable, en este caso r o θ :

$$u(r, \theta) = R(r)H(\theta) \implies \begin{cases} u_r = R'H \\ u_{rr} = R''H \\ u_{\theta\theta} = RH'' \end{cases} \implies R''H + \frac{1}{r}R'H + \frac{1}{r^2}RH'' = 0 \quad ; \quad \frac{1}{R}(r^2R'' + rR') = -\frac{H''}{H}$$

De esta forma comprobamos que este método es válido para esta ecuación. Para que pueda cumplirse la igualdad entre las variables independientes r y θ , es necesario que ambas partes sean igual a una misma constante λ , obteniéndose dos *problemas de autovalores*:

$$\frac{1}{R}(r^2R'' + rR') = -\frac{H''}{H} = \lambda \implies \begin{cases} H'' + \lambda H = 0 & \text{(Ec. 1)} \\ r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 & \text{(Ec. 2)} \end{cases}$$

Resolveremos cada ecuación por separado atendiendo a la condición explícita dada en el problema y a las tres condiciones implícitas especificadas anteriormente.

¹³⁸Podría también establecerse el dominio de la variable angular θ entre 0 y 2π , siendo el problema equivalente, aunque resulta algo más sencillo de esta forma.

¹³⁹En problemas donde el dominio sea un anillo que no incluya al centro, esta condición no tendría sentido.

Problema 1

$$\begin{cases} H'' + \lambda H = 0 \\ H(-\pi) = H(\pi), \quad H'(-\pi) = H'(\pi) \end{cases}$$

Analizamos todos los posibles valores del autovalor λ .

$$\underline{\lambda = 0}$$

En este caso la EDO queda:

$$H'' = 0 \implies H(\theta) = c_1 + c_2\theta$$

Notar que es una recta, que de forma general no son funciones periódicas, excepto que sean horizontales (con pendiente cero). Imponiendo las condiciones frontera:

$$\begin{cases} H(-\pi) = H(\pi) \\ H'(-\pi) = H'(\pi) \end{cases} \implies c_2 = 0 \implies \boxed{H(\theta) = c_1}$$

Esta es una solución válida, y por tanto $\lambda = 0$ es un valor posible para obtener una solución analítica del problema.

$$\underline{\lambda < 0}$$

En este caso tenemos una EDO de segundo orden homogénea, cuya ecuación característica es:

$$H'' + \lambda H = 0 \implies m^2 + \lambda = 0 \quad ; \quad m = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm\alpha \quad (\alpha > 0)$$

Por tanto la solución queda en este caso (raíces reales distintas):

$$H(\theta) = c_1 e^{\alpha\theta} + c_2 e^{-\alpha\theta}$$

Notar que las funciones exponenciales no son periódicas y es fácil comprobar que al imponer las condiciones frontera la única solución es la trivial, por lo que $\lambda < 0$ no es un autovalor del problema.

$$\underline{\lambda > 0}$$

En este caso también tenemos una EDO de segundo orden homogénea, con ecuación característica:

$$H'' + \lambda H = 0 \implies m^2 + \lambda = 0 \quad ; \quad m = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm i\sqrt{\lambda}$$

Por tanto la solución queda en este caso (raíces complejas):

$$H(\theta) = c_1 \cos(\theta\sqrt{\lambda}) + c_2 \sin(\theta\sqrt{\lambda})$$

Notar que las funciones seno y coseno sí son periódicas con periodo 2π , por lo que todo apunta a que en este caso sí aparecerán autovalores. Imponiendo las condiciones frontera:

$$\begin{cases} H(-\pi) = H(\pi) & \implies 0 = c_2 \sin(\pi\sqrt{\lambda}) \\ H'(-\pi) = H'(\pi) & \implies 0 = c_1 \sin(\pi\sqrt{\lambda}) \end{cases}$$

Para que las constantes no sean nulas se debe cumplir $\sqrt{\lambda_n} = n$ con $n \in \mathbb{Z} \implies \lambda_n = n^2$. Por tanto¹⁴⁰:

$$\boxed{\lambda_n = n^2} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \implies \boxed{H_n(\theta) = c_{1n} \cos(n\theta) + c_{2n} \sin(n\theta)}$$

Problema 2

Teniendo en cuenta los valores de $\lambda_n = n^2$ determinados en el anterior Problema 1:

$$\begin{cases} r^2 R'' + r R' - n^2 R = 0 \\ |R(0)| < \infty \end{cases} \quad ; \quad n \geq 0$$

¹⁴⁰El autovalor $\lambda = 0$ vuelve también a salir aquí con la misma autofunción.

Tenemos que analizarla para $n = 0$ y $n \neq 0$.

$n = 0$

Se puede resolver por reducción de orden¹⁴¹ o bien:

$$r^2 R'' + r R' = 0 \quad ; \quad r R'' + R' = 0 \quad ; \quad \frac{d}{dr}(r R') = 0 \implies r R' = c_1 \quad ; \quad dR = \frac{c_1}{r} dr \quad ; \quad \boxed{R(r) = c_1 \ln r + c_2}$$

Por la condición de compatibilidad¹⁴² $c_1 = 0$ y por tanto la solución válida para $n = 0$ es:

$$\boxed{R_0(r) = c_2}$$

$n \neq 0$

Esta es una EDO de tipo Cauchy-Euler¹⁴³ y por tanto:

$$m(m-1) + m - n^2 = 0 \implies m^2 = n^2 \quad ; \quad m = \pm n \implies R_n(r) = c_{1n} r^n + c_{2n} r^{-n}$$

Notar que para cumplir la condición del problema $c_{2n} = 0$ dando lugar a la solución:

$$\boxed{R_n(r) = c_n r^n}$$

Que también es compatible con el valor $n = 0$ obtenido anteriormente. Por tanto la solución completa será:

$$u_n(r, \theta) = R_n(r) H_n(\theta) = A_n r^n \cos(n\theta) + B_n r^n \sin(n\theta)$$

Para cada valor de n se obtiene una posible solución al problema y aplicando el *principio de superposición* se obtiene la solución general:

$$\boxed{u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n r^n \cos(n\theta) + B_n r^n \sin(n\theta)]} \quad (7.35)$$

Las constantes A_n y B_n se pueden obtener a través de la condición de contorno del problema original (Ecuación 7.34, página 225) para la frontera $r = a$ donde $u(r, \theta) = u(a, \theta) = f(\theta)$:

$$u(a, \theta) = f(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n a^n \cos(n\theta) + B_n a^n \sin(n\theta)] = A_0 + a^n \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)]$$

que corresponde con la *serie de Fourier*¹⁴⁴ de $f(\theta)$ y por tanto:

$$\boxed{A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) d\alpha} \quad ; \quad \boxed{A_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \cos(n\alpha) d\alpha} \quad ; \quad \boxed{B_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \sin(n\alpha) d\alpha}$$

Todos estos resultados se pueden poner juntos, sustituyendo en la ecuación (7.35):

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n r^n \cos(n\theta) + B_n r^n \sin(n\theta)] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) d\alpha + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \cos(n\alpha) d\alpha \right) \cos(n\theta) + \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \sin(n\alpha) d\alpha \right) \sin(n\theta) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) d\alpha + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \underbrace{[\cos(n\alpha) \cos(n\theta) + \sin(n\alpha) \sin(n\theta)]}_{\cos(n\alpha - n\theta)} d\alpha = \end{aligned}$$

¹⁴¹Ver la Sección 2.9, página 40.

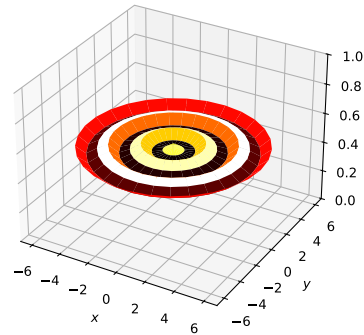
¹⁴²Ya que no estaría definida para $r = 0$.

¹⁴³Ver la Sección 3.4.3, página 79.

¹⁴⁴Ver la Definición 5.10, página 140.

donde la *función de Green* $P(r, \theta, \alpha)$ en este caso se suele denominar **núcleo de Poisson**.

En la siguiente figura se muestra el resultado obtenido para un caso práctico con condición de contorno $f(\theta) = 1/2 + 3\cos(2\theta)$, donde se aprecia gráficamente la distribución de temperatura $u(r, \theta)$ estacionaria en la placa bajo estas condiciones.



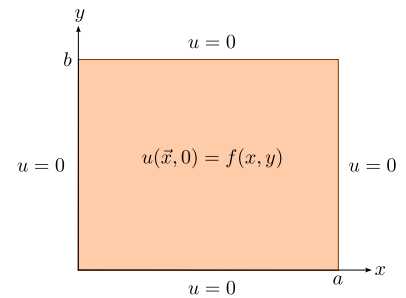
7.7. Problemas de Evolución Bidimensionales

7.7.1. Ecuación del Calor Bidimensional en Coordenadas Cartesianas

Vamos a ver ahora cómo generalizar el método de separación de variables a un problema de más de dos variables. Para ello estudiaremos la ecuación del calor en una placa rectangular $\vec{x} = (x, y) \in R = (0, a) \times (0, b) \subset \mathbb{R}^2$.

Sea una delgada placa conductora bidimensional $a \times b$ con las condiciones frontera mostradas en la siguiente figura, donde los cuatro lados de la frontera ∂R se encuentran a temperatura constante $u = 0$ verticales izquierdo y derecho y el lado horizontal superior se encuentran aislados, habiendo una distribución inicial de temperatura dada por $f(\vec{x})$.

En este caso la temperatura u depende de tres variables independientes, $u(\vec{x}, t) = u(x, y, t)$.



El PVF correspondiente se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u = k(u_{xx} + u_{yy}) & \vec{x} \in R, \quad t > 0 \quad (\text{EDP interior placa}) \\ u(\partial R) = 0 & (\text{Cond. frontera Dirichlet}) \\ u(\vec{x}, 0) = f(\vec{x}) & \vec{x} \in R, \quad t = 0 \quad (\text{Cond. iniciales}) \end{cases}$$

Empezamos aplicando el procedimiento del *método de separación de variables* a las variables espaciales y a la temporal¹⁴⁵:

$$u(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x})T(t) \implies \begin{cases} u_t = \phi T' \\ \Delta u = T \Delta \phi \end{cases} \implies \phi T' = Tk \Delta \phi; \quad \frac{\Delta \phi}{\phi} = \frac{T'}{Tk} = -\lambda$$

$$\begin{cases} \Delta \phi + \lambda \phi = 0 & (\text{Ec. 1}) \\ T' + \lambda k T = 0 & (\text{Ec. 2}) \end{cases} \quad (7.36)$$

Resolveremos cada problema por separado atendiendo a las condiciones iniciales y de frontera.

Problema 1: Ecuación de Helmholtz

$$\begin{cases} \Delta \phi + \lambda \phi = 0, & \text{en } R \\ \phi(\partial R) = 0 \end{cases}$$

¹⁴⁵También se puede usar un método alternativo, suponiendo que $u(x, y, t) = f(x)g(y)h(t)$, obteniéndose el mismo resultado, ver la [Sección 7.7.2, página 230](#).

Este es un problema de autovalores bidimensional¹⁴⁶, que puede resolverse aplicando nuevamente el método de separación de variables, de forma similar a como se hizo en los distintos casos de la [Sección 7.6.1, página 218](#).

$$\phi(x, y) = X(x)Y(y) \implies \Delta\phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} = X''Y + XY'' \implies X''Y + XY'' + \lambda XY = 0 \implies \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda$$

De esta forma comprobamos que este método es válido para esta nueva ecuación. Para que pueda cumplirse la igualdad entre las variables independientes x e y , es necesario que ambas partes sean igual a una misma constante $-\mu$, obteniéndose dos nuevos *problemas de autovalores*, en este caso unidimensionales:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda = -\mu \implies \begin{cases} X'' + \mu X = 0 \\ Y'' + (\lambda - \mu)Y = 0 \end{cases}$$

$$(1) \quad \begin{cases} X'' + \mu X = 0 \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases} \quad ; \quad (2) \quad \begin{cases} Y'' + (\lambda - \mu)Y = 0 \\ Y(0) = Y(b) = 0 \end{cases}$$

El problema (1) se puede analizar en función del parámetro μ de forma similar a como se hizo por ejemplo en el Problema 1 de la [Sección 7.4.2, página 189](#), obteniéndose:

$$\mu_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2} \implies X_n(x) = \text{sen} \frac{n\pi x}{a} \quad ; \quad n = 1, 2, \dots$$

Y metiendo este valor en el problema (2) y resolviendo de forma análoga se tiene:

$$\lambda_{m,n} = \mu_n + \frac{m^2\pi^2}{b^2} = \frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2} \implies Y_m(y) = \text{sen} \frac{m\pi y}{b} \quad ; \quad m = 1, 2, \dots$$

Notar que aparecen dos autovalores μ_n y $\lambda_{m,n}$ que dependen de dos índices n y m . Teniendo en cuenta que $\phi(x, y) = X(x)Y(y)$ se tienen las siguientes autofunciones:

$$\phi_{m,n}(x, y) = X_n(x)Y_m(y) = \text{sen} \frac{n\pi x}{a} \text{sen} \frac{m\pi y}{b}$$

Que por el principio de superposición se tiene:

$$\phi_{m,n}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \text{sen} \frac{n\pi x}{a} \text{sen} \frac{m\pi y}{b}$$

Problema 2: Serie Doble de Fourier

La ecuación temporal (2) de (7.36) es fácilmente resoluble, teniendo en cuenta los valores $\lambda_{m,n}$ obtenidos en el problema anterior:

$$T' + \lambda_{m,n} kT = 0 \implies T_{m,n}(t) = c_{m,n} e^{-\lambda_{m,n} kt} = c_{m,n} e^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}\right)kt}$$

Finalmente la solución completa $u(x, y, t)$ será:

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \phi_{m,n}(x, y) T_{m,n}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \text{sen} \frac{n\pi x}{a} \text{sen} \frac{m\pi y}{b} e^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}\right)kt}$$

Las constantes $A_{m,n}$ se pueden obtener a partir de la condición inicial del problema $f(x, y)$:

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \text{sen} \frac{n\pi x}{a} \text{sen} \frac{m\pi y}{b}$$

que es conocida con el nombre de **serie doble de Fourier**, donde los coeficientes pueden determinarse de la siguiente forma:

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \text{sen} \frac{n\pi x}{a} \right)}_{C_m(x)} \text{sen} \frac{m\pi y}{b} = \sum_{m=1}^{\infty} C_m(x) \text{sen} \frac{m\pi y}{b}$$

¹⁴⁶La ecuación de este problema $\Delta\phi + \lambda\phi = 0$ se conoce con el nombre de **ecuación de Helmholtz** y tiene múltiples aplicaciones prácticas por ejemplo en electromagnetismo. La **ecuación de Helmholtz** es un caso particular de la **ecuación de Poisson**, $\Delta\phi = f$.

1. Para cada valor de m se obtiene una función $C_m(x)$, que son los coeficientes de la serie de Senos de Fourier de la función $f(x, y)$, y por tanto:

$$C_m(x) = \frac{2}{b} \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m\pi y}{b} dy$$

2. Para cada valor de n se tiene:

$$C_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

que corresponde con la serie de senos de Fourier de la función $C_m(x)$, y por tanto los coeficientes $A_{m,n}$ se pueden determinar como:

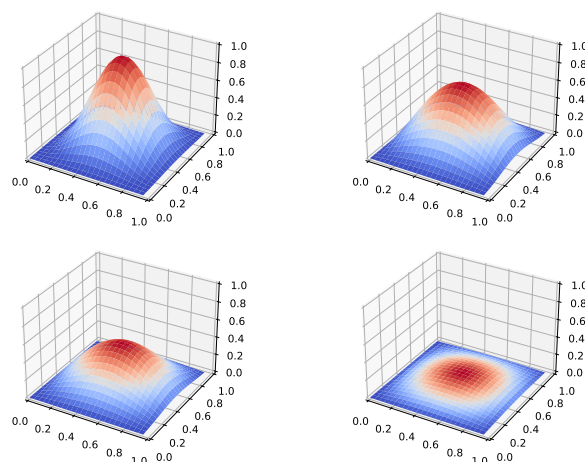
$$A_{m,n} = \frac{2}{a} \int_0^a C_m(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx$$

Por tanto los coeficientes $A_{m,n}$ se puede calcular mediante la siguiente integral doble:

$$A_{m,n} = \frac{2}{a} \int_0^a \underbrace{\left[\frac{2}{b} \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m\pi y}{b} dy \right]}_{C_m(x)} \sin \frac{n\pi x}{a} dx ; \quad A_{m,n} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m\pi y}{b} \sin \frac{n\pi x}{a} dx dy$$

Simulación espacio temporal para del problema del calor bidimensional en una placa conductora cuadrado de lado 1 y una distribución inicial de temperaturas dada por:

$$u(x, y, 0) = f(x, y) = \sin^2(\pi x) \sin^2(\pi y)$$



Este proceso es extensible a problemas con cualquier número de variables independientes, aplicando reiteradamente el método de separación de variables. Sin embargo el aumento de complejidad de los términos a medida aumenta el número de variables hace poco práctico su uso, siendo en esos casos mucho más factible el uso de métodos numéricos.

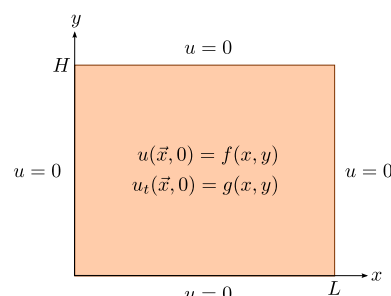
7.7.2. Ecuación de Onda Bidimensional en Coordenadas Cartesianas

Vamos a analizar las oscilaciones de una delgada membrana ideal rectangular, donde el desplazamiento vertical $u(x, y, t)$ de cada punto de la membrana satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Con las condiciones frontera e iniciales:

$$\begin{cases} u(0, y, t) = 0 & , & u(L, y, t) = 0 \\ u(x, 0, t) = 0 & , & u(x, H, t) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u(x, y, 0) = f(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = g(x, y) \end{cases}$$



Aplicamos separación de variables $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$:

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) \implies XYT'' = c^2(YTX'' + XTY'') ; \quad \frac{T''}{c^2T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda ; \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda = -\mu \implies \left\{ \begin{array}{l} X'' + \mu X = 0 \\ Y'' + (\lambda - \mu)Y = 0 \end{array} \right. \\ \frac{T''}{c^2T} = -\lambda ; \quad T'' - c^2\lambda T = 0 \end{array} \right.$$

Tenemos tres problemas de EDO:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} X'' + \mu X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{array} \right. ; \quad (2) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y'' + (\lambda - \mu)Y = 0 \\ Y(0) = Y(H) = 0 \end{array} \right. ; \quad (3) \quad \left\{ \begin{array}{l} T'' + c^2\lambda T = 0 \\ T(0) = f(x, y) \\ T'(0) = g(x, y) \end{array} \right.$$

- El Problema 1 es bien conocido con soluciones:

$$\boxed{\mu_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}} ; \quad \boxed{X_n(x) = c_{1n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}} ; \quad n = 1, 2, \dots$$

- Con los valores conocidos de μ_n resolvemos el problema (2):

$$Y'' + (\lambda - \mu_n)Y = 0$$

que es del mismo tipo que el anterior y por tanto introduciendo un nuevo índice m :

$$\lambda_{m,n} - \mu_n = \frac{m^2\pi^2}{H^2} ; \quad \lambda_{m,n} = \mu_n + \frac{m^2\pi^2}{H^2} = \frac{n^2\pi^2}{L^2} + \frac{m^2\pi^2}{H^2} ; \quad \lambda_{m,n} > 0$$

$$\boxed{\lambda_{m,n} = \frac{n^2\pi^2}{L^2} + \frac{m^2\pi^2}{H^2}} ; \quad \boxed{Y_{m,n} = c_{2m} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H}} ; \quad \{m, n\} = 1, 2, \dots$$

- Finalmente con los valores conocidos de $\lambda_{m,n}$ resolvemos el problema (3) a través de su ecuación característica:

$$T'' + c^2\lambda_{m,n}T = 0 ; \quad k^2 + c^2\lambda_{m,n} = 0 ; \quad k = \sqrt{-c^2\lambda_{m,n}} = c\sqrt{-\lambda_{m,n}} \implies k = \pm ic\sqrt{\lambda_{m,n}}$$

$$\boxed{T_{m,n}(t) = c_{3m,n} \cos(tc\sqrt{\lambda_{m,n}}) + c_{4m,n} \operatorname{sen}(tc\sqrt{\lambda_{m,n}})}$$

La solución completa es por tanto:

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_{m,n} \cos(tc\sqrt{\lambda_{m,n}}) + B_{m,n} \operatorname{sen}(tc\sqrt{\lambda_{m,n}}) \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H}$$

donde las constantes $A_{m,n}$ y $B_{m,n}$ se determinan a través de las dos condiciones iniciales:

$$1. \quad u(x, y, 0) = f(x, y)$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H}$$

que es una **serie doble de Fourier**. Al igual que se hizo en el [Sección 7.7.1, página 229](#), los coeficientes $A_{m,n}$ se pueden calcular mediante dos integrales simples de la siguiente forma:

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right)}_{C_m(x)} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H} = \sum_{m=1}^{\infty} C_m(x) \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H} \implies \text{Serie Fourier de senos de } f(x, y)$$

$$C_m(x) = \frac{2}{H} \int_0^H f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H} dy$$

Como:

$$C_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \implies \text{Serie Fourier de senos de la función } C_m(x)$$

$$A_{m,n} = \frac{2}{L} \int_0^L G_n(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$$

Finalmente los coeficientes $A_{m,n}$ se puede calcular mediante la siguiente integral doble:

$$A_{m,n} = \frac{2}{L} \int_0^L \underbrace{\left[\frac{2}{H} \int_0^H f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H} dy \right]}_{G_n(x)} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$A_{m,n} = \frac{4}{HL} \int_0^L \int_0^H f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx dy$$

$$2. \ u_t(x, y, 0) = g(x, y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[-c\sqrt{\lambda_{m,n}} A_{nm} \operatorname{sen}(tc\sqrt{\lambda_{m,n}}) + c\sqrt{\lambda_{m,n}} B_{nm} \cos(tc\sqrt{\lambda_{m,n}}) \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H}$$

$$u_t(x, y, 0) = g(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} cB_{nm} \sqrt{\lambda_{m,n}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H}$$

Esta es otra **serie doble de Fourier** y de igual forma que antes, los coeficientes B_{nm} se pueden calcular a través de dos integrales simples de la siguiente forma:

$$u_t(x, y, 0) = g(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{m=1}^{\infty} cB_{nm} \sqrt{\lambda_{m,n}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right)}_{D_m(x)} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H} = \sum_{n=1}^{\infty} D_m(x) \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H}$$

$$D_m(x) = \frac{2}{H} \int_0^H g(x, s) \operatorname{sen} \frac{m\pi s}{H} ds$$

Como:

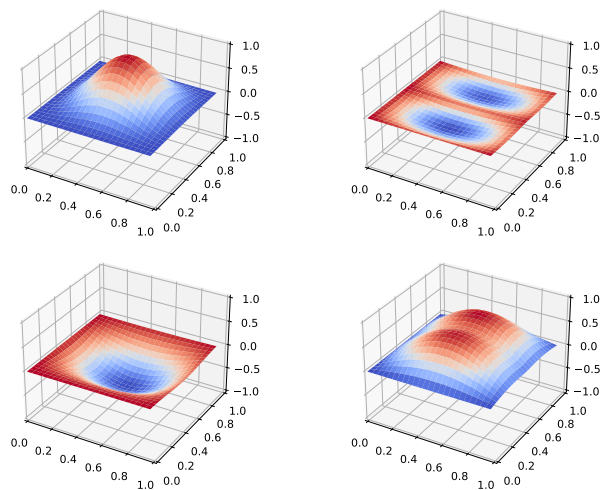
$$\sum_{n=1}^{\infty} c\sqrt{\lambda_{m,n}} B_{nm} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = D_m(x) \implies B_{nm} = \frac{2}{Lc\sqrt{\lambda_{m,n}}} \int_0^L D_m(s) \operatorname{sen} \frac{n\pi s}{L} ds$$

Finalmente los coeficientes $B_{m,n}$ se pueden calcular a través de la siguiente integral doble:

$$B_{m,n} = \frac{2}{cL\sqrt{\lambda_{m,n}}} \int_0^L \underbrace{\left[\frac{2}{H} \int_0^H g(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H} dy \right]}_{D_m(x)} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$$

Simulación espacio temporal para el problema de onda bidimensional en una membrana cuadrada de lado 1 y con condiciones iniciales dada por:

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = f(x, y) = \sin^2(\pi x) \sin^2(\pi y) \\ u_t(x, y, 0) = g(x, y) = \cos(xy) \end{cases}$$



7.7.3. Ecuación del Calor en un Cilindro con Simetría Radial

Vamos a estudiar la ecuación del calor en un cilindro circular de radio a y altura H con condiciones Dirichlet en la frontera e iniciales

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k \Delta u \\ u(r, \theta, 0, t) = u(r, \theta, H, t) = u(a, \theta, z, t) = 0 \\ u(r, \theta, z, 0) = f(r, z) \end{cases} \quad (\text{independiente de } \theta)$$

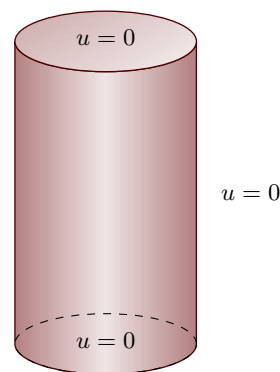
El laplaciano en coordenadas cilíndricas, teniendo en cuenta la simetría radial (independencia del ángulo θ):

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}}_0 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Aplicamos separación de variables $u(r, z, t) = R(r)Z(z)T(t)$:

$$\frac{1}{k} R Z T' = T Z R'' + \frac{1}{r} T Z R' + T R Z'' ; \quad \frac{T'}{kT} = \frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{Z''}{Z} = -\lambda \implies \boxed{T' + k\lambda T = 0} \quad (3)$$

$$\frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{Z''}{Z} = -\lambda ; \quad \frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} = -\lambda - \frac{Z''}{Z} = -\mu \implies \begin{cases} rR'' + R' + \mu rR = 0 & (1) \\ Z'' + (\lambda - \mu)Z = 0 & (2) \end{cases}$$



Problema 1

$$\begin{cases} rR'' + R' + \mu rR = 0 \\ R(a) = 0 \\ |R(0)| < \infty \quad (\text{cond. de compatibilidad}) \end{cases}$$

$$\bullet \mu = 0 \implies rR'' + R' = 0 \implies rm^2 + m = m(rm + 1) = 0 \implies m = \{0, -1/r\}$$

$$R(r) = c_1 + c_2 e^{-1/r}$$

Por la condición de compatibilidad $|R(0)| < \infty$, se tiene $c_2 = 0$, y por la condición frontera $R(a) = 0$ se tiene $c_1 = 0$, por lo que $\mu = 0$ **no** es un autovalor del problema.

$\bullet \mu \neq 0$. Si multiplicamos la ecuación por r :

$$r^2 R'' + 2rR' + \mu r^2 R = 0$$

se obtiene la **ecuación paramétrica de Bessel**¹⁴⁷ de forma que con el cambio de variable:

$$z = r\sqrt{\mu} \implies \left\{ \begin{array}{l} r = \frac{z}{\sqrt{\mu}} \\ R(r) = R(z/\sqrt{\mu}) = \phi(z) \\ R'(r) = \frac{d\phi}{dz} \frac{dz}{dr} = \phi'(z)\sqrt{\mu} \\ R''(r) = \frac{d}{dz} [\phi'(z)\sqrt{\mu}] \frac{dz}{dr} = \phi''(z)\mu \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \frac{z^2}{\mu} \phi'' + \frac{z}{\sqrt{\mu}} \phi' + \phi \frac{z^2}{\mu} = 0 \\ z^2 \phi'' + z \phi' + z^2 \phi = 0 \end{array}$$

que es una **ecuación de Bessel**¹⁴⁸ de orden $m = 0$ y cuya solución es:

$$\phi(z) = c_1 J_0(z) + c_2 Y_m(z) \xrightarrow{c.v.} \boxed{R(r) = c_1 J_0(r\sqrt{\mu}) + c_2 Y_0(r\sqrt{\mu})}$$

Recordamos que la función Y_m no está acotada en el origen¹⁴⁹ y por tanto, por la concisión de compatibilidad obliga a eliminar ese término, por tanto:

$$c_2 = 0 \implies R(r) = c_1 J_0(r\sqrt{\mu})$$

Imponiendo la condición de contorno:

$$R(a) = 0 \implies c_1 J_0(r\sqrt{\mu}) = 0$$

Para que $c_1 \neq 0$ el valor $a\sqrt{\mu}$ deben coincidir con los ceros de esa función. Si denominamos z_m^n al n -ésimo cero de la función $J_m(x)$, entonces en nuestro caso:

$$J_0(a\sqrt{\mu}) = 0 \implies a\sqrt{\mu_n} = z_0^n \implies \boxed{\mu_n = \left(\frac{z_0^n}{a}\right)^2} \quad ; \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Y las autofunciones asociadas son:

$$\boxed{R_n(r) = c_1 J_0(r\sqrt{\mu_n}) = c_1 J_0\left(\frac{r z_0^n}{a}\right)}$$

Problema 2

$$\begin{cases} Z'' + (\lambda - \mu_n)Z = 0 \\ Z(0) = Z(H) = 0 \end{cases}$$

- $\lambda = \mu_n \implies Z'' = 0 \implies Z(z) = c_1 z + c_2 \implies \begin{cases} Z(0) = 0 : & c_2 = 0 \\ Z(H) = 0 : & c_1 = 0 \end{cases}$ Por tanto $\lambda = \mu_n$ **no** es autovalor.
- $\lambda \neq \mu_n \implies m^2 + (\lambda - \mu_n) = 0 \implies m = \sqrt{\mu_n - \lambda}$
- $\lambda < \mu_n \implies$ raíces reales y distintas:

$$Z(z) = c_1 \cosh(z\sqrt{\mu_n - \lambda}) + c_2 \sinh(z\sqrt{\mu_n - \lambda}) \implies \begin{cases} Z(0) = 0 : & c_2 = 0 \\ Z(H) = 0 : & c_1 = 0 \end{cases} \quad \lambda < \mu_n \text{ **no** autovalor}$$

- $\lambda > \mu_n \implies$ raíces complejas:

$$Z(z) = c_1 \cos(z\sqrt{\lambda - \mu_n}) + c_2 \sin(z\sqrt{\lambda - \mu_n}) \implies \begin{cases} Z(0) = 0 : & c_1 = 0 \\ Z(H) = 0 : & c_2 \sin(H\sqrt{\lambda - \mu_n}) = 0 \end{cases}$$

¹⁴⁷Ver la Sección 3.4.4, página 84, el Sección 7.4.3, página 198 y el Sección ??, página ??.

