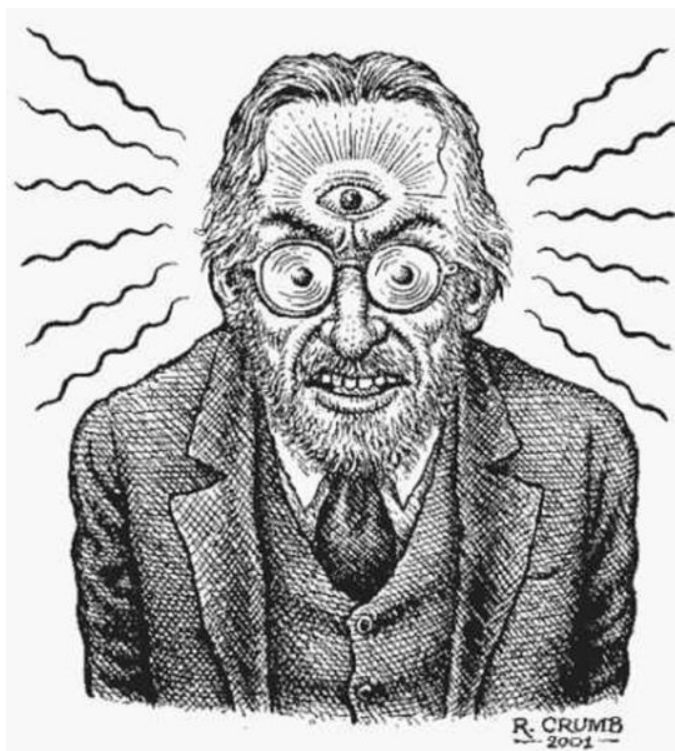

Clases de
Ampliación de Matemáticas
para Ingeniería

Teoría y 250 ejercicios resueltos

Versión 6.0 - Septiembre 2025



Pedro José Hernando Oter

Image used by permission from Robert Crumb - www.rcrumb.com

© Pedro José Hernando Oter, 2025

pedroj@math.uc3m.es
www.clasesde.eu

Departamento de Matemáticas
Escuela Politécnica Superior
UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
Avda de la Universidad, 30
28911 Leganés
SPAIN

ISBN: xxx-xx-xxx-xxxx-x

Versión 6.0 - Septiembre 2025
Made by L^AT_EX - TeX Live

This is pdfTeX, Version 3.141592653-2.6-1.40.27 (TeX Live 2026/dev/Arch Linux) kpathsea version 6.4.2/dev

Índice

Tema	Página
1 Introducción a las Ecuaciones Diferenciales	1
1.1 Ecuaciones	3
1.1.1 Tipos de Ecuaciones	3
1.1.2 Ecuaciones Funcionales	3
Clasificación de las Ecuaciones Funcionales	4
1.2 Ecuaciones Diferenciales	4
1.2.1 Notación de las Derivadas	4
Notación de Leibniz	4
Notación de Lagrange	5
Operador Diferencial	5
1.2.2 Análisis Matemático	6
Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales	7
1.2.3 Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales	7
Clasificación 1: Tipo de las derivadas	7
Clasificación 2: Orden y Grado de la Ecuación	8
Clasificación 3: Linealidad de la Ecuación	9
1.3 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)	10
1.3.1 Funciones de Clase C^n	10
1.3.2 Solución o Curva Integral de una EDO	11
Tipos de Solución	11
1.3.3 Resolución de EDO Simples	12
Método de Separación de Variables	12
Solución Singular	13
1.3.4 Familias de Soluciones	14
1.3.5 Tipos de Problemas con EDO	14
Problema de Valores Iniciales (PVI)	15
Problema de Frontera o de Contorno (PVF)	15
1.3.6 Tipos de Soluciones de una EDO	16
1.4 Existencia y Unicidad de Soluciones	18
Mejora de las Condiciones del Teorema de Picard	20
1.5 Representación Gráfica de las EDO	21
1.5.1 Interpretación Geométrica de una EDO	21
1.5.2 Solución Numérica: Método de Euler	21
1.5.3 Campo de Pendientes o Campo Direccional	22
1.5.4 Isoclinas	23
2 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden	25
2.0 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden	27
2.0.1 Métodos de Resolución de Tipos Canónicos	27
2.1 EDO Simple de la forma $y' = f(x)$	27
2.2 EDO de Variables Separables o Separable	29
2.3 EDO de la Forma: $y' = f(ax + by + c)$	29
2.4 EDO Homogéneas	30
Caso 1: $f(t) \neq t$	31

Caso 2: $f(t) = t$	31
2.4.1 EDO Reducibles a Homogéneas	33
Caso 1: Rectas Secantes	33
Caso 2: Rectas Paralelas	33
2.5 EDO Exactas	35
Método General de Resolución de EDO Exactas	38
2.5.1 Factores Integrantes	39
Existencia de Factores Integrantes	39
Cálculo Práctico de Factores Integrantes	40
Otros Factores Integrantes	41
2.6 EDO Lineales	42
2.6.1 EDO Lineal de Primer Orden	42
Resolución de EDO Lineales	42
Explicación: Factor Integrante	42
2.7 Ecuación de Bernoulli	43
2.8 Ecuación de Riccati	44
2.9 Reducción de EDO de Segundo Orden	46
2.10 Resumen: EDO Primer Orden	47
2.11 Aplicaciones de las EDO de Primer Orden	48
2.11.1 Familia de Curvas	48
2.11.2 Trayectorias Ortogonales	49
2.11.3 Envolvente de una Familia de Curvas	52
2.11.4 Modelización Matemática	53
Ley de Newton del Enfriamiento	53
Dinámica de Poblaciones	53
Ecuación Logística	53
Ley de Torricelli	54
Desintegración Radiactiva	54
Caída Libre y Resistencia del Aire	54
3 EDO Lineales de Orden Superior	57
3.1 EDO Lineales de Orden n	59
3.1.1 Introducción	59
3.1.2 Solución de una EDOL	59
3.1.3 Tipos de Problemas con EDOL	60
3.1.4 Existencia y Unicidad de las Soluciones	62
3.1.5 Solución de una EDOL	64
3.2 EDOL con Coeficientes Constantes Homogénea (EDOCH)	65
3.2.1 Dependencia e Independencia Lineal de Funciones: Wronskiano	67
3.2.2 Solución de una EDOCH: Casos Particulares	68
Raíces Reales con Multiplicidad $m > 1$	68
Raíces Complejas	69
3.2.3 Resumen: Soluciones de una EDOCH	71
3.3 EDOL con Coeficientes Constantes Completa (EDOC)	72
3.3.1 Método de los Coeficientes Indeterminados	72
3.3.2 Método de Variación de Parámetros	77
Extensión del Método de Variación de Parámetros a EDOL de Orden n	80
3.3.3 Función de Green	83
3.4 EDOL con Coeficientes Variables	84
3.4.1 Reducción de Orden por falta de un Tipo de Variable	84
Ausencia de y : $F(x, y', y'') = 0$	84
Ausencia de x : $F(y, y', y'') = 0$	84
3.4.2 Reducción de Orden conocida una Solución Particular: Fórmula de Abel	84
3.4.3 Ecuación de Cauchy-Euler	87
Soluciones de la forma: $y(x) = x^m$	87
Cambio de Variable: $x = e^z$	89
3.5 Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (SEDO)	90

3.5.1	Sistemas de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden Lineales	91
3.6	Aplicaciones de las EDO de Orden Superior	92
3.6.1	Circuitos Eléctricos	92
3.6.2	Sistemas Mecánicos	93
4	Soluciones en Forma de Series	95
4.1	Soluciones de EDOL en Forma de Series	97
4.1.1	Introducción	97
4.2	Series de Potencias	98
4.2.1	Convergencia de las Series de Potencia	100
4.2.2	Radio de Convergencia	102
4.2.3	Criterios de Convergencia	102
4.3	Función Especial en Serie de Potencia	104
4.3.1	Propiedades de las Funciones Especiales en Series de Potencia	105
	Principio de Identidad	105
	Aritmética de las Funciones Especiales en Series de Potencia	105
	Continuidad y Derivabilidad	106
	Integral	106
	Agrupación de Potencias y Desplazamiento del Índice de un Sumatorio	106
4.4	Soluciones de EDO en Series	109
4.4.1	Función Analítica	109
4.4.2	Clasificación de los Puntos	110
4.4.3	Puntos Ordinarios	110
	EDO Lineales No Homogéneas	117
4.4.4	Puntos Singulares	119
	Puntos Singulares y Métodos Numéricos	120
	Clasificación de los Puntos Singulares	120
4.4.5	Puntos Singulares Regulares	121
	Cambio de Variables	121
	Ecuación de Cauchy-Euler de Segundo Orden	122
	EDO Homogénea Lineal de Segundo Orden General	123
	Método de Frobenius	124
	Ejemplos de Problemas con Puntos Singulares Regulares	127
	El Punto del Infinito	131
4.5	Funciones Especiales	132
4.5.1	Ecuación de Bessel	132
	Función Gamma, $\Gamma(z)$	132
	Funciones de Bessel de Primera Clase o Especie	133
	Algunas Propiedades de las Funciones de Bessel	134
	Solución de la Ecuación de Bessel para m no Entero	134
	Solución de la Ecuación de Bessel para m Entero	134
	EDO Resolubles en Términos de Funciones de Bessel	135
	Aplicaciones de la Ecuación de Bessel	136
4.5.2	Ecuación de Legendre	137
	Polinomios de Legendre	138
	Aplicaciones de la Ecuación y Polinomios de Legendre	138
4.5.3	Ecuación de Hermite	139
	Polinomios de Hermite	140
	Aplicaciones de la Ecuación y Polinomios de Hermite	140
5	Transformada de Laplace	143
5.1	Introducción	145
5.1.1	Series de Potencias	145
5.2	Transformadas	146
5.3	Transformada de Laplace	147
5.3.1	Definición	147
5.3.2	Función Gamma $\Gamma(t)$	150

5.3.3	Tabla de Transformadas de Laplace Elementales	151
5.3.4	Condiciones Suficientes de Existencia	151
5.3.5	Propiedades de la Transformada de Laplace	153
	Linealidad	153
	Primer Teorema de Traslación: Traslación en el eje s	154
	Segundo Teorema de Traslación: Traslación en el eje t	155
	Derivada de una Transformada de Laplace	158
	Integral de una Transformada de Laplace	160
5.3.6	Transformadas Inversa de Laplace	160
	Resumen: Propiedades de $\mathcal{L}\{f(t)\}$	161
	Tablas de Transformadas Inversas de Laplace	162
5.3.7	Transformada de la Derivada e Integral	163
	Transformada de la Derivada de una Función	163
	Transformada de la Integral de una Función	164
5.4	Método de Descomposición en Fracciones Simples	165
5.5	Transformada de Laplace y EDO	167
5.5.1	PVI de EDOC	167
5.5.2	EDOL con Coeficientes Polinómicos	168
5.5.3	Sistemas de EDO Lineales de Orden n	169
5.5.4	Ecuaciones Integrales e Integrodiferenciales	170
5.5.5	Transformada de un Producto: Convolución	172
	Propiedades de la Convolución	175
	Aplicaciones de la Convolución	175
5.6	EDOS y Señales	179
5.6.1	Función Delta de Dirac	181
	Introducción	181
	Propiedades Básicas de la Función Delta de Dirac	182
	Relación entre Delta de Dirac y Escalón Unitario	182
	Transformada de Laplace de Delta de Dirac	182
6	Variable Compleja I	185
6.1	Introducción	187
6.2	Formas de los Números Complejos	187
6.2.1	Forma Cartesiana, $z = (a, b)$	187
6.2.2	Forma Binómica, $z = a + bi$	188
6.2.3	Representación Geométrica de $\mathbb{C}$	189
6.2.4	Forma Trigonométrica y Polar	191
6.2.5	Forma Exponencial	192
6.3	Topología en el Plano Complejo	193
6.3.1	$\mathbb{C}$ no es un Conjunto Ordenado	193
6.3.2	Distancia en $\mathbb{C}$	193
6.3.3	Regiones Básicas en $\mathbb{C}$	194
6.3.4	Conjuntos Básicos en $\mathbb{C}$	194
6.3.5	Infinito en el Plano Complejo. Esfera de Riemann	196
6.3.6	Operaciones Aritméticas con Infinito en el Plano Complejo	196
6.4	Funciones de Variable Compleja	197
6.4.1	Parte Real e Imaginaria de una Función Compleja	198
6.4.2	Método de Milne-Thomson	198
6.4.3	Representación Gráfica	199
	Representación de las Partes Reales e Imaginarias	199
	Representación del Módulo y Argumento	200
	Representación del Campo de Direcciones	201
	Representación de la Transformación o Mapeo	201
	Representación mediante Coloración del Dominio	202
	Coloración del Dominio en Escala Logarítmica	203
	Representación mediante Combinación de Técnicas	205
6.5	Funciones Complejas Elementales	205