¹⁴⁸Ver la Sección 3.4.4, página 82.

¹⁴⁹Ver la Sección 3.4.4, página 84.

$$H\sqrt{\lambda - \mu_n} = m\pi \quad ; \quad m = 1, 2, \dots \implies \lambda_{m,n} = \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 + \mu_n$$

$$\lambda_{m,n} = \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 + \left(\frac{z_0^n}{a}\right)^2 \quad ; \quad Z_{m,n}(z) = c_2 \operatorname{sen} \frac{zm\pi}{H} \quad ; \quad m, n = 1, 2, \dots$$

Problema 3

$$T' + k\lambda_{m,n}T = 0 \implies T_{m,n}(t) = c_3 e^{-tk\lambda_{m,n}} \implies T_{m,n}(t) = c_3 e^{-tk[(m\pi/H)^2 + (z_0^n/a)^2]}$$

Finalmente la solución será:

$$u(r, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} J_0\left(\frac{r z_0^n}{a}\right) \operatorname{sen} \frac{zm\pi}{H} e^{-tk[(m\pi/H)^2 + (z_0^n/a)^2]}$$

que es una **serie doble de Fourier**. Los coeficientes $A_{m,n}$ se pueden calcular mediante una integral doble¹⁵⁰ de la siguiente forma:

$$u(r, z, 0) = f(r, z) \implies f(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} J_0(r z_0^n/a)}_{C_m(r)} \operatorname{sen} \frac{zm\pi}{H} = \sum_{m=1}^{\infty} C_m(r) \operatorname{sen} \frac{zm\pi}{H}$$

$$C_m(r) = \frac{2}{H} \int_0^H f(r, z) \operatorname{sen} \frac{zm\pi}{H} dz \quad (7.37)$$

Como:

$$C_m(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} J_0(r z_0^n/a)$$

corresponde con la serie generalizada de Fourier de la función $C_m(r)$, sus coeficientes $A_{m,n}$ se pueden determinar de la siguiente forma¹⁵¹, teniendo en cuenta la función peso r :

$$A_{m,n} = \frac{\int_0^a C_m(r) J_0(r z_0^n/a) r dr}{\int_0^a J_0^2(r z_0^n/a) r dr}$$

Finalmente, teniendo en cuenta (7.37) los coeficientes $A_{m,n}$ se pueden calcular a través de la siguiente integral doble:

$$A_{m,n} = \frac{\int_0^a \left(\frac{2}{H} \int_0^H f(r, z) \operatorname{sen} \frac{zm\pi}{H} dz \right) J_0(r z_0^n/a) r dr}{\int_0^a J_0^2(r z_0^n/a) r dr}$$

$$A_{m,n} = \frac{2 \int_0^a \int_0^H f(r, z) \operatorname{sen} \frac{zm\pi}{H} J_0(r z_0^n/a) r dz dr}{H \int_0^a J_0^2(r z_0^n/a) r dr}$$

¹⁵⁰Ver la Sección 7.7.1, página 228 y la Sección 7.7.2, página 230.

¹⁵¹Ver la Sección 6.4.2, página 172.

7.8. Unicidad y Condiciones de Compatibilidad en EDP

Teorema fundamental del cálculo (consecuencia $\rightarrow$ regla de Barrow):

$$\int f'(x) dx = f(x) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = \phi(b) - \phi(a)$$

se puede expresar como:

$$\phi(a) - \phi(b) = - \int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial x} dx$$

que podemos interpretarlo en términos de un flujo¹⁵² $\phi(x)$ a través de los bordes $\phi(a) - \phi(b)$, cuyo valor es la integral sobre todo el intervalo de la difusión del mismo, $\partial \phi / \partial x$.

Este resultado en una dimensión se puede extender a dos dimensiones a través del teorema de Green: sea C una *curva de Jordan* (simple, suave y cerrada) de $\mathbb{R}^2$ positivamente orientada y sea D la región de $\mathbb{R}^2$ limitada por C . Dado un campo vectorial $\vec{F}(x, y) = [M(x, y), N(x, y)]$ donde las funciones derivadas parciales de M y N son continuas en D .

- La integral de línea de $\vec{F}$ sobre la curva C se conoce con el nombre de **circulación** Γ y corresponde con las contribuciones de la función vectorial F que siguen la curva C en sentido positivo.

$$\Gamma = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint [M, N] \cdot [dx, dy] = \oint (M dx + N dy)$$

Teorema de Green:

$$\underbrace{\oint_C (M dx + N dy)}_{\text{Circulación}} = - \underbrace{\iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dx dy}_{\text{rotacional 2D}} \quad \Rightarrow \quad \text{Extensión a } \mathbb{R}^3 \rightarrow \text{Teo. Stokes}$$

Teorema de Stokes: $\vec{F} = [P, Q, R]$

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S \underbrace{(\nabla \times \vec{F})}_{\text{rot } F} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_{\partial S} (P dx + Q dy + R dz) = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \right]$$

- Por otra parte el **flujo** ϕ de $\vec{F}$ a través de la curva C corresponde con las contribuciones de las componentes de $\vec{F}$ perpendiculares a cada pto de C . Si $d\vec{s} = [dx, dy]$, el vector normal, $d\vec{n} = [-dy, dx]$, notar que $d\vec{s} \cdot d\vec{n} = 0$. Entonces:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{n} = \oint_C [M, N] \cdot [-dy, dx] = \oint_C (-M dy + N dx)$$

$$\underbrace{\oint_C (-M dx + N dy)}_{\text{Flujo}} = - \underbrace{\iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial x} \right) dx dy}_{\text{Divergencia}} \quad \Rightarrow \quad \text{Extensión a } \mathbb{R}^3 \Rightarrow \text{Teo. Gauss}$$

Teorema de Gauss o de la divergencia: $\vec{F} = [P, Q, R]$

$$\iint_S \underbrace{\vec{F} \cdot d\vec{S}}_{\vec{n} dS} = \iiint_V \underbrace{\text{div } \vec{F}}_{\nabla \cdot \vec{F}} dV \quad \Rightarrow \quad \int_{\partial \Omega} F \cdot \vec{n} = \int_{\Omega} \text{div } F$$

¹⁵²Cantidad de una magnitud que atraviesa un medio por unidad de tiempo y unidad de dimensión del medio.

7.8.1. Identidades de Green

Sustituyendo $\vec{F}$ por otras funciones en el teorema de la divergencia se obtienen fórmulas con interés práctico.

- **Primera Identidad:** $\boxed{\vec{F} = \nabla v}$ (v función escalar)

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot \vec{n} = \int_{\Omega} \operatorname{div} F \implies \int_{\partial\Omega} \underbrace{\nabla v \cdot \vec{n}}_{\frac{\partial v}{\partial n}} = \int_{\Omega} \underbrace{\nabla \cdot \nabla v}_{\Delta v} \implies \boxed{\int_{\Omega} \Delta v = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n}} \quad (7.38)$$

- **Segunda Identidad:** $\boxed{\vec{F} = u \nabla v}$ (u y v funciones escalares)

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot \vec{n} = \int_{\Omega} \operatorname{div} F \implies \int_{\partial\Omega} u \underbrace{\nabla v \cdot \vec{n}}_{\frac{\partial v}{\partial n}} = \int_{\Omega} \nabla \cdot (u \nabla v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v)$$

$$\boxed{\int_{\Omega} u \Delta v = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v} \quad (7.39)$$

7.8.2. Estudio de la Unicidad

Ecuación de Poisson

$$\Delta u = f$$

- Problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Sean u y v dos soluciones cualquiera del problema y sea $w = u - v$. Entonces:

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u = g \end{cases} ; \quad \begin{cases} \Delta v = f \\ v = g \end{cases} \implies \begin{cases} \Delta(u - v) = \Delta w = 0 \\ u - v = w = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \Delta w = 0 & \text{en } \Omega \\ w = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Aplicamos la segunda identidad de Green (7.39) a la función $w \Delta w$ sobre todo el dominio del problema Ω :

$$\int_{\Omega} w \underbrace{\Delta w}_0 = \int_{\partial\Omega} \underbrace{w}_0 \frac{\partial w}{\partial n} - \int_{\Omega} \Delta w \cdot \Delta w \implies \int_{\Omega} \Delta w \cdot \Delta w = 0 \implies \nabla w = 0$$

Por tanto, $w = \text{cte.}$ Como $w = 0$ en $\partial\Omega \implies w = 0$ en todo Ω , lo que implica que $u = v$ y por tanto el problema, si tiene solución, ésta es única.

- Problema de Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (7.40)$$

Repetimos el proceso anterior. Sean u y v dos soluciones cualquiera del problema y sea $w = u - v$. Entonces:

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \end{cases} ; \quad \begin{cases} \Delta v = f \\ \frac{\partial v}{\partial n} = g \end{cases} \implies \begin{cases} \Delta(u - v) = \Delta w = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \Delta w = 0 & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Aplicamos la segunda identidad de Green (7.39) a la función $w \Delta w$ sobre todo el dominio del problema Ω :

$$\int_{\Omega} w \underbrace{\Delta w}_0 = \int_{\partial\Omega} \underbrace{w}_{\frac{\partial w}{\partial n}} - \int_{\Omega} \Delta w \cdot \Delta w \implies \int_{\Omega} \Delta w \cdot \Delta w = 0 \implies \nabla w = 0$$

Por tanto, al igual que antes $w = \text{cte}$. Pero en este caso desconocemos el valor de w en ningún sitio, por lo que solo podemos asegurar que dos soluciones u y v del problema se diferencian en una constante.

Sin embargo se puede aplicar la primera identidad de Green (7.38) sobre la función f para obtener una condición de compatibilidad:

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} \Delta u = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} = \int_{\partial\Omega} g$$

El problema de Poisson con condición Neumann (7.40) solo puede tener solución si se verifica:

$$\int_{\Omega} f = \int_{\partial\Omega} g$$

Además, si tiene solución, dos soluciones cualquiera del problema se diferencian en una constante.

Ecuación del Calor

Los problemas de la ecuación del calor, tanto con condiciones Dirichlet como Neumann, si tienen solución, ésta es única.

La demostración se hace de la siguiente forma. Sea el problema del calor con condiciones Dirichlet o Neumann:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{en } \Omega, t > 0 \\ u = f & \text{en } t = 0 \\ u = g \text{ ó } \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Sean u y v dos soluciones cualquiera del problema y sea $w = u - v$. Entonces:

$$\begin{cases} w_t = \Delta w & \text{en } \Omega, t > 0 \\ w = 0 & \text{en } t = 0 \\ u = 0 \text{ ó } \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Si definimos una nueva función:

$$W(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} w^2(x, t) dx$$

Entonces teniendo en cuenta la ecuación del calor y la segunda identidad de Green:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} w^2(x, t) dx = \int_{\Omega} w \frac{\partial w}{\partial t} dx = \int_{\Omega} w \Delta w = \int_{\partial\Omega} \underbrace{w \frac{\partial w}{\partial n}}_0 - \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla w = - \int_{\Omega} |\nabla w|^2 \leq 0$$

Entonces la función $W(t)$ es no creciente y por tanto:

$$0 \leq W(t) \leq W(0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} w^2(x, 0) = 0$$

Es decir, $W(t) = 0 \implies w(x) = 0$ y por tanto hay unicidad en los dos problemas.

Ecuación de Onda

Sea el problema de la ecuación de onda unidimensional con condiciones Dirichlet.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in (0, L), t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in (0, L) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) & x \in (0, L) \end{cases} \quad (7.41)$$

La energía total, suma de la energía cinética y potencial del sistema viene dada por:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{c^2}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$

Derivando con respecto al tiempo y aplicando la regla de la cadena:

$$E'(t) = \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx + c^2 \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} dx$$

Aplicando la regla de la cadena en la segunda integral:

$$c^2 \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \frac{\partial u}{\partial x} & du = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \\ dv = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} & v = \frac{\partial u}{\partial t} \end{array} \right\} = \underbrace{c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_0^L}_0 - c^2 \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

Notar que las condiciones de frontera $u(0, t) = u(L, t) = 0$ implican que $u_t(0, t) = u_t(L, t) = 0$. Por tanto:

$$E'(t) = \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx - c^2 \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx = \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)}_0 dx = 0$$

La energía total de toda solución $u(x, t)$ del problema (7.41) se conserva en el tiempo.

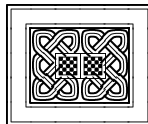
Dadas dos soluciones u y v del problema, definiendo $w = u - v$, se tiene:

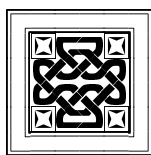
$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & x \in (0, L), t > 0 \\ w(0, t) = w(L, t) = 0 & t > 0 \\ w(x, 0) = 0 & x \in (0, L) \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = 0 & x \in (0, L) \end{array} \right.$$

Como $w(x, 0) = 0$ la energía inicial de w es $E(0) = 0$ y como se conserva en el tiempo $E(t) = 0$ lo que implica $w(x, t) = 0$ y por tanto:

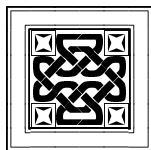
El problema (7.41) tiene a lo sumo una solución.

Estos resultados se pueden también demostrar para dimensión N usando las identidades de Green de forma similar a lo realizado en los casos anteriores.





APÉNDICE



Software Matemático

Contenido

A.0	Software Matemático Simbólico	244
A.1	SageMath	245
A.1.1	<i>SageMath</i> Básico	245
A.1.2	Cálculo III con <i>SageMath</i>	251
A.1.3	Resolución de EDO de Primer Orden	253
A.1.4	Trayectorias Ortogonales	259
A.1.5	EDO Lineales de Orden Superior	262
A.1.6	Problemas de Valores en la Frontera (PVF)	268
A.1.7	Ecuación de Bessel	269
A.1.8	Sistemas de EDO (SEDO)	272
A.1.9	Transformada de Laplace	274
A.1.10	Descomposición en Fracciones Simples	278
A.1.11	Resolución EDO con TL	279
A.1.12	Resolución SEDO con Transformada de Laplace	281
A.1.13	Ecuaciones Integrales e Integrodiferenciales	282
A.1.14	Convolución	283
A.1.15	Función Delta de Dirac	287
A.1.16	Series de Fourier	288
A.1.17	Problemas de Sturm-Liouville	293
A.1.18	Ecuaciones en Derivadas Parciales	302

A.0. Software Matemático Simbólico

Un *Sistema de Álgebra Computacional* (en inglés *CAS*, Computer Algebra System) o Simbólica (en inglés *SAS*, Symbolic Algebra System) es un software que facilita las operaciones matemáticas y el cálculo simbólico, usando variables y expresiones simbólicas además de los habituales valores numéricos.

Los CAS/SAS permiten definir y manipular expresiones algebraicas como fórmulas, funciones, sucesiones, series, sistemas de ecuaciones de diferentes tipos, matrices y grafos, entre muchos otros, con diferentes grados de complejidad y vincularlas a representaciones gráficas de muy variada naturaleza.

Una característica fundamental de los sistemas de álgebra simbólica es que permiten representar expresiones matemáticas de forma similar a las que se escriben habitualmente¹.

Además de una calculadora aritmética básica y gráfica, habitualmente incluyen un sistema de simplificación y transformación de expresiones algebraicas, una librería de funciones matemáticas y suelen incluir también un lenguaje de programación². Las capacidades simbólicas suelen englobar diferentes tipos de competencias³:

- Expresiones simbólicas
 - Manipulación, sustitución, simplificación y transformación de expresiones siguiendo reglas predefinidas o modificables.
 - Cambio en la forma de las expresiones: expansión de productos y potencias, factorización, reescritura de un cociente de polinomios como suma de fracciones parciales, reescritura de funciones trigonométricas como exponenciales (y viceversa), etc.
 - Operaciones relacionadas con vectores y matrices como sumas productos, inversa y determinante de matrices, etc.
 - Resolución de diferentes tipos de ecuaciones algebraicas, funcionales, diferenciales e integrales.
 - Cálculo de límites, desarrollos en series de potencias, derivadas en una o varias variables, integrales definidas e indefinidas y transformadas integrales.
- Expresiones numéricas
 - Manipulación exacta de fracciones y radicales.
 - Realización de operaciones con precisión arbitraria.
- Presentación de resultados
 - Visualizado de las expresiones matemáticas usando con frecuencia sistemas de composición similares al lenguaje TeX/LaTeX.

Un programa de esta clase puede encontrar limitaciones a la hora de resolver ciertas expresiones, ecuaciones, derivadas, integrales, límites, etc. cuando éstas tienen alguna complejidad, ambigüedad y/o indefinición.

Algunas versiones ofrecen al usuario la posibilidad de programar sus propios algoritmos matemáticos y solventar, en parte, tales limitaciones⁴.

El álgebra computacional es ampliamente utilizada para experimentar en matemáticas y diseñar las fórmulas que se utilizan en los programas numéricos. También se usa para cálculos científicos completos, cuando los métodos puramente numéricos fallan, como por ejemplo para algunos problemas no lineales.

¹En algunos casos la interfaz de usuario puede estar adaptada, además del teclado, al uso de *stylus* y entrada táctil.

²Lo que permite automatizar manipulaciones tediosas, repetitivas o difíciles de realizar, solo limitadas por la velocidad y precisión del ordenador.

³Cada programa tiene sus propias limitaciones en estos campos.

⁴El estudio de algoritmos aplicables a los sistemas algebraicos computarizados se denomina *álgebra computacional*.

A.1. SageMath

En la actualidad⁵ hay diferentes programas *comerciales* de tipo CAS, siendo los más conocidos *Mathematica*⁶, *Maple*⁷ y *Matlab* (paquete simbólico⁸). Aquí se estudiará el uso del *software de dominio público*⁹ *SageMath*¹⁰ para el tratamiento de los temas tratados en este curso¹¹ incluyendo:

- Resolución de EDO y SEDO
- Transformadas de Laplace
- Series de Fourier
- Resolución de EDP

Este programa se puede descargar e instalar en sistemas *Linux*, *Windows* y *macOS*, y ejecutar en nuestro ordenador de forma local¹² o bien ejecutarse de forma *online* a través de un navegador. Las formas básicas de ejecutar el programa son:

- Consola: Necesita estar instalado el programa, es rápido y potente pero menos vistoso.
- *Jupyter Notebook*¹³: Cuaderno interactivo que facilita la creación de documentos y permiten combinar código con otros elementos como texto enriquecido, imágenes, enlaces, etc. Es necesario tener instalada la aplicación.
- *SageMathCell*¹⁴: Página web que permite la ejecución de código *SageMath* sin necesidad de tener instalada la aplicación.
- *SageMath Online* (*CoCalc*¹⁵): Ejecución de SageMath online, donde es necesario registrarse y con restricciones para el modo gratuito.

En la **Figura A.1**, **página 246** se muestran imágenes de estas aplicaciones.

A.1.1. SageMath Básico

La sintaxis de *SageMath* está basada en el lenguaje *Python* siendo idéntica en muchos casos. Los comentarios se escriben anteponiendo un símbolo `#`.

```
# Este es un comentario
a = 3 # Este es un comentario en una sentencia
```

De forma general las *variables* son expresiones que almacenan valores determinados (números, cadenas, etc.). Las *variables simbólicas* son un tipo particular de variable que son tratadas como **símbolos** que pueden contener un valor genérico, como variables reales x , complejas z , o bien valores exactos como números irracionales como $\sqrt{2}$, `e` y `pi` (número π), números complejos a través `i`, etc.

⁵En sus orígenes sobre la segunda mitad del siglo XX existieron incipientes aplicaciones como *Scratchpad*, *Axiom*, *muMATH*, *Reduce*, *Derive* y *Macsyma*, que ya están casi en desuso o fueron transformadas en otras.

⁶<https://www.wolfram.com/mathematica/>.

⁷<https://www.maplesoft.com/products/maple/>.

⁸<https://es.mathworks.com/products/symbolic.html>.

⁹Un software de dominio público se puede usar sin el permiso o pago al autor, sin restricciones legales, de derechos de autor o de edición, por lo que nadie posee el derecho de restringir o controlar su uso.

¹⁰Versión 10.5 release 2024-12-04 using Python 3.13.2. <https://www.sagemath.org/>.

¹¹Ver por ejemplo una introducción y uso básico de *SageMath* en "Clases de Cálculo II para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 313. Para una mayor profundidad en el programa se puede ver el libro "Computational mathematics with SageMath" en la bibliografía o en la web del programa.

¹²*SageMath* es un programa relativamente grande que necesita aproximadamente 6Gb de espacio libre en el disco y al menos 2Mb libres de RAM y tiene dependencias con diversas librerías, programas y compiladores, entre ellos *python* y *LaTeX*.

¹³Aplicación cliente/servidor que puede correr en un navegador de Internet con o sin una conexión a Internet. Es muy general y además *SageMath* puede ejecutarse una gran variedad de lenguajes de programación.

¹⁴<https://sagecell.sagemath.org/>.

¹⁵<https://cocalc.com/features/sage>.

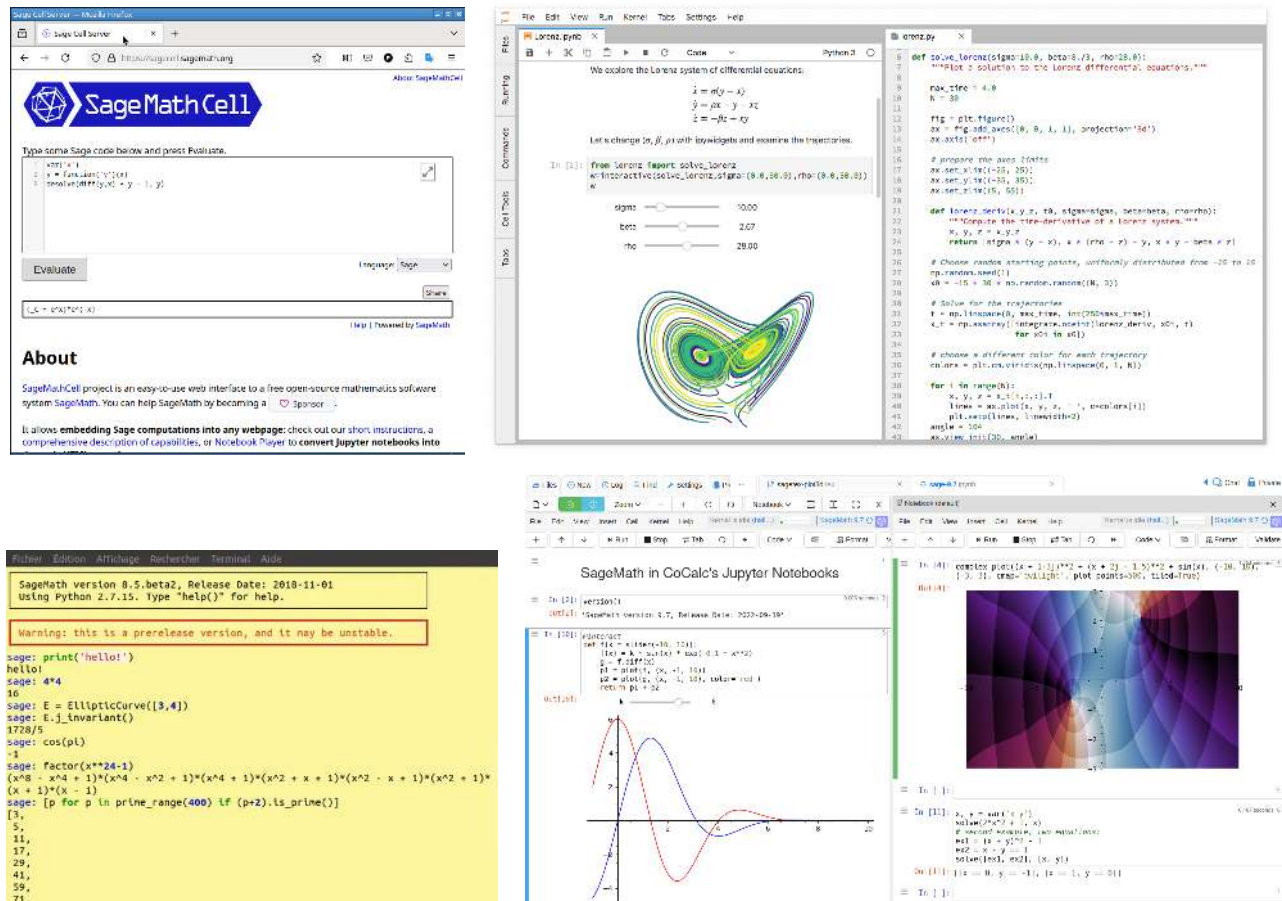


Figura A.1: Ejecución de *SageMath* a través de *SageMathCell* (superior izquierda), *Jupyter Notebook* (superior derecha), en consola (inferior izquierda) y *SageMath Online* (inferior derecha).

En *SageMath* no es necesario declarar las variables normales¹⁶ antes de usarlas, sin embargo las variables simbólicas necesitan ser declaradas antes de su primer uso. Para ello se utiliza el comando `var()`, como veremos en los siguientes ejemplos.

```
a = 3      # Variable normal
var('b')   # Declaramos la variable simbólica `b`
5*pi*a*b  # Operamos con las variables
```

```
15*pi*b
```

En el caso anterior, al operar vemos que la variable `a` (no simbólica) es sustituida por su correspondiente valor numérico y multiplicada por 5, mientras que las variables simbólicas¹⁷ `pi` y `b` mantienen su nombre indicando, en el caso de `pi` que es un número irracional (con infinitos dígitos decimales) y en el caso de `b` que puede ser cualquier valor.

Por defecto *SageMath* define la variable `x` como simbólica y por tanto no es necesario declararla antes de usarla, aunque se puede volver a declararla sin problema, como ocurre con el resto de variables.

¹⁶De forma similar a como funciona el lenguaje *Python*. Ver por ejemplo una introducción a la programación en *Python* en <http://mundogeek.net/tutorial-python/>.

¹⁷Los números irracionales π y e , además de muchos otros, están definidos en *SageMath* a través de `pi` y `e` respectivamente.

El comando `reset()` borra todas las variables de usuario definidas hasta ese momento, dejando *SageMath* en su estado inicial.

```
reset()      # Borra todas las variables que se hayan podido definir antes
# Declaramos las variables simbólicas que usaremos
# Se pueden utilizar comillas simples ' ' o dobles " " para definir cadenas
var('x y z v t')  # Se puede definir una o varias variables simbólicas con `var`
```

$$(x, y, z, v, t)$$

Se puede utilizar el signo punto y coma ; para separar sentencias en una misma línea.

```
# Asignamos valores a variables no simbólicas
s = 10.3 ; n = 2 ; cadena = 'Nombre' ; c = "A"
```

Por defecto la salida de los comandos matemáticos se muestran en formato texto (ASCII).

```
# Definimos una función llamada `f`
f=sqrt(x)*sin(x^2)/tan(log(x))
f      # mostramos `f`, por defecto en ascii
```

$$\sqrt{x} \sin(x^2) / \tan(\log(x))$$

Con el comando `show()` se puede mostrar la salida en formato matemático de fácil lectura.

```
show(f)      # Mostramos f como fórmula matemática
```

$$\frac{\sqrt{x} \sin(x^2)}{\tan(\log(x))}$$

También se puede mostrar el resultado en formato LaTeX con el comando `latex()` y en formato ASCII (por defecto) con el comando `ascii()`.

```
latex(f)    # Mostramos f en lenguaje LaTeX
```

$$\frac{\sqrt{x} \sin(x^2)}{\tan(\log(x))}$$

Con la sentencia `%display latex` se consigue que por defecto todos los resultados, a partir de entonces, se muestren en formato matemático de fácil lectura. Éste será el formato de salida por defecto en todo este texto.

```
%display latex # Formato matemático en todos resultados a partir de aquí
f              # Mostramos f
```

$$\frac{\sqrt{x} \sin(x^2)}{\tan(\log(x))}$$

El símbolo igual $=$ se usa para asignar valores, mientras que el doble igual $==$ se utiliza como símbolo igual en las ecuaciones. Notar que en las multiplicaciones es obligatorio usar siempre el símbolo $*$ (no sirve el espacio en blanco como producto).

```
var('t r')          # Declaramos variables simbólicas
a = 3 ; t = 10.1    # Asignamos valores
# Definimos la ecuación `eq`
eq = r*t + a == r^2 + 1 # Notar el uso de = (asignación) y == (igual de la ec.)
eq                  # Mostramos el valor de `eq`
```

$$10.10000000000000\,r + 3 = r^2 + 1$$

El comando `solve(eq,var)` resuelve la ecuación `eq` en la variable `var`, devolviendo un vector `[]` con las posibles soluciones.

```
var('a') # variable o parámetro
b=3      # variable numérica
# Resolvemos una ec. y llamamos `sol` al resultado
sol=solve(a*x^2+b*x-2==5*x^2+5*x-1,x) ; sol
```

$$\left[x = -\frac{\sqrt{a-4}-1}{a-5}, x = \frac{\sqrt{a-4}+1}{a-5} \right]$$

Vemos en la salida que hay dos soluciones para la variable `x` cuyos valores dependen de la variable o parámetro `a`. Estas soluciones se almacenan en un vector definido por paréntesis cuadrados `[]`. Los elementos de un determinado vector `v` se acceden como `v[n]` siendo `n` su índice (posición) empezando por cero. Así en el caso anterior:

```
sol[0] # primer elemento del vector sol
```

$$x = -\frac{\sqrt{a-4}-1}{a-5}$$

Notar que esta expresión es una nueva ecuación.

```
ascii(sol[0])
```

```
x == -(sqrt(a - 4) - 1)/(a - 5)
```

La parte izquierda de una ecuación, como por ejemplo la salida anterior, se obtiene con `.lhs()` y la parte derecha de la ecuación con `.rhs()`.