6.5.1	Función Constante Compleja	205
6.5.2	Función Polinómica Compleja	205
6.5.3	Función Racional Compleja	207
6.5.4	Función Irracional Compleja	208
6.5.5	Discontinuidad del Argumento	210
	Función Compleja $f(z) = \sqrt{z}$	211
6.5.6	Función Exponencial Compleja	212
6.5.7	Función Logaritmo Complejo	214
6.5.8	Función Potencial Compleja	216
6.5.9	Funciones Trigonómicas Complejas	217
6.5.10	Funciones Trigonómicas Inversas	219
6.5.11	Funciones Hiperbólicas Complejas	220
6.5.12	Funciones Complejas Básicas	221
7	Variable Compleja II	223
7.1	Límite y Continuidad de las Funciones Complejas	225
7.1.1	Límite de Funciones Complejas	225
7.1.2	Cálculo de Límites de Funciones Complejas	226
7.1.3	Continuidad de Funciones Complejas	229
	Continuidad de Funciones Complejas Elementales	230
7.2	Derivada de las Funciones Complejas	231
7.2.1	Propiedades de la Derivada Compleja	234
7.2.2	Ecuaciones de Cauchy-Riemann	236
7.2.3	Condiciones de Cauchy-Riemann en Coordenadas Polares	241
7.3	Funciones Holomorfas	243
7.4	Propiedades de las Funciones Holomorfas	245
7.4.1	Función Constante	245
7.4.2	Funciones Conjugadas y Ortogonalidad	245
7.4.3	Funciones Armónicas	246
7.5	Integración Compleja	250
	Proceso de Cálculo en Coordenadas Cartesianas	250
7.5.1	Integración Paramétrica	252
7.5.2	Curvas en $\mathbb{C}$	253
	Tipos de Curvas	254
	Cambio de Parámetro en una Curva	255
	Parametrizaciones Básicas	257
7.6	Integral Compleja Indefinida: Primitivas	258
7.7	Teorema de Cauchy-Goursat	262
7.7.1	Dominios Simplemente y Múltiplemente Conexos	265
7.7.2	Principio de Deformación de Contornos	266
7.8	Fórmula Integral de Cauchy	268
7.8.1	Derivadas de las Funciones Holomorfas	270
8	Variable Compleja III	271
8.1	Serie Complejas	273
8.1.1	Introducción	273
8.1.2	Sucesiones y Series Complejas	273
8.1.3	Serie de Potencias Compleja	274
8.1.4	Funciones Analíticas	275
8.1.5	Serie de Taylor	276
8.1.6	Serie de Laurent	281
	Introducción: Serie Geométrica	281
	Serie de Laurent	283
	Convergencia de la Serie de Laurent	283
	Estudio de Casos Simples de la Serie de Laurent	285
	Cálculo de Series de Laurent	287
8.2	Singularidades. Ceros y Polos	300

8.2.1	Ceros de una Función	300
	Desarrollo de Taylor	301
8.2.2	Singularidades Aisladas	301
	Punto Singular Evitable	302
	Punto Singular Regular o Polo	303
	Punto Singular Esencial	304
8.3	Residuos	305
8.3.1	Cálculo de Residuos	306
	Residuos en Polos	306
8.3.2	Aplicaciones de los Residuos	311
8.3.3	Cálculo de Integrales Reales Definidas	311
	Integrales Trigonométricas	312
	Integrales Impropias	314
9	Series de Fourier	317
9.1	Introducción	319
9.2	Funciones Periódicas	319
9.3	Espacios Vectoriales de Funciones	320
9.3.1	Funciones Ortogonales	321
9.3.2	Bases de Espacios Vectoriales de Funciones	322
9.4	Serie de Fourier	323
9.4.1	Convergencia de la Serie de Fourier	324
9.4.2	Fenómeno de Gibbs	327
9.4.3	Extensión Periódica de una Función	327
9.4.4	Series de Fourier de Senos y Cosenos	328
	Serie de Fourier de Cosenos	328
	Serie de Fourier de Senos	329
9.4.5	Desarrollo en Semi-intervalos. Series de Senos y Cosenos de una Función	330
9.4.6	Continuidad, Derivabilidad e Integrabilidad de las Series de Fourier	331
	Continuidad de las Series de Fourier	331
	Derivabilidad de las Series de Fourier	331
	Derivación de la Serie de Fourier respecto a un Parámetro	332
	Integrabilidad de las Series de Fourier	333
9.4.7	Forma Compleja de la Serie de Fourier	333
10	Problemas de Autovalores de Sturm-Liouville	335
10.1	Introducción: Problema de Autovalores Matricial	337
10.2	Problema de Autovalores en Operadores Diferenciales	337
10.2.1	Casos Prácticos	337
	Caso 1: Condiciones Frontera de tipo Dirichlet	338
	Caso 2: Condiciones Frontera de tipo Neumann	340
	Caso 3: Condiciones Frontera de tipo Periódico	341
	Resumen	343
10.3	Problema Regular de Sturm-Liouville	344
	Características de los Problemas Regulares de Sturm-Liouville	344
10.3.1	Forma Autoadjunta	347
10.3.2	Serie de Fourier Generalizada	348
10.3.3	Cociente de Rayleigh	351
10.4	Problemas No Regulares de Sturm-Liouville	353
10.4.1	Ortogonalidad en las Funciones de Bessel	355
10.4.2	Serie de Fourier-Bessel	356
11	Ecuaciones en Derivadas Parciales	359
11.1	Introducción	361
	Notación	361
11.1.1	Solución de una EDP	361
11.1.2	Características de las EDP	362
11.1.3	Operadores Diferenciales Lineales	363

Operador Laplaciano 3D en otras Coordenadas	363
Otros Operadores Lineales	364
11.1.4 Clasificación de las EDP	364
11.1.5 Problemas en EDP	366
Tipos de Condiciones	366
11.1.6 Solución de un Problema en EDP	367
11.2 Método de Separación de Variables	367
11.2.1 Procedimiento General	367
11.2.2 Principio de Superposición	370
11.3 Problemas Clásicos en EDP	370
11.4 Ecuación de Calor	370
11.4.1 Transferencia de Calor	370
Transferencia de Calor por Conducción	371
11.4.2 Ecuación del Calor Unidimensional	372
Caso 1: Superficie Lateral Aislada y Condiciones Dirichlet	372
Caso 2: Superficie Lateral Aislada y Condiciones Neumann	374
Caso 3: Condiciones Dirichlet No Homogéneas	377
Caso 4: Superficie Lateral No Aislada	378
Caso 5: Condiciones Dirichlet + Robin	380
11.4.3 Ecuación del Calor en Polares con Simetría Radial	382
11.5 Ecuación de Onda	385
11.5.1 Ecuación de Onda Unidimensional	386
Caso 1: Extremos Fijos (Condiciones Dirichlet)	386
Caso 2: Extremos Móviles (Condiciones Neumann)	388
Caso 3: Extremos Fijo-Móvil (Condiciones Dirichlet-Neumann)	391
11.5.2 Ecuación de Onda en Coordenadas Polares con Simetría Radial	393
11.5.3 Ecuación de Onda en Coordenadas Polares	396
11.6 Ecuación de Laplace	400
11.6.1 Ecuación de Laplace Bidimensional	402
Caso 1: Condiciones Dirichlet (I)	402
Caso 2: Condiciones Dirichlet (II)	404
Caso 3: Condiciones Dirichlet (III)	406
Caso 4: Condiciones Neumann	407
Caso 5: Coordenadas Polares	409
11.7 Problemas de Evolución Bidimensionales	412
11.7.1 Ecuación del Calor Bidimensional en Coordenadas Cartesianas	412
Problema 1: Ecuación de Helmholtz	412
Problema 2: Serie Doble de Fourier	413
11.7.2 Ecuación de Onda Bidimensional en Coordenadas Cartesianas	414
11.7.3 Ecuación del Calor en un Cilindro con Simetría Radial	417
11.8 Unicidad y Condiciones de Compatibilidad en EDP	420
11.8.1 Identidades de Green	421
11.8.2 Estudio de la Unicidad	421
Ecuación de Poisson	421
Ecuación del Calor	422
Ecuación de Onda	422
12 Transformada de Fourier	425
12.1 Introducción	427
12.2 Integral de Fourier	427
12.3 Transformada de Fourier de una Función	428
12.3.1 Condiciones de Existencia	428
12.3.2 Parte Real y Compleja de la Transformada de Fourier	429
Forma Polar o Exponencial de $F(\omega)$	429
12.3.3 Espectro de Fourier	430
12.3.4 Transformadas Inversa de Fourier	431
12.3.5 Tabla de Transformadas de Fourier Elementales	435

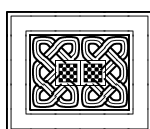
Integrales Importantes	435
12.3.6 Propiedades de la Transformada de Fourier	436
12.3.7 Convolución en la Transformada de Fourier	437
12.4 Aplicaciones de la Transformada de Fourier en EDP	438
12.4.1 Filtrado de Señales	438
12.4.2 Ecuaciones Diferenciales Lineales	438
12.5 Transformada de Fourier en Varias Dimensiones	442
12.5.1 Propiedades de la Transformada de Fourier Multidimensional	443

APÉNDICE 445

A Software Matemático 447

A.0 Software Matemático Simbólico	448
A.1 SageMath	449
A.1.1 <i>SageMath</i> Básico	449
A.1.2 Cálculo III con <i>SageMath</i>	455
Ecuaciones Diferenciales con SageMath	456
A.1.3 Resolución de EDO de Primer Orden	457
Ejemplos	457
A.1.4 Trayectorias Ortogonales	463
Ejemplo	463
A.1.5 EDO Lineales de Orden Superior	466
Ejemplos	466
A.1.6 Problemas de Valores en la Frontera (PVF)	472
A.1.7 Ecuación de Bessel	473
Funciones de Bessel en <i>SageMath</i>	474
Resolución de la Ecuación de Bessel	475
A.1.8 Sistemas de EDO (SEDO)	476
A.1.9 Transformada de Laplace	478
Cálculo y Propiedades de la TL	478
A.1.10 Descomposición en Fracciones Simples	482
A.1.11 Resolución EDO con TL	483
A.1.12 Resolución SEDO con Transformada de Laplace	485
A.1.13 Ecuaciones Integrales e Integrodiferenciales	486
A.1.14 Convolución	487
A.1.15 Función Delta de Dirac	491
A.1.16 Series de Fourier	492
Función Definida a Trozos	493
A.1.17 Problemas de Sturm-Liouville	497
A.1.18 Ecuaciones en Derivadas Parciales	506
EDP de Primer Orden	507
Ecuación del Calor Unidimensional	508
Ecuación del Calor en Polares con Simetría Radial	511