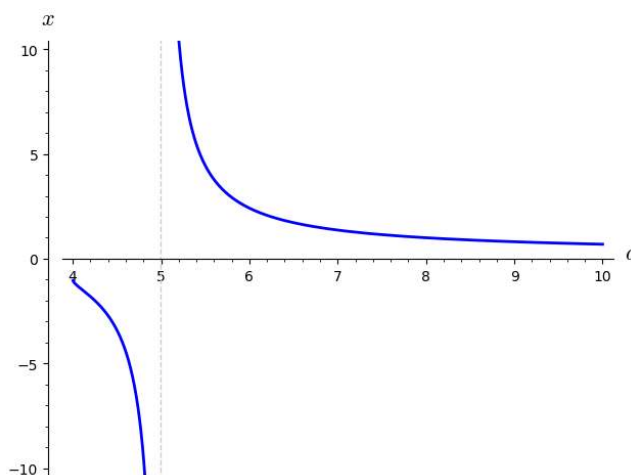
```
sol[1].rhs() # parte derecha (después del igual) de la segunda ecuación del vector 'sol'
```

$$\frac{\sqrt{a-4}+1}{a-5}$$

Esto se puede utilizar, por ejemplo, para representar gráficamente el resultado en función del parámetro `a`.

```
plot(sol[1].rhs(),a,-1,10,ymin=-10,ymax=10,axes_labels=['$a$','$x$'],detect_poles='show')
```

```
verbose 0 (3954: plot.py, generate_plot_points) WARNING: When plotting, failed to evaluate function at 91 points.
verbose 0 (3954: plot.py, generate_plot_points) Last error message: 'Unable to compute f(3.958293507777991)'
```



Notar que aparecen dos avisos (*warnings*) indicando, en este caso, que existen puntos donde la función no está definida ($a = 5$). Los *warnings* se pueden omitir anteponiendo la sentencia `set_verbose(-1)`. La identificación automática de los puntos de discontinuidad (polos) se puede hacer con el comando `detect_poles`.

El comando `solve` se puede utilizar también para despejar una determinada variable en una ecuación.

```
var('a b')
ec = 2*a+b*(a+1)==a*b ; ec # define una ecuación 'ec' con dos variables
```

$$(a+1)b + 2a = ab$$

```
solve(ec,a) # despeja la variable 'a' en función de 'b'
```

$$\left[a = -\frac{1}{2}b \right]$$

```
solve(ec,b) # despeja la variable 'b' en función de 'a'
```

$$[b = -2a]$$

El comando `diff()` o alternatively `derivative()` calcula la derivada de orden n de una función.

```
var('a b c t') # definimos variables simbólicas
h = t*e^(a*t)-b*t^2+c; h # función 'h' con varias variables y/o parámetros
```

$$-bt^2 + te^{(at)} + c$$

```
diff(h,a) # derivamos 'h' con respecto a la variable 'a'
```

$$t^2e^{(at)}$$

```
diff(h,t,5) # calculamos la derivada quinta de 'h' con respecto a 't'
```

$$a^5te^{(at)} + 5a^4e^{(at)}$$

El comando `integral()` o alternatively `integrate()` integra una expresión con respecto a una variable.

```
var('x y z a b c') # definición de var simbólicas
f=a*x^2-b*e^(b*x)-c*y+z; f # función de varias variables y/o parámetros
```

$$ax^2 - cy - be^{(bx)} + z$$

Vamos a calcular la integral indefinida (función primitiva) de la anterior función f con respecto a la variable x , manteniendo constante el resto de variables.

```
integral(f,x)
```

$$\frac{1}{3}ax^3 - cxy + xz - e^{(bx)}$$

Notar que en el resultado no aparece ninguna constante de integración¹⁸. Esto puede resultar interesante, por ejemplo en este caso, para no añadir *parámetros* innecesarios en la solución.

Calculamos ahora la integral definida entre -1 y 5 de la misma función f pero con respecto a la variable b , manteniendo el resto de variables constantes.

```
integral(f,b,-1,5)
```

$$\frac{(6ax^4e^x - 6cx^2ye^x + 6x^2ze^x - (5x-1)e^{(6x)} - x-1)e^{(-x)}}{x^2}$$

¹⁸Que indica que en realidad existen infinitas funciones primitivas de la función original.

Se puede calcular integrales impropias usando la variable¹⁹ `oo` o `infinity` (infinito, ∞), por ejemplo:

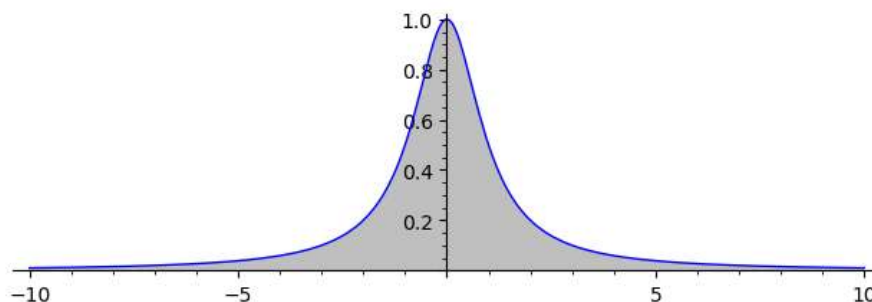
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

```
g=1/(1+x^2)           # definimos la función
integrate(g,x,-oo,oo)  # integral impropia
```

π

Representamos la gráfica de la función g y sombreada la zona de integración cuya área es π .

```
plot(g,-10,10,fill=True,aspect_ratio=6) # relación de aspecto=altura/anchura
```



Calculamos ahora la siguiente integral impropia de una función de dos variables u y x , con respecto a una de ellas, por ejemplo²⁰ u .

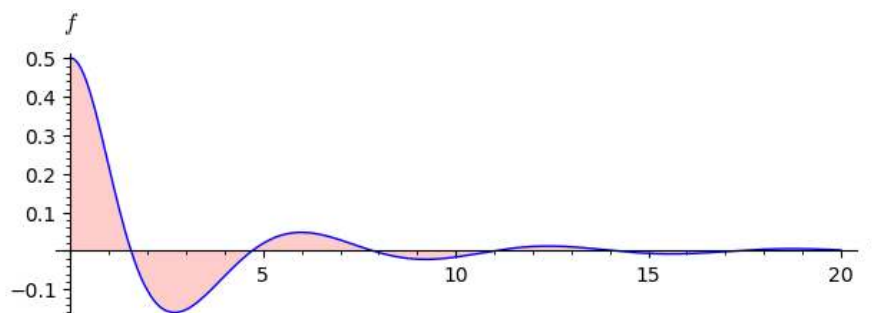
$$\int_0^{\infty} \frac{x \cos u}{u^2 + x^2} du = \frac{1}{2} \pi e^{-x} + c(x)$$

```
var('x u')
f=x*cos(u)/(u^2+x^2)
# Para que converja la integral es necesario que la variable `x` sea positiva
assume(x>0)
f.integrate(u,0,infinity) # forma alternativa de calcular una integral
```

$$\frac{1}{2} \pi e^{-x}$$

El comando `assume()` se utiliza para poner condiciones necesarias sobre variables. Representamos finalmente la gráfica de f en función de la variable u , para un determinado valor fijo de x , por ejemplo $x=2$.

```
# fijamos color e intensidad del relleno, además de la relación de aspecto
# y grado de transparencia (fillalpha)
plot(f(x=2), 0,20, fill=True,fillcolor='red', aspect_ratio=10, \
      axes_labels=['$u$', '$f$'],fillalpha=.2,axes_labels_size=1.2)
```



El área sombreada corresponde con el resultado de la integral anterior, en este caso $\pi/(2e^2)$.

¹⁹Corresponde con dos letras "o" minúsculas consecutivas.

²⁰Notar que en este caso el resultado depende de un parámetro $c(x)$ que a su vez depende de la variable sobre la que no se integra.

A.1.2. Cálculo III con *SageMath*

En las siguientes secciones vamos a analizar y resolver problemas relacionados con los temas cubiertos en este curso, usando para ello el programa SageMath.

1. Resolución de EDO de primer orden ([Sección A.1.3, página 253](#))
 - Solución general y familia de curvas
 - Solución particular
 - EDO de variables separables, de cambio lineal, homogénea, reducible a homogénea, lineal, Bernoulli y Ricatti
2. Trayectorias ortogonales ([Sección A.1.4, página 259](#))
3. Resolución de EDO Lineales de orden superior ([Sección A.1.5, página 262](#))
 - Método de Coeficientes indeterminados
 - Método de Variación de parámetros
 - Problema de valores iniciales
4. Problema de valores en la frontera ([Sección A.1.6, página 268](#))
5. Ecuación de Bessel ([Sección A.1.7, página 269](#))
 - Funciones de Bessel
 - Solución
6. Sistemas de EDO ([Sección A.1.8, página 272](#))
7. Transformadas de Laplace ([Sección A.1.9, página 274](#))
 - Cálculo transformada directa e inversa
 - Teoremas de traslación y propiedades
 - Funciones escalón unitario y delta y convolución de funciones
 - Resolución de EDO y SEDO
 - Ecuaciones integrales e integro-diferenciales
8. Series de Fourier
9. Problemas de Sturm-Liouville
10. Resolución de EDP

Ecuaciones Diferenciales con SageMath

Dada una EDO²¹ de orden n :

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}; c_k) = 0$$

donde aquí se ha llamado x a la variable independiente e $y(x)$ a la variable dependiente aunque ambas se pueden llamar de cualquier forma. Las funciones $y^{(i)}(x)$ son las correspondientes derivada i -ésimas de y con respecto a x . Además, se ha añadido posibles *parámetros*²² (en cualquier cantidad) c_k .

La resolución analítica²³ de EDO en *SageMath* se hace a través del comando²⁴ `desolve()` a través de los siguientes pasos.

Pasos

1. Declarar la variable dependiente e independiente de la siguiente forma:

```
var('x')          # Variable independiente (si es x no es necesario)
y=function('y')(x) # Variable dependiente
```

2. Utilizar el comando `desolve` para resolver la EDO.

```
desolve( ed, var [ , opciones ] )
```

- **ed**: expresión o ecuación que representa la EDO.
- **var**: nombre de la variable dependiente.
- **opciones**: no siempre son necesarios.
 - **ivar** = variable independiente. Si es x y la EDO no tiene *parámetros*, no es necesario indicarla.
 - **ics** = condiciones iniciales (si es un problema de EDO).
 - * Para EDO de primer orden especifica la condición inicial $[x_0, y(x_0)]$.
 - * Para PVI con EDO de segundo orden especifica las condiciones iniciales $[x_0, y(x_0), y'(x_0)]$.
 - * Para PVF con EDO de segundo orden especifica las condiciones frontera $[x_0, y(x_0), x_1, y(x_1)]$.
 - **show_method** = `True|False` muestra el tipo de método (tipo EDO) usado para su resolución
 - **contrib_ode** = `True|False` indica el método a usar en su resolución, que puede ser uno de los siguientes: `linear`, `exact`, `homogeneous`, `bernouilli`, `ricatti`, ...
 - **algorithm** = Indica el algoritmo utilizado en la resolución. Por defecto es `'maxima'` ya que usa la librería matemática de *Maxima*²⁵. Para problemas más complicados se puede usar también `'fricas'` que hace uso de la librería *FriCAS*²⁶.

A lo largo de las siguientes secciones haremos uso de este comando en diferentes situaciones.

²¹Ver la [Sección 3.1.1, página 51](#).

²²Ver la [Definición 1.14, página 13](#).

²³Ver la [Sección 1.3.2, página 11](#).

²⁴Proporcionalmente muy pocas EDO pueden resolverse de forma analítica, aunque muchas de ellas sí pueden resolverse numéricamente. *SageMath* permite resolver, analítica y también numéricamente, una variedad importante de EDO de diversos tipos y con aplicaciones prácticas interesantes.

²⁵Por defecto *Maxima* se instala junto con *SageMath*. Para más información ver <https://maxima.sourceforge.io/>.

²⁶El software *FriCAS* no se instala con *SageMath* por defecto y es necesario instalarlo aparte para su uso. Para más información ver <https://fricas.github.io/>.

A.1.3. Resolución de EDO de Primer Orden

Buscamos la solución analítica de ecuaciones de la forma²⁷:

$$F[x, y(x), y'(x)] = 0$$

Ejemplos

Empezamos resolviendo una EDO sencilla de primer orden de *variables separables*²⁸:

$$y' = x \tag{A.1}$$

```
y = function('y')(x)      # definimos la variable dependiente
f = desolve(diff(y,x)==x,y) # definimos la EDO y la resolvemos. El resultado lo llamamos f
f                          # mostramos el resultado
```

$$\frac{1}{2}x^2 + C$$

Podemos verificar si la solución `f` es correcta, para ello vamos a comprobar que cumple la EDO original (A.1), despejada a cero para que sea más fácil verificar.

$$y' - x = 0$$

```
diff(f,x)-x
```

0

Resolvemos ahora otra EDO *separable* y preguntamos el método de resolución utilizado (que corresponde con el tipo de EDO).

$$y'y = x$$

```
y=function('y')(x)
# Definimos la EDO, la resolvemos y preguntamos el método usado en su resolución
sol = desolve(diff(y,x)*y==x,y,show_method=True)
sol  # El resultado es un vector [ ] con dos componentes: la solución y el método
```

$$\left[\frac{1}{2} y(x)^2 = \frac{1}{2} x^2 + C, \text{separable} \right]$$

Como vemos determina que la EDO es de tipo *variables separables*. Para obtener la solución de forma práctica hay que sacarla del vector y simplificarla si es posible.

```
sol[0]  # el índice de los elementos de un vector empiezan en 0
```

$$\frac{1}{2}y(x)^2 = \frac{1}{2}x^2 + C$$

```
f=solve(sol[0],y); f  # despejamos la var. dependiente `y` y mostramos resultado
```

$$\left[y(x) = -\sqrt{x^2 + 2C}, y(x) = \sqrt{x^2 + 2C} \right]$$

El resultado vuelve a ser un vector (hay dos soluciones correspondientes con el signo $\pm$ de la raíz). Si obtenemos la solución en formato ASCII:

```
ascii(f)
```

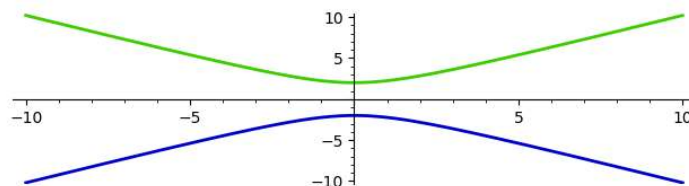
```
[y(x) == -sqrt(x^2 + 2*_C), y(x) == sqrt(x^2 + 2*_C)]
```

Vemos que la constante de integración se identifica como `_C` (precedido por un símbolo subrayado `_`). Vamos a dibujar las dos soluciones dando un determinado valor a la constante de integración (solución particular), por ejemplo para `_C=2`.

²⁷Ver el Tema 2, página 19.

²⁸Ver la Sección 2.2, página 23.

```
# Extraemos las partes derechas de ambas soluciones y las representamos gráficamente
plot([f[0].rhs()(_C=2),f[1].rhs()(_C=2)],-10,10,ymin=-10,ymax=10,aspect_ratio=0.25)
```



Resolvemos ahora una EDO de tipo *cambio de variable lineal*²⁹.

$$y' = (x + y - 1)^2$$

```
y=function('y')(x)
# Indicamos que esta EDO se puede resolver por algún método básico con `contrib_ode`
sol=desolve(diff(y,x)==(x+y-1)^2,y,contrib_ode=True) ; sol
```

$$\left[\left[x = C - \arctan(\sqrt{t}), y(x) = -x - \sqrt{t} + 1 \right], \left[x = C + \arctan(\sqrt{t}), y(x) = -x + \sqrt{t} + 1 \right] \right]$$

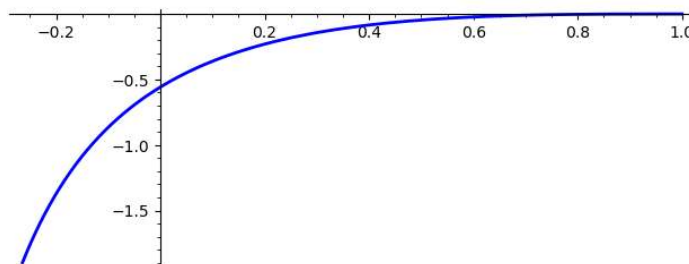
Se obtiene una doble solución a través de una matriz (vector de vectores), donde cada uno de los dos vectores contienen las componentes paramétricas, a través del parámetro t , de ambas soluciones. Vamos a representar la primera de las soluciones (la segunda es similar), para ello es necesario sacar las dos partes de la función paramétrica.

```
# sol[0][0] hace referencia a la primera componente del primer vector y sol[0][1] a la
# segunda componente del primer vector. Llamamos `fx` y `fy` a estas dos componentes.
# Notar que la segunda componente `fy` depende de la primera a través de la variable `x`
# por lo que es necesario sustituir la primera en la segunda.
fx=sol[0][0].rhs(); fy=sol[0][1].rhs()(x=fx)
show([fx,fy]) # Mostramos ambas componentes
```

$$\left[C - \arctan(\sqrt{t}), -C - \sqrt{t} + \arctan(\sqrt{t}) + 1 \right]$$

Para representar gráficamente esta solución se puede transformar a su forma cartesiana eliminando el *parámetro* entre las dos fórmulas³⁰, o bien se puede representar directamente en forma paramétrica con el comando³¹ `parametric_plot()` de la siguiente forma, para un valor fijo del *parámetro*, por ejemplo $_C=1$.

```
var('t') # Declaramos el parámetro `t`
# Representamos gráficamente la primera solución para el valor del parámetro `_C=1`
# mediante una curva paramétrica
parametric_plot((fx(_C=1),fy(_C=1)),(t,0,10),thickness=2,aspect_ratio=0.25)
```



²⁹Ver la Sección 2.3, página 23.

³⁰Ver un ejemplo del proceso en el ejemplo de la EDO de tipo *Riccati* en la 257.

³¹A través de este parámetro se pueden representar tanto curvas 2D como 3D. Ver por ejemplo "Clases de Cálculo II para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 313..

Vamos a resolver ahora una EDO *homogénea*³²:

$$y' = \frac{y^2 + xy + x^2}{x^2}$$

```
reset()
y=function('y')(x)
sol=desolve(diff(y,x)==(y^2+x*y+x^2)/x^2,y,show_method=True) ; sol
```

$$\left[Cx = e^{\arctan\left(\frac{y(x)}{x}\right)}, \text{homogeneous} \right]$$

Para obtener la solución de forma explícita lo hacemos en dos pasos, primero despejamos y/x y posteriormente despejamos y , ya que *SageMath* no es capaz de hacerlo directamente.

```
g=solve(sol[0],y/x) ; ff=solve(g,y) ; ff
```

$$[y(x) = x \tan(\log(Cx))]$$

Podemos comprobar la validez de la solución.

```
f=ff[0].rhs() # asigamos a f la parte derecha (solución y)
# comprobamos la EDO y simplificamos el resultado con `simplify_full()`
(diff(f,x)-(f^2+x*f+x^2)/x^2).simplify_full()
```

0

Vamos ahora con una EDO *reducible a homogénea*³³:

$$y' = \frac{2y + x - 1}{y + 2x + 1}$$

```
y=function('y')(x)
sol=desolve(diff(y,x)==(2*y+x-1)/(y+2*x+1),y,contrib_ode=True) ; sol
```

$$\left[-\frac{1}{2} \log(x + y(x)) + \frac{3}{2} \log(x - y(x) + 2) = C \right]$$

Recordamos que una EDO *exacta*³⁴ tiene la forma:

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad ; \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Por ejemplo:

$$(e^y + 6x) dx + xe^y dy = 0$$

Para resolverla con *SageMath* es necesario dar una expresión en términos de $y' = dy/dx$.

```
y=function('y')(x)
sol = desolve(diff(y,x)==(-e^y-6*x)/(x*e^y),y,show_method=True) # Despejamos y'
sol
```

$$\left[3x^2 + xe^{y(x)} = C, \text{exact} \right]$$

Podemos expresar la solución en forma explícita despejando la variable dependiente $y(x)$ en función de la variable independiente x .

³²Ver la Sección 2.4, página 24.

³³Ver la Sección 2.4.1, página 27.

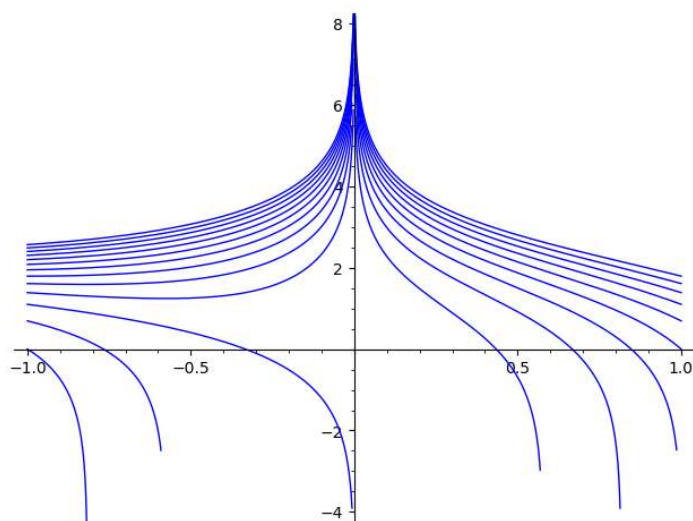
³⁴Ver la Sección 2.5, página 29.

```
f=solve(sol[0],y) ; f
```

$$\left[y(x) = \log\left(-3x + \frac{C}{x}\right) \right]$$

A través de esta solución vamos a dibujar la familia de curvas que forman la solución general de esta EDO, para ello creamos inicialmente un gráfico vacío, que lo llamamos `G`, y a través de un bucle `for` dibujamos cada una de las gráficas correspondientes a distintos valores del parámetro `_C`. Cada de estas graficas individuales se van añadiendo al gráfico global `G`. Finalmente mostramos el resultado con el comando `show()`.

```
set_verbose(-1) # para que no muestre avisos de error (`warnings`)
G=Graphics()
for i in range(-10,10,1):
    G+=plot(f[0].rhs(_C=i),(-1,1),ymin=-4,ymax=10)
show(G)
```



Vamos ahora a resolver un PVI³⁵ formado por una EDO lineal de primer orden³⁶:

$$\begin{cases} y' + \frac{y}{x} = e^x \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

```
y=function('y')(x)          # definimos var. dep.
eq= diff(y,x)+y/x==e^x      # definimos y ponemos nombre a la EDO
eq                          # mostramos la EDO definida
```

$$\frac{y(x)}{x} + \frac{\partial}{\partial x} y(x) = e^x$$

```
f=solve(sol[0],y) ; f
```

$$\frac{(x-1)e^x + 2}{x}$$

Notar que en este caso el resultado es una única función que no depende de la constante `_C`.

³⁵Ver la Definición 1.17, página 15.

³⁶Ver la Sección 2.6.1, página 36.

Podemos también resolver una *EDO lineal de primer orden* genérica con funciones generales $g(x)$ y $h(x)$.

$$y' + g(x) * y = h(x)$$

```
y=function('y')(x)
g=function('g')(x)
h=function('h')(x)
desolve(diff(y,x)+g*y==h,y)
```

$$\left(C + \int e^{\left(\int g(x) dx \right)} h(x) dx \right) e^{-\int g(x) dx}$$

Vamos ahora a resolver una EDO de tipo *Bernoulli*³⁷.

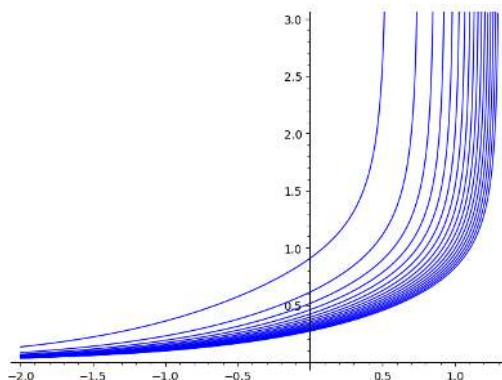
$$y' - y = xy^4$$

```
y=function('y')(x)
f=desolve(diff(y,x)-y==x*y^4,y,show_method=True)
f
```

$$\left[\frac{e^x}{\left(-\frac{1}{3}(3x-1)e^{(3x)} + C \right)^{\frac{1}{3}}}, \text{bernoulli} \right]$$

Dibujamos algunas de las curvas de la solución general.

```
set_verbose(-1) # para que no muestre avisos (warnings)
G=Graphics()    # Creamos un gráfico vacío y lo llamamos G
for i in range(-50,50,3):
    G+=plot(f[0](_C=i),(-2,5),ymin=0, ymax=3, plot_points=1000)
show(G)
```



Resolvemos finalmente una EDO de tipo *Riccati*³⁸.

$$y' + 2xy = 1 + x^2 + y^2$$

```
y=function('y')(x)
ec = diff(y,x)+2*x*y==1+x^2+y^2
sol = desolve(ec,y,ivar=x,contrib_ode=True) ; sol
```

$$\left[\left[x = C + \frac{1}{\sqrt{t-1}}, y(x) = x - \sqrt{t-1} \right], \left[x = C - \frac{1}{\sqrt{t-1}}, y(x) = x + \sqrt{t-1} \right] \right]$$

³⁷Ver la [Sección 2.7](#), página 37.

³⁸Ver la [Sección 2.8](#), página 38.

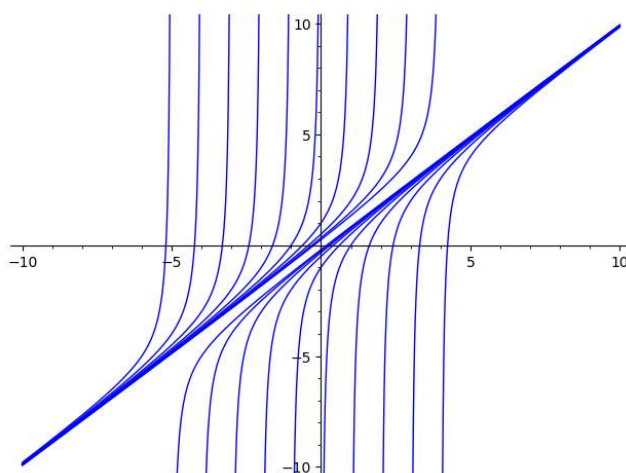
Podemos transformar la primera solución (la segunda es equivalente) dada en forma paramétrica, a la misma solución pero de forma explícita, eliminando para ello el parámetro t . Mostramos aquí abajo el proceso.

```
var('t')
sq1 = solve(sol[0][0],sqrt(t-1)) # despejamos sqrt(t-1) de la primera componente
sq2 = solve(sol[0][1],sqrt(t-1)) # despejamos sqrt(t-1) de la segunda componente
eq=sq1[0].rhs()==sq2[0].rhs()   # creamos una nueva ecuación igualando las anteriores
f=solve(eq,y) ; f                # y despejamos finalmente la variable `y`
```

$$\left[y(x) = \frac{Cx - x^2 + 1}{C - x} \right]$$

Representamos algunas de las curvas que forman esta familia de soluciones, de la misma forma que se ha hecho en otros casos anteriores.

```
set_verbose(-1) # para que no muestre avisos (warnings)
G=Graphics()    # Creamos un gráfico vacío y lo llamamos G
ff=f[0].rhs()
for i in range(-5,5,1):
    G+=plot(ff(_C=i),(-10,10),ymin=-10, ymax=10, detect_poles=True)
show(G)
```



Notar que las trayectorias parecen converger en la recta $y = x$. Es fácil comprobar que efectivamente ésta es solución de la EDO. Para ello substituímos en la EDO ec la función `test` y su derivada, y comprobamos su veracidad a través de la función `bool()` de la siguiente forma:

```
g=x # solución test a comprobar
bool(ec.subs(diff(y,x)==diff(g,x),y==g)) # sustituimos en la EDO y comprobamos
```

True

La función `bool(exp)` evalúa si una expresión `exp` es cierta (`True`) o falsa (`False`). Así, la solución $y = x$ no verifica la solución general obtenida `f`, ya que:

```
bool(f[0].subs(y==g))
```

False

Por tanto, en nuestro caso, $y(x) = x$ es una **solución extraña o singular**³⁹. Esto es debido a la parametrización particular de la solución obtenida⁴⁰.

³⁹Ver la [Definición 1.19](#), página 16.

⁴⁰Recordar que hay infinitas parametrizaciones de una función, siendo algunas más apropiadas que otras para cada ocasión.

Finalmente, si en una EDO aparecen *parámetros*⁴¹, es necesario especificar, además de la variable dependiente $y(x)$, la variable independiente x . Por ejemplo, dada la siguiente EDO lineal de primer orden con dos parámetros a y b :

$$x^2 y' = a + by$$

```
var('a b')
y=function('y')(x)
# La variable independiente se indica mediante `ivar`
desolve(x^2*diff(y,x)==a+b*y,y,ivar=x,contrib_ode=True)
```

$$\left(C - \frac{ae^{\frac{b}{x}}}{b}\right)e^{\left(-\frac{b}{x}\right)}$$

Notar que dependiendo del orden y dificultad de la ecuación, este tipo de EDO con parámetros generalmente será difícil de resolver y *SageMath* fallará en su resolución.

A.1.4. Trayectorias Ortogonales

Recordamos que dada una *familia de curvas uniparamétrica*⁴²:

$$F(x, y; c) = 0$$

se puede obtener la *familia de curvas ortogonales*⁴³ a la original de la siguiente forma:

1. Con la familia y su derivada se puede eliminar la constante c , dando una EDO cuya solución es la familia de curvas original.

$$\left. \begin{array}{l} F(x, y; c) = 0 \\ \frac{d}{dx} F(x, y; c) = 0 \end{array} \right\} \implies \frac{dy}{dx} = g(x, y)$$

2. La pendiente de las curvas ortogonales a las curvas de la familia de curvas original corresponde el inverso negativo de la pendiente de las curvas de la familia original.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{g(x, y)}$$

3. Resolviendo la EDO anterior se obtiene la familia de curvas ortogonal a la familia de curvas original.

Ejemplo

Vamos a calcular la familia de curvas ortogonales a la familia de curvas:

$$y = \frac{c}{1+x^2}$$

Representamos la familia de curvas original.