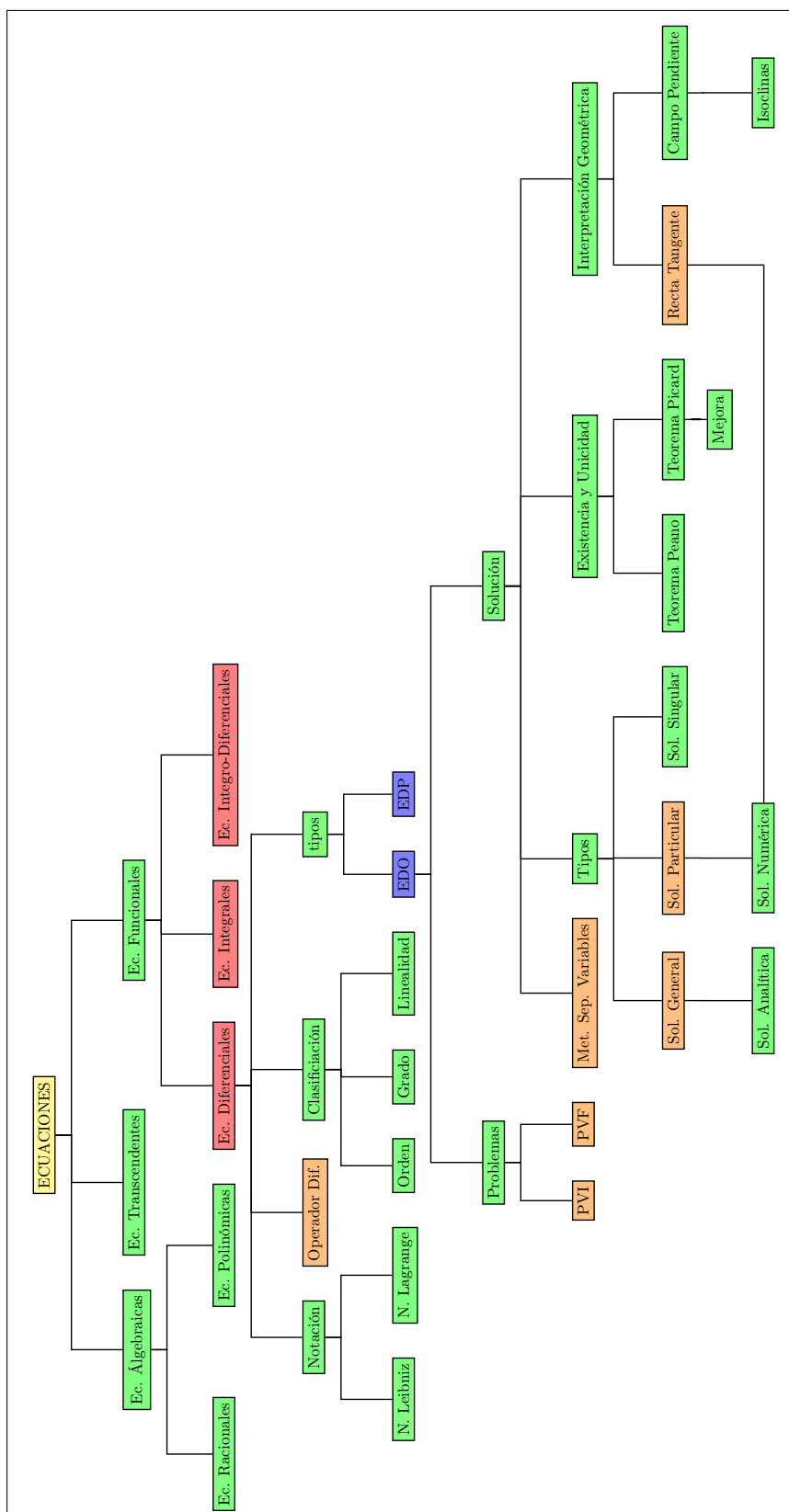
Bibliografía 517



Introducción a las Ecuaciones Diferenciales

Contenido

1.1 Ecuaciones	3
1.1.1 Tipos de Ecuaciones	3
1.1.2 Ecuaciones Funcionales	3
1.2 Ecuaciones Diferenciales	4
1.2.1 Notación de las Derivadas	4
1.2.2 Análisis Matemático	6
1.2.3 Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales	7
1.3 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)	10
1.3.1 Funciones de Clase C^n	10
1.3.2 Solución o Curva Integral de una EDO	11
1.3.3 Resolución de EDO Simples	12
1.3.4 Familias de Soluciones	14
1.3.5 Tipos de Problemas con EDO	14
1.3.6 Tipos de Soluciones de una EDO	16
1.4 Existencia y Unicidad de Soluciones	18
1.5 Representación Gráfica de las EDO	21
1.5.1 Interpretación Geométrica de una EDO	21
1.5.2 Solución Numérica: Método de Euler	21
1.5.3 Campo de Pendientes o Campo Direccional	22
1.5.4 Isoclinas	23



1.1. Ecuaciones

Definición 1.1. Ecuación

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones matemáticas, denominadas *miembros*, en las que aparecen elementos conocidos o *datos*, y desconocidos o *incógnitas*, relacionados mediante operaciones matemáticas.

- Se denomina **solución** de una ecuación al conjunto de valores de las *incógnitas* que verifican la ecuación.
- **Resolver** una ecuación es hallar (en caso de que existan) sus *soluciones*.

1.1.1. Tipos de Ecuaciones

Hay diferentes tipos de ecuaciones entre las que destacan:

- **Ecuaciones algebraicas:** son todas aquellas que se basan en operaciones algebraicas¹. Este tipo de ecuaciones son las más comunes y las podemos subdividir en:
 - **Ecuaciones polinómicas:** donde la incógnita es la variable de un polinomio. Las hay de diferentes grados en función de la mayor potencia del polinomio.
 - **Ecuaciones racionales:** son aquellas que están formadas por cocientes de polinomios.
 - **Ecuaciones diofánticas:** son aquellas cuyas soluciones son solo números enteros $\mathbb{Z}$.
- **Ecuaciones trascendentes:** aquellas que involucran funciones no polinómicas, como funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, etc.
- **Ecuaciones funcionales:** en ellas la incógnita es una *función* y no se pueden reducir² a ecuaciones algebraicas ni trascendentes.

Ejemplo 1.1. Tipos de ecuaciones

- $2x + 3 = 5 - x$ $\longrightarrow$ Ec. algebraica, polinómica de primer grado o lineal.
- $2x + y = 0$ $\longrightarrow$ Ec. lineal con dos incógnitas.
- $ax^2 + bx + c = 0$ $\longrightarrow$ Ec. polinómica de 2º grado, con coeficientes a , b y c .
- $\frac{3x^2 - x + 1}{x^3 + 1} = 6x + 2$ $\longrightarrow$ Ec. racional
- $\sin(x + 1) + \ln(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ $\longrightarrow$ Ec. trascendente.
- $3f(x) - \frac{d}{dx}f(x) = \tan(x) - 1$ $\longrightarrow$ Ec. funcional con incógnita $f(x)$.

1.1.2. Ecuaciones Funcionales

Definición 1.2. Ecuación funcional

Las ecuaciones funcionales representan una relación entre *variables independientes* y *funciones incógnitas* cuya expresión y/o valor se quiere conocer.

¹Suma, resta, multiplicación y división.

²Por lo menos de una forma sencilla.

Clasificación de las Ecuaciones Funcionales

Hay diferentes tipos de ecuaciones funcionales entre las que podemos destacar las siguientes³:

$$\text{Ecuaciones Funcionales} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuaciones Diferenciales} \left\{ \begin{array}{ll} \text{ordinarias} & : \frac{df}{dx} + x f^2 = 0 \\ \text{en derivadas parciales} & : y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \\ \text{Ecuaciones Integrales} & : x^2 f + \int x f dx = 0 \\ \text{Ecuaciones Integro-diferenciales} & : f \frac{df}{dx} + \int x f dx = 0 \end{array} \right.$$

En este curso nos centraremos fundamentalmente en las *ecuaciones diferenciales* aunque también se verán algunos ejemplos de *ecuaciones integrales* e *integro-diferenciales* en la [Sección 5.5.4, página 170](#).

1.2. Ecuaciones Diferenciales

Definición 1.3. Ecuación Diferencial

Una **ecuación diferencial** es una ecuación que relaciona una *función* (variable dependiente), su *variable* o *variables independientes* y **al menos una** de sus *derivadas*.

Ejemplo 1.2. Ejemplos de ecuaciones diferenciales

$$y' = -ky \quad ; \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2)y = 0 \quad ; \quad a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial t}$$

1.2.1. Notación de las Derivadas

Hay diferentes formas de denotar las derivadas de una función, para verlas vamos a considerar dos funciones:

- $f(x)$: función dependiente de una única variable independiente x .
- $z(x, y)$: función dependiente de dos variables independientes x e y .

Notación de Leibniz

Se basa en el cociente de *diferenciales*⁴, siendo muy utilizada sobre todo en derivadas parciales al quedar claro el orden de la derivada (en el numerador) y la relación y orden de las variables con respecto a las que se deriva (en el denominador).

- Primera derivada⁵

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} z(x, y) \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} z(x, y)$$

- Segunda derivada⁶

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{df}{dx} \quad ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}$$

- n-ésima derivada

$$\frac{d^n f}{dx^n} \quad ; \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^m \partial y^{n-m}}$$

³Ver la notación diferencial de Leibniz en [Sección 1.2.1, página 4](#).

⁴Los diferenciales dx , dy , ∂x , ∂y , etc. hacen referencia a valores muy pequeños (*infinitésimos*) de las variables.

⁵Se lee “diferencial de f con respecto a x ” o “diferencial de z con respecto a y ”.

⁶Se lee “diferencial segunda de f con respecto a x dos veces” o “diferencial segunda de z con respecto a x e y ”.

Notación de Lagrange

Es muy utilizada por ser la más simple aunque en ocasiones es insuficientemente clara. Emplea tildes o primas para las primeras derivadas y potencias o números romanos entre paréntesis para las derivadas superiores.

$$\begin{aligned} \bullet \quad f' &= \frac{dy}{dx} \quad , \quad f'' = \frac{d^2y}{dx^2} \quad , \quad f''' = \frac{d^3y}{dx^3} \quad , \quad f^{iv} = \frac{d^4y}{dx^4} \quad , \quad f^v = \frac{d^5y}{dx^5} \\ \bullet \quad f^{(n)} &= \frac{d^n y}{dx^n} \end{aligned}$$

Se lee “ f prima de x ”, “ f segunda de x ”, etc. Una variación de la notación de Lagrange se suele utilizar para referirse a las derivadas parciales, utilizando tildes o sin ellas (más común):

$$\begin{aligned} z_x &= z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} \quad ; \quad z_y = z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} \\ z_{xx} &= z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad ; \quad z_{yy} = z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad ; \quad z_{xy} = z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

Hay otras notaciones como la de Euler⁷ ($D_x f = f'$) o la de Newton ($\dot{x} = f'$, $\ddot{x} = f''$) pero su uso se suele restringir a determinadas áreas de la física, de las matemáticas u otras.