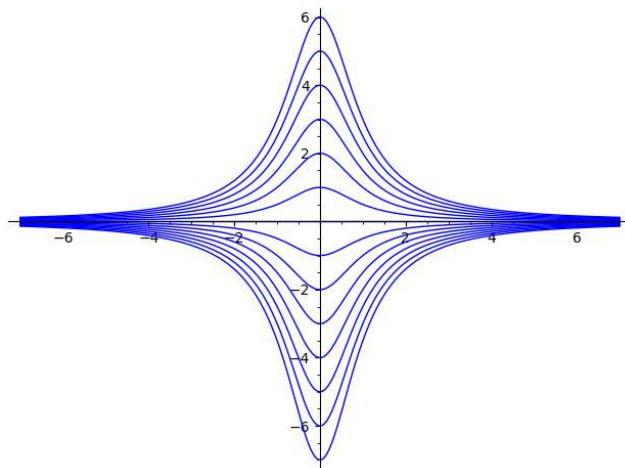
```
var('c')
y=function('y')(x)
f=c/(1+x^2)
G=Graphics()
for i in range(-7,7,1): G += plot(f(c=i),(-7,7))
show(G)
```

definimos función y(x)
familia de curvas
Definimos gráfico vacío
Bucle de curvas
muestra familia de curvas

⁴¹Recordamos que un *parámetro* es una entidad (distinta de las variables) cuyos valores dan lugar a diferentes casos en un problema.

⁴²Ver la [Sección 2.11.1, página 42](#).

⁴³Ver la [Definición 2.11, página 44](#).



Despejamos la constante c de la familia original.

```
f1 = solve(y == f,c) ; f1
```

$$[c = (x^2 + 1)y(x)]$$

Despejamos también la cte c de la derivada de la familia original.

```
f2 = solve(diff(y,x)==diff(f,x),c) ; f2
```

$$\left[c = -\frac{(x^4 + 2x^2 + 1) \frac{\partial}{\partial x} y(x)}{2x} \right]$$

Igualando las dos expresiones anteriores, $f1$ y $f2$, se puede eliminar la constante c . De esta nueva expresión se puede despejar la derivada $y'(x)$, obteniéndose la ODE de la familia de curvas original.

```
dy = solve(f1[0].rhs()==f2[0].rhs(),diff(y,x)) ; dy # ODE de la familia de curvas original
```

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} y(x) = -\frac{2xy(x)}{x^2 + 1} \right]$$

Se determina la inversa negativa de la parte derecha de esta expresión dy .

```
idy = -1/dy[0].rhs() ; idy # pendiente de las trayectorias ortogonales
```

$$\frac{x^2 + 1}{2xy(x)}$$

Con idy se construye la EDO asociada a la familia de curvas ortogonal a la anterior, cuya solución da lugar a las curvas ortogonales.

```
# resolvemos la ODE de la familia ortogonal
ff=desolve(diff(y,x)==idy,y,ivar=x) ; ff # solución
```

$$y(x)^2 = \frac{1}{2}x^2 + C + \frac{1}{2}\log(x^2)$$

De la solución ff es necesario despejar $y(x)$.

```
fff=solve(ff,y) ; fff # solución despejada
```

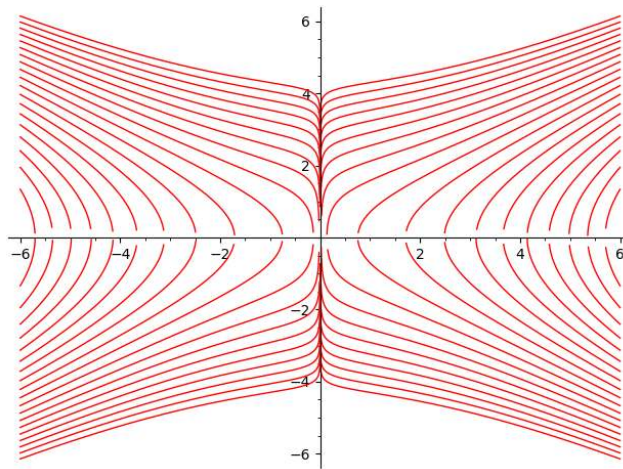
$$\left[y(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + C + \frac{1}{2}\log(x^2)}, y(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + C + \frac{1}{2}\log(x^2)} \right]$$

Estas funciones⁴⁴ corresponden con la familia de las curvas ortogonales buscadas. Representamos gráficamente las trayectorias ortogonales.

```
set_verbose(-1)
G1=Graphics()
for i in range(-20,20,2):
    G1+= plot(fff[0].rhs()(_C=i),(-6,6),plot_points=1000,color='red')

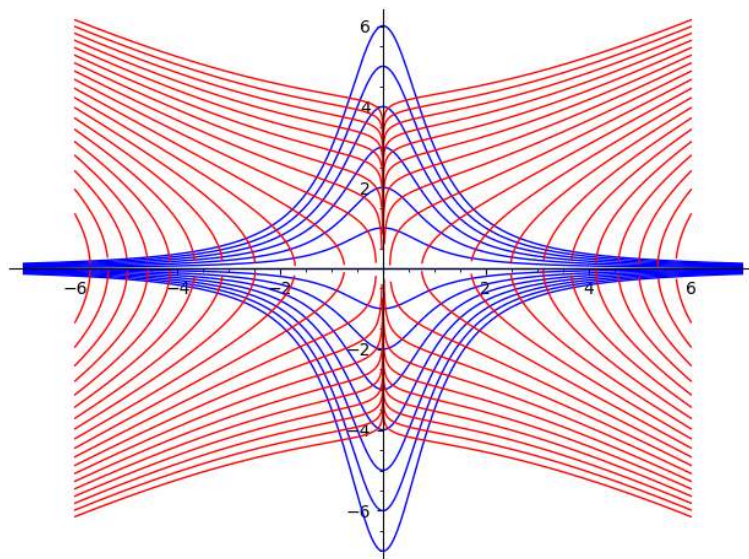
G2=Graphics()
for i in range(-20,20,2):
    G2+= plot((-1)*fff[0].rhs()(_C=i),(-6,6),plot_points=1000,color='red')

show(G1+G2)
```



Finalmente representamos juntas ambas familias de curvas en una misma gráfica, observándose la relación de ortogonalidad entre ellas.

```
show(G+G1+G2)
```



⁴⁴Notar que ambas son la misma en valor absoluto, es decir: $y(x) = \pm \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + C + \frac{1}{2}\log(x^2)}$.

A.1.5. EDO Lineales de Orden Superior

Buscamos la solución analítica de ecuaciones de la forma⁴⁵:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

donde las funciones $a_i(x)$ y la función $f(x)$ son continuas en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Ejemplos

Empezamos resolviendo una EDO sencilla de *segundo orden lineal con coeficientes constantes y homogénea*⁴⁶.

$$2y'' - 3y' + y = 0$$

La resolución se hace a través del comando⁴⁷ `desolve()` de forma similar a lo visto anteriormente.

```
y = function('y')(x)           # var. dependiente
ode = 2*diff(y,x,2)-3*diff(y,x)+y == 0 # definimos la EDO y le ponemos nombre
sol = desolve(ode,y) ; sol      # Resolvemos y ponemos nombre a la sol
```

$$K_2 e^{\left(\frac{1}{2}x\right)} + K_1 e^x$$

Se obtiene una *familia de curvas biparamétrica*⁴⁸. Si vemos el nombre de los *parámetros* en ASCII:

```
ascii(sol)
```

```
_K2*e^(1/2*x) + _K1*e^x
```

comprobamos que son `_K1` y `_K2`. Las variables que comienzan con un signo subrayado '_' son internas del programa y aunque no son *variables simbólicas* se puede interaccionar con ellas⁴⁹.

Verificamos la validez de la solución obtenida `sol` substituyendo con el comando `.subs()` esta función solución y sus derivadas en la EDO original `ode`, y comprobando que se cumple con el comando `bool()`.

```
bool( ode.subs( y==sol , diff(y,x)==diff(sol,x) , diff(y,x,2)==diff(sol,x,2) ) )
```

True

Para resolver una EDO de orden mayor que dos, por ejemplo la siguiente de quinto orden:

$$2y^{(5)} - 7y^{(4)} + 12y''' + 8y'' = 0$$

es necesario utilizar la librería de *FriCAS* de la siguiente forma.

```
y = function('y')(x)
ode = 2*diff(y,x,5)-7*diff(y,x,4)+12*diff(y,x,3)+8*diff(y,x,2) == 0
sol = desolve(ode,y,algorithm='fricas') ; sol # Resolución usando FriCAS
```

$$C_3 \cos(2x) e^{(2x)} + C_4 e^{(2x)} \sin(2x) + C_1 x + C_2 e^{(-\frac{1}{2}x)} + C_0$$

```
ascii(sol)
```

```
_C3*cos(2*x)*e^(2*x) + _C4*e^(2*x)*sin(2*x) + _C1*x + _C2*e^(-1/2*x) + _C0
```

En este caso los cinco *parámetros* van desde `_C0` hasta `_C4`. Podemos dibujar una curva solución de la familia de curvas correspondiente a unos determinados valores de los *parámetros*, de la siguiente forma.

```
plot(sol(_C0=-1,_C1=-1,_C2=0,_C3=0,_C4=0.01),-1,5,ymin=-10,ymax=40,thickness=2)
```

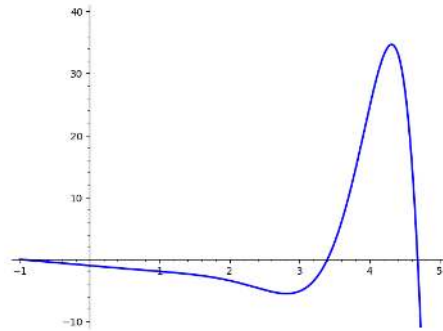
⁴⁵Ver la Definición 3.1, página 51.

⁴⁶Ver la Sección 3.2, página 57.

⁴⁷Ver la Sección A.1.2, página 252.

⁴⁸Ver la Sección 2.11.1, página 42.

⁴⁹Ver la Sección A.1.6, página 268.



Resolvemos ahora una EDO también lineal con coeficientes constantes pero no homogénea.

$$y'' + 2y = x^2 - x + 1$$

El proceso de resolución es similar.

```
y = function('y')(x)
ode = diff(y,x,2)+2*y == x^2-x+1
sol = desolve(ode,y) ; sol
```

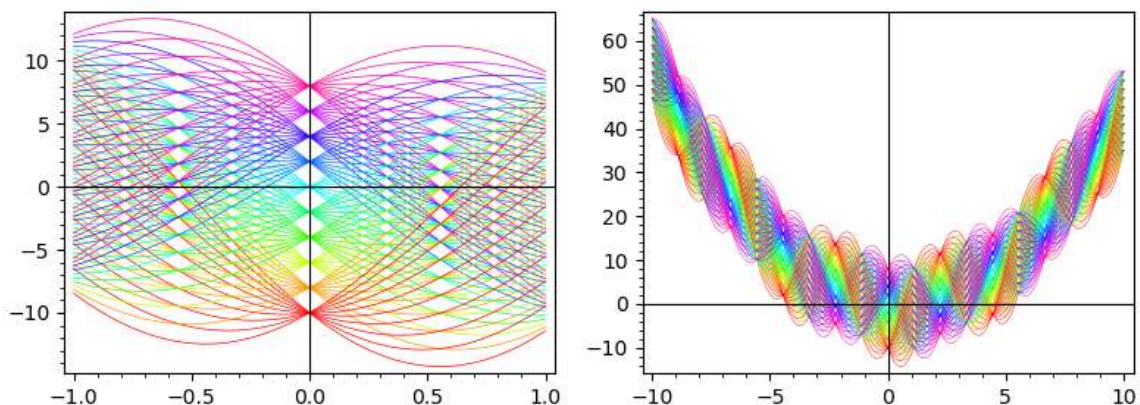
$$\frac{1}{2}x^2 + K_2 \cos(\sqrt{2}x) + K_1 \sin(\sqrt{2}x) - \frac{1}{2}x$$

Vamos a representar gráficamente esta familia de curvas biparamétrica. Al tener dos parámetros `_K1` y `_K2` es necesario usar un bucle `for()` doble para recorrer sus valores. Debido a la complejidad del conjunto de soluciones vamos a representar dos gráficas, siendo una un *zoom* de la otra (cada una sobre un intervalo distinto).

```
P1 = Graphics() # Gráfico 1 en intervalo pequeño x=[-1,1]
P2 = Graphics() # Gráfico 2 en intervalo mayor x=[-10,10]
C = rainbow(10) # Genera vector de 10 colores para diferenciar las curvas

for i in range(-10,10,2): # Bucle doble
    k=-1
    for j in range(-10,10,2):
        k+=1
        P1 += plot(sol(_K1=i, _K2=j), (-1,1), color=C[k], thickness=0.5)
        P2 += plot(sol(_K1=i, _K2=j), (-10,10), color=C[k], thickness=0.3)

# Representamos ambas en horizontal
graphics_array([P1, P2]).show(frame=True, figsize=[8,3])
```



Vamos ahora a encontrar la solución general y particular de un PVI formado con una EDO de segundo orden no homogénea que puede resolverse tanto por el *método de los coeficientes indeterminados*⁵⁰ como por el *método de variación de parámetros*⁵¹.

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x} \cos(2x) \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$$

Empezamos primero con la solución general de la EDO del problema, mostrando el método empleado por el comando.

```
y = function('y')(x)
ode = diff(y,x,2)+2*diff(y,x)+5*y == 4*e^(-x)*cos(2*x)
s1 = desolve(ode,y,show_method=True) ; s1 # sol. general, mostramos método
```

$$\left[(K_2 \cos(2x) + K_1 \sin(2x))e^{(-x)} + \frac{1}{2} (2x \sin(2x) + \cos(2x))e^{(-x)}, \text{variationofparameters} \right]$$

El algoritmo determina que puede resolverse por el método general de *variación de parámetros*.

Notar que los dos primeros términos de la expresión corresponden con la *solución general* de la EDO homogénea asociada y el último término es una *solución particular de la EDO completa*⁵². Vamos ahora a encontrar la *solución particular* del PVI, añadiendo las *condiciones iniciales* mediante un vector $[x_0, y(x_0), y'(x_0)]$ de la siguiente forma:

```
s2 = desolve(ode,y,[0,1,0]) ; s2 # sol. particular
```

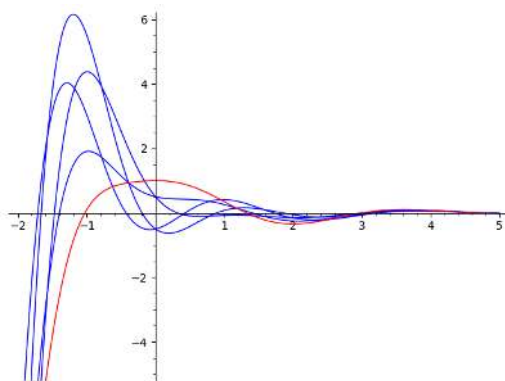
$$\frac{1}{2} (2x \sin(2x) + \cos(2x))e^{(-x)} + \frac{1}{2} (\cos(2x) + \sin(2x))e^{(-x)}$$

Vemos, como es lógico, que la solución en este caso no contiene *parámetros*. Vamos a representar ambas soluciones, donde la general lo haremos representando un pequeño grupo de ellas, a través de bucles `for()`.

```
P1=Graphics() # Gráfico de la familia de curvas (en azul)
for i in range(-1,1):
    for j in range(-1,1):
        P1 += plot(s1[0](_K1=i,_K2=j),(-2,5),ymin=-5,ymax=5,color='blue')

P2=plot(s2,(-2,5),ymin=-5,ymax=6,color='red') # Gráfico de la solución particular

show(P1+P2) # Representamos ambos en un mismo gráfico
```



En principio no hay límite sobre el orden de la EDO, siempre que se use la librería *friCAS*, así podríamos encontrar la solución general y/o particular de un problema formado con la siguiente EDO de décimo orden.

$$y^{(10)} + 2y^{(9)} - y^{(8)} + 11y^{(6)} + 10y^{(5)} - 3y^{(4)} + 4y''' + 20y'' + 16y' + 4y = 0$$

⁵⁰Ver la Sección 3.3.1, página 64.

⁵¹Ver la Sección 3.3.2, página 69.

⁵²Ver el Teorema 3.2, página 56.

Aquí mostramos la solución general (el carácter \ se utiliza para partir sentencias largas).

```
ED = diff(y,x,10)+2*diff(y,x,9)-diff(y,x,8)+11*diff(y,x,6)+10*diff(y,x,5) \
-3*diff(y,x,4)+4*diff(y,x,3)+20*diff(y,x,2)+16*diff(y,x)+4*y == 0
desolve(ED,y,contrib_ode=true,algorithm='fricas').show() # Resuelve y muestra la solución
```

$$C_5 x^5 e^{(-x)} + C_4 x^4 e^{(-x)} + C_3 x^3 e^{(-x)} + C_2 x^2 e^{(-x)} + C_8 x \cos(x) e^x + C_9 x e^x \sin(x) + C_1 x e^{(-x)} + C_6 \cos(x) e^x + C_7 e^x \sin(x) + C_0 e^{(-x)}$$

Usando *fricas*, las *condiciones iniciales* para una EDO de orden n tiene la forma:

$$[x_0, y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)]$$

así el siguiente PVI:

$$\begin{cases} y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0 \\ y(2) = 0, y'(2) = 1, y''(2) = -1, y'''(2) = 0 \end{cases}$$

puede resolverse mediante el siguiente código:

```
y = function('y')(x)
ec = diff(y,x,4)-4*diff(y,x,3)+8*diff(y,x,2)-8*diff(y,x)+4*y==0
s = desolve(ec,y,[2,0,1,-1,0],algorithm='fricas') ; s
```

$$\frac{(7(x-2)\cos(2) - 3(x-5)\sin(2))\cos(x)e^x + (3(x-5)\cos(2) + 7(x-2)\sin(2))e^x\sin(x)}{2(\cos(2)^2 e^2 + e^2 \sin(2)^2)}$$

Veamos ahora cómo resolver *problemas de valores en la frontera*⁵³ (PVF) a través del siguiente ejemplo formado por una EDO de segundo orden *reducible a primer orden*⁵⁴ (falta la variable independiente):

$$\begin{cases} y'' + y(y')^3 = 0 \\ y(0) = 1, y(1) = 3 \end{cases}$$

Encontramos primero la solución general, mostrando su tipo.

```
sg = desolve(diff(y,x,2)+y*(diff(y,x))^3==0,y,show_method=True) ; sg
```

$$\left[\frac{1}{6} y(x)^3 + K_1 y(x) = K_2 + x, \text{free of } x \right]$$

Vemos que indica *free of x* (falta variable x). Como la solución es una función *implícita*, para representar la familia de curvas es necesario utilizar el comando `implicit_plot()` que necesita tener una expresión (ecuación) despejada a cero. Además es necesario cambiar la variable $y(x)$ por otra simbólica que no sea de tipo `function()` como lo es y . En nuestro caso usaremos la variable t para este fin.

```
var('t') # cambiamos la variable y(x) por t
ecg = (sg[0].lhs()-sg[0].rhs()).subs(y==t) ; ecg # Pasamos parte dcha de la ec a la izda
```

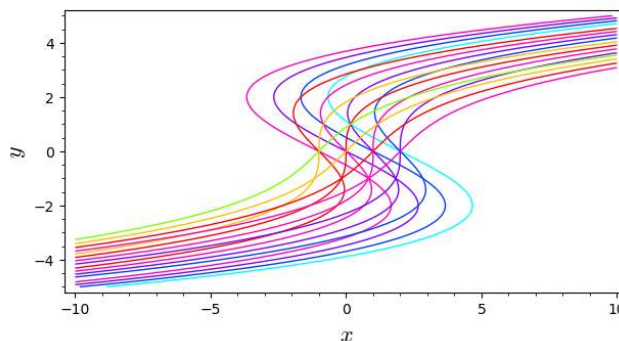
$$\frac{1}{6} t^3 + K_1 t - K_2 - x$$

Ahora estamos en disposición de representar las soluciones como *funciones implícitas*.

```
G=Graphics()
for i in range(-2,2,1):
    for j in range(-2,2,1):
        G+= implicit_plot(ecg(_K1=i,_K2=j),(x,-10,10),(t,-5,5), \
            color=rainbow(8)[i+j],plot_points=100,linewidth=1)
show(G,axes_labels=['$x$', '$y$']) # representación familia de curvas original
```

⁵³Ver la Definición 3.6, página 53.

⁵⁴Ver la Sección 3.4, página 76.



Una vez obtenida la solución general vamos a resolver ahora el PVF. Las *condiciones frontera* de una EDO de segundo orden se especifican mediante un vector $[x_1, y(x_1), x_2, y(x_2)]$ de la siguiente forma:

```
sp = desolve(diff(y,x,2)+y*(diff(y,x))^3==0,y,[0,1,1,3]); sp # sol. particular
```

$$\frac{1}{6}y(x)^3 - \frac{5}{3}y(x) = x - \frac{3}{2}$$

Para representar esta función implícita, al igual que antes, necesitamos despejarla a la izquierda.

```
ecp = (sp.lhs()-sp.rhs()).subs(y==t) ; ecp # Ec. implícita de la sol. particular
```

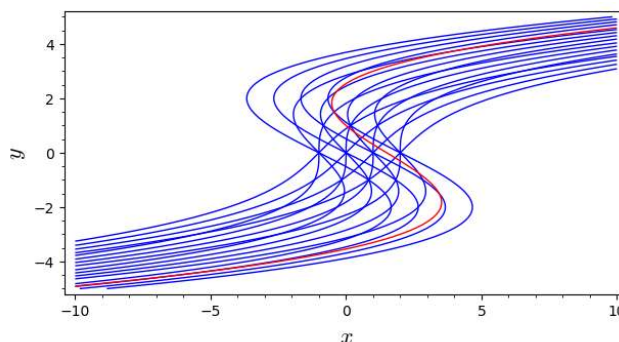
$$\frac{1}{6}t^3 - \frac{5}{3}t - x + \frac{3}{2}$$

Representamos finalmente la *solución general* (en azul) y *particular* (en rojo) juntas.

```
G1=Graphics() # gráfico con las sol de la general
for i in range(-2,2,1):
    for j in range(-2,2,1):
        G1 += implicit_plot(ecg(_K1=i,_K2=j),(x,-10,10),(t,-5,5), \
            plot_points=100,linewidth=1,color='blue')

G2 = implicit_plot(ecp,(x,-10,10),(t,-5,5), \
    plot_points=100,linewidth=1,color='red') # gráfico de la sol. particular

show(G1+G2,axes_labels=['$x$','$y$']) # representación conjunta
```



Veamos ahora una EDO que solo se puede resolver por el *método de variación de parámetros*.

$$y'' + 2y' + y = \cos^2(x)$$

```
desolve(diff(y,x,2)+2*diff(y,x)+y == cos(x)^2,y,show_method=True)
```

$$\left[(K_2 x + K_1) e^{(-x)} - \frac{3}{50} \cos(2x) + \frac{2}{25} \sin(2x) + \frac{1}{2}, \text{variationofparameters} \right]$$

Las ecuaciones de tipo *Cauchy-Euler*⁵⁵ se resuelven de igual forma, por ejemplo la siguiente no homogénea.

$$x^3 y''' - 2x^2 y' + x y' - y = 2x$$

```
y=function('y')(x)
ec = x^3*diff(y,x,3)-2*x^2*diff(y,x,2)+x*diff(y,x)-y==2*x
desolve(ec,y,algorithm='fricas')
```

$$C_2 x^2 x(\sqrt{3}) + \frac{C_1 x^2}{x(\sqrt{3})} + C_0 x + x \log(x) - x$$

A través de la librería *FriCAS* también se pueden resolver algunas EDO no lineales⁵⁶.

$$y' = \frac{y}{x + y \log y}$$

```
de = diff(y, x) == y / (x+y*log(y))
desolve(de,y,algorithm='fricas')
```

$$\frac{\log(y(x))^2 y(x) - 2x}{2y(x)}$$

En determinados casos, por ejemplo donde se aplica el método de *variación de parámetros*, pueden aparecer soluciones que contienen *integrales no elementales*⁵⁷, sin solución analítica⁵⁸. Aquí mostramos un ejemplo de una EDO lineal con coeficientes constantes no homogénea que puede resolverse a través del *método de variación de parámetros*⁵⁹.

$$y'' + 2y' + y = \frac{1}{\cos x}$$

```
desolve(diff(y,x,2)+2*diff(y,x)+y == 1/cos(x),y,show_method=True)
```

$$\left[(K_2 x + K_1) e^{(-x)} + \left(x \int \frac{e^x}{\cos(x)} dx - \int \frac{x e^x}{\cos(x)} dx \right) e^{(-x)}, \text{variationofparameters} \right]$$

Las dos *integrales indefinidas* que aparecen en esta solución son de tipo *no elemental*. Probamos a calcular una de ellas.

```
f = e^x/cos(x) ; integral(f,x)
```

$$\int \frac{e^x}{\cos(x)} dx$$

Al igual que antes, muestra la integral sin poder obtener la solución. Mediante el comando `numerical_integral()` podemos obtener una aproximación numérica de una integral definida. A continuación mostramos dentro de la gráfica de la función, la zona de integración y su aproximación numérica.

```
P1 = plot(f,-2*pi,2*pi,detect_poles='show',ymin=-20,ymax=10,plot_points=2000)
P2 = plot(f,-1,1,fill=true)
(P1+P2).show(aspect_ratio=0.15)
```

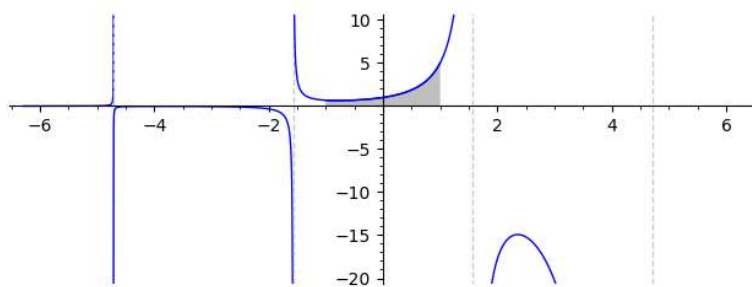
⁵⁵Ver la [Sección 3.4.3](#), página 79.

⁵⁶Ver la [Definición 1.8](#), página 9.

⁵⁷Una *integral no elemental* es una integral para la cual se puede demostrar que no existe ninguna fórmula en términos de *funciones elementales* (polinomios, funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas y productos y composiciones de estas funciones). Se puede demostrar que, dada una función al azar de cierta complejidad, la probabilidad de que tenga una primitiva elemental es muy pequeña.

⁵⁸En el caso de que tenga solución, ésta se puede determinar de forma numérica.

⁵⁹A la hora de encontrar una solución particular.



```
# Muestra el valor aproximado y su error de la integral entre [-1,1]
numerical_integral(f, -1, 1)
```

$(2.955844634804547, 3.2816467707747454 \times 10^{-14})$

A.1.6. Problemas de Valores en la Frontera (PVF)

De forma general, los *problemas de valores en la frontera* (PVF) necesitan un tratamiento especial. Como sabemos⁶⁰ los problemas PVF pueden tener una, varias, infinitas o ninguna solución (a diferencia de los PVI de EDO lineales cuya solución siempre es única).

SageMath no tiene una forma directa de resolver PVF con EDO de alto orden, de forma que el proceso a seguir es encontrar la solución general de la EDO (en caso de que exista y el algoritmo sea capaz de encontrarla), que tendrá n parámetros (donde n es el orden de la EDO) y posteriormente, a través de los valores de las condiciones frontera, formar un *sistema de ecuaciones lineales* para encontrar los valores de los *parámetros* que dan lugar a la solución particular del problema.

Veamos un ejemplo, resolviendo el siguiente PVF con una EDO lineal no homogénea de cuarto orden.

$$\begin{cases} xy^{(4)} - y''' - 4xy'' + 4y' = 96x^2 \\ y(1) = -5, y'(0) = -12, y''(-1) = 60, y'''(0) = -48 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Primeramente buscamos soluciones con *SageMath* a través de *friCAS*:

```
y=function('y')(x)
ode = x*diff(y,x,4)-diff(y,x,3)-4*x*diff(y,x,2)+4*diff(y,x)==96*x^2
s = desolve(ode,y,algorithm='fricas') ; s
```

$$C_0 x^2 - 8x^3 + \frac{37}{2} x^2 + C_2 e^{(2x)} + C_3 e^{(-2x)} + C_1 - 12x$$

Los parámetros `_C` son internos del programa y no son *variables simbólicas* que el usuario puede usar directamente. Para que puedan ser utilizadas es necesario declararlas como *variables simbólicas*⁶¹ mediante el comando `var()`.

```
var('_C0 _C1 _C2 _C3')
```

(C_0, C_1, C_2, C_3)

Ahora, a través de los valores frontera conocidos del problema (A.2) vamos a formar un sistema de ecuaciones lineales donde las incógnitas serán los parámetros `_C`.

```
sis = [s(x=1)==-5,diff(s,x)(x=0)==-12,diff(s,x,2)(x=-1)==60,diff(s,x,3)(x=0)==-48] ; sis
```

$$\left[C_2 e^2 + C_3 e^{(-2)} + C_0 + C_1 - \frac{3}{2} = (-5), 2C_2 - 2C_3 - 12 = (-12), 4C_3 e^2 + 4C_2 e^{(-2)} + 2C_0 + 85 = 60, 8C_2 - 8C_3 - 48 = (-48) \right]$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales.

⁶⁰Ver el Ejemplo 3.9, página 55.