Operador Diferencial

La operación de diferenciación puede representarse a través del símbolo D :

$$D \equiv \frac{d}{dx} \Rightarrow \begin{cases} Dy &= \frac{dy}{dx} \\ D^2y &= D[Dy] = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2y}{dx^2} \\ D^n y &= \frac{d^n y}{dx^n} \end{cases}$$

Definición 1.4. Operador Diferencial

El símbolo⁸ D se denomina **operador**⁹ **diferencial** y transforma una función (diferenciable) en otra función (su derivada).

Nota 1.1. A veces se indica la variable sobre la que se deriva en el subíndice, por ejemplo D_z indica que la variable sobre la que se deriva es z .

Ejemplo 1.3. Operadores diferenciales

- $D[5x^3 - 4 \sin(4x)] = 15x^2 - 16 \cos(4x)$
- $D^2[5x^3 - 4 \sin 4x] = D[D[5x^3 - 4 \sin 4x]] = D[15x^2 - 16 \cos(4x)] = 30x + 64 \sin(4x)$
- $D_{xy}[6x^2 - \sin(xy)] = D_x[D_y[6x^2 - \sin(xy)]] = D_x[-x \cos(xy)] = -\cos(xy) + xy \sin(xy)$

Cualquier expresión polinomial en la que interviene D también es un *operador diferencial*, como por ejemplo:

$$D + 3 \quad ; \quad D^2 + 3D - 4 \quad ; \quad 5D^3 - 6x^3 D^2 + (1 - x^2)D \quad ; \quad \dots$$

⁷En la **Sección 1.2.1, página 5** se verá la utilización del *operador* D .

⁸La primera utilización del símbolo D como operador diferencial se debe al científico inglés Oliver Heaviside (1850-1925), que también da nombre a la *función escalón unitario* (ver la **Definición 5.6, página 155**).

⁹En general un operador matemático es un símbolo que indica una operación especificada sobre un cierto número de operandos (números, funciones, vectores, etc.).

Ejercicio 1.1. Calcular las siguientes expresiones con operadores diferenciales.

a) $(3D - 4)[y^2 + y - 2]$

b) $(x^2D^3 - D)[y^2 + y - 2]$

a)

$$(3D - 4)[y^2 + y - 2] = 3D[y^2 + y - 2] - 4[y^2 + y - 2] = 3(2yy' + y') - 4(y^2 + y - 2) =$$

$$= 6yy' + 3y' - 4y^2 - 4y + 8$$

b) $(x^2D^3 - D)[y^2 + y - 2] = x^2D^3[y^2 + y - 2] - D[y^2 + y - 2] = 0 - (2yy' + y') = -y'(2y + 1)$

Definición 1.5. Operador Diferencial Lineal de orden n

El operador diferencial L de orden n se define como:

$$L \equiv a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + a_1(x)D + a_0(x)$$

Debido a las propiedades de la diferenciación, el operador diferencial L es **lineal**, verificándose:

$$L[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha L[f(x)] + \beta L[g(x)] \quad ; \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Como se verá más adelante¹⁰, una *ecuación diferencial ordinaria lineal* de orden n de la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

se puede representar a través del operador diferencial L de orden n de la forma:

$$L[y] = f(x)$$

1.2.2. Análisis Matemático

Las *ecuaciones diferenciales* son el núcleo principal de la rama de las matemáticas denominada **Análisis Matemático**.

El *Análisis Matemático* empieza con el desarrollo de una formulación rigurosa del *Cálculo* y estudia conceptos relacionados con los números reales y complejos y sus respectivas funciones. Actualmente se puede clasificar en los siguientes campos:

- **Análisis Real:** estudio formalmente riguroso de las derivadas e integrales de las funciones reales univalueadas, lo que incluye el estudio de límites, series de potencias y de las medidas.
- **Análisis Complejo:** estudia funciones complejas de variable compleja que son complejo-diferenciables, denominadas *funciones holomorfas*¹¹.
- **Análisis Armónico:** estudio de las *series de Fourier*¹².
- **Análisis Funcional:** estudia espacios y funciones e introduce conceptos como los espacios de Banach y espacios de Hilbert.
- **Análisis No Estándar:** estudia ciertos números hiperreales¹³ y sus funciones, dando un tratamiento riguroso de los números infinitesimales y los infinitamente grandes.

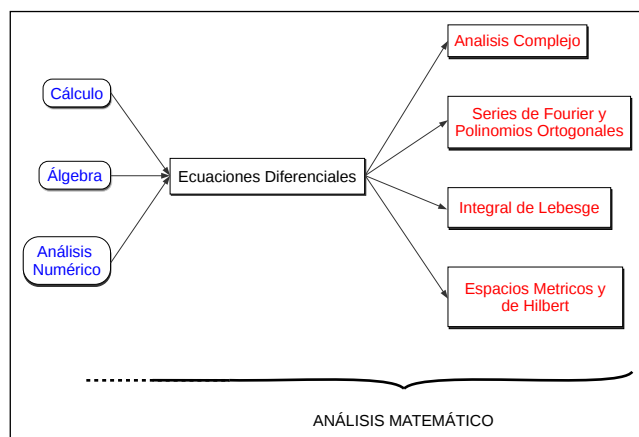
En la siguiente gráfica se muestra de forma esquemática la relación entre diferentes áreas matemáticas y su relación con el *Análisis Matemático*.

¹⁰Ver el Tema 3, página 57.

¹¹Ver la Sección 7.3, página 243.

¹²Ver el Tema 9, página 317.

¹³Los números hiperreales ${}^*\mathbb{R}$ son una extensión de $\mathbb{R}$ al incluir a los números infinitesimales e infinitos.



Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales

Las ecuaciones diferenciales son el área matemática más importante para la comprensión de diferentes ciencias:

- *Física*: mecánica clásica y cuántica, electricidad y magnetismo, relatividad de Einstein, etc.
- *Química*: mezclas, reacciones químicas, etc.
- *Biología*: bio-física
- *Economía*: principio económico de la oferta y la demanda

1.2.3. Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales

Debido a la complejidad de su estudio, las ecuaciones diferenciales se pueden clasificar de diferentes formas, atendiendo a las siguientes características:

1. **Tipo de las derivadas** que aparecen en la ecuación.
2. **Orden y grado** de la ecuación.
3. **Linealidad** de la ecuación.

Clasificación 1: Tipo de las derivadas

Atendiendo al tipo de derivadas, las ecuaciones diferenciales (ED) se clasifican en dos grandes grupos¹⁴:

- **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)**: Son aquellas ED cuya incógnita es una función que depende únicamente de una variable y por tanto las derivadas son respecto a esa variable independiente.

$$y(x) \longrightarrow F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad , \quad y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}$$

donde las derivadas se pueden denotar mediante la notación de Leibniz o de Lagrange¹⁵.

- **Ecuaciones Diferenciales en derivadas Parciales (EDP)**: Son aquellas ED donde la función incógnita depende de varias variables y por tanto las derivadas son con respecto a esas variables independientes.

$$z(x, y, t) \longrightarrow F(x, y, t, z, z_x, z_y, \dots) = 0 \quad , \quad z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

Las derivadas parciales se pueden denotar mediante la notación de Lagrange o mediante el símbolo¹⁶ ∂ utilizando la notación de Leibniz.

La teoría de las EDP es muy diferente de las EDO y con una notable *mayor dificultad* en todas sus facetas.

¹⁴Ver la Sección 1.1.2, página 4.

¹⁵Ver la Sección 1.2.1, página 4.

¹⁶Se asemeja a una letra *d* redondeada y se denomina *d* de Jacobi o *parcial*. Proviene de las traducciones al idioma árabe que se hacían del latín y es una contracción entre las letras *a* y *d*, siendo el origen del actual símbolo de *arroba*, @. No confundir el símbolo ∂ con la letra griega *delta minúscula*, δ .

Ejemplo 1.4. Tipos de ecuaciones diferenciales.

- $y' = -ky \rightarrow$ EDO
- $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2)y = 0 \rightarrow$ EDO
- $a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial t} \rightarrow$ EDP

Clasificación 2: Orden y Grado de la Ecuación**Definición 1.6.** Orden de una Ecuación Diferencial

El **orden** de una ED (ordinaria o en derivadas parciales) es el *orden* de la derivada de mayor orden de la ecuación.

Ejemplo 1.5. Orden de una ecuación diferencial.

- $\frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 4y = e^x \rightarrow$ EDO de **segundo orden**.
- $y''' + 2e^x y'' + yy' = x^4 \rightarrow$ EDO de **tercer orden**.
- $M(x, y) dy + N(x, y) dx = 0 \rightarrow$ EDO de **primer orden**.
- $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow$ EDP de **segundo orden**.

Nota 1.2. Según la notación de Leibniz¹⁷ $y' = \frac{dy}{dx}$, donde dy y dx se denominan respectivamente *diferencial* de y y de x . En determinados casos, los diferenciales pueden aparecer separados.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)} \implies M(x, y) dy + N(x, y) dx = 0$$

En la **Sección 2.5, página 35** se verá una de las utilidades de esto.

Definición 1.7. Grado de una Ecuación Diferencial

El **grado** de una ecuación diferencial es la *potencia* de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación¹⁸.

Ejemplo 1.6. Orden y grado de una ecuación diferencial.

- $e^x \frac{d^2 y}{dx^2} + \sin x \frac{dy}{dx} = x \rightarrow$ EDO de **segundo orden** y **primer grado**.
- $\left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)^2 - 2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^4 + xy = 0 \rightarrow$ EDO de **tercer orden** y **segundo grado**.

¹⁷Ver la **Sección 1.2.1, página 4**.

¹⁸El grado de una ecuación diferencial solo se tiene en cuenta si la ecuación tiene una forma *polinómica*, de no ser así se considera que no tiene grado.

Clasificación 3: Linealidad de la Ecuación

Definición 1.8. Linealidad de una Ecuación Diferencial

Se dice que una ecuación diferencial es **lineal** si cumple simultáneamente las dos siguientes condiciones:

- La variable dependiente y todas sus derivadas son funciones *polinómicas* de *primer grado*.
- Cada término *coeficiente*¹⁹ solo depende, a lo sumo, de la o las variables independientes.

Ejemplo 1.7. Ecuaciones diferenciales lineales y no lineales.

$y'' - 2y' + y = 0$	: EDO lineal	$(1 - y)y' + 2y = e^x$	: EDO no lineal
$\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} - 5y = e^x$	: EDO lineal	$\frac{d^2y}{dx^2} + \text{sen } y = 0$	: EDO no lineal
$(y - x)dx + 4xdy = 0$	: EDO lineal	$\frac{d^4y}{dx^4} + y^2 = 0$	: EDO no lineal
$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x\frac{\partial u}{\partial y} = u$	: EDP lineal	$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u\frac{\partial u}{\partial y} = u$	: EDP no lineal
$u_x + xu_y = yu_{xy}$	: EDP lineal	$(u_x)^2 + uu_y = yu_{xy}$	: EDP no lineal

Nota 1.3. La expresión:

$$M(x, y) dy + N(x, y) dx = 0 \quad \implies \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)} \quad ; \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

puede presentar propiedades de linealidad distinta en las derivadas $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dx}{dy}$.