⁶¹Ver la Sección A.1.1, página 245.

```
solsis=solve(sis,_C0,_C1,_C2,_C3) ; solsis
```

$$\left[\left[C_0 = -\frac{1}{2} (4r_1 e^4 + 4r_1 + 25e^2) e^{(-2)}, C_1 = (r_1 e^4 + r_1 + 9e^2) e^{(-2)}, C_2 = r_1, C_3 = r_1 \right] \right]$$

Vemos que hay infinitas soluciones que dependen en este caso de un parámetro⁶² r_1 . De ellas vamos a escoger una solución sencilla, por ejemplo para $r_1=0$ el valor de nuestros parámetros es:

```
for i in range(0,4): print(solsis[0][i](r1=0))
```

```
_C0 == (-25/2)
_C1 == 9
_C2 == 0
_C3 == 0
```

Sustituyendo estos valores en la solución ss se tiene:

```
s0 = s(_C0=solsis[0][0](r1=0).rhs(), _C1=solsis[0][1](r1=0).rhs(), \
      _C2=solsis[0][2](r1=0).rhs(), _C3=solsis[0][3](r1=0).rhs()) ; s0
```

$$-8x^3 + 6x^2 - 12x + 9$$

Comprobamos que esta solución es válida, es decir que cumple la EDO y que se verifican las condiciones frontera. Empezamos con la verificación de la EDO.

```
bool(ode.subs(y==s0,diff(y,x)==diff(s0,x),diff(y,x,2)==diff(s0,x,2), \
             diff(y,x,3)==diff(s0,x,3),diff(y,x,4)==diff(s0,x,4)))
```

True

Se cumple la EDO, comprobamos ahora las condiciones frontera:

```
print('f(1)=' , s0(x=1) , " , f'(0)=", diff(s0,x)(x=0) , " , \
      f''(-1)=", diff(s0,x,2)(x=-1) , " , f'''(0)=", diff(s0,x,3)(x=0))
```

$$f(1) = -5 \quad , \quad f'(0) = -12 \quad , \quad f''(-1) = 60 \quad , \quad f'''(0) = -48$$

También se cumplen, por tanto la solución es válida. De igual forma se podría hacer con cualquier otro valor del parámetro r_1 .

A.1.7. Ecuación de Bessel

La *ecuación de Bessel*⁶³ en su forma canónica es una EDO lineal de segundo orden dada por:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - m^2)y = 0$$

donde $m \geq 0$ se denomina **orden de la ecuación**. Las soluciones de esta ecuación vienen dadas por:

$$y(x) = c_1 J_m(x) + c_2 Y_m(x)$$

donde $J_m(x)$ e $Y_m(x)$ se denominan **funciones de Bessel de primera clase o especie** y pueden definirse como:

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{2k+m}}{k! \Gamma(k+m+1)} \quad ; \quad \begin{cases} Y_m(x) = \frac{J_m(x) \cos(m\pi) - J_{-m}(x)}{\sin(m\pi)} & m \notin \mathbb{Z} \\ Y_m(x) = \lim_{n \rightarrow m} Y_n(x) & m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

⁶²El nombre de este parámetro puede ser distinto al ejecutar esta sentencia.

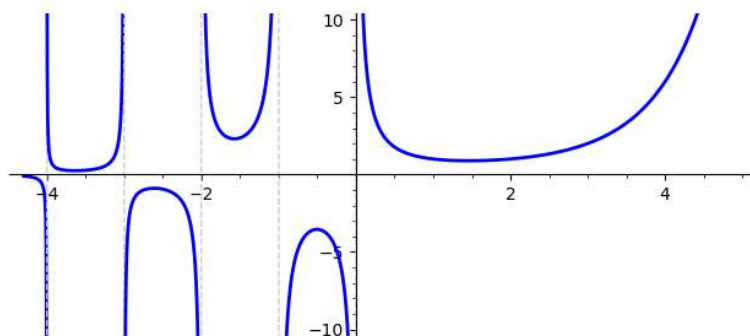
⁶³Ver la [Sección 3.4.4, página 82](#).

donde $\Gamma(x)$ es la **función gamma**⁶⁴ definida por:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

En *SageMath* la función gamma $\Gamma(x)$ se representa mediante `gamma(x)`.

```
plot(gamma(x), -4.3, 5, ymin=-10, ymax=10, detect_poles='show', thickness=2)
```



Funciones de Bessel en SageMath

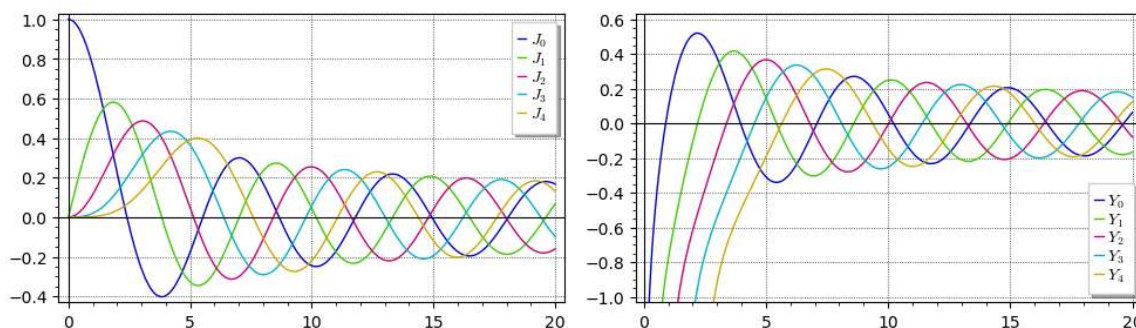
Hay varias formas de usar las funciones de Bessel en *SageMath*:

- Mediante las funciones `bessel_J(n, x)` para la primera especie y `bessel_Y(n, x)` para la segunda especie.
- Mediante la función `Bessel(n, tipo)(x)` donde `tipo` puede ser J (por defecto), Y, K o I.

```
bessel_J(0,2).n() # Aproximación numérica de J_0(2)
```

0.223890779141236

```
def j(n): return lambda x: Bessel(n)(x) # redefinimos nombre función Bessel
def y(n): return lambda x: Bessel(n, 'Y')(x)
P1 = plot([j(0), j(1), j(2), j(3), j(4)], 0, 20, \
          legend_label=['$J_0$', '$J_1$', '$J_2$', '$J_3$', '$J_4$'], \
          ticks=[None, None], gridlines=true, frame=true)
P2 = plot([y(0), y(1), y(2), y(3), y(4)], 0, 20, ymin=-1, ymax=0.6, \
          legend_label=['$Y_0$', '$Y_1$', '$Y_2$', '$Y_3$', '$Y_4$'], \
          ticks=[None, None], gridlines=true, frame=true)
graphics_array([P1, P2]).show(figsize=[10, 3])
```



Se puede obtener un *desarrollo en serie de Taylor*⁶⁵ de las *funciones de Bessel* en torno a un punto $x = x_0$.

⁶⁴Ver la [Sección 3.4.4](#), página 82.

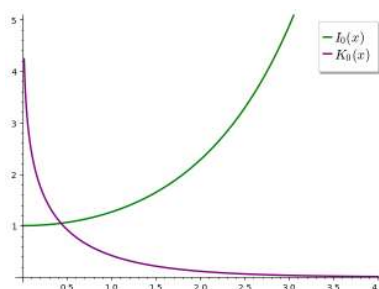
⁶⁵Ver por ejemplo "Clases de Cálculo I para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 313.

```
# Desarrollo en serie de J_0(x) alrededor de x = 0
taylor(bessel_J(0, x), x, 0, 6) # Polinomio Taylor orden 6 en torno x=0
```

$$-\frac{1}{2304}x^6 + \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{4}x^2 + 1$$

Además de las *funciones de Bessel* estándar, *SageMath* también soporta las funciones de Bessel modificadas, como $I_m(x)$ y $K_m(x)$:

```
# Gráficas de I_0(x) y K_0(x)
P = plot(bessel_I(0, x), 0, 4, ymax=5, color='green', thickness=2, legend_label='$I_0(x)$')+ \
plot(bessel_K(0, x), 0, 4, ymax=5, color='purple', thickness=2, legend_label='$K_0(x)$')
P.set_legend_options(font_size=16) ; P.show()
```



Los ceros o raíces de las funciones de bessel se pueden obtener a través de la librería⁶⁶ *mpmath*.

- `besseljzero(m,n,deriv)` : Encuentra el zero n -ésimo positivo de la función $J_m(x)$, siendo el primer cero $n = 1$. Si se indica el valor `deriv=1` se obtienen los ceros no negativos de la derivada $J'_m(x)$, por defecto `deriv=0`.
- `besselyzero(m,n,deriv)` : igual que el anterior pero con la función $Y_m(x)$.

La librería *mpmath* es de precisión arbitraria y tiene muchas funciones útiles en muchas áreas de las matemáticas. Para usar rutinas de esta librería dentro de *SageMath* es necesario importarla antes de su uso, como se indica a continuación.

```
from mpmath import besseljzero, besselyzero # importamos rutinas de mpmath
z1 = besseljzero(2,3) # tercer cero>0 (n=3) de J_2(x)
z2 = besselyzero(0,1,1) # primer cero>0 (n=1) de Y_0'(x)
print("3er cero J_2 = ", z1, " ; 1er cero Y_0' = ", z2)
```

3er cero J_2 = 11.6198411721491 ; 1er cero Y_0' = 2.19714132603102

Resolución de la Ecuación de Bessel

Resolvemos la ec. de Bessel para orden m entero

```
var('m') # orden
assume(m, 'integer')
assume(m >= 0)
y = function('y')(x)
ecbessel = x^2 * diff(y, x, 2) + x * diff(y, x) + (x^2 - m^2) * y == 0
sol = desolve(ecbessel, y, iver=x) ; sol # Sol general
```

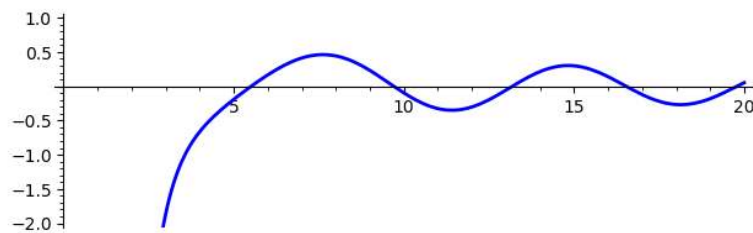
$$K_1 J_m(x) + K_2 Y_m(x)$$

```
ascii(sol)
```

$$_K1 \cdot \text{bessel_J}(m, x) + _K2 \cdot \text{bessel_Y}(m, x)$$

⁶⁶<https://mpmath.org/>.


```
# Representamos una sol. particular
set_verbose(-1)
plot(sol(m=5, _K1=1, _K2=1), 0, 20, ymin=-2, ymax=1, thickness=2)
```



A.1.8. Sistemas de EDO (SEDO)

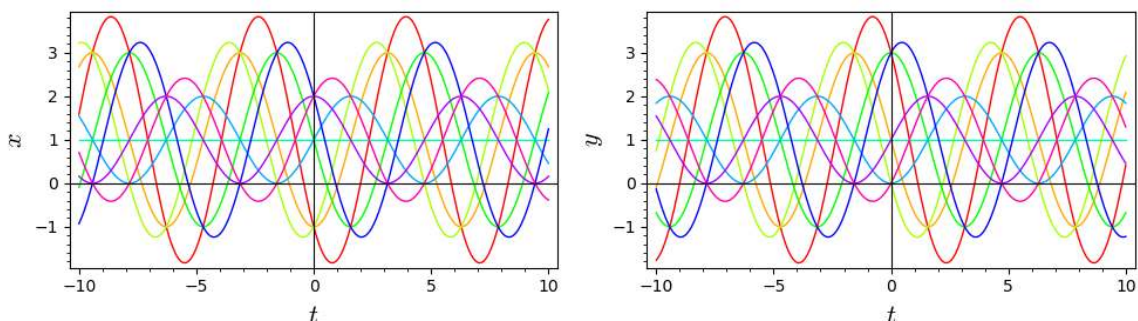
SageMath permite la resolución de SEDO de *primer orden* formadas por cualquier número de ecuaciones, mediante el uso del comando `desolve_system()` de una forma similar al uso del comando⁶⁷ `desolve()`. Internamente este comando hace uso de `desolve_laplace` (ver la [Sección A.1.11, página 279](#)). Veamos algunos ejemplos, empezando encontrando la solución general de un sistema de dos EDO.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + 1 \\ \frac{dy}{dx} = x - 1 \end{cases}$$

```
var('t')          # var independiente
x = function('x')(t) # vars dependientes
y = function('y')(t)
ec1 = diff(x,t) + y - 1 == 0
ec2 = diff(y,t) - x + 1 == 0
s = desolve_system([ec1, ec2], [x,y], algorithm='fricas') ; s
```

$$\left[x(t) = C_0 \cos(t) + \cos(t)^2 + C_1 \sin(t) + \sin(t)^2, y(t) = -C_1 \cos(t) + C_0 \sin(t) + 1 \right]$$

```
c = rainbow(7)
P1=Graphics() ; P2=Graphics()
for i in [-2, 0, 1]:
    for j in [-2, 0, 1]:
        P1 += plot(s[0].rhs()(_C0=i, _C1=j), -10, 10, color=c[i+j], thickness=1)
        P2 += plot(s[1].rhs()(_C0=i, _C1=j), -10, 10, color=c[i+j], thickness=1)
graphics_array([P1, P2]).show(figsize=[10, 3], frame=true)
```



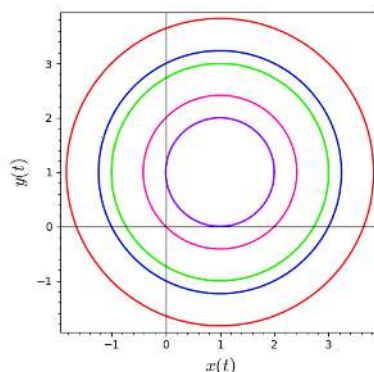
Estas gráficas dan poca información debido a su cantidad y complejidad. Una forma más útil es representar la variable $y(t)$ frente a la variable $x(t)$ para los mismos valores de la variable t (que no aparecerá en la gráfica), de la siguiente forma.

⁶⁷Ver la [Sección A.1.2, página 252](#).


```

c = rainbow(9)
P=Graphics()
k=-1
for i in [-2, 0, 1]:
    for j in [-2,0,1]:
        k+=1
        x=s[0].rhs()(_C0=i,_C1=j)
        y=s[1].rhs()(_C0=i,_C1=j)
        P+=parametric_plot([x,y],(t,0,2*pi),color=c[k],plot_points=500)
P.show(axes_labels=['$x(t)$','$y(t)$'],frame=true)

```



Aquí vemos que las trayectorias $[x, y]$ en función de t corresponden con circunferencias de centro $(1, 1)$ y radio dependiente de las condiciones iniciales.

Vamos ahora a resolver un PVI dada a través de un SEDO.

$$\begin{cases} x' = -ty + t \\ y' = 3tx - t \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 1 \end{cases}$$

```

var('t') # var independiente
x = function('x')(t) # vars dependientes
y = function('y')(t)
ec1 = diff(x,t) + t*y - t == 0
ec2 = diff(y,t) - 3*t*x + t == 0
s = desolve_system([ec1, ec2], [x,y], ics=[0,1,1], algorithm='fricas') ; s

```

$$\left[x(t) = \frac{1}{3} e^{\left(\frac{1}{2} \sqrt{-3} t^2\right)} + \frac{1}{3} e^{\left(-\frac{1}{2} \sqrt{-3} t^2\right)} + \frac{1}{3}, y(t) = -\frac{1}{3} \sqrt{-3} e^{\left(\frac{1}{2} \sqrt{-3} t^2\right)} + \frac{1}{3} \sqrt{-3} e^{\left(-\frac{1}{2} \sqrt{-3} t^2\right)} + 1 \right]$$

Notar que aparentemente se obtienen soluciones complejas dadas por valores de raíces negativas. Teniendo en cuenta la fórmula de Euler $e^{a+bi} = \cos(a) + i \sin(b)$, podemos simplificar las soluciones a través del comando `simplify_full()`.

```

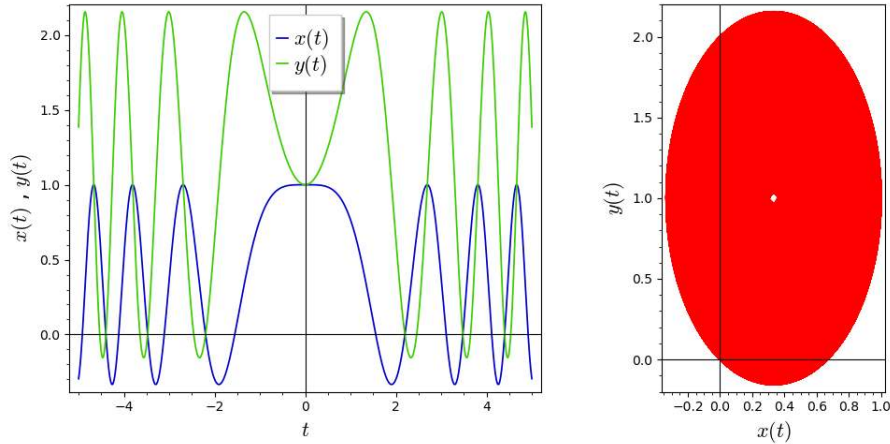
xt=s[0].rhs().simplify_full()
yt=s[1].rhs().simplify_full()
[xt,yt]

```

$$\left[\frac{2}{3} \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{3} t^2\right) + \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \sqrt{3} \left(\sqrt{3} + 2 \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{3} t^2\right)\right) \right]$$

Vemos que son soluciones reales. Vamos a representar estas soluciones. En una gráfica representaremos $[x(t), t]$ e $[y(t), t]$ y en una segunda gráfica $[x(t), y(t)]$. Esta última es una curva paramétrica en función del parámetro t (que podría representar, por ejemplo, el tiempo en un sistema físico).

```
P1 = plot([s[0].rhs(),s[1].rhs()],-5,5,thickness=1.2, \
    legend_label=['$x(t)$','$y(t)$'],axes_labels=['$t$','$x(t)$ , $y(t)$'])
P2 = parametric_plot([xt,yt],(t,0,50*pi),thickness=1.5, \
    axes_labels=['$x(t)$','$y(t)$'],color='red',plot_points=500)
graphics_array([P1,P2]).show(figsize=[20,10],frame=true)
```



En la segunda gráfica (paramétrica) se observa que la trayectoria es una espiral de forma elíptica que a medida que avanza el tiempo t se acerca a su centro.

A.1.9. Transformada de Laplace

Recordamos⁶⁸ que dada una determinada⁶⁹ función $f(t)$ definida para $t \geq 0$, se denomina **transformada de Laplace** de $f(t)$, y se representa mediante $\mathcal{L}\{f(t)\}$, al resultado de la siguiente integral impropia:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt = F(s) \quad (\text{A.3})$$

siempre y cuando converja. El resultado es una nueva función $F(s)$ en una nueva variable s . La operación opuesta viene dada por la **transformada inversa de Laplace**⁷⁰.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Cálculo y Propiedades de la TL

En *SageMath* la *transformada de Laplace* (TL) de una función $f(t)$ se calcula mediante el comando:

```
laplace(f(t),t,s)
```

donde t es la *variable original* (denominada *dominio del tiempo*) y s en la *variable transformada* (denominada *dominio de la frecuencia*). Por ejemplo, calculemos la transformada de Laplace de la función $f(t) = t^2$.

```
var('t s')           # Def. var original y transformada
f = t^2              # función original
F = laplace(f, t, s) ; F # Función transformada de Laplace
```

$$\frac{2}{s^3}$$

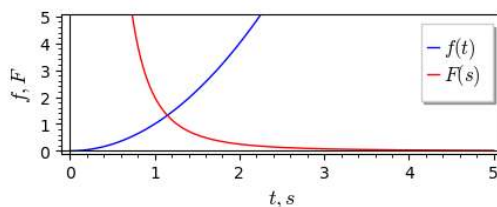
Representamos gráficamente la función y su transformada.

⁶⁸Ver la Definición 4.3, página 95.

⁶⁹Ver la Sección 4.3.4, página 99.

⁷⁰Ver la Definición 4.7, página 108.

```
P1 = plot(f,0,5,color='blue',legend_label='$f(t)$',axes_labels_size=1.3)
P2 = plot(F,0,5,color='red',ymax=10,legend_label='$F(s)$')
P=P1+P2; P.set_legend_options(font_size=12)
P.show(ymax=5,axes_labels=['$t,s$', '$f,F$'],figsize=[4.5,2],frame=true)
```



Comprobamos el valor de la transformada obtenida a través del cálculo de la integral de definición (A.3).

```
assume(s>0)
int = integral(f*e^(-t*s),t,0,oo); int
```

$$\frac{2}{s^3}$$

La **transformada inversa de Laplace**⁷¹ se realiza mediante el comando:

```
inverse_laplace(F(s),s,t)
```

de la siguiente forma:

```
# Cálculo de la transformada inversa de Laplace del caso anterior
f_inv = inverse_laplace(F, s, t)
print("Transformada inversa de Laplace de F(s)=",F," es f(t) = ",f_inv)
print('Comprobamos el resultado con el anterior =',bool(f==f_inv))
```

Transformada inversa de Laplace de $F(s) = 2/s^3$ es $f(t) = t^2$
Comprobamos el resultado con el anterior = True

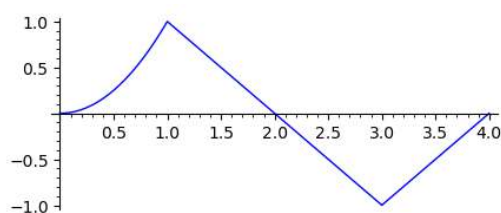
Las funciones *definidas a trozos* se definen en *SageMath* con el comando:

```
piecewise([ [(ini1,fin1),fun1] , [(ini2,fin2),fun2] ,... ] , var=variable )
```

por ejemplo la siguiente función:

$$\begin{cases} x^2 & x \in [0, 1] \\ 2 - x & x \in (1, 3) \\ x - 4 & x \in [3, 4] \end{cases}$$

```
# Ejemplo de función definida a trozos
f = piecewise([ ([0,1],x^2), ((1,3),2-x), ([3,4],x-4) ])
plot(f,0,4,figsize=[4.5,2])
```

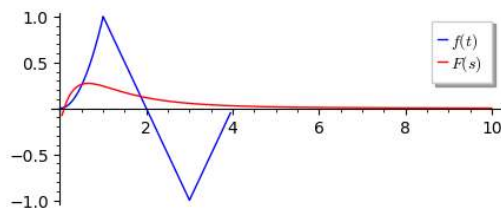


⁷¹Ver la Definición 4.7, página 108.

```
# Calculamos la TL de la función anterior
F = f.laplace(x, s) ; F
```

$$\frac{(s-1)e^{(-s)}}{s^2} + \frac{(s+1)e^{(-3s)}}{s^2} - \frac{(s-1)e^{(-3s)}}{s^2} - \frac{(s^2+2s+2)e^{(-s)}}{s^3} - \frac{e^{(-4s)}}{s^2} + \frac{2}{s^3}$$

```
# Representamos gráficamente ambas
set_verbose(-1) # previene warnings
P1 = plot(f,0,10,color='blue',legend_label='$f(t)$')
P2 = plot(F,0,10,color='red',ymax=10,legend_label='$F(s)$') ; P=P1+P2
P.set_legend_options(font_size=10); P.show(ymax=-1,ymax=1,figsize=[4.5,2])
```



Vamos a ver un par de ejemplos donde se comprueban los resultados del comando `laplace()` a través de las propiedades de la TL⁷². Empezamos recordando el **primer teorema de traslación**⁷³:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

Por ejemplo:

$$\mathcal{L}\{e^t \cos t\} = \mathcal{L}\{\cos t\}|_{s \rightarrow s-1} = \frac{s}{s^2+1} \Big|_{s \rightarrow s-1} = \frac{s-1}{(s-1)^2+1} = \frac{s-1}{s^2-2s+2}$$

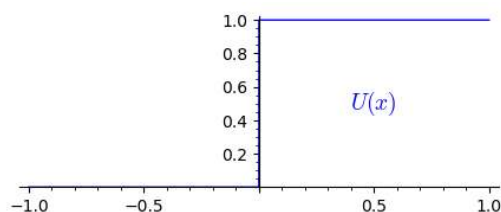
Comprobamos:

```
var('t s')
f = e^t*cos(t) # primer teo traslación
laplace(f,t,s)
```

$$\frac{s-1}{s^2-2s+2}$$

La función **escalón unitario**⁷⁴ se define en *SageMath* a través de la función `unit_step(x)`.

```
# Función escalon unitario U(x)
G = plot(unit_step(x),figsize=[4.5,2])
G += text('$U(x)$',(0.5,0.5),fontsize=14) ; G
```



A través del uso de esta función recordamos el **segundo teorema de traslación**⁷⁵:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

⁷²Ver la Sección 4.3.5, página 101.

⁷³Ver el Teorema 4.3, página 102.

⁷⁴Ver la Definición 4.6, página 103.

⁷⁵Ver el Teorema 4.4, página 104.

Por ejemplo:

$$\mathcal{L}\{\sin(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{\sin(t)\} = e^{-as}\frac{1}{s^2+1}$$

Comprobamos:

```
var('t s a')
assume(a>0)
g = sin(t)
f = g(t=t-a)*unit_step(t-a) # segundo teo traslación
laplace(f,t,s)
```

$$\frac{e^{-as}}{s^2+1}$$

Recordamos ahora la propiedad de la **derivada de una transformada**⁷⁶:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Por ejemplo:

$$\mathcal{L}\{t \sin(kt)\} = (-1) \frac{d}{ds} \mathcal{L}\{\sin(kt)\} = -\frac{d}{ds} \frac{k}{s^2+1} = \frac{k2s}{(s^2+1)^2}$$

Comprobamos:

```
var('t s k')
f = t*sin(k*t) # derivada de una transformada
laplace(f,t,s)
```

$$\frac{2ks}{(k^2+s^2)^2}$$

Veamos la propiedad de la **integral de una transformada**⁷⁷:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(r) dr$$

Por ejemplo:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin(2t)}{t}\right\} = \int_s^\infty \mathcal{L}\{\sin(2t)\}|_{s \rightarrow r} dr = \int_s^\infty \frac{2dr}{r^2+2^2} = \arctan \frac{r}{2} \Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{s}{2}$$

Comprobamos:

```
var('t s')
assume(s>0)
f = sin(2*t)/t # integral de una transformada
L=laplace(f,t,s); L
```

$$\frac{1}{2}i \log\left(\frac{s-2i}{s+2i}\right)$$

Podemos simplificar esta expresión para que no sea compleja, para ello primero hay que romper el logaritmo del cociente con el comando `canonicalize_radical()` y posteriormente simplificar con `simplify_full()`.

```
L2= L.canonicalize_radical().simplify_full() ; L2
```

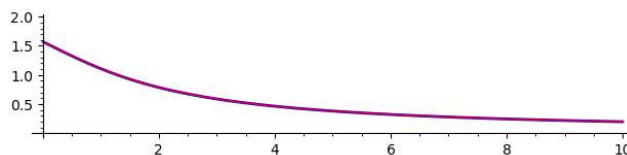
$$\arctan\left(\frac{2}{s}\right)$$

Comprobamos la equivalencia de ambos resultados para $s > 0$ representando sus gráficas.

⁷⁶Ver el Teorema 4.6, página 106.

⁷⁷Ver el Teorema 4.7, página 108.

```
plot(pi/2-atan(x/2),0.01,5,ymin=-1,ymax=5,color='blue',thickness=2)+ \
plot(atan(2/x),0.01,5,ymin=-1,ymax=5,color='red',thickness=1)
```



Recordamos ahora la propiedad de la **transformada de la derivada de una función**⁷⁸:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{n-2}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Por ejemplo:

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

Comprobamos:

```
var('t s')
f=function('f')(t)
L = laplace(diff(f,t,3),t,s) ; L # Transformada de la tercera derivada
```

$$s^3 \mathcal{L}(f(t), t, s) - s^2 f(0) - s D_0(f)(0) - D_{0,0}(f)(0)$$

donde D_0 y $D_{0,0}$ hacen referencia a las derivadas.

Veamos la propiedad de la **transformada de la integral de una función**⁷⁹:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(r) dr\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Comprobamos:

```
var('t s r')
f=function('f')(t)
laplace(integral(f(t=r),r,0,t),t,s) # Transformada de una integral
```

$$\frac{\mathcal{L}(f(t), t, s)}{s}$$

A.1.10. Descomposición en Fracciones Simples

SageMath permite encontrar la descomposición de una función racional en sumas y restas de *fracciones simples*⁸⁰ mediante el comando `partial_fraction()` de la siguiente forma⁸¹:

```
# Ejer. 4.14
f=(x^2-5*x+6)/(x^4-3*x^3-3*x^2+11*x-6)
ff = f.partial_fraction(x)
sys.stdout.flush()
show(f) ; print('=') ; sys.stdout.flush() ; show(ff)
```

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6} = -\frac{4}{9(x+2)} + \frac{4}{9(x-1)} - \frac{1}{3(x-1)^2}$$

⁷⁸Ver el Teorema 4.8, página 111.

⁷⁹Ver el Teorema 4.9, página 112.

⁸⁰Ver la Sección 4.4, página 113.

⁸¹Ver el Ejercicio 4.14, página 114.

A.1.11. Resolución EDO con TL

El procedimiento de la *transformada de Laplace* para la resolución de EDO⁸² se puede realizar en *SageMath* mediante la sentencia:

```
desolve_laplace(edo,var,[ics,ivar,...])
```

de forma similar a como se utiliza el comando normal⁸³ `desolve()`. Resolvemos a modo de ejemplo el Ejercicio 4.15, página 116.

$$\begin{cases} y''(t) + 3y'(t) - 4y(t) = 0 \\ y(0) = 3 \quad ; \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

```
# Ejer. 4.15
var('t')
y=function('y')(t)
edo=diff(y,t,2)+3*diff(y,t)-4*y==0
desolve_laplace(edo,y,ics=[0,3,1])
```

$$\frac{2}{5}e^{(-4t)} + \frac{13}{5}e^t$$

Notar que este comando realiza automáticamente todos los pasos necesarios para la resolución de un PVI por el método de la *transformada de Laplace*⁸⁴. Estos pasos se pueden realizar en *SageMath* manualmente como indicamos a continuación para la resolución del caso anterior.

```
var('t,s')                                # var ind
y = function('y')(t)                     # var dep
edo=diff(y,t,2)+3*diff(y,t)-4*y==0       # EDO
L = laplace(edo,t,s)                     # Tranf. Laplace
S = solve(L,laplace(y,t,s))               # Despejamos la TL
F=S[0].rhs()                             # parte dcha
y0=3; dy0=1                              # cond. ini
f=F.subs(y(t=0)==y0, diff(y,t)(t=0)==dy0) # sustituimos
inverse_laplace(f,s,t)                   # transf. inversa Laplace
```

$$\frac{2}{5}e^{(-4t)} + \frac{13}{5}e^t$$

Comprobamos que se obtiene el mismo resultado que anteriormente con el comando `desolve_laplace()`. A pesar de que realizar estos pasos manualmente es más largo y pesado, veremos que van a resultar muy interesantes para resolver problemas de tipo más general que el que permite el comando.