Ejemplo 1.8. Linealidad de la ecuación: $(y^2 - 1)dx + xdy = 0$

- **No lineal** en y : $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - y^2}{x} \longrightarrow$ Sol. $y(x)$
- **Lineal** en x : $\frac{dx}{dy} = \frac{-x}{y^2 - 1} \longrightarrow$ Sol. $x(y)$

Ejemplo 1.9. Linealidad y orden en EDO.

- $(1 - x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x \longrightarrow$ Lineal de segundo orden
- $(1 + y^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = e^x \longrightarrow$ No lineal de segundo orden
- $t^5y^{(4)} - t^3y'' + 6y = 0 \longrightarrow$ Lineal de cuarto orden
- $e^tx'' + x' \log t = \cos x \longrightarrow$ No lineal de segundo orden

¹⁹Aquel término que multiplica a una derivada.

Ejemplo 1.10. Linealidad y orden en EDP.

- $5 \frac{\partial z}{\partial x} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = 1 - z \rightarrow$ Lineal de primer orden
- $[u_x(x, y)]^2 + u_y(x, y) = 0 \rightarrow$ No Lineal de primer orden
- $u_x(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0 \rightarrow$ Lineal de segundo orden
- $5 \frac{\partial z}{\partial x} + 2w \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} = w + xy \rightarrow$ No Lineal de segundo orden

En éste y los siguientes temas analizaremos las EDO. Las EDP se verán a partir del Tema 11, página 359.

1.3. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)

Definición 1.9. EDO de orden n

Una EDO general de orden n es una ecuación de la forma:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

donde x es la variable independiente, $y(x)$ es la variable dependiente o función incógnita de la ecuación e $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}$ son las derivadas sucesivas de $y(x)$ con respecto a x hasta el grado n .

Las funciones solución $y(x)$ de una EDO deben cumplir una serie de características que veremos a continuación.

1.3.1. Funciones de Clase C^n

En el *Análisis Matemático*²⁰ las funciones se clasifican en base a las propiedades de sus derivadas.

Definición 1.10. Función de Clase C^n

Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo²¹.

- Se dice que la función f es de **clase**²² C^n , siendo²³ $n \in \mathbb{Z}^+$, si sus derivadas $f', f'', \dots, f^{(n)}$ existen y son continuas²⁴.
- Se dice que la función f es de **clase**²⁵ C^∞ , **suave** o **continuamente diferenciable**, si existen todas las derivadas de todos los órdenes de f .

Definición 1.11. Función Analítica

Se dice que una función f es **analítica**²⁶ si es *continuamente diferenciable* y es igual a su correspondiente serie de Taylor²⁷ expandida alrededor de cualquier punto de su dominio U .

²⁰Ver la Sección 1.2.2, página 6.

²¹Puede ser un intervalo abierto (a, b) , cerrado $[a, b]$, infinito (a, ∞) , etc.

²²Leído como "clase c-n".

²³El conjunto $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \dots\}$ es el conjunto de los enteros positivos (sin incluir el cero).

²⁴La continuidad es automática para todas las derivadas excepto para la última $f^{(n)}$.

²⁵Leído como "clase c-infinito".

²⁶Ver la Sección 8.1.4, página 275.

²⁷Ver por ejemplo "Clases de Cálculo I para Ingeniería" en la Bibliografía, pág. 517.

1.3.2. Solución o Curva Integral de una EDO

Definición 1.12. Solución o Curva Integral de una EDO

Dada una EDO,

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

cualquier función $y = f(x)$ de al menos *clase* C^n en un intervalo²⁸ I que verifique la EDO, se denomina **solución** o **curva integral** de la EDO en el intervalo I .

El estudio de las soluciones de una EDO está centrado en dos cuestiones²⁹:

- **Existencia:** Una EDO puede o no tener solución. En caso de tenerla pueden ser un conjunto finito o infinito de funciones.
- **Unicidad**³⁰: Por cada punto del intervalo de definición de la ecuación I puede pasar una o varias soluciones.

Tipos de Solución

La solución de una EDO puede ser de dos tipos:

- **Solución Analítica:** La solución viene dada mediante una expresión matemática (fórmula, desarrollo en serie, etc.)

La solución analítica puede estar en dos formas:

- **Forma explícita** $y = f(x)$: donde la variable dependiente y está despejada en función de la variable independiente x .
- **Forma implícita** $F(y, x) = 0$: donde la variable dependiente y no está despejada, bien porque no se pueda o bien porque resulte más apropiada esta forma.

- **Solución Numérica:** Los valores de la solución son conocidos mediante la aplicación de un algoritmo numérico, teniendo normalmente una determinada precisión.

Las soluciones numéricas son muy importantes en la práctica y existen muchos *métodos numéricos* para encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales de todo tipo.

Generalmente es difícil o incluso imposible encontrar una *solución analítica*³¹ a una EDO. Sin embargo, suele ser *sencillo* comprobar que una determinada función $y = f(x)$ es solución de la misma, calculando para ello las correspondientes derivadas, introduciéndolas en la ecuación y comprobando su veracidad.

Ejercicio 1.2. Dada la EDO:

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

comprobar que las siguientes tres funciones son soluciones de la ecuación:

$$y_1(x) = e^{2x} \quad ; \quad y_2(x) = e^{3x} \quad ; \quad y_3(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \quad y_1 = e^{2x} \quad ; \quad y_1' = 2e^{2x} \quad ; \quad y_1'' = 4e^{2x} \quad \xrightarrow{\text{Ec.}} \quad 4e^{2x} - 10e^{2x} + 6e^{2x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{comprobado}$$

²⁸El intervalo I se denomina *intervalo de definición*, de *validez* o *dominio* de la solución. Puede ser un intervalo abierto (a, b) , cerrado $[a, b]$, infinito (a, ∞) , etc. (ver la [Sección 1.4, página 18](#)).

²⁹Las EDO poseen una teoría compleja sobre la *existencia* y *unicidad* de sus soluciones y en este curso solo se verán algunos detalles de la misma a lo largo de diferentes temas y en diversos tipos de ecuaciones.

³⁰Ver el [Ejemplo 1.15, página 17](#)

³¹Se estima que solo aproximadamente el 0,1% de las EDO resolubles tienen solución analítica. El porcentaje es todavía mucho menor en el caso de las EDP.

- $y_2 = e^{3x}$; $y_2' = 3e^{3x}$; $y_2'' = 9e^{3x} \xrightarrow{\text{Ec.}} 9e^{3x} - 15e^{3x} + 6e^{3x} = 0 \implies$ comprobado
- $y_3 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$; $y_3' = 2c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{3x}$; $y_3'' = 4c_1 e^{2x} + 9c_2 e^{3x} \xrightarrow{\text{Ec.}}$
 $[4c_1 e^{2x} + 9c_2 e^{3x}] - [10c_1 e^{2x} + 15c_2 e^{3x}] + [6c_1 e^{2x} + 6c_2 e^{3x}] = 0 \implies$ comprobado

Ejercicio 1.3. Comprobar que la función implícita: $xy = \log y + c$; $c \in \mathbb{R}$
 es solución de la EDO: $y' = \frac{y^2}{1 - xy}$.

Derivamos con respecto a la variable independiente x ambas partes de la función implícita, teniendo en cuenta que la derivada de la constante c con respecto a x es cero.

$$xy = \log y + c \quad ; \quad (xy)' = (\log y + c)' \quad ; \quad y + xy' = \frac{y'}{y}$$

Ahora reagrupamos y despejamos la derivada y' :

$$\frac{y'}{y} - xy' = y \quad ; \quad \frac{y' - xyy'}{y} = y \quad ; \quad \boxed{y' = \frac{y^2}{1 - xy}}$$

Comprobamos que dicho resultado corresponde con la EDO dada en el enunciado, lo que confirma que la función inicial es una solución analítica en forma implícita de dicha EDO.

1.3.3. Resolución de EDO Simples

Generalmente es necesario un método numérico para poder encontrar la solución de la mayoría de las EDO. Sin embargo, para determinados casos existen métodos matemáticos que permiten encontrar la *solución analítica*³² de la ecuación. En esta sección vamos a ver uno de estos métodos, conocido como **separación de variables**³³, que aun siendo bastante simple posee una gran importancia y aplicabilidad. Vamos a considerar una EDO general de primer orden *explícita* o en *forma normal*³⁴:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = F(x, y)} \implies \begin{cases} x & : \text{Variable independiente.} \\ y = f(x) & : \text{Variable dependiente de } x. \text{ Solución buscada.} \\ F(x, y) & : \text{Función escalar de varias variables.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Definición 1.13. Función de Variables Separables

Se dice que una función $F(x, y)$ es de *variables separables* si puede expresarse como producto de dos funciones, una dependiente solo de la variable independiente x y otra dependiente solo de la variable dependiente y , de la siguiente forma:

$$F(x, y) = g(x)h(y)$$

Método de Separación de Variables

Si la función $F(x, y)$ es de *variables separables*, la **Ecuación (1.1)** se puede resolver utilizando el *método de separación de variables* de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) = g(x)h(y) \quad ; \quad \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx \quad ; \quad \boxed{\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx} \quad (1.2)$$

³²Ver la **Sección 1.3.2**, página 11.

³³Ver también la **Sección 2.2**, página 29.

³⁴Una EDO de primer orden se dice que es *explícita* si está despejada su primera derivada, e *implícita* en caso contrario. Cuando la EDO está en forma explícita se dice que está en *forma normal*.

En el caso de que se puedan calcular ambas *integrales indefinidas* se puede obtener las *funciones solución*³⁵ de la ecuación. Al resolver las integrales indefinidas aparecen dos **constantes de integración**, que se pueden simplificar en una sola de la siguiente forma:

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx \quad ; \quad H(y) + c_1 = G(x) + c_2 \quad ; \quad \boxed{H(y) = G(x) + c} \quad (1.3)$$

siendo ésta una **familia de soluciones**³⁶ de la EDO, con $H(y)$ y $G(x)$ *funciones primitivas*³⁷ de $1/h(y)$ y $g(x)$ respectivamente, c_1 y c_2 son las constantes de integración y $c = c_2 - c_1$ una única constante de integración simplificada.

Definición 1.14. Parámetro

Un *parámetro* es una entidad **distinta de las variables** cuyos valores dan lugar a diferentes casos en una función o problema.

La constante c en la *familia de soluciones* funciona como un **parámetro** dando lugar a un conjunto infinito de soluciones de la EDO³⁸, una por cada valor que se le asigne a c .

Solución Singular

Notar que la primera integral izquierda de la ecuación (1.2) solo tiene sentido si $h(y) \neq 0$. Los casos particulares $h(y) = 0$ hay que estudiarlos aparte para determinar si las funciones solución de esa ecuación son soluciones de la EDO o no. En caso afirmativo hay que comprobar si están contenidas en la *familia de soluciones*, ya que si no fuera así correspondería con lo que se conoce como una **solución singular o extraña**³⁹ de la EDO. También es posible que existan valores de la variable independiente x que den lugar a que no exista la integral de la derecha. Esos valores habría que analizarlos en la solución ya que pueden indicar puntos que no pertenecen al dominio o con comportamientos particulares.