Si no se especifican unas condiciones iniciales al usar este comando se obtiene el resultado dependiente de un *parámetro libre*. Por ejemplo:

```
u=function('u')(x)
eq = diff(u,x) - exp(-x) - u == 0
sg = desolve_laplace(eq,u) ; sg # sol. general (sin cond. ini)
```

$$\frac{1}{2}(2u(0) + 1)e^x - \frac{1}{2}e^{(-x)}$$

```
sp = desolve_laplace(eq,u,ics=[0,3]) ; sp # sol. particular (con sol. ini)
```

$$-\frac{1}{2}e^{(-x)} + \frac{7}{2}e^x$$

Si la EDO es de orden n aparecerán n constantes de integración.

⁸²Ver la Sección 4.5, página 115.

⁸³Ver la Sección A.1.2, página 252.

⁸⁴Ver la Sección 4.5.1, página 115.

```
f = function('f')(x)
de = diff(f,x,2) - 2*diff(f,x) + f # EDO 2do orden
sg = desolve_laplace(de,f) ; sg    # sol. general
```

$$-xe^x f(0) + xe^x D_0(f)(0) + e^x f(0)$$

```
desolve_laplace(de,f,ics=[0,1,2]) # sol. particular
```

$$xe^x + e^x$$

Veamos ahora cómo pueden resolverse las *EDO lineales con coeficientes polinómicos*⁸⁵, por ejemplo⁸⁶:

$$\begin{cases} ty'(t) + y(t) = a + t^2 \\ y(0) = a \end{cases}$$

Este problema no se puede resolver con el comando `desolve()` (da error) y si intentamos resolverlo con el comando `desolve_laplace()` se obtiene una solución no válida, como se comprueba a continuación.

```
# Ejer 4.16 (sol. particular con desolve_laplace) -> Erróneo!
var('a t')
y = function('y')(t)
ec = t*diff(y,t) + y == a + t^2 # EDO Lineal polinómica
desolve_laplace(ec,y,ivar=t,ics=[0,a])
```

$$-\frac{1}{3}t^3 - at$$

Notar que esta solución no cumple la condición inicial. El origen del problema podemos determinarlo encontrando la solución general del problema.

```
# Ejer 4.16 (sol. general con desolve)
var('a t')
y = function('y')(t)
ec = t*diff(y,t) + y == a + t^2 # EDO Lineal polinómica
desolve(ec,y,ivar=t)           # No ponemos cond. iniciales
```

$$\frac{t^3 + 3at + 3C}{3t}$$

Notar que al imponer la condición inicial en $t = 0$ se produce una *indeterminación*. Si imponemos otras condiciones compatibles con ésta pero en un punto distinto no nulo de t , por ejemplo $[t = 1, y = a + 1/3]$, el problema sí se puede resolver con ambos comandos.

```
# Ejer 4.16 (cond. ini distintas)
var('a t')
y = function('y')(t)
ec = t*diff(y,t) + y == a + t^2 # EDO Lineal polinómica
desolve(ec,y,ivar=t,ics=[1,a+1/3]) # Sin cond. iniciales
```

$$\frac{1}{3}t^2 + a$$

Para resolver el problema original de forma apropiada podemos utilizar el método de la *transformada de Laplace* utilizado de forma manual, siguiendo los pasos dados en el código de la [Sección A.1.11, página 279](#). En este caso es necesario hacer uso de la librería⁸⁷ *SymPy*, importándola en nuestro código a través de la sentencia `from sympy import *`, como se muestra a continuación.

⁸⁵Ver la [Sección 4.5.2, página 116](#).

⁸⁶Ver el [Ejercicio 4.16, página 116](#).

⁸⁷<https://www.sympy.org/en/index.html>.


```
# Ejer 4.16 por Laplace Manual -> Resultado correcto!
from sympy import * # Es necesario importar sympy
var('a s t _C0')
y=function('y')(t)
Y=function('Y')(s)
eq = t*diff(y,t)+y-a-t^2
L=laplace(eq,t,s); ascii(L)
solve(L,diff(laplace(y,t,s),s),s)
s1 = solve(L,diff(laplace(y,t,s),s),s)
s1[0][0]
s2=desolve(diff(Y,s)-s1[0][0],Y,ivar=s,algorithm='fricas')
s2=s2.subs(_C0=0); s2
inverse_laplace(s2.expand(),s,t)
```

$$\frac{1}{3}t^2 + a$$

A.1.12. Resolución SEDO con Transformada de Laplace

Como hemos visto en la [Sección A.1.8, página 272](#), los SEDO se pueden resolver en *SageMath* con el comando `desolve_system`. Este comando utiliza internamente transformadas de Laplace. Veamos la resolución de un ejemplo sencillo con coeficientes constantes (ejer 4.18)

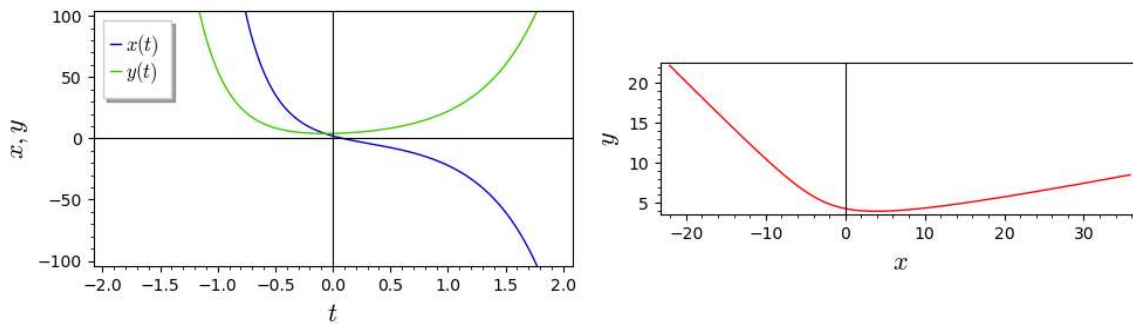
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 3\frac{dy}{dt} = -6x - 2y & ; \quad x(0) = 2 \\ \frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} = -5x - 3y & ; \quad y(0) = 4 \end{cases}$$

```
# SEDO Ejer 4.18
reset()
var('t')
x=function('x')(t)
y=function('y')(t)
ec1 = diff(x,t)+3*diff(y,t) == -6*x-2*y
ec2 = diff(x,t)+2*diff(y,t) == -5*x-3*y
sol = desolve_system([ec1, ec2], [x,y],ics=[0,2,4]) ; sol
```

$$\left[x(t) = -3e^{(2t)} + 5e^{(-4t)}, y(t) = 3e^{(2t)} + e^{(-4t)} \right]$$

Representamos gráficamente las soluciones.

```
P1 = plot([sol[0].rhs(),sol[1].rhs()],-2,2,ymin=-100,ymax=100, \
    legend_label=['$x(t)$','$y(t)$'],axes_labels=['$t$','$x,y$'])
P1.set_legend_options(font_size=12)
P2 = parametric_plot((sol[0].rhs(),sol[1].rhs()),(t,-0.5,1), \
    axes_labels=['$x$','$y$'],color='red')
graphics_array([P1, P2]).show(frame=True,figsize=[10,3])
```



A.1.13. Ecuaciones Integrales e Integrodiferenciales

Las **ecuaciones integrales e integrodiferenciales**⁸⁸ son *ecuaciones funcionales* que incluyen integrales de la función incógnita. Este tipo de ecuaciones pueden ser resueltas aplicando el método de la *transformada de Laplace*⁸⁹, siguiendo los pasos que hemos visto en diversos casos anteriores.

Vamos a usar *SageMath* para resolver algunos de los ejercicios sobre ecuaciones de este tipo que se han planteado en este curso.

Empezamos con la ecuación integral resuelta en el [Ejercicio 4.19, página 118](#).

$$f(t) + \int_0^t f(r) dr = 2$$

```
var('t r s')
f=function('f')(t)
ec = f+integral(f(t=r),r,0,t) == 2
L = laplace(ec,t,s)
LL = solve(L,laplace(f,t,s))
sol = inverse_laplace(LL[0].rhs(), s, t) ; sol
```

$$2e^{(-t)}$$

Veamos ahora la resolución de un PVI definido a través de una ecuación integrodiferencial resuelta en el [Ejercicio 4.20, página 119](#).

$$\begin{cases} y' + 6y + 9 \int_0^t y(r) dr = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

```
var('t r s')
y=function('y')(t)
ec = diff(y,t)+6*y+9*integral(y(t=r),r,0,t) == 1 ; ec
L = laplace(ec,t,s) ; L
L = L.subs(y(t=0)==0) # sustituimos la cond. ini
LL = solve(L,laplace(y,t,s)) ; LL
sol = inverse_laplace(LL[0].rhs(), s, t) ; sol
```

$$te^{(-3t)}$$

El siguiente problema corresponde con el caso aplicado dado en el [Ejercicio 4.21, página 119](#).

$$\begin{cases} 0.1 \frac{di}{dt} + 2i(t) + \frac{1}{0.1} \int_0^t i(r) dr = 4 \sin(5t) \\ i(0) = 0 \end{cases}$$

⁸⁸Ver la [Sección 1.1.2, página 4](#).

⁸⁹Ver la [Sección 4.5, página 115](#).

```

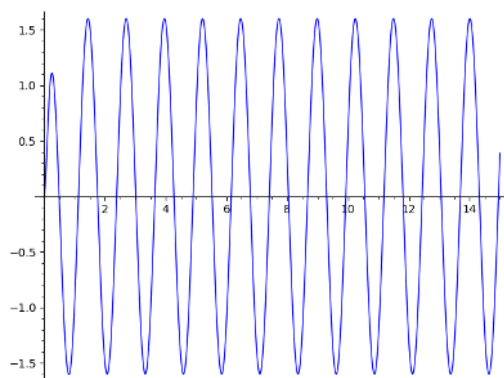
var('t r s')
y=function('y')(t) # cambiamos el nombre i por y (da problemas complejos)
ec = 0.1*diff(y,t)+2*y+1/0.1*integral(y(t=r),r,0,t) == 4*sin(5*t) ; ec
L = laplace(ec,t,s) ; L
L = L.subs(y(t=0)==0) ; L # sustituimos la cond. ini
ss = solve(L,laplace(y,t,s))
sol = inverse_laplace(ss[0].rhs(),s,t) ; sol # sol. particular

```

$$-16te^{(-10t)} + \frac{24}{25}\cos(5t) - \frac{24}{25}e^{(-10t)} + \frac{32}{25}\sin(5t)$$

Representamos gráficamente la solución obtenida para comprobar el transitorio inicial y el comportamiento estacionario oscilatorio del que se comenta en el ejercicio.

```
plot(sol,0,15)
```



A.1.14. Convolución

Recordamos la definición de **convolución**⁹⁰ de dos funciones $f(t)$ y $g(t)$.

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

y el **Teorema de la convolución**⁹¹:

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s)$$

Empecemos calculando la convolución de dos funciones dada en el **Ejercicio 4.22, página 121**.

$$f * g = (t) * (t^2) = \int_0^t \tau(t - \tau)^2 d\tau$$

```

var('t r')
f=t ; g=t^2;
integral(f(t=r)*g(t=t-r),r,0,t)

```

$$\frac{1}{12}t^4$$

Vamos ahora a calcular la transformada inversa de Laplace de la siguiente función en la variable de la frecuencia s , que es resuelta en el **Ejercicio 4.23, página 122** aplicando el teorema de la convolución.

$$F(s) = \frac{3}{(s+2)(s^2+9)}$$

⁹⁰Ver la **Definición 4.8, página 120**.

⁹¹Ver el **Teorema 4.10, página 122**.

```
var('t s')
inverse_laplace(3/((s+2)*(s^2+9)),s,t)
```

$$-\frac{3}{13} \cos(3t) + \frac{3}{13} e^{(-2t)} + \frac{2}{13} \sin(3t)$$

Calculamos la transformada de Laplace de la siguiente función definida a través de una convolución, resuelta en el [Ejercicio 4.24, página 123](#).

$$f(t) = \int_0^t e^r \sin(t-r) dr$$

```
var('t s r')
assume(t>0)
f=integral(e^r*sin(t-r),r,0,t)
L=laplace(f,t,s) ; L
L.factor() # factorizamos el resultado
```

$$\frac{1}{(s^2+1)(s-1)}$$

Cálculo de la transformada inversa de la siguiente función resuelta en el [Ejercicio 4.25, página 124](#).

$$F(s) = \frac{1}{(s^2+a^2)^2}$$

```
# Ejer 4.25
var('t s a')
assume(s>0)
assume(a>0)
F=1/(s^2+a^2)^2
f= inverse_laplace(F,s,t)
f.simplify_full()
```

$$-\frac{at \cos(at) - \sin(at)}{2a^3}$$

Resolución de la siguiente PVI tratada en el [Ejercicio 4.26, página 124](#).

$$\begin{cases} y'' + a^2 y = f(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

```
reset()
var('t a')
assume(a>0)
y=function('y')(t)
f=function('f')(t)
ec = diff(y,t,2)+a^2*y==f
sol = desolve(ec,y,ivar=t) ; show(sol)
```

$$K_2 \cos(at) + K_1 \sin(at) - \frac{\cos(at) \int f(t) \sin(at) dt - \int \cos(at) f(t) dt \sin(at)}{a}$$

Notar que esta expresión es ambigua ya que los límites de las integrales tienen que ser $[0,t]$, por tanto la variable de estas integrales debe ser una variable distinta de t . Redefinimos la solución general.

```
var('r _K1 _K2')
assume(r>0)
assume(t>0)
```

```
sol=_K2*cos(a*t)+_K1*sin(a*t)- \
(cos(a*t)*integral(f(t=r)*sin(a*r),r,0,t)-sin(a*t)*integral(f(t=r)*cos(a*r),r,0,t))/a
show(sol) # Sol. general
```

$$K_2 \cos(at) + K_1 \sin(at) - \frac{\cos(at) \int_0^t f(r) \sin(ar) dr - \int_0^t \cos(ar) f(r) dr \sin(at)}{a}$$

La determinación de la solución particular se hace obteniendo los valores de las constantes K_1 y K_2 a través de las condiciones iniciales.

```
show(sol(t=0)==0)
show(diff(sol,t)(t=0)==0)
# t=0 -> Implica _K1=0
s=sol(_K1=0,_K2=0) ; s # sol particular
```

$$K_2 = 0$$

$$K_1 a = 0$$

$$-\frac{\cos(at) \int_0^t f(r) \sin(ar) dr - \int_0^t \cos(ar) f(r) dr \sin(at)}{a}$$

Por tanto ambas constantes son nulas en la solución particular. Notar que esta solución es aparentemente distinta de la obtenida en el ejercicio 4.26. Simplificamos aquella solución se tiene:

```
# Comprobamos si esta sol. corresponde con la convolución del resultado
s2=1/a*integral(f(t=r)*sin(a*(t-r)),r,0,t); show(s2)
s2=s2.simplify_full(); show(s2)
```

$$\frac{\int_0^t f(r) \sin(ar - at) dr}{a} - \frac{\int_0^t -(\cos(at) \sin(ar) - \cos(ar) \sin(at)) f(r) dr}{a}$$

Analizando este resultado vemos que efectivamente ambas soluciones coinciden, aunque comprobamos que *SageMath* no es capaz de determinar esta semejanza.

```
bool(s==s2)
```

False

Lo cual determina las limitaciones en determinados casos de este programa (y en general de todos los programas de tipo *CAS*) y que obliga a analizar y comprobar siempre los resultados obtenidos.

Vamos a resolver ahora el [Ejercicio 4.27, página 125](#) formado por una EDO de tipo *Volterra*⁹².

$$\begin{cases} y' = \cos t + \int_0^t y(r) \cos(t-r) dr \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

```
# Ejer 4.27
reset()
var('t s r')
assume(t>0)
assume(s>0)
y=function('y')(t)
ec = diff(y,t) == cos(t) + integral(y(t=r)*cos(t-r),r,0,t)
# desolve(ec,y,ivar=t,algorithm='fricas') #-> No funciona directamente
```

⁹²Ver la [Definición 4.9, página 125](#).

```
L = laplace(ec,t,s)
ss = solve(L,laplace(y,t,s))
sg = inverse_laplace(ss[0].rhs(),s,t) # sol. general
sg.subs(y(t=0)==1)
```

$$\frac{1}{2}t^2 + t + 1$$

Resultado que coincide con el obtenido en este ejercicio.

Resolvemos otro caso de una ecuación integrodiferencial dado en el [Ejercicio 4.28, página 126](#).

$$\begin{cases} y'(t) + y(t) - \int_0^t y(r) \sin(t-r) dr = -\sin t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

```
reset()
var('t s r')
assume(t>0)
assume(s>0)
#x0=0 ; y0=1
y=function('y')(t)
ec = diff(y,t) + y - integral(y(t=r)*sin(t-r),r,0,t) == -sin(t) ; ec
L = laplace(ec,t,s) ; L
ss = solve(L,laplace(y,t,s))
sg = inverse_laplace(ss[0].rhs(),s,t) # sol. general
sg.subs(y(t=0)==1) # sol. particular
```

$$-\frac{1}{3} \left(\sqrt{3} \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{3}t \right) - 3 \cos \left(\frac{1}{2} \sqrt{3}t \right) \right) e^{(-\frac{1}{2}t)}$$

En este caso comprobamos que esta solución coincide con la obtenida en el ejercicio.

Como hemos visto en los diversos ejercicios resueltos hasta aquí el procedimiento de la *transformada de Laplace*⁹³ para la resolución de problemas diferenciales es el mismo en todos los casos, aunque las operaciones específicas a realizar dependen de las características particulares de cada problema. Basándonos en esto vamos a definir un procedimiento o función `metLaplace()` en *SageMath* que automatice el proceso de resolución de un determinado problema diferencial.

Vamos a aplicar este procedimiento a la resolución del [Ejercicio 4.29, página 126](#).

$$\begin{cases} f(x) - 1 = \int_0^x f(r) (x-r) dr \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

```
reset()
# Función para resolver prob. por Laplace
def metlaplace(y,x,ec,x0,y0):
    var('s r')
    assume(s>0)
    assume(x>0)
    #y(t=0)==x0
    L = laplace(ec,x,s)
    ss = solve(L,laplace(y,x,s))
    sg = inverse_laplace(ss[0].rhs(),s,x) # sol. general
    sg.subs(y(x=x0)==y0) # sol. particular
    return(sg)
```

⁹³Ver la [Sección 4.5, página 115](#).

```

var('x r')
assume(x>0)
f=function('f')(x)
ec = f - 1 == integral(f(x=r)*(x-r),r,0,x) # Ec. Integrodiferencial
x0=0 ; y0=1                                # Cond. iniciales

sol = metlaplace(f,x,ec,x0,y0) ; sol        # Sol. particular

```

$$\frac{1}{2}e^{(-x)} + \frac{1}{2}e^x$$

Comprobamos que efectivamente esta solución coincide con la obtenida en el ejercicio.

A.1.15. Función Delta de Dirac

Recordamos la definición de la *función delta de Dirac*⁹⁴ y algunas de sus propiedades.

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & t = t_0 \\ 0 & t \neq t_0 \end{cases} ; \quad \delta(t - a) = \frac{d}{dt} \mathcal{U}(t - a) ; \quad \begin{cases} \mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-st_0} & ; t_0 > 0 \\ \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 & ; t_0 = 0 \end{cases}$$

En *SageMath* la *función delta de Dirac* se define a través de:

`dirac_delta(x)`

Vamos por último a resolver un problema diferencial donde aparece la función delta de Dirac, dado por el [Ejercicio 4.31, página 131](#) usando el método de la transformada de Laplace.

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 3y = 5\delta(t - 2) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

```

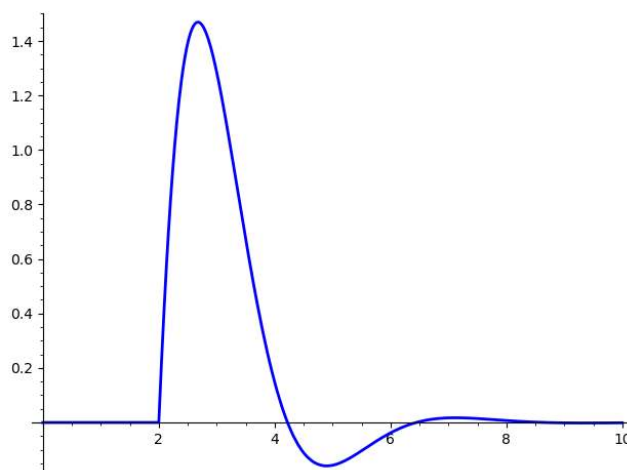
var('t s r')
assume(t>0)
assume(s>0)
t0=0 ; y0=0 ; dy0=0 # Cond. iniciales
y=function('y')(t)
ec = diff(y,t,2) + 2*diff(y,t) + 3*y == 5*dirac_delta(t-2) # EDO
# Aplicamos el Método de Laplace
L = laplace(ec,t,s) ; L
L = L.subs(y(t=t0)==y0,diff(y,t)(t=t0)==dy0) # Sust. cond.
ss = solve(L,laplace(y,t,s))
ss = ss[0].rhs().expand().simplify_full() ; # Fun. transformada
print("Y(s) = "); sys.stdout.flush() ; show(ss)
s = inverse_laplace(ss,s,t,algorithm='sympy') # sol. particular
print("y(t) = "); sys.stdout.flush() ; show(s)
plot(s,0,10,thickness=2)

```

$$Y(s) = \frac{5e^{(-2s)}}{s^2 + 2s + 3}$$

$$y(t) = \frac{5}{2}\sqrt{2}e^{(-t+2)}H(t-2)\sin\left(\sqrt{2}(t-2)\right)$$

⁹⁴Ver la [Sección 4.6.1, página 129](#).



A.1.16. Series de Fourier

Recordamos la definición de la **serie de Fourier**⁹⁵ de una función $f(x)$ definida en el intervalo $(-L, L)$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

donde los denominados **coeficientes de Fourier** a y b vienen dados por:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad ; \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad ; \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

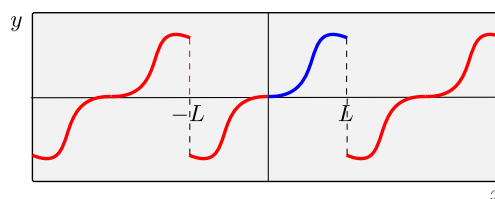
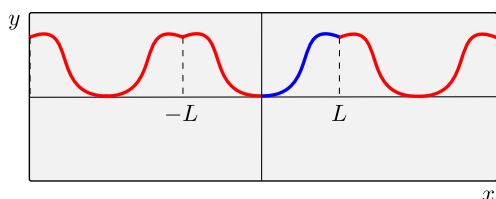
Consecuencia del resultado de la serie de Fourier para funciones pares e impares⁹⁶, para funciones $f(x)$ definidas en el intervalo $[0, L]$ se define:

- **Serie de Fourier de cosenos de $f(x)$ en el intervalo $[0, L]$**

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \quad ; \quad a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx \quad ; \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

- **Serie de Fourier de senos de $f(x)$ en el intervalo $[0, L]$**

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad ; \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$



⁹⁵Ver la **Definición 5.10**, página 140.

⁹⁶Ver la **Sección 5.4.4**, página 144.

Función Definida a Trozos

La serie de Fourier de una función en *SageMath* se puede calcular fácilmente si previamente se define la función como una *función definida a trozos* mediante el siguiente comando:

```
piecewise([ rama1 , rama2, ... ])
```

donde cada una de las *ramas* o *trozos* se pueden definir entre paréntesis () o corchetes cuadrados [] indistintamente y en ellos debe aparecer un intervalo, cerrado [] o abierto (), y la función que define ese trozo.

- $([x1,x2],f)$: define una rama con una función 'f' en un intervalo cerrado $[x1,x2]$
- $[[x1,x2],f)$: define una rama con una función 'f' en un intervalo cerrado $[x1,x2]$
- $((x1,x2),f)$: define una rama con una función 'f' en un intervalo abierto $(x1,x2)$
- $[(x1,x2),f]$: define una rama con una función 'f' en un intervalo abierto $(x1,x2)$

No se pueden usar intervalos mixtos abierto-cerrado o cerrado-abierto, además no se pueden solapar puntos o zonas. Veamos algunos ejemplos:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & x \in [-1,-2] \\ 1+x & x \in (1,2) \end{cases} : f = \text{piecewise}([(-1,-2],1-x), [[1,2],1+x]])$$

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & x \in [-1,2] \\ \log(x) & x \in (2,3) \\ \frac{x+1}{x} & x \in [3,4] \end{cases} : g = \text{piecewise}([[-1,2],x+1], [(2,3),\log(x)], [[3,4],(x+1)/x])$$

Entonces, dada una *función definida a trozos* en un intervalo cualquiera, los primeros n términos de su serie de Fourier puede determinarse mediante el comando:

```
fourier_series_partial_sum(n,[L])
```

donde L (optativo) es la mitad del *periodo*⁹⁷ $[-L,L]$. Si no se especifica, el semi-periodo corresponde con el dominio completo que define la función. Si se especifica, el dominio debe ser un múltiplo del semi-periodo dado. Cada uno de los *coeficientes* de la *serie de Fourier* pueden ser determinados por los comandos:

- `f.fourier_series_cosine_coefficient(n)` : coeficiente a_n
- `f.fourier_series_sine_coefficient(n)` : coeficiente b_n

Por ejemplo, dada la siguiente función:

$$f(x) = 3 - 2x \quad x \in [-\pi, \pi]$$

Definimos la función en *SageMath* y calculamos los primeros términos de su serie de Fourier, dada por:

$$sf(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi x}{L} + b_1 \sin \frac{\pi x}{L} + a_2 \cos \frac{2\pi x}{L} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{L} + \dots$$

```
fun=3-2*x
f = piecewise([(-pi,pi),fun])
sf = f.fourier_series_partial_sum(2) # num. términos = 2
sf
```

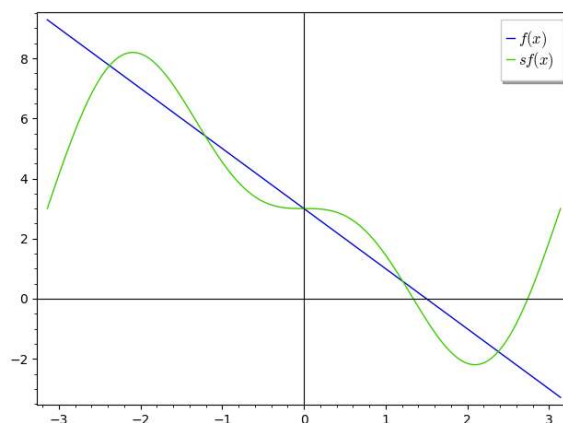
$$2 \sin(2x) - 4 \sin(x) + 3$$

⁹⁷El periodo es en este caso $T = 2L$. Ver la [Sección 5.2, página 135](#).

```
# Calculamos los coeficientes por separado
a0 = f.fourier_series_cosine_coefficient(0)
a1 = f.fourier_series_cosine_coefficient(1)
a2 = f.fourier_series_cosine_coefficient(2)
b1 = f.fourier_series_sine_coefficient(1)
b2 = f.fourier_series_sine_coefficient(2)
print('a0=',a0,' a1=',a1,' b1=',b1,' a2=',a2,' b2=',b2)
```

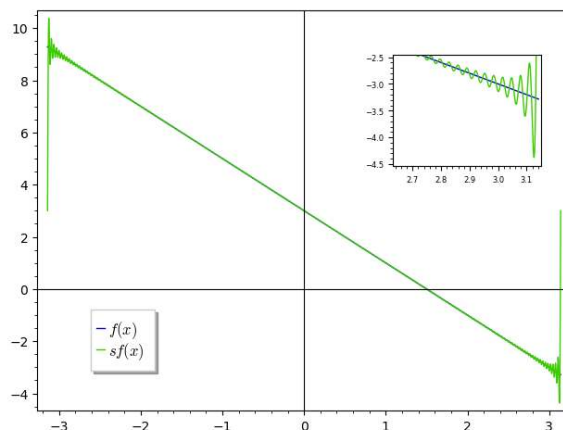
a0= 6 a1= 0 b1= -4 a2= 0 b2= 2

```
# Representación gráfica de la función y su serie de Fourier calculada
P = plot([f,sf],-pi,pi,legend_label=['$f(x)$', '$sf(x)$'],frame=true)
P.set_legend_options(font_size=12) ; P
```



Calculamos los primeros 200 términos de la serie de Fourier y representamos gráficamente, observando con más detenimiento el fenómeno del *efecto Gibbs*⁹⁸ en la discontinuidad de los extremos.

```
sf200 = f.fourier_series_partial_sum(200,pi)
P = plot([f,sf200],-pi,pi,legend_label=['$f(x)$', '$sf(x)$'],frame=true)
P.set_legend_options(font_size=12, \
bbox_to_anchor=(0.1, 0.1, 0.12, .1), loc=3, mode="expand", borderaxespad=0.)
P2=plot([f,sf200],pi-0.5,pi,ymin=-4.5,ymax=-2.5,frame=true)
P.inset(P2, pos=(0.65, 0.6, 0.25, 0.25))
```



⁹⁸Ver la Sección 5.4.2, página 143.