Ejercicio 1.4. Resolver las siguientes EDO simples mediante el método de separación de variables:

$$a) \frac{dy}{dx} = 5 \quad b) \frac{dy}{dx} = 4x^2 + 3x - 2 \quad c) \frac{dy}{dt} = -y \quad d) \frac{dy}{dt} = 10t^2 x^3 y^5$$

$$\bullet a) \frac{dy}{dx} = 5 \quad ; \quad \int dy = \int 5 dx \quad ; \quad \boxed{y = 5x + c} \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\bullet b) \frac{dy}{dx} = 4x^2 + 3x - 2 \quad ; \quad \int dy = \int (4x^2 + 3x - 2) dx \quad ; \quad \boxed{y = \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x + c} \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\bullet c) \frac{dy}{dt} = -y \quad ; \quad \int \frac{dy}{y} = - \int dt \quad ; \quad \ln y = -t + c \quad ; \quad y = e^{-t+c} = e^{-t} e^c \quad ; \quad \boxed{y = k e^{-t}} \quad , \quad k = e^c \in \mathbb{R}$$

La primera integral de la izquierda no tiene sentido para $y = 0$, comprobándose fácilmente que ésta es solución de la EDO. Sin embargo no es una solución singular al poder obtenerse de la familia de soluciones obtenida, para el valor particular $k = 0$.

$$\bullet d) \frac{dy}{dt} = 10t^2 x^3 y^5 \quad ; \quad \int \frac{dy}{y^5} = 10x^3 \int t^2 dt \quad ; \quad \boxed{\frac{-1}{4y^4} = 10x^3 \left(\frac{t^3}{3} + c \right)} \quad ; \quad c \in \mathbb{R} \quad ; \quad \boxed{y = 0}$$

Notar que en este último caso la variable x funciona como un *parámetro* ya que no es ni la variable dependiente t ni la variable independiente y . La constante de integración c es otro parámetro. Notar también que $y = 0$ sí es una solución singular de la EDO.

³⁵En forma explícita, $y = f(x)$, o bien en forma implícita, $f(x, y) = 0$.

³⁶Ver la **Sección 1.3.4, página 14**.

³⁷Es decir, funciones que cumplen $[H(y)]' = 1/h(y)$ y $[G(x)]' = g(x)$.

³⁸Lo cual no significa que necesariamente sean todas las soluciones que posea la EDO. Ver la **Sección 1.3.2, página 11** y la **Sección 1.3.6, página 16**.

³⁹Ver la **Definición 1.19, página 16**.

Podemos utilizar algún software matemático que permita el cálculo simbólico⁴⁰ para resolver estos problemas⁴¹.

1.3.4. Familias de Soluciones

Como hemos visto en la sección anterior, cuando se resuelve una EDO aparecen *parámetros* como consecuencia de las constantes de integración que utilizamos en los métodos de resolución. Esto da lugar a *conjuntos de funciones solución* que se denominan *familias de soluciones*.

Definición 1.15. Familia de Soluciones

- Una solución⁴² $F(x; c)$ de una EDO que contiene un *parámetro* c representa un conjunto infinito de funciones⁴³ (una por cada valor de c) denominada **familia uniparamétrica de soluciones** de la EDO.
- Una solución $F(x; c_1, c_2, \dots, c_n)$ de una EDO que contiene n *parámetros* c_i representa un conjunto infinito de funciones (una por cada valor del vector $[c_1, \dots, c_n]$) que se denomina **familia n -paramétrica de soluciones** de la EDO.

Ejemplo 1.11. Familia de soluciones

La siguiente EDO: $y'' + y' + 1 = 0$
tiene infinitas funciones solución dadas por la siguiente *familia de soluciones* con dos parámetros, c_1 y c_2 :

$$y = c_1 e^{-x} - x + c_2 \quad ; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

1.3.5. Tipos de Problemas con EDO

Definición 1.16. Problema con EDO

Un **problema** con EDO es el conjunto formado por una EDO más unas **condiciones** adicionales que definen de forma precisa la solución de la ecuación.

Los problemas con EDO permiten obtener una única función solución (*curva integral*) en lugar de una *familia de soluciones*.

Los problemas con EDO se clasifican en dos tipos, en base a las *condiciones* que se añaden a la EDO y que permiten especificar cual de las infinitas funciones de una familia de curvas es la solución específica que se requiere. Estos tipos de problema son⁴⁴:

- Problemas de valores iniciales (PVI)
- Problemas de frontera o de contorno (PVF)

⁴⁰Los programas más conocidos son Mathematica, Maple y Matlab entre los comerciales y Sage, Maxima y Octave entre los de dominio público.

⁴¹En muchos casos resultan muy útiles para comprobar los cálculos realizados a mano.

⁴²Cuando una función depende de algún parámetro se suele utilizar punto y coma para indicar que no son variables independientes lo que viene a continuación, pero sí valores de los que depende la función.

⁴³De forma general representa lo que se denomina una *familia de curvas*, ver la [Sección 2.11.1, página 48](#).

⁴⁴Ver la [Sección 3.1.3, página 60](#).

Problema de Valores Iniciales (PVI)

Definición 1.17. Problema de Valores Iniciales (PVI)

Se denomina **problema de valores iniciales** (PVI) o **de Cauchy**, al conjunto formado por una EDO y unas **condiciones iniciales**⁴⁵ $y^{(k)}(x_0)$ evaluadas en un mismo valor x_0 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{EDO a resolver: } F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \\ \text{Sujeta a: } \underbrace{y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n)}(x_0) = y_0^{(n-1)}}_{\text{Condiciones Iniciales}} \end{array} \right.$$

El número de *condiciones iniciales* tiene que ser siempre igual al **orden**⁴⁶ de la EDO.

Ejemplo 1.12. Problemas de valor inicial (PVI) para EDO de primer y segundo orden.

$$a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = xy - \sen x^2 \\ y(3) = -10 \end{array} \right. ; \quad b) \quad \left\{ \begin{array}{l} y'' - y' + xy - \sen x^2 = 0 \\ y(-1) = 0 \\ y'(-1) = 2 \end{array} \right.$$

Problema de Frontera o de Contorno (PVF)

Definición 1.18. Problema de Valores Frontera (PVF)

Se denomina **problema de valores frontera** (PVF), **de contorno** o **de Dirichlet**, al conjunto formado por una EDO y unas **condiciones frontera** o **de contorno** $y^{(k_i)}(x_i)$ evaluadas en valores x_i :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{EDO a resolver: } F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \\ \text{Sujeta a: } \underbrace{y^{(k_1)}(x_1) = y_1, y^{(k_2)}(x_2) = y_2, \dots, y^{(k_n)}(x_n) = y_n}_{\text{Condiciones Frontera o de Contorno}} \end{array} \right.$$

Las n condiciones frontera están dadas en valores x_i (no todos iguales) y en valores de las derivadas k_i iguales o distintas.

Ejemplo 1.13. Problemas con condiciones frontera o de contorno

$$a) \quad \left\{ \begin{array}{l} y'' - y' + xy - \sen x^2 = 0 \\ y(0) = 0 \quad ; \quad y(1) = 2 \end{array} \right. \quad b) \quad \left\{ \begin{array}{l} y''' + 2y = t + 1 \\ y(1) = 0 \quad ; \quad y'(0) = 1 \quad ; \quad y''(1) = 1 \end{array} \right.$$

⁴⁵El término *condición inicial* proviene de los sistemas físicos en los que la variable independiente es el tiempo t y donde $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y'_0$ representan respectivamente, la posición y velocidad *iniciales* a tiempo t_0 . El valor t_0 es en muchos casos cero, aunque puede ser cualquier otro valor.

⁴⁶Ver la **Definición 1.6**, página 8.

1.3.6. Tipos de Soluciones de una EDO

Las familias de soluciones pueden representar todas las soluciones posibles de una EDO o bien solo una parte de ellas.

Definición 1.19. Solución General, Particular y Singular

- La **solución general** de una EDO es una *familia de soluciones*⁴⁷ (con uno o varios parámetros) que contiene todas las funciones solución de la ecuación.

$$y = F(x; c_1, \dots, c_n) \implies \boxed{\text{Solución General}}$$

- Se denomina **solución particular** de una EDO a cada una de las curvas de una familia de soluciones, correspondientes a unos valores concretos c_{i0} de los parámetros c_i .

$$y = F(x; c_1 = c_{10}, \dots, c_n = c_{n0}) \implies \boxed{\text{Solución Particular}}$$

Los valores concretos de los parámetros se determinan a través de unas apropiadas *condiciones iniciales* o *de frontera*⁴⁸ del problema.

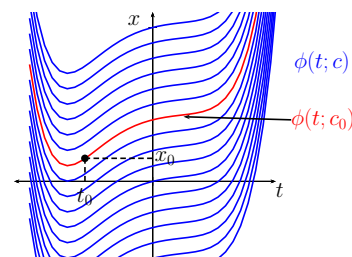
- Una **solución singular** o **extraña**⁴⁹ de una EDO es una *curva integral*⁵⁰ que no pertenece a ninguna *familia de soluciones* y por tanto ni tiene ni depende de ningún parámetro. También se pueden determinar a través de unas apropiadas *condiciones iniciales* o *de frontera* del problema.

$$y = F(x) \implies \boxed{\text{Solución Singular}}$$

Ejemplo 1.14. Solución general

En la siguiente gráfica se muestra la *solución general* de una determinada EDO (familia uniparamétrica de curvas en color azul) y una *solución particular* para unas determinadas *condiciones iniciales* (curva en color rojo).

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, t) \implies \boxed{x = \phi(t; c)} \\ x(t_0) = x_0 \implies \boxed{x = \phi(t; c_0)} \end{cases}$$



Podemos observar como las soluciones corresponden a *curvas integrales* que no se cortan en ningún punto del dominio, lo que indica que esta EDO cumple la *propiedad de unicidad* de sus soluciones⁵¹.

⁴⁷Ver la Definición 1.15, página 14.

⁴⁸Ver la Sección 1.3.5, página 14.

⁴⁹Ver la Sección 1.3.3, página 13.

⁵⁰Ver la Definición 1.12, página 11.

⁵¹Es decir, que por cada punto del dominio pasa únicamente una única *curva integral*, ver la Sección 1.3.2, página 11.

Ejercicio 1.5. Sabiendo que la siguiente EDO no tiene *soluciones singulares*, encontrar su solución general y la solución particular del siguiente PVI:

$$\begin{cases} y' = y \sen x \\ y(\pi) = 2 \end{cases}$$

Primero calculamos la *solución general*, aplicando el *método de separación de variables*⁵²:

$$y' = \frac{dy}{dx} = y \sen x \quad ; \quad \frac{dy}{y} = \sen x \, dx \quad ; \quad \int \frac{dy}{y} = \int \sen x \, dx \quad ; \quad \ln y + \ln c = \ln(cy) = -\cos x$$

$$y = ce^{-\cos x} \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

Para calcular la *solución particular*, es necesario primero calcular el valor del parámetro c . Para ello, aplicando las *condiciones iniciales* se tiene:

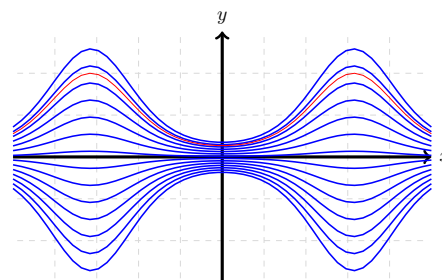
$$y(\pi) = 2 \quad \implies \quad 2 = ce^{-\cos \pi} = ce^{-(-1)} = ce \quad ; \quad c = \frac{2}{e} = 2e^{-1}$$

Finalmente la *solución particular* se obtiene sustituyendo el valor de c en la *solución general*:

$$y = 2e^{-1}e^{-\cos x} = 2e^{-(1+\cos x)}$$

En la siguiente gráfica se muestra una representación de la familia de curvas correspondiente a la solución general (en azul) y la curva de la solución particular (en rojo) para este caso.

Al igual que en el **Ejemplo 1.14**, página 16, esta EDO cumple la propiedad de unicidad en sus soluciones.



Ejemplo 1.15. Familia de curvas y solución singular

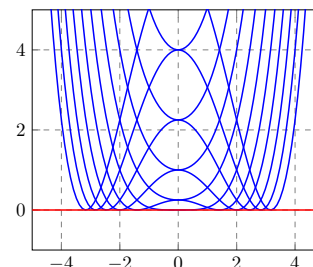
En la siguiente EDO,

$$y' = x\sqrt{y}$$

se puede encontrar fácilmente mediante el *método de separación de variables*⁵³ una familia de curvas solución $y(x)$. Además es fácil comprobar que $y = 0$ también es solución (singular) de la ecuación, que denotaremos por y_s .

Soluciones:
$$\begin{cases} y(x) = \frac{1}{16}(x^2 + c)^2 \\ y_s = 0 \end{cases}$$

Podemos observar como la solución singular y_s no se puede obtener dando algún valor al parámetro c de la familia de curvas $y(x)$. Además, vemos como las curvas integrales se cruzan en el dominio de definición de la EDO ($y \geq 0$), lo que indica que no se cumple la propiedad de *unicidad* en las soluciones de esta EDO (ver la **Sección 1.3.2**, página 11).



⁵²De forma general, todas las constantes de integración que van apareciendo en el proceso de cálculo, se suelen denominar mediante la letra c , aunque como consecuencia de las distintas operaciones realizadas, no necesariamente todas corresponden con el mismo parámetro.

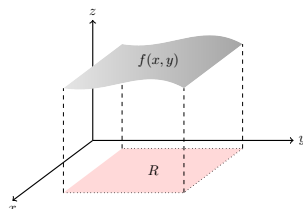
⁵³Ver la **Sección 1.3.3**, página 12.

1.4. Existencia y Unicidad de Soluciones

En esta sección vamos a estudiar tres teoremas⁵⁴ relativos a la existencia y unicidad de las soluciones de las EDO explícitas de primer orden, del tipo:

$$y' = f(x, y)$$

En ellos se analiza el comportamiento de la función $z = f(x, y)$ en un rectángulo cerrado R del plano $x - y$.



Teorema 1.1. Existencia de Peano

Dada la EDO $y' = f(x, y)$, si $f(x, y)$ es una función *continua* en un rectángulo cerrado R del plano $x - y$, entonces por cada punto (x_0, y_0) del interior de R pasa **al menos** una *curva integral*.

- La condición de continuidad de $f(x, y)$ en el teorema de Peano, es *suficiente*, pero no necesaria. En caso de no cumplirse la solución puede existir o no.
- El teorema garantiza la existencia pero no la unicidad, pudiendo existir más de una solución por cada punto de R .

Ejercicio 1.6. Dada la siguiente EDO:

$$y' = y^{2/3}$$

- Comprobar el teorema de Peano en esta ecuación.
- Resolver la EDO.
- Dibujar su familia de curvas y discutir la unicidad de las soluciones.

a) Como: $y' = f(x, y) = \sqrt[3]{y^2}$.

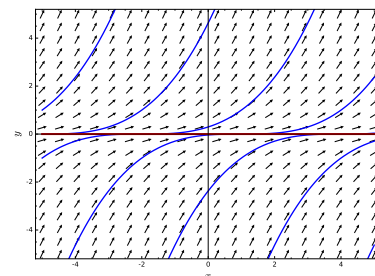
La función $f(x, y)$ existe y es continua en todo $\mathbb{R}^2$, por tanto cumple la condición del teorema de Peano y podemos afirmar que existen las soluciones de esta EDO para todo punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Como es de variables separables⁵⁵, su solución general⁵⁶ es:

$$\frac{dy}{dx} = y^{2/3} \quad ; \quad y^{-2/3} dy = dx \quad ; \quad \int y^{-2/3} dy = \int dx \quad ; \quad 3y^{1/3} = x + c \quad \Rightarrow \quad y = \left(\frac{x+c}{3} \right)^3 \quad (1.4)$$

c) En la siguiente gráfica se muestran algunas curvas integrales correspondientes a la familia de curvas de la solución general, **Ecuación (1.4)**.

Claramente la función $y = 0$ es solución de la ecuación (dibujada en color rojo), y como no se puede obtener de la **Ecuación (1.4)**, se trata de una *solución singular*⁵⁷. En la gráfica podemos observar como todos los puntos de la recta $y = 0$ son cortados por las curvas de la familia de soluciones obtenidas en el apartado b), lo cual indica que por estos infinitos puntos $(x_0, 0)$ pasan dos soluciones:



⁵⁴No se verán sus demostraciones por salirse del ámbito de este curso.

$$y_1(x) = 0 \quad ; \quad y_2(x) = \left(\frac{x - x_0}{3}\right)^3$$

Confirmamos que el teorema de Peano garantiza la existencia de soluciones pero no su unicidad.

Ejercicio 1.7. Analizar la existencia y unicidad de la EDO:

$$y' = \frac{1}{x}$$

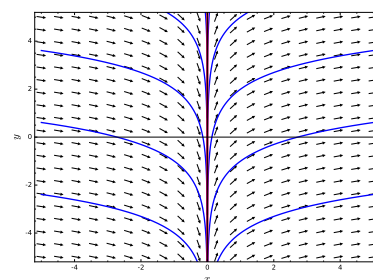
Como en este caso $f(x, y) = \frac{1}{x}$, se cumple el teorema de Peano $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, y)\}$, por tanto en todos esos puntos está garantizada la existencia de solución.

Vemos que en $x = 0$ la pendiente de la posible solución se hace infinita, esto por sí solo no indica la existencia o no de soluciones en estos puntos⁵⁸.

Resolviendo la EDO:

$$dy = \frac{dx}{x} \quad ; \quad y = \log |x| + c$$

Claramente esta solución no es válida para $x = 0$. En la gráfica de la izquierda se muestran algunas curvas integrales. Concluimos que las soluciones de ecuación existen y son únicas $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, y)\}$, mientras que para los puntos de la recta vertical $x = 0$ (representada en rojo en la gráfica) no existen soluciones.



Ejercicio 1.8. Analizar la existencia y unicidad de la EDO:

$$y' = \frac{1}{y}$$

Como en este caso $f(x, y) = \frac{1}{y}$, se cumple el teorema de Peano $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(x, 0)\}$, por tanto en todos esos puntos está garantizada la existencia de solución.

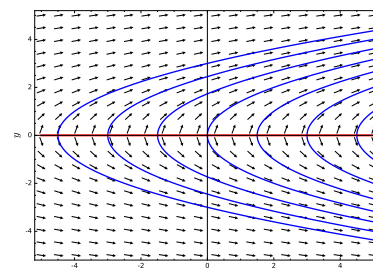
Vemos que en $y = 0$ la pendiente de la posible solución se hace infinita, y como el caso anterior, esto por sí solo no indica la existencia o no de soluciones en estos puntos.

Resolviendo la EDO:

$$y dy = dx \quad ; \quad y^2 = 2(x + c) = 2x + c \quad ; \quad y = \sqrt{2x + c}$$

En la gráfica de la izquierda se muestran algunas curvas integrales. Para cada valor de c hay una curva definida en el intervalo $[-c/2, \infty)$. En $x = -c/2$ el valor y se anula y tiene pendiente infinita, pero está perfectamente definida.

Concluimos que las soluciones de ecuación existen y son únicas $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. En los puntos de la recta horizontal $y = 0$ (en rojo) la pendiente de la curva se hace infinita.



⁵⁵Ver la Sección 1.3.3, página 12.

⁵⁶Ver la Sección 1.3.6, página 16.

⁵⁷Ver la Definición 1.19, página 16.

⁵⁸Ver el Ejercicio 1.8, página 19.

Teorema 1.2. Unicidad de Picard

Dada la EDO $y' = f(x, y)$, si $f(x, y)$ y $f_y(x, y)$ son funciones continuas en un rectángulo cerrado R del plano $x - y$, entonces por cada punto (x_0, y_0) del interior de R pasa una **única curva integral**.

Las condiciones del teorema de Picard, *son suficientes, pero no necesarias*. En caso de que **no** se verifiquen, no puede asegurarse nada.

Ejercicio 1.9. Verificar el teorema de Picard y comprobar su resultado en el **Ejercicio 1.6**, **Ejercicio 1.7** y **Ejercicio 1.8**.

• **Ejercicio 1.6 :** $y' = y^{(2/3)} \implies f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3}y^{-1/3}$

La función $f(x, y)$ siempre es continua y $f_y(x, y)$ es continua $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(x, 0)\}$. Por tanto podemos asegurar la unicidad en todos los puntos menos los de la recta $y = 0$. En el problema vimos que por esos puntos pasaban dos soluciones.

• **Ejercicio 1.7 :** $y' = \frac{1}{x} \implies f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

La función $f_y(x, y)$ siempre es continua y $f(x, y)$ es continua $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, y)\}$. Por tanto podemos asegurar la unicidad en todos los puntos menos los de la recta $x = 0$. En el problema vimos que por esos puntos no hay solución.

• **Ejercicio 1.8 :** $y' = \frac{1}{y} \implies f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}$

Este caso es análogo al **Ejercicio 1.6**, pero aquí las soluciones existen y son únicas.

Mejora de las Condiciones del Teorema de Picard

Hay un teorema más potente que el de Picard con respecto a la unicidad de soluciones de una EDO. Veamos primero una definición y luego el teorema correspondiente.

Definición 1.20. Condición de Lipschitz

Se dice que una función $f(x, y)$ cumple la **condición de Lipschitz** o es **Lipschitziana** en la variable y en un rectángulo R del plano $x - y$ si existe una constante k tal que:

$$|f(x_1, y_1) - f(x, y_2)| \leq k|y_1 - y_2| \quad ; \quad k \in \mathbb{R}$$

Teorema 1.3. Unicidad de Picard-Lindelöf

Dada una EDO $y' = f(x, y)$, si $f(x, y)$ es continua en la variable x y verifica la condición de Lipschitz en la variable y , ambos en un rectángulo cerrado R del plano $x - y$, entonces por cada punto (x_0, y_0) del interior de R pasa una **única curva integral**⁵⁹.

⁵⁹Tener en cuenta que esto establece la unicidad en los PVI, pero no necesariamente en los PVF.

- La condición de Lipschitz asegura la continuidad uniforme de la variable y , por eso solo se exige en la variable x .
- La condición de Lipschitz es menos exigente ya que no es necesario que exista $f_y(x, y)$, basta con que el siguiente cociente, que aparece en la definición de la derivada parcial, está acotado en R .

$$\left| \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2} \right| \sim \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$$

- De esta forma se llega a un teorema más potente, ya que hay funciones que carecen de derivadas parciales continuas pero son Lipschitzianas.

Los teoremas de Picard y Picard-Lindelöf se pueden generalizar a EDO de orden n en las que puede despejarse $y^{(n)}$, con las mismas condiciones y resultados.

1.5. Representación Gráfica de las EDO

1.5.1. Interpretación Geométrica de una EDO

En una EDO de primer orden explícita (forma normal):

$$y' = f(x, y)$$

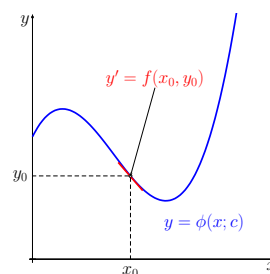
el valor de la función $f(x, y)$ corresponde con la *pendiente* de la curva solución $y = \phi(x; c)$ en cada punto (x, y) del dominio.