Veamos otro ejemplo:

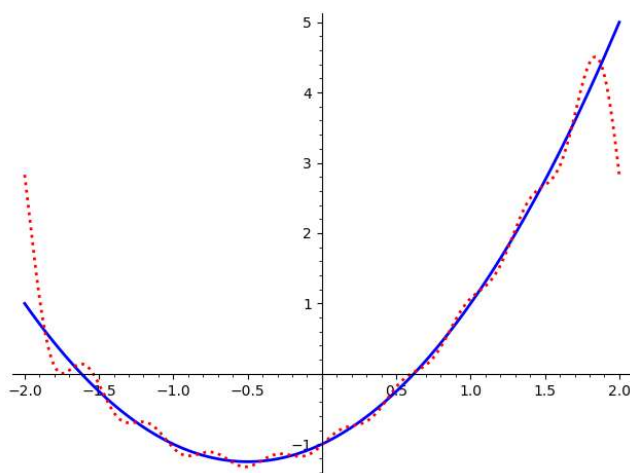
$$f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & x \in [-3, 0] \\ x & x \in (0, 3] \end{cases}$$

Calculamos dos series de Fourier una con diez términos y otra con 100, representando los resultados. Podemos también calcular la serie de Fourier de forma manual, determinando los coeficientes a_k y b_k

```
reset()
f=x^2+x-1                                # f(x)
a0(L)=1/L*integrate(f,x,-L,L);           # Coef a0
a(n,L)=1/L*integral(f*cos(n*pi*x/L),x,-L,L) # Coef an
b(n,L)=1/L*integral(f*sin(n*pi*x/L),x,-L,L) # Coef bn

# Serie de Fourier de f con n términos y semi-período L
def sf(n,L):
    return a0(L)/2+sum(a(k,L)*cos(k*pi*x/L)+b(k,L)*sin(k*pi*x/L) for k in range(1,n))
```

```
n = 10 # núm. términos
L = 2  # semi-periodo
plot(f,-L,L,color='blue',thickness=2)+plot(sf(n,L),-L,L,color='red',thickness=2,linestyle=':↪')
```



De esta forma podemos también calcular la *serie de senos* y la *serie de cosenos* de una función definida en un intervalo $[0, L]$.

```
reset()
var('L')
assume(L>0)
f=x^2+x-1                                # f(x)
a0(L)=1/L*integrate(f,x,0,L);            # Coef a0
a(n,L)=2/L*integral(f*cos(n*pi*x/L),x,0,L) # Coef an
b(n,L)=2/L*integral(f*sin(n*pi*x/L),x,0,L) # Coef bn

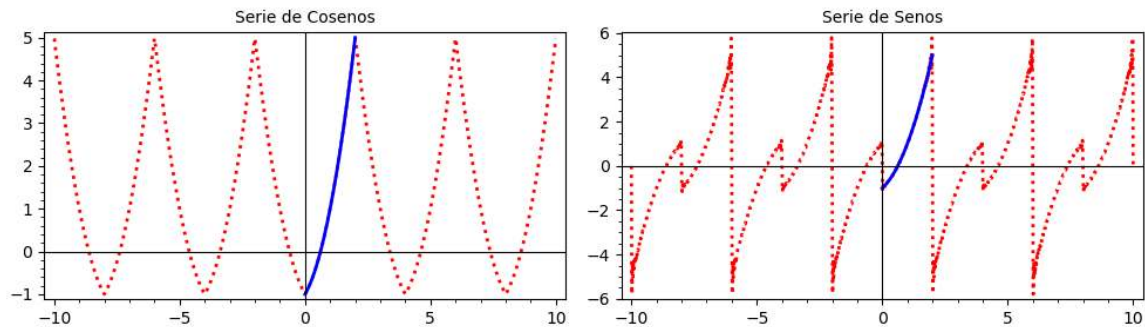
# Serie de Fourier de cosenos de f con n términos y semi-período L
def sfc(n,L):
    return a0(L)+sum(a(k,L)*cos(k*pi*x/L) for k in range(1,n))

# Serie de Fourier de senos de f con n términos y semi-período L
def sfs(n,L):
    return sum(b(k,L)*sin(k*pi*x/L) for k in range(1,n))
```

```

n = 100 # núm. términos
L = 2   # semi-periodo
P1 = plot(sfc(n,L),-5*L,5*L,color='red',thickness=2,linestyle=':')+\
    plot(f,0,L,color='blue',thickness=2,title=r'Serie de Cosenos')
P2 = plot(sfs(n,L),-5*L,5*L,color='red',thickness=2,linestyle=':')+\
    plot(f,0,L,color='blue',thickness=2,title=r'Serie de Senos')
graphics_array([P1, P2]).show(frame=True,figsize=[10,3])

```



Notar que la función `fourier_series_partial_sum` de una función definida en un intervalo $[0, L]$ no corresponde ni con la serie de cosenos (par) ni con la serie de senos (impar), sino que es la serie de Fourier de la función:

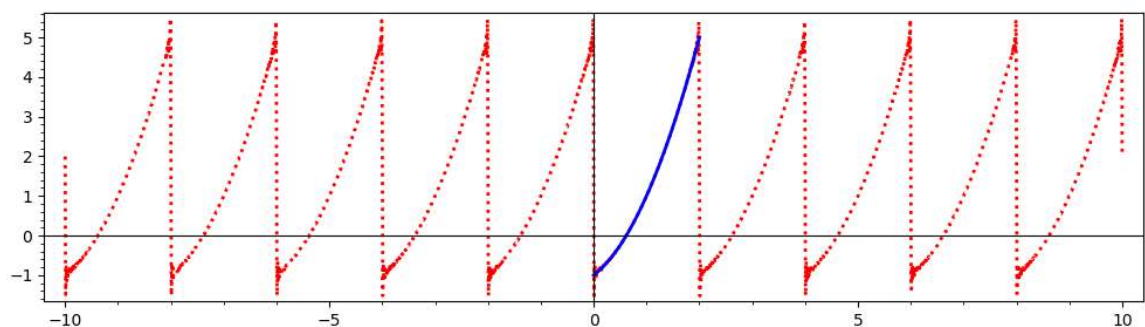
$$\begin{cases} f(x+L) & x \in [-L, 0) \\ f(x) & x \in [0, L] \end{cases}$$

donde $f(x+L)$ corresponde con $f(x)$ desplazada a la izquierda L unidades.

```

ff = piecewise([ [0,2],f ] )
sf=ff.fourier_series_partial_sum(100)
P = plot(sf,-5*L,5*L,color='red',thickness=2,linestyle=':')+\
    plot(f,0,L,color='blue',thickness=2)
P.show(frame=True,figsize=[10,3])

```



A.1.17. Problemas de Sturm-Liouville

Recordamos que un *problema regular de Sturm-Liouville*⁹⁹ viene definido por el siguiente PVF:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}[p(x)y'] + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0 \\ A_1 y(a) + B_1 y'(a) = 0 \\ A_2 y(b) + B_2 y'(b) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

donde:

- Las funciones $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son reales y continuas en el intervalo $[a, b]$, donde $p(x)$ y $r(x)$ no cambian de signo en ese intervalo y a la función $r(x)$ se le denomina *función peso*.
- Las constantes A_1 y B_1 no pueden ser cero a la vez, al igual que A_2 y B_2 .

Para aquellos valores $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales el problema anterior tiene solución no nula $y(x)$, se denominan respectivamente **autovalor** o **valor propio** y **autofunción** o **función propia** asociada del problema¹⁰⁰.

En este tipo de problemas *SageMath* puede ayudar a simplificar las operaciones involucradas en su análisis, pero debido a su complejidad no hay un camino simple para su resolución.

Problema 1

Vamos a ver a modo de ejemplo cómo se analizaría el problema de Sturm-Liouville dado en el [Sección 6.2.1, página 154](#).

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u(0) = 0, u(L) = 0 \end{cases} \quad u(x) \in [0, L] \quad L > 0$$

Definimos inicialmente la EDO del problema¹⁰¹.

```
reset()
u=function("u")(x)
var("lambda_ L s mu_")
assume(L>0)
assume(mu_>0)
edo = diff(u,x,2)+lambda_*u==0 ; show(edo)
```

$$\lambda u(x) + \frac{\partial^2}{(\partial x)^2} u(x) = 0$$

Una forma sencilla de resolverla es a través de la *transformada de Laplace*, así aplicamos dicha transformada a la ecuación y despejamos.

```
EL = laplace(edo.lhs(),x,s); show(EL)
S = solve(EL,laplace(u,x,s)); S      # Transf. de Laplace
```

$$s^2 \mathcal{L}(u(x), x, s) + \lambda \mathcal{L}(u(x), x, s) - su(0) - D_0(u)(0)$$

$$\left[\mathcal{L}(u(x), x, s) = \frac{su(0) + D_0(u)(0)}{s^2 + \lambda} \right]$$

Notar que no hemos incluido las condiciones frontera ya que de esa forma solo se obtendría la solución trivial. Lo que haremos es dejarla en función de los valores de $u(0)$ y $u'(0)$ que posteriormente lo transformaremos en *parámetros* para obtener la solución general. Estudiamos todos los posible casos en función del valor de λ .

⁹⁹Ver la [Definición 6.2, página 160](#).

¹⁰⁰Ver la [Definición 6.1, página 153](#).

¹⁰¹El signo subrayado '_' después del nombre de la variable `lambda` sirve para su visualización apropiada en LaTeX.

- Caso: $\lambda = 0$

Este valor es fundamental ya que cambia radicalmente la naturaleza de la EDO. Sustituimos el valor $\lambda = 0$ en la EDO y resolvemos obteniendo la solución general de la ecuación, que depende de las condiciones iniciales del problema.

```
S0 = S[0].rhs().subs(lambda_=0) # lambda = 0
SG0 = inverse_laplace(S0,s,x).demoivre(force=true).simplify_full() ; show(SG0)
```

$$xD_0(u)(0) + u(0)$$

Aquí se ha utilizado el comando `.demoivre(force=true)` para forzar que el resultado se muestre en forma polinómica/trigonométrica en lugar de exponencial.

Ahora vamos a poner la solución general en función de $u(0)$ y $u'(0)$, que en nuestro caso dependerán de los valores de $u(0)$ y $u(L)$, para ello introducimos dos parámetros C_1 y C_2 .

```
var('C1 C2')
SG0.subs(u(x=0)==C1,diff(u,x)(x=0)==C2)
SG0 = SG0.subs(u(x=0)==C1,diff(u,x)(x=0)==C2) ; show(SG0) # Sol. General
```

$$C_2x + C_1$$

Imponemos las condiciones frontera y resolvemos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas C_1 y C_2 .

```
solve([SG0.subs(x=0)==0,SG0(x=L)==0],[C1,C2])
```

$$[[C_1 = 0, C_2 = 0]]$$

Por tanto se obtiene la solución trivial y $\lambda = 0$ no es autovalor del problema.

- Caso: $\lambda < 0$ Hacemos el cambio $\lambda = -\mu^2$ para $\mu > 0$.

```
assume(mu_>0)
SS = S[0].rhs().subs(lambda_=-mu_^2) # lambda < 0
SG = inverse_laplace(SS,s,x).demoivre(force=true).simplify_full() ; show(SG)
```

$$\frac{\mu \cosh(\mu x) u(0) + \sinh(\mu x) D_0(u)(0)}{\mu}$$

Aquí se ha utilizado el comando `.demoivre(force=true)` para forzar que el resultado se muestre en forma trigonométrica (hiperbólica) en lugar de exponencial.

Ponemos la solución general en función de $u(0)$ y $u'(0)$, que en nuestro caso dependerán de los valores de $u(0)$ y $u(L)$, a través de los parámetros C_1 y C_2 .

```
SG.subs(u(x=0)==C1,diff(u,x)(x=0)==C2)
SG = SG.subs(u(x=0)==C1,diff(u,x)(x=0)==C2) ; show(SG) # Sol. General
```

$$\frac{C_1\mu \cosh(\mu x) + C_2 \sinh(\mu x)}{\mu}$$

Sustituimos la primera condición frontera $u(0) = 0$ y determinamos la primera constante C_1 , substituyendo su valor en la solución general.

```
S1 = solve(SG(x=0)==0,C1) ; show(S1)
S2 = SG(C1=S1[0].rhs()); show(S2)
```

$$[C_1 = 0]$$

$$\frac{C_2 \sinh(\mu x)}{\mu}$$

Estudiamos ahora la segunda condición frontera $u(L) = 0$.

```
S2(x=L)
```

$$\frac{C_2 \sinh(L\mu)}{\mu}$$

Como $L, \mu \neq 0$ entonces $\sinh(L\mu) \neq 0$ y por tanto $C_2 = 0$, con los que se obtiene la solución trivial y por tanto $\lambda < 0$ no es autovalor del problema.

- Caso: $\boxed{\lambda \geq 0}$ Hacemos el cambio $\lambda = \mu^2$ para $\mu > 0$.

Obtenemos la solución general introduciendo las constantes C_1 y C_2 .

```
SS = S[0].rhs().subs(lambda_=mu^2) # lambda > 0
SG = inverse_laplace(SS,s,x).demoivre(force=true).simplify_full()
SG = SG.subs(u(x=0)==C1,diff(u,x)(x=0)==C2) ; show(SG)
```

$$\frac{C_1 \mu \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x)}{\mu}$$

Notar que en este caso, a diferencia del caso anterior la solución general depende de los valores trigonométricos $\cos(\mu x)$ y $\sin(\mu x)$, en lugar de $\cosh(\mu x)$ y $\sinh(\mu x)$.

Al igual que antes, teniendo en cuenta la primera condición frontera $u(0) = 0$ se tiene.

```
S1 = solve(SG(x=0)==0,C1) ; show(S1)
S2 = SG(C1=S1[0].rhs()); show(S2)
```

$$\frac{[C_1 = 0] C_2 \sin(\mu x)}{\mu}$$

Estudiamos ahora los posibles valores para $x = L$ (segunda condición frontera).

```
SS2 = S2.subs(x=L); show(SS2)
```

$$\frac{C_2 \sin(L\mu)}{\mu}$$

Este valor debe ser 0 para que se cumpla la segunda condición frontera, pero para que la solución general no sea la trivial, se debe cumplir $C_2 \neq 0$ y por tanto $\sin(L\mu) = 0$. Buscamos los posibles valores de μ para que se cumpla esto.

```
sol = solve(sin(L*mu_)==0,mu_,to_poly_solve='force');
sol = sol[0]; show(sol)
```

$$\mu = \frac{\pi z_{1853}}{L}$$

Donde z_{xxx} es un valor entero que llamaremos k . En este caso la sentencia `to_poly_solve='force'` sirve para obtener soluciones trigonométricas que de otra forma no son mostradas.

```
var('k z1883')
assume(k,'integer')
assume(k>0)
sol = sol.subs(z1883==k); show(sol)
```

$$\mu = \frac{\pi k}{L}$$

Y como en este caso $\lambda = \mu^2$ se tiene:

```
solve(Sx.subs(mu_=sqrt(lambda_)),lambda_)
```

$$\left[\lambda = \frac{\pi^2 k^2}{L^2} \right]$$

```
SOL = u==S2(mu=sol.rhs()); SOL # sol. final
```

$$u(x) = \frac{C_2 L \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right)}{\pi k}$$

Donde $C_2 L / (\pi k) = C$ constante. Por tanto finalmente los autovalores y autovectores de este problema son:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 k^2}{L^2} \quad ; \quad u_n(x) = C \operatorname{sen} \frac{k \pi x}{L} \quad ; \quad k = 1, 2, \dots$$

Problema 2

Veamos ahora el [Ejercicio 6.1, página 161](#), obteniendo los autovalores y autofunciones del siguiente problema.

$$\begin{cases} y'' + 2y' + (1 + \lambda)y = 0 \\ y(0) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

Aplicamos el *método de la transformada de Laplace* para resolver la EDO del problema.

```
reset()
var("lambda_ mu_ L s C1 C2")
y=function("y")(x)
assume(L>0)
assume(mu_>0)
edo = diff(y,x,2)+2*diff(y,x)+(1+lambda_)*y==0 ; show(edo) # EDO
EL = laplace(edo.lhs(),x,s); show(EL) # Transf. Laplace
S = solve(EL,laplace(y,x,s)); S # Despejamos Y(s)
```

$$(\lambda + 1)y(x) + 2 \frac{\partial}{\partial x} y(x) + \frac{\partial^2}{(\partial x)^2} y(x) = 0$$

$$s^2 \mathcal{L}(y(x), x, s) + (\lambda + 1) \mathcal{L}(y(x), x, s) + 2s \mathcal{L}(y(x), x, s) - sy(0) - 2y(0) - D_0(y)(0)$$

$$\left[\mathcal{L}(y(x), x, s) = \frac{sy(0) + 2y(0) + D_0(y)(0)}{s^2 + \lambda + 2s + 1} \right]$$

Estudiamos ahora todos los posible casos en función del valor de λ . Estudiamos primero el valor $\lambda = -1$ para el cual hay un cambio radical de la EDO.

- $\lambda = -1$

```
S0 = S[0].rhs().subs(lambda_=-1) # sustituimos lambda = -1
SG0 = inverse_laplace(S0,s,x); show(SG0) # Transformada inversa
SG0 = SG0.subs(y(x=0)==C1,diff(y,x)(x=0)==C2) ; show(SG0) # C1=y(0), C2=y'(0)
solve([SG0.subs(x=0)==0,diff(SG0,x)(x=1)==0],[C1,C2]) # Cond. frontera y resolvemos
```

$$-\frac{1}{2} e^{(-2x)} D_0(y)(0) + y(0) + \frac{1}{2} D_0(y)(0)$$

$$-\frac{1}{2} C_2 e^{(-2x)} + C_1 + \frac{1}{2} C_2$$

$$[[C_1 = 0, C_2 = 0]]$$

Por tanto $\lambda = -1$ no es un autovalor del problema.

- $\lambda = 0$


```

S0 = S[0].rhs().subs(lambda_=0) # Sustituimos lambda = 0
SG0 = inverse_laplace(S0,s,x); show(SG0) # Transformada inversa
SG0 = SG0.subs(y(x=0)==C1,diff(y,x)(x=0)==C2) ; show(SG0) # C1=y(0), C2=y'(0)
solve([SG0.subs(x=0)==0,diff(SG0,x)(x=1)==0],[C1,C2]) # Cond. frontera y resolvemos

```

$$xe^{(-x)}y(0) + xe^{(-x)}D_0(y)(0) + e^{(-x)}y(0)$$

$$C_1xe^{(-x)} + C_2xe^{(-x)} + C_1e^{(-x)}$$

$$[[C_1 = 0, C_2 = r_1]]$$

En este caso al obtenerse soluciones no nulas (r_1), el valor $\lambda = 0$ sí es un autovalor del problema siendo las autofunciones asociadas $y(x) = Cxe^{-x}$.

$$\lambda_0 = 0 \quad y_0(x) = Cxe^{-x}$$

- $\boxed{\lambda < 0}$ Haciendo el cambio $\lambda = -\mu^2$ para $\mu > 0$, donde $\mu \neq 1$.

```

var('K1 K2') # nuevas ctes
assume(mu_ != 1) # lambda != -1
SS = S[0].rhs().subs(lambda_=-mu_^2) # sustituimos lambda=-mu^2
SG = inverse_laplace(SS,s,x) ; show(SG) # Transf. Inversa
SG = SG.subs(y(x=0)==C1,diff(y,x)(x=0)==C2) ; show(SG) # ctes C1, C2
SG = SG.subs(C1*mu_-C1-C2==K1,C1*mu_+C1+C2==K2) ; show(SG) # simplificamos con ctes K1, K2
Ec1 = SG(x=0)==0 ; show(Ec1) # Primera cond. frontera
sol1 = solve(Ec1,K1); show(sol1)
Ec2 = diff(SG,x)(x=1)==0 ; # Segunda cond. frontera
Ec2 = Ec2.subs(K1=sol1[0].rhs()); show(Ec2)
sol = solve(Ec2,mu_); show(sol) # Despejamos valores mu

```

$$\frac{(\mu y(0) - y(0) - D_0(y)(0))e^{-(\mu+1)x}}{2\mu} + \frac{(\mu y(0) + y(0) + D_0(y)(0))e^{(\mu-1)x}}{2\mu}$$

$$\frac{(C_1\mu - C_1 - C_2)e^{-(\mu+1)x}}{2\mu} + \frac{(C_1\mu + C_1 + C_2)e^{(\mu-1)x}}{2\mu}$$

$$\frac{K_1e^{-(\mu+1)x}}{2\mu} + \frac{K_2e^{(\mu-1)x}}{2\mu}$$

$$\frac{K_1}{2\mu} + \frac{K_2}{2\mu} = 0$$

$$[K_1 = -K_2]$$

$$\frac{K_2(\mu-1)e^{(\mu-1)}}{2\mu} + \frac{K_2(\mu+1)e^{(-\mu-1)}}{2\mu} = 0$$

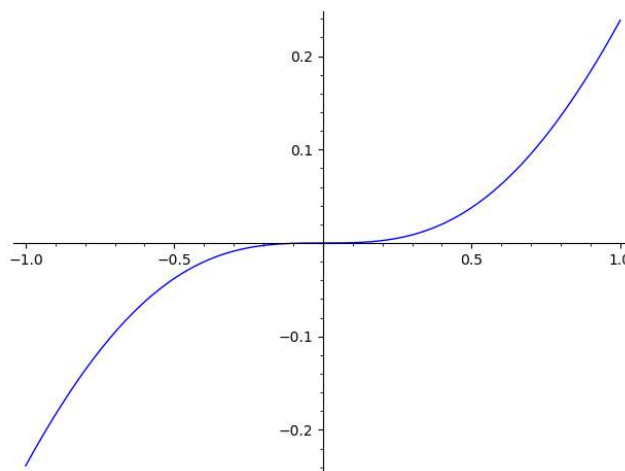
$$\left[\mu = \frac{e^{(\mu-1)} - e^{(-\mu-1)}}{e^{(\mu-1)} + e^{(-\mu-1)}} \right]$$

Representamos gráficamente estos valores μ para buscar si hay soluciones no nulas.

```

plot(sol[0].lhs()-sol[0].rhs(),mu_,-1,1)

```



Solo $\mu = 0$ daría soluciones no nulas para K_1 y K_2 , pero $\mu > 0$ con $\mu \neq 1$ y por tanto las únicas soluciones son la trivial $K_1 = K_2 = 0$, lo que concluye que $\lambda < 1$ con $\lambda \neq -1$ no son autovalores del problema.

- $\lambda > 0$ haciendo el cambio $\lambda = \mu^2$ para $\mu > 0$.

```
assume(mu_>0)
SS = S[0].rhs().subs(lambda_=mu_^2)
SG = inverse_laplace(SS,s,x) ; show(SG)
SG = SG.subs(y(x=0)==C1,diff(y,x)(x=0)==C2) ; show(SG)
SG = SG.subs(C1*mu_-C1-C2==K1,C1*mu_+C1+C2==K2) ; show(SG)
Ec1 = SG(x=0)==0 ; show(Ec1)
Ec2 = SG(C1=0) ; show(Ec2)
EE = diff(Ec2,x)(x=1)==0 ; show(EE)
```

lambda > 0
Transf. Inversa
ctes C1, C2
simplf con ctes K1, K2
Cond. frontera 1 => C1=0
Sustituimos C1=0
Ec. solución

$$\left(\cos(\mu x) y(0) + \frac{(y(0) + D_0(y)(0)) \sin(\mu x)}{\mu} \right) e^{(-x)}$$

$$\left(C_1 \cos(\mu x) + \frac{(C_1 + C_2) \sin(\mu x)}{\mu} \right) e^{(-x)}$$

$$\left(C_1 \cos(\mu x) + \frac{(C_1 + C_2) \sin(\mu x)}{\mu} \right) e^{(-x)}$$

$$C_1 = 0$$

$$\frac{C_2 e^{(-x)} \sin(\mu x)}{\mu}$$

$$C_2 \cos(\mu) e^{(-1)} - \frac{C_2 e^{(-1)} \sin(\mu)}{\mu} = 0$$

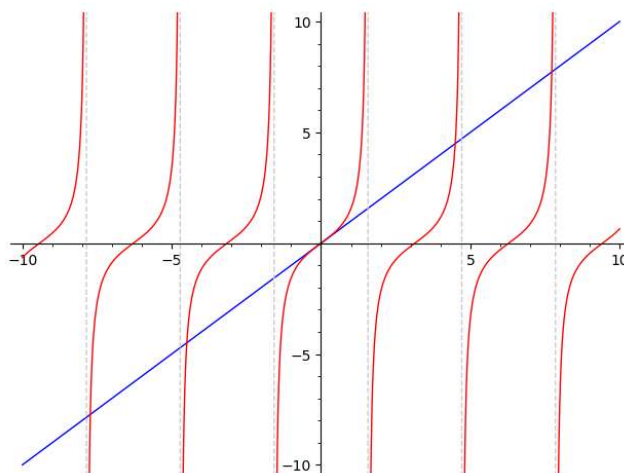
Buscamos soluciones para que $C_2 \neq 0$.

```
f = solve(EE,mu_); show(f)
```

$$\left[\mu = \frac{\sin(\mu)}{\cos(\mu)} \right]$$

Representamos gráficamente para buscar soluciones $\mu = r_n$ no nulas.

```
plot(f[0].lhs(),mu_,-10,10,color='blue')+\  
plot(f[0].rhs(),mu_,-10,10,ymax=10,color='red',detect_poles='show')
```



Viendo la gráfica, claramente existen, además de la solución nula $\mu = 0$ otros infinitos valores de μ no nulos (puntos de corte entre gráfica azul y roja).

Buscamos algunas de estas soluciones numéricas r_n de esta ecuación. Para ello primero simplificamos algo la expresión y usamos comando `.find_root(x1,x2)` para encontrar soluciones de ecuaciones o funciones¹⁰² en un intervalo $[x_1, x_2]$.

```
fun=solve(f[0],sin(mu_)) ; show(fun)

r0 = fun[0].find_root(-1,1) ;
r1 = fun[0].find_root(1,5) ;
r2 = fun[0].find_root(7,8) ;
print('r0=',r0,' , r1=',r1,' , r2=',r2)
```

$[\sin(\mu) = \mu \cos(\mu)]$

$r0= 0.0$, $r1= 4.493409457909064$, $r2= 7.725251836937707$

Finalmente los autovalores y autofunciones del problema son.

$$\lambda_n = \sqrt{\mu_n} = \sqrt{r_n} \quad y_n(x) = C \sin(\mu_n x) = C \sin(r_n x)$$

Problema 3

Resolvemos aquí el problema de SL del [Ejercicio 6.3, página 165](#).

$$\begin{cases} y'' - y' + \lambda y = 0, & 0 < x < 2 \\ y'(0) = 0, & y'(2) = 0 \end{cases}$$

```
reset()
var("lambda_ mu_ s C1 C2")
y=function("y")(x)
assume(mu_>0)
edo = diff(y,x,2)-diff(y,x)+lambda_*y==0 ; show(edo)      # EDO
EL = laplace(edo.lhs(),x,s); show(EL)                     # Transf. Laplace
EL = EL.subs(diff(y,x)(x=0)==0); show(EL)                 # subst cond. y'(0)=0
S = solve(EL,laplace(y,x,s)); S                           # Despejamos Y(s)
```

$$\lambda y(x) - \frac{\partial}{\partial x} y(x) + \frac{\partial^2}{(\partial x)^2} y(x) = 0$$

¹⁰²Las funciones se considerarán ecuaciones igualadas a cero.

$$s^2 \mathcal{L}(y(x), x, s) + \lambda \mathcal{L}(y(x), x, s) - s \mathcal{L}(y(x), x, s) - sy(0) + y(0) - D_0(y)(0)$$

$$s^2 \mathcal{L}(y(x), x, s) + \lambda \mathcal{L}(y(x), x, s) - s \mathcal{L}(y(x), x, s) - sy(0) + y(0)$$

$$\left[\mathcal{L}(y(x), x, s) = \frac{sy(0) - y(0)}{s^2 + \lambda - s} \right]$$

Estudiamos ahora todos los posible casos en función del valor de λ . Estudiamos primero el valor $\lambda = 0$ para el cual hay un cambio radical de la EDO.

- $\lambda = 0$

```
S0 = S[0].rhs().subs(lambda_=0); show(S0)           # Sustituimos lambda = 0
SG0 = inverse_laplace(S0,s,x); show(SG0)           # Transformada inversa
SG0 = SG0.subs(y(x=0)==C1,diff(y,x)(x=0)==C2) ; show(SG0) # C1=y(0), C2=y'(0)
DG0 = diff(SG0,x).subs(x=2)==0 ; show(DG0)         # Sustituimos la otra cond
↪ y'(2)=0
```

$$\frac{sy(0) - y(0)}{s^2 - s}$$

$$y(0)$$

$$C_1$$

$$0 = 0$$

En este caso se obtiene una solución constante $y(x) = C_1$, distinta de la trivial, y por tanto $\lambda = 0$ sí es un autovalor del problema.

- $\lambda \neq 0$

Aquí al calcular la transformada inversa de Laplace con *SageMath* da error avisando que depende del valor de $D = 4\lambda - 1$. Estudiamos tres casos para $D = 0$, $D < 0$ y $D > 0$.

- $4\lambda - 1 = 0 \quad \lambda = 1/4$

```
SS = S[0].rhs().subs(lambda_==1/4)
SS = inverse_laplace(SS,s,x); show(SS)           # Transformada inversa
SS = SS.subs(y(x=0)==C1,diff(y,x)(x=0)==C2) ; show(SS) # C1=y(0), C2=y'(0)
DS = diff(SS,x).subs(x=2)==0 ; show(DS)         # Sustituimos la otra cond y'(2)=0
solve(DS,C1)
```

$$-\frac{1}{2}xe^{(\frac{1}{2}x)}y(0) + e^{(\frac{1}{2}x)}y(0)$$

$$-\frac{1}{2}C_1xe^{(\frac{1}{2}x)} + C_1e^{(\frac{1}{2}x)}$$

$$-\frac{1}{2}C_1e = 0$$

$$[C_1 = 0]$$

En este caso se obtiene la solución trivial y por tanto $\lambda = 1/4$ no es un autovalor del problema.

- $4\lambda - 1 < 0 \quad \lambda < 1/4 \quad (\lambda \neq 0)$

```
assume(4*lambda_-1<0)
SS = inverse_laplace(S[0].rhs(),s,x)           # Transformada inversa
SS = SS.subs(y(x=0)==C1,diff(y,x)(x=0)==C2) ; show(SS) # Sol. General C1=y(0), C2=y'(0)
DS = diff(SS,x).subs(x=2)==0                   # Sustituimos la otra cond y'(2)=0
DS = DS.simplify_full() ; show(DS)
```

$$\left(C_1 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{-4\lambda+1}x\right) - \frac{C_1 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{-4\lambda+1}x\right)}{\sqrt{-4\lambda+1}} \right) e^{\left(\frac{1}{2}x\right)} - \frac{2C_1\lambda e \sinh(\sqrt{-4\lambda+1})}{\sqrt{-4\lambda+1}} = 0$$

Notar que todos los términos aquí son no nulos y por tanto para que se cumpla la última ecuación es necesario que $C_1 = 0$. Por tanto, en este caso se vuelve a obtener la solución trivial y por tanto $\lambda = 1/4$ no es un autovalor del problema.

- $4\lambda - 1 > 0 \quad \lambda > 1/4$

Usamos inicialmente el comando `forget()` para borrar todas las imposiciones establecidas anteriormente sobre las variables con el comando `assume()`.

```
forget() # borra assume anterior
assume(4*lambda_-1>0)
SS = inverse_laplace(S[0].rhs(),s,x) # Transformada inversa
SS = SS.subs(y(x=0)==C1,diff(y,x)(x=0)==C2) ; show(SS) # Sol. General C1=y(0), C2=y'(0)
DS = diff(SS,x).subs(x=2)==0 # Sustituimos la otra cond y'(2)=0
DS = DS.simplify_full() ; show(DS)
```

$$\left(C_1 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda-1}x\right) - \frac{C_1 \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda-1}x\right)}{\sqrt{4\lambda-1}} \right) e^{\left(\frac{1}{2}x\right)} - \frac{2C_1\lambda e \sin(\sqrt{4\lambda-1})}{\sqrt{4\lambda-1}} = 0$$

Notar que a diferencia del caso anterior, donde aparecía $\sinh()$, en este caso el término $\sin()$ sí puede anularse en infinitos argumentos no nulos y por tanto los autovalores λ_n vendrán dados por:

$$\sqrt{4\lambda_n - 1} = n\pi \implies \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{4} - \frac{1}{4}$$

Lo hacemos en *SageMath* obteniendo los autovalores y autofunciones correspondientes.

```
var('n')
assume(n,'integer')
assume(n>0)
Sx = solve(sqrt(4*lambda_-1)==n*pi,lambda_); show(Sx)
SS = SS.subs(lambda_==Sx[0].rhs()); show(SS)
```

$$\left[\lambda = \frac{1}{4}\pi^2 n^2 + \frac{1}{4} \right] \left(C_1 \cos\left(\frac{1}{2}\pi n x\right) - \frac{C_1 \sin\left(\frac{1}{2}\pi n x\right)}{\pi n} \right) e^{\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

Estos autovalores y autovectores junto con los obtenidos para $\lambda = 0$ son las soluciones del problema. Vamos ahora a comprobar la ortogonalidad de las autofunciones con la función peso ¹⁰³ e^{-x} .

```
var('m')
assume(m,'integer')
assume(m>0)
assume('m != n')
SI = integral(SS*SS.subs(n==m)*exp(-x),x,0,2).simplify_full() ; show(SI)
```

0

¹⁰³Ver el Ejercicio 6.3, página 165.

A.1.18. Ecuaciones en Derivadas Parciales

Recordamos el concepto de **ecuación diferencial en derivadas parciales**¹⁰⁴ (EDP):

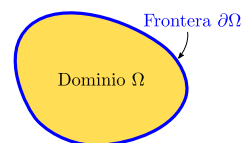
$$u(x, y, z, t, \dots) \xrightarrow{\text{EDP}} F(x, y, z, t, u, u_x, u_t, u_{xy}, \dots) = 0$$

De ellas, desde un punto de vista aplicado, el grupo de EDP más importante son las **EDP lineales de segundo orden**¹⁰⁵:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\vec{z}) \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial z_j} + \sum_{i=1}^n b_i(\vec{z}) \frac{\partial u}{\partial z_i} + c(\vec{z}) u(\vec{z}) = f(\vec{z})$$

Se denomina **problema de valores en la frontera**¹⁰⁶ (PVF) al conjunto de una EDP definida en un dominio Ω junto con las *condiciones iniciales y/o de frontera o contorno*.

$$\text{Problema EDP (PVF)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{EDP en un dominio} \\ + \\ \text{Condiciones iniciales y/o de contorno} \end{array} \right.$$



Uno de los métodos más importantes en la resolución de problemas de EDP es el **método de Separación de Variables**¹⁰⁷, en el cual la EDP se descompone en un conjunto de problemas de EDO más sencillos de resolver. Recordamos los problemas básicos de EDO de tipo Sturm-Liouville¹⁰⁸ que suelen aparecer en la resolución de EDP.

Problema Básico de Autovalores

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u = 0$$

Cond. Frontera	$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u(L) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} u'(0) = 0 \\ u'(L) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} u(-L) = u(L) \\ u'(-L) = u'(L) \end{cases}$
Autovalores λ_n	$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ $n = 1, 2, \dots$	$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ $n = 0, 1, 2, \dots$	$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ $n = 0, 1, 2, \dots$
Autofunciones	$\text{sen } \frac{n\pi x}{L}$	$\cos \frac{n\pi x}{L}$	$\text{sen } \frac{n\pi x}{L}, \cos \frac{n\pi x}{L}$
Serie	$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen } \frac{n\pi x}{L}$	$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L}$	$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} + B_n \text{sen } \frac{n\pi x}{L}$
Coeficientes	$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen } \frac{n\pi x}{L} dx$	$A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$ $A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$	$A_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$ $A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$ $B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \text{sen } \frac{n\pi x}{L} dx$

¹⁰⁴Ver el Tema 7, página 175.

¹⁰⁵Ver la Definición 7.2, página 178.

¹⁰⁶También denominados con condiciones de borde o contorno.

¹⁰⁷Ver la Sección 7.2, página 183.

¹⁰⁸Ver la Sección 6.2.1, página 153.

EDP de Primer Orden

Empezamos viendo cómo resolver a través de *SageMath* usando el método de separación de variables una EDP de primer orden resuelta en el [Ejercicio 7.1, página 184](#).

$$y \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Empezamos definiendo las variables y la EDP.

```
var('x y')
u=function('u')(x,y)
edp = y*diff(u,x) == diff(u,y) ; edp
```

$$y \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} u(x, y)$$

Aplicamos el método de separación de variables

```
X=function('X')(x)
Y=function('Y')(y)
u=X*Y
edp1 = y*diff(u,x) == diff(u,y) ; edp1
```

$$yY(y) \frac{\partial}{\partial x} X(x) = X(x) \frac{\partial}{\partial y} Y(y)$$

Intentamos separar los dos términos dependientes de x e y .

```
var('lambda_')
s1 = solve(edp1,diff(X,x)); show(s1)           # Separamos X'
s2 = (s1[0].rhs()==1).solve(X); show(s2)       # Separamos X de la parte dcha
s3 = s1[0].lhs()/s2[0].lhs()==1/s2[0].rhs() ; show(s3) # Juntamos partes
edox = s3.lhs()==lambda_ ; show(edox)          # Parte X(x)
edoy = s3.rhs()==lambda_ ; show(edoy)          # Parte Y(y)
```

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} X(x) = \frac{X(x) \frac{\partial}{\partial y} Y(y)}{yY(y)} \right]$$

$$\left[X(x) = \frac{yY(y)}{\frac{\partial}{\partial y} Y(y)} \right]$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x} X(x)}{X(x)} = \frac{\frac{\partial}{\partial y} Y(y)}{yY(y)}$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x} X(x)}{X(x)} = \lambda$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial y} Y(y)}{yY(y)} = \lambda$$

Resolvemos las dos EDO independientes.

```
solx = desolve(edox,X,ivar=x) ; show(solx)
soly = desolve(edoy,Y,ivar=y) ; show(soly)
```

$$C e^{(\lambda x)}$$

$$C e^{(\frac{1}{2} \lambda y^2)}$$

Juntamos ambas soluciones en la solución general final y cambiamos nombre de los parámetros C y λ por los típicos C_1 y C_2 .

```
var('_C C1 C2')
u = solx*soly ; show(u)
u = u.subs(_C^2==C1,lambda_==C2) ; show(u)
```

$$C^2 e^{\left(\frac{1}{2} \lambda y^2 + \lambda x\right)}$$

$$C_1 e^{\left(\frac{1}{2} C_2 y^2 + C_2 x\right)}$$

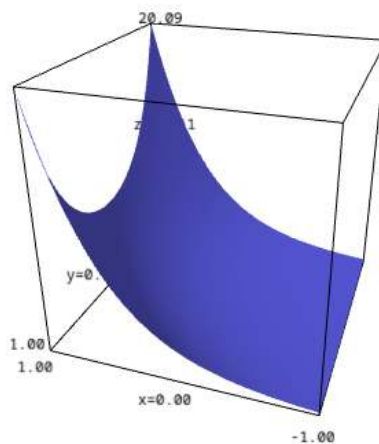
Comprobamos la validez de la solución general.

```
bool(y*diff(u,x) == diff(u,y))
```

True

Representamos una solución particular.

```
plot3d(u(C1=1,C2=2),(x,-1,1),(y,-1,1),aspect_ratio=[1,1,0.1])
```



Ecuación del Calor Unidimensional

Resolvemos en este caso el problema en EDP dado en el [Sección 7.4.2, página 188](#) correspondiente a la conducción del calor en una varilla unidimensional.

$$\begin{cases} k u_{xx} = u_t & 0 < x < L, t > 0 \\ u(0, t) = 0, u(L, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < L \end{cases}$$

```
reset()
var('k x t L')
assume(k>0)
assume(L>0)
u=function('u')(x,t)
edp = k*diff(u,x,2) == diff(u,t) ; edp
```

$$k \frac{\partial^2}{(\partial x)^2} u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x, t)$$

Aplicamos separación de variables.

```
X=function('X')(x)
T=function('T')(t)
u=X*T
edp1 = k*diff(u,x,2) == diff(u,t) ; edp1
```


$$kT(t) \frac{\partial^2}{(\partial x)^2} X(x) = X(x) \frac{\partial}{\partial t} T(t)$$

```
var('lambda_')
s1 = solve(edp1,diff(X,x,2)); show(s1)           # Separamos X''
s2 = (s1[0].rhs()==1).solve(X); show(s2)         # Separamos X de la parte dcha
s3 = s1[0].lhs()/s2[0].lhs()==1/s2[0].rhs() ; show(s3) # Juntamos partes
edox = s3.lhs()==-lambda_ ; show(edox)           # Parte X(x)
edot = s3.rhs()==-lambda_ ; show(edot)          # Parte T(t)
```

$$\left[\frac{\partial^2}{(\partial x)^2} X(x) = \frac{X(x) \frac{\partial}{\partial t} T(t)}{kT(t)} \right]$$

$$\left[X(x) = \frac{kT(t)}{\frac{\partial}{\partial t} T(t)} \right]$$

$$\frac{\frac{\partial^2}{(\partial x)^2} X(x)}{X(x)} = \frac{\frac{\partial}{\partial t} T(t)}{kT(t)}$$

$$\frac{\frac{\partial^2}{(\partial x)^2} X(x)}{X(x)} = -\lambda$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial t} T(t)}{kT(t)} = -\lambda$$

Empezamos resolviendo el primer problema sobre $X(x)$.

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0, X(L) = 0 \end{cases}$$

que corresponde con un problema básico de *Sturm-Liouville* cuyas soluciones son conocidas¹⁰⁹.

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad ; \quad X_n(x) = C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad ; \quad n = 1, 2, \dots$$

```
var('n')
assume(n,'integer')
assume(n>0)
edo1= sin(n*pi*x/L) ; show(edo1)
Lambda = (n^2*pi^2/L^2) ; show(Lambda)
#show(LatexExpr('X(x) = '),edo1,LatexExpr('\quad,\quad \lambda = '),Lambda)
```

$$\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$

$$\frac{\pi^2 n^2}{L^2}$$

La segunda EDO sobre $T(t)$ es fácilmente resoluble con *SageMath*.

```
var('_C')
C=function('C')(n)
edo2 =desolve(edot,T,ivar=t) ; show(edo2)
edo2 = edo2(lambda_=Lambda,_C=C); show(edo2)
```

$$Ce^{(-k\lambda t)}$$

¹⁰⁹Ver la [Sección A.1.18](#), página 302.

$$C(n) e^{\left(-\frac{\pi^2 k n^2 t}{L^2}\right)}$$

Por el *principio de superposición*¹¹⁰ la solución final es por tanto:

```
sol = edo1*edo2
u=sum(sol,n,1,oo); show(u)
```

$$\sum_{n=1}^{+\infty} C(n) e^{\left(-\frac{\pi^2 k n^2 t}{L^2}\right)} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$

Las constantes C_n se pueden obtener a través de la condición inicial del problema:

$$u(x, 0) = X(x)T(0) = f(x) \quad \Rightarrow \quad u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

Esto corresponde con la *serie de Fourier de senos*¹¹¹ de $f(x)$ y por tanto las constantes c_n correspondientes a los coeficientes de la serie se pueden obtener como:

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(s) \sin\left(\frac{n\pi}{L}s\right) ds$$

Vamos a crear un pequeño código para representar gráficamente algunas soluciones para una determinada función de la condición inicial $f(x)$.

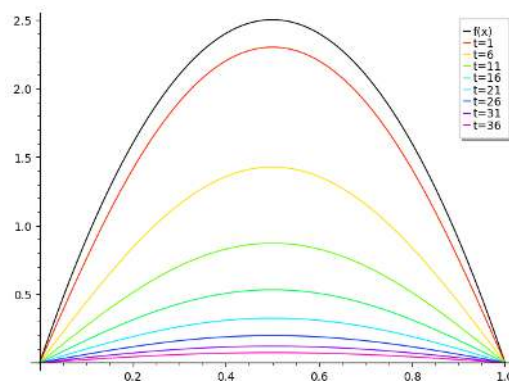
```
var('n i ')
L=1
k=0.01
f(x) = 10*(-x^2+L*x)

def C(nn,l):
    coeff = 2/l*integral(f(x)*sin(nn*pi*x/l), (x,0,l))
    return coeff

def FF(nn,l,tt):
    return sum(C(i,l)*sin(i*pi*x/l)*exp(-k*tt*i^2*pi^2/l^2), i, 1, nn)

T=40
q=sum([plot(FF(10,1,n), (x,0,L), color=hue(n/(T+1)), legend_label='t='+str(n))
for n in range(1,T,5)])

p=plot(f(x), (x, 0, 1), color='black', legend_label='f(x)')
(p+q).show()
```



¹¹⁰Ver el Teorema 7.1, página 186.

¹¹¹Ver la Sección 5.4.4, página 145.

Ecuación del Calor en Polares con Simetría Radial

Resolvemos el siguiente problema correspondiente al problema dado en el [Sección 7.4.3, página 198](#).

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) & r \in (0, a), t > 0 \\ u(a, t) = 0 & t > 0 \\ |u(0, t)| < \infty & t > 0 \\ u(r, 0) = f(r) & r \in (0, a) \end{cases} \quad (\text{Cond. Compatibilidad})$$

```
reset()
var('k a r t')
assume(k>0)
assume(a>0)
u=function('u')(r,t)
edp = diff(u,t) == k/r*diff(r*diff(u,r),r) ; edp
```

$$\frac{\partial}{\partial t} u(r, t) = \frac{\left(r \frac{\partial^2}{(\partial r)^2} u(r, t) + \frac{\partial}{\partial r} u(r, t) \right) k}{r}$$

Aplicamos separación de variables.

```
R = function('R')(r)
T = function('T')(t)
u = R*T
edp1 = diff(u,t) == k/r*diff(r*diff(u,r),r) ; edp1
```

$$R(r) \frac{\partial}{\partial t} T(t) = \frac{\left(r T(t) \frac{\partial^2}{(\partial r)^2} R(r) + T(t) \frac{\partial}{\partial r} R(r) \right) k}{r}$$

```
var('lambda_')
s1 = solve(edp1, diff(T, t)); show(s1) # Separamos T'
s1r = s1[0].rhs().expand() ; show(s1r)
s2 = (s1r==1).solve(T); show(s2) # Separamos T de la parte dcha
s3 = s1[0].lhs()/(k*s2[0].lhs())==(1/(k*s2[0].rhs())).expand() ; show(s3) # Juntamos_
    ↪ partes
edot = s3.lhs()==-lambda_ ; show(edot) # Parte T(t)
edor = s3.rhs()==-lambda_ ; show(edor) # Parte R(r)
```

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} T(t) = \frac{\left(kr \frac{\partial^2}{(\partial r)^2} R(r) + k \frac{\partial}{\partial r} R(r) \right) T(t)}{r R(r)} \right]$$

$$\frac{k T(t) \frac{\partial^2}{(\partial r)^2} R(r)}{R(r)} + \frac{k T(t) \frac{\partial}{\partial r} R(r)}{r R(r)}$$

$$\left[T(t) = \frac{r R(r)}{kr \frac{\partial^2}{(\partial r)^2} R(r) + k \frac{\partial}{\partial r} R(r)} \right]$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial t} T(t)}{k T(t)} = \frac{\frac{\partial^2}{(\partial r)^2} R(r)}{R(r)} + \frac{\frac{\partial}{\partial r} R(r)}{r R(r)}$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial t} T(t)}{k T(t)} = -\lambda$$

$$\frac{\frac{\partial^2}{(\partial r)^2} R(r)}{R(r)} + \frac{\frac{\partial}{\partial r} R(r)}{r R(r)} = -\lambda$$

Empezamos analizando el primer problema de Sturm-Liouville

```
# lambda = 0
edor = (edor.lhs()*R*r).expand() -edor.rhs()*R*r; show(edor)
u0 = desolve(edor(lambda_=0),R,ivar=r,contrib_ode=True) ; show(u0)
```

$$\lambda r R(r) + r \frac{\partial^2}{(\partial r)^2} R(r) + \frac{\partial}{\partial r} R(r)$$

$$K_1 \log(r) + K_2$$

Por la condición de compatibilidad $K_1 = 0$ y con la condición frontera $R(a) = 0$ hace que $k_2=0$, obteniéndose la solución trivial y por tanto $\lambda = 0$ no es autovalor del problema.

```
# lambda != 0
ur = desolve(edor,R,ivar=r,contrib_ode=True) ; show(u0)
```

$$K_1 \log(r) + K_2$$

Por la condición de compatibilidad se tiene $K_2 = 0$. Para que se cumpla la condición frontera $R(a) = 0$ y evitar la solución trivial es necesario $K_1 \neq 0$. Notar que la función de Bessel $J_0(x)$ es simétrica y por tanto $J_0(-x) = J_0(x)$.

Es necesario entonces que $a\sqrt{\lambda}$ sea un cero z_n de la función $J_0(x)$. Recordamos que los ceros de las funciones de Bessel¹¹² se puede obtener a través de la librería *mpmath* como en la [Sección A.1.7, página 270](#). Por tanto los autovalores y autofunciones de este problema son:

```
from mpmath import besseljzero
var('z_n n')
assume(n,'integer')
assume(n>0)
assume(z_n>0)
#def z(n): return besseljzero(0,n)

A = a*sqrt(lambda_)==z_n
L = solve(A,lambda_) ; show(L)
ur = ur[0](_K2=0,r=-r,lambda_=L[0].rhs()).rhs() ; show(ur)
```

$$\left[\lambda = \frac{z_n^2}{a^2} \right]$$

$$K_1 J_0\left(\frac{r z_n}{a}\right)$$

La segunda EDO en la variable $T(t)$ es fácil de resolver:

```
edot = edot.lhs()*k*T-edot.rhs()*k*T; show(edot)
```

$$k\lambda T(t) + \frac{\partial}{\partial t} T(t)$$

```
ut = desolve(edot,T,ivar=t,contrib_ode=True) ; show(ut)
ut=ut(lambda_=L[0].rhs()); show(ut)
```

$$C e^{(-k\lambda t)}$$

$$C e^{\left(-\frac{k t z_n^2}{a^2}\right)}$$

Y por tanto la solución final es:

¹¹²Ver la [Sección 6.4.1, página 171](#).

```

var('_C')
C=function('C')(n)
Z=function('Z')(n)
sol = ur(_K1=1,z_n=Z)*ut(_C=C,z_n=Z) ; show(sol)
u=sum(sol,n,1,oo); show(u)

```

$$C(n) J_0\left(\frac{rZ(n)}{a}\right) e^{\left(-\frac{ktZ(n)^2}{a^2}\right)}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} C(n) J_0\left(\frac{rZ(n)}{a}\right) e^{\left(-\frac{ktZ(n)^2}{a^2}\right)}$$

Para determinar los coeficientes es necesario tener en cuenta la condición inicial del problema original.

$$u(r, 0) = f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(\frac{r z_0^n}{a}\right)$$

Notar que esto corresponde con la **serie de Fourier generalizada**¹¹³ de la función $f(r)$ en términos de las funciones de Bessel. Teniendo en cuenta las propiedades de ortogonalidad de las funciones de Bessel¹¹⁴ con la función peso r se tiene finalmente:

$$C_n = \frac{\int_0^a f(r) J_0\left(\frac{r z_0^n}{a}\right) r dr}{\int_0^a J_0^2\left(\frac{r z_0^n}{a}\right) r dr}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Vamos a crear un pequeño código para representar gráficamente algunas soluciones para una determinada función de la condición inicial $f(x)$.

```

# Importamos librerías necesarias
from scipy.special import *
import sage.libs.mpmath.all as a
from matplotlib import cm

var('x y r n i ')
a=pi      # radio
k=0.01    # conductividad

# Fun. ini t=0
f(x) = sin(pi/2+3*x)

# Ceros de J_0 (los 50 primeros)
zn=jn_zeros(0, 50)

# Función de Bessel J_0
def JO(x): return bessel_J(0,x)

# Cte de la serie de Fourier Geneneralizada
def C(n,a):
    z=zn[n-1]/a
    i=numerical_integral(x*(JO(x*z))^2,0,a)[0]
    return 1/i*numerical_integral(x*f(x)*JO(x*z),0,a)[0]

# Solución
def FF(nn,RR,tt):
    return sum(C(i,RR)*JO(x*zn[i-1]/RR)*exp(-k*tt*(zn[i-1]/RR)^2) for i in [1..nn])

```

¹¹³Ver la Sección 6.3.2, página 164.

¹¹⁴Ver la Sección 6.4.1, página 171.

Representación gráfica usando *Matplotlib* para un tiempo determinado ($t = 3$) donde se muestra la temperatura $u(r, t)$ en forma de superficie en 3D en coordenadas cartesianas, de mapa de contorno en 2D en coordenadas polares y como una curva en función del radio (independiente del ángulo).

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import cm

fig = plt.figure(figsize=plt.figaspect(0.3))
plt.subplots_adjust(wspace=0.35)

N=100      # Núm. ptos gráfica
# Vectores
theta = np.radians(np.linspace(0, 360, N)) # ángulo
r = np.arange(0, a, a/N)                  # radio
u = np.arange(0, a, a/N)                  # u(r,t)
# Matrices
RR, AA = np.meshgrid(r, theta)
U = np.random.random((theta.size, r.size))
RR = RR.astype(float) ; AA = AA.astype(float) ; U = U.astype(float)

a=np.pi # radio
t=3      # tiempo
NN=10    # num términos serie

# Función sol u(r,t)
for i in range(0,r.size):
    u[i] = FF(NN,a,t)(x=r[i]).n()
    for j in range(0,theta.size):
        U[j,i] = u[i]

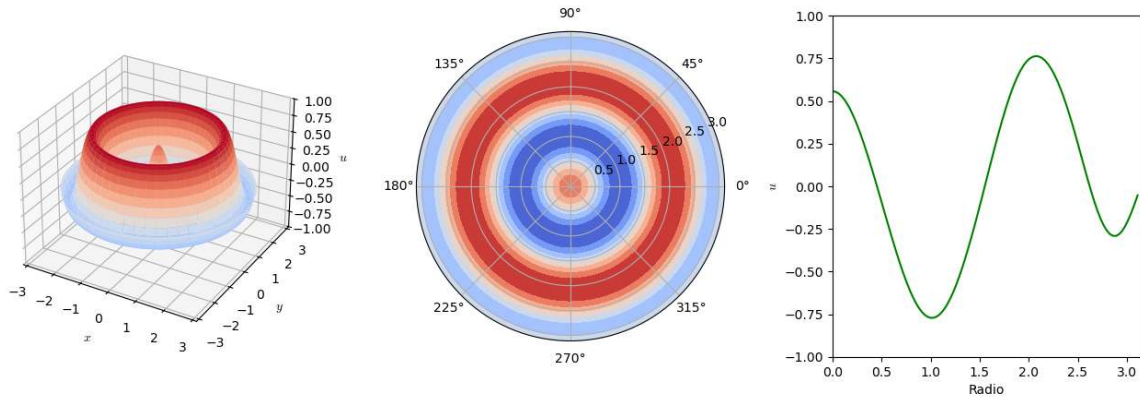
# Coord. cartesianas
X, Y = RR*np.cos(AA), RR*np.sin(AA)

#-- Plot Surface -----
ax1 = fig.add_subplot(1, 3, 1, projection='3d')
ax1.plot_surface(X, Y, U, cmap=cm.coolwarm)

ax1.set_zlim(-1, 1)
ax1.set_xlim(-a, a)
ax1.set_ylim(-a, a)
ax1.set_xlabel(r'$x$')
ax1.set_ylabel(r'$y$')
ax1.set_zlabel(r'$u$')

#-- Plot Contour -----
ax2 = fig.add_subplot(1, 3, 2, projection='polar')
ax2.contourf(AA, RR, U, cmap=cm.coolwarm)

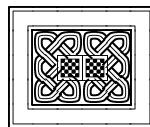
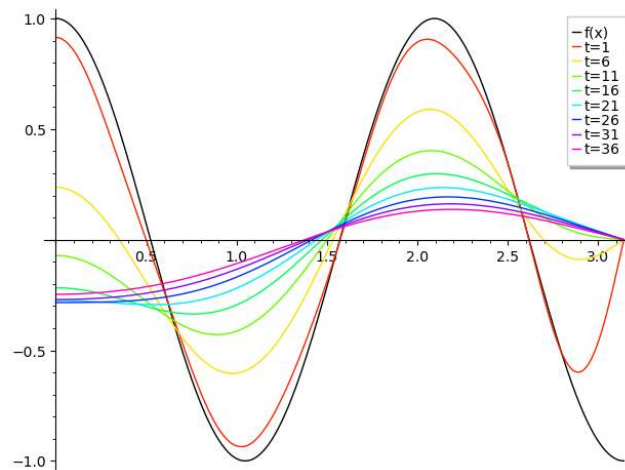
#-- Plot Lineal -----
ax3 = fig.add_subplot(1, 3, 3)
ax3.plot(r,u,color='green')
ax3.set_xlim(0, a)
ax3.set_ylim(-1, 1)
ax3.set_xlabel(r'Radio')
ax3.set_ylabel(r'$u$')
plt.show()
```

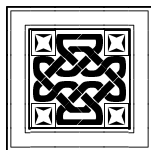


En la siguiente gráfica se muestra la evolución de los perfiles de temperatura (curvas) en función del radio, para distintos tiempos.

```
# Rep. Gráfica unidimensional (radio) en función del tiempo
T=40 # Tiempo máximo
q=sum([plot(FF(10,a,n), (x,0,a), color=hue(n/(T+1)), legend_label='t='+str(n)) \
      for n in range(1,T,5)])

# Función inicial
p=plot(f(x), (x, 0, a), color='black', legend_label='f(x)')
(p+q).show()
```





Bibliografía

- N. H. ASMAR, **Partial differential equations with Fourier series and boundary value problems**, Tercera Edición, (Pearson-Prentice Hall, 2016).
- BOYCE y DIPRIMA, **Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera**, Cuarta Edición, (Limusa-Wiley, 2000).
- C. H. EDWARDS, D. E. PENNEY, **Ecuaciones diferenciales**, Cuarta Edición, (Prentice Hall, 2001).
- R. HABERMAN, **Ecuaciones en derivadas parciales con series de Fourier y problemas de contorno**, Tercera Edición, (Pearson-Prentice Hall, 2003).
- P. J. HERNANDO, **Clases de Álgebra Lineal para Ingeniería**, Versión 6.6, (Septiembre 2025).
- P. J. HERNANDO, **Clases de Cálculo I para Ingeniería**, Versión 3.8, (Septiembre 2025).
- P. J. HERNANDO, **Clases de Cálculo II para Ingeniería**, Versión 4.2, (Septiembre 2025).
- P. J. HERNANDO, **Clases de Ampliación de Matemáticas para Ingeniería**, Versión 6.0, (Septiembre 2025).
- G. JAMES, **Matemáticas Avanzadas para ingeniería**, Segunda Edición, (Prentice Hall, 2002).
- R. K. NAGLE, E. B. SAFF, A. D. SNIDER, **Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera**, Tercera Edición, (Addison Wesley, 2001).
- F. MARCELLAN, L. CSASÚS, A. ZARZO **Ecuaciones diferenciales**, Primera Edición, (McGraw-Hill, 1990).
- D. PESTANA, J. M. RODRÍGUEZ, F. MARCELLÁN, **Variable compleja: un curso práctico**, Primera Edición, (Síntesis, 2014).
- S. L. ROSS, **Ecuaciones diferenciales**, Primera Edición, (Reverté, 1992).
- G. F. SIMMONS, **Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas**, Segunda Edición, (McGraw-Hill, 1993).
- M. R. SPIEGEL, S. LIPSCHUTZ, J. J. SCHILLER, D. SPELLMAN, **Variable compleja**, Segunda Edición, (McGraw-Hill, 2011).
- J. WARD BROWN y R. V. CHURCHILL, **Variable compleja y aplicaciones**, Séptima Edición, (McGraw-Hill, 2004).
- A. D. WUNSCH, **Complex variables with applications**, Tercera Edición, (Pearson, 2005).
- D. G. ZILL y M. CULLEN, **Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera**, Séptima Edición, (Cengage Learning Editores, 2009).
- D. G. ZILL y M. R. CULLEN, **Matemáticas avanzadas para ingeniería**, Tercera Edición, (McGraw-Hill Interamericana Editores, 2008).
- P. ZIMMERMANN y Co. **Computational mathematics with SageMath**, (Free license Creative Commons, 2018). <https://www.sagemath.org/sagebook>