En esta gráfica se muestra una curva solución:

$$y = \phi(x; c)$$

para un valor particular c . La función $f(x, y)$ nos da la pendiente de la recta tangente a la curva y en cada punto (x, y) de la curva solución.

Esta información es útil para tener un conocimiento *geométrico* de la solución de una EDO.



Además, este concepto se puede utilizar como método numérico para encontrar soluciones numéricas de EDO y para representar diferentes tipos de gráficas muy útiles en el análisis del comportamiento de las soluciones de una EDO.

1.5.2. Solución Numérica: Método de Euler

Vamos a ver un método sencillo denominado *Método de Euler*, para encontrar la solución numérica un PVI del tipo:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

La solución numérica consiste en una colección de valores (x_i, y_i) en un dominio determinado $[x_0, y_f]$, que representan una *aproximación* a los valores exactos que se podrían obtener mediante la solución analítica del problema⁶⁰.

⁶⁰Recordar que la solución analítica solo se puede obtener en una cantidad muy pequeña de problemas sencillos, de forma que generalmente siempre se tiene que recurrir a un método numérico para obtener la solución de una ecuación diferencial.

Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Partimos de las condiciones iniciales dadas por el problema (x_0, y_0) .
2. Vamos a obtener primeramente la solución aproximada y_1 en un punto $x_1 = x_0 + h$ donde h es un valor pequeño⁶¹. Para ello vamos a utilizar la ecuación de la recta tangente a la función en el punto x_0, y_0 sabiendo que la pendiente de dicha recta es $m_1 = y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. Por tanto⁶²:

$$y_1 = y_0 + m_1(x_1 - x_0)$$

Con esto ya conocemos el primer punto (x_1, y_1) de nuestra solución aproximada.

3. Ahora vamos a repetir este proceso para el punto $x_2 = x_1 + h$, con un nuevo valor de la pendiente $m_2 = y'(x_1) = f(x_1, y_1)$.

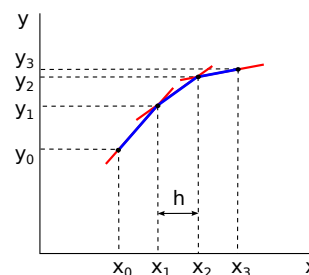
$$y_2 = y_1 + m_2(x_2 - x_1)$$

Con esto ya conocemos el segundo punto (x_2, y_2) de nuestra solución aproximada.

4. Este proceso se repite n veces hasta completar la solución numérica buscada, obteniéndose la secuencia: $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_f, y_f)\}$.

En la siguiente gráfica se muestra el proceso seguido. En rojo se representa cada una de las rectas tangentes en cada punto (x_i, y_i) utilizadas para calcular el valor del próximo punto (x_{i+1}, y_{i+1}) .

En azul se muestra la forma de la solución numérica resultante. Vemos que está formada por tramos rectos. Cuanto menor sea la distancia entre puntos h mayor será la suavidad y precisión de la solución.



1.5.3. Campo de Pendientes o Campo Direccional

El valor de la pendiente de las soluciones de una EDO se puede representar en una gráfica de ejes coordenados $x - y$ mediante pequeños segmentos que indican la *inclinación*⁶³ de las curvas integrales⁶⁴.

El campo de pendientes es un campo vectorial formado por pequeñas rayitas que nos permite gráficamente entender y analizar el conjunto de soluciones de una EDO (familia uniparamétrica de curvas).

Definición 1.21. Campo de Pendientes

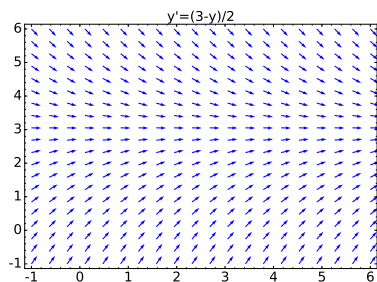
Se denomina *campo de pendientes* o *campo direccional* de una EDO al conjunto de todos los pequeños segmentos que representan las pendientes $y' = f(x, y)$ en una malla de puntos en el plano $x - y$.

⁶¹Cuanto menor sea, mayor será la precisión de la solución numérica, pero por contra, mayor cantidad de valores (x_i, y_i) tendremos que almacenar para conocer la solución. Generalmente el valor de h depende del número $n > 1$ de datos que queremos o podemos almacenar, calculándose en este caso como: $h = (x_f - x_0)/(n - 1)$

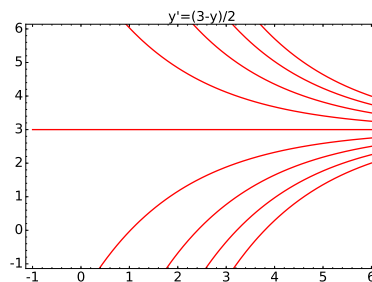
⁶²Como sabemos de Cálculo infinitesimal, la recta tangente de una función en un punto es una buena aproximación de esa función en las cercanías de ese punto.

⁶³Según la definición de derivada de una función, el ángulo de inclinación de una curva en un punto viene dado por el valor $\alpha = \arctan \frac{dy}{dx}$.

⁶⁴Aquí es importante tener en cuenta la *unicidad* de las soluciones de una EDO, es decir si por cada punto del plano $x - y$ pasa una o más curvas integrales. El gráfico de campo de pendientes solo tiene sentido si la solución es única. Ver el estudio de la unicidad de una EDO en la [Sección 1.4, página 18](#).



Campo de Pendientes

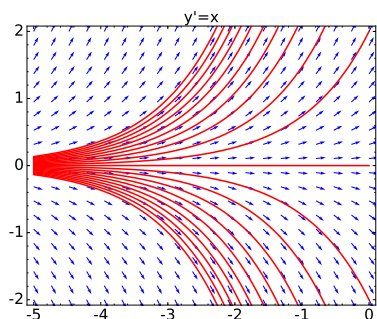


Curvas Integrales

Ejercicio 1.10. Representar gráficamente el campo direccional y algunas curvas integrales de la EDO de primer orden:

$$\frac{dx}{dt} = x$$

El campo direccional se puede representar dibujando flechitas con pendientes que solo dependen de la altura x en el plano $t - x$.



$$f(t, x) = x$$

La solución general de la EDO se puede obtener mediante el método de separación de variables, siendo en este caso:

$$x = ce^t$$

En la gráfica se ha dibujado junto con el campo direccional, cuatro curvas solución particulares para unas determinadas condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$.

1.5.4. Isoclinas

Definición 1.22. Isoclinas

Una *isoclina* de la EDO $x' = F(t, x)$ es una *curva* de la forma $F(t, x) = m$, en la cual la *pendiente* $x'(t)$ de la *curva solución* $x(t)$ es constante e igual a $m \in \mathbb{R}$.

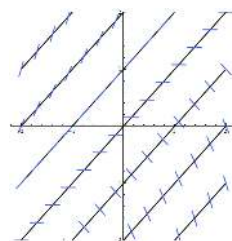
Ejercicio 1.11. Calcular en la siguiente EDO las isoclinas para las cuales $y' = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$.

$$y' = -x + y$$

Las isoclinas de esta EDO tienen por ecuación:

$$-x + y = m \quad ; \quad y = m + x$$

Dando los valores a $m = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$ se obtienen la curvas isoclinas (rectas paralelas en este caso). Por cada punto de una isoclina pasa una curva solución distinta, pero todas ellas poseen el mismo valor de la pendiente en esos puntos.



Ejercicio 1.12. Dibujar las isoclinas y curvas integrales de la siguiente EDO:

$$y' = yx$$

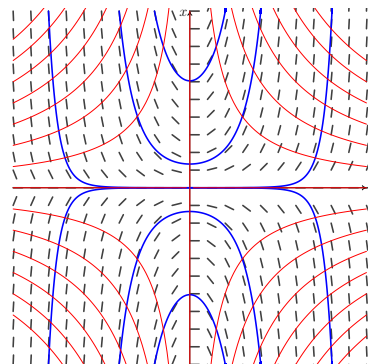
Solución: Las isoclinas son las curvas (de color rojo en el gráfico):

$$yx = m \implies y = \frac{m}{x} ; \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

Resolviendo la EDO mediante el método de separación de variables, se obtienen las curvas integrales (de color azul en el gráfico):

$$\int \frac{dy}{y} = \int x \, dx ; \quad \ln(cy) = x^2 ; \quad y = ce^{x^2}$$

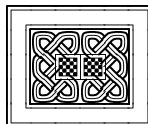
En negro aparece el campo de pendientes.



Definición 1.23. Nulclinas

Se denominan *nulclinas* a las curvas isoclinas con pendiente cero:

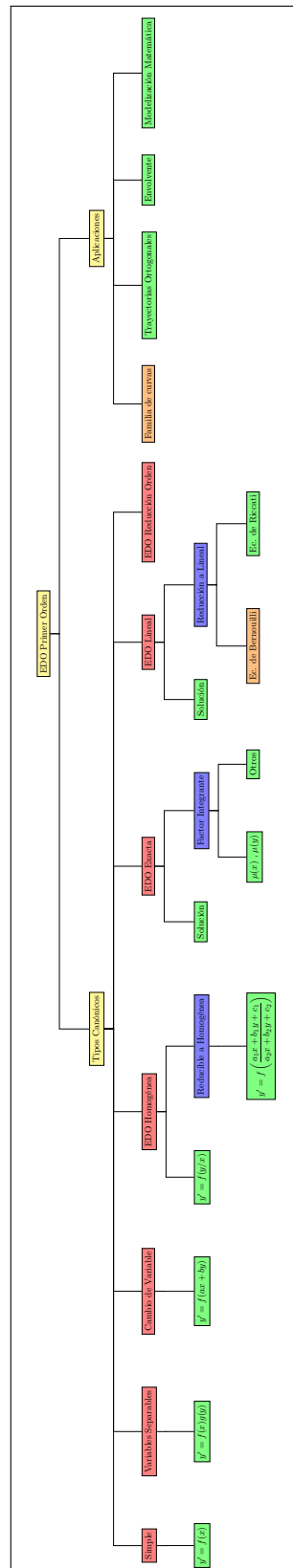
$$x' = f(t, x) = 0$$



Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

Contenido

2.0 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden	27
2.0.1 Métodos de Resolución de Tipos Canónicos	27
2.1 EDO Simple de la forma $y' = f(x)$	27
2.2 EDO de Variables Separables o Separable	29
2.3 EDO de la Forma: $y' = f(ax + by + c)$	29
2.4 EDO Homogéneas	30
2.4.1 EDO Reducibles a Homogéneas	33
2.5 EDO Exactas	35
2.5.1 Factores Integrantes	39
2.6 EDO Lineales	42
2.6.1 EDO Lineal de Primer Orden	42
2.7 Ecuación de Bernoulli	43
2.8 Ecuación de Riccati	44
2.9 Reducción de EDO de Segundo Orden	46
2.10 Resumen: EDO Primer Orden	47
2.11 Aplicaciones de las EDO de Primer Orden	48
2.11.1 Familia de Curvas	48
2.11.2 Trayectorias Ortogonales	49
2.11.3 Envolvente de una Familia de Curvas	52
2.11.4 Modelización Matemática	53



2.0. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

Generalmente es difícil resolver una EDO de primer orden¹:

$$F(x, y, y') = 0$$

Incluso en las sencillas como las explícitas:

$$y' = f(x, y)$$

no siempre es posible encontrar soluciones *analíticas*² (expresadas a través de fórmulas) que permitan obtener su *solución general*³.

En este tema vamos a estudiar los casos denominados **tipos canónicos** de las EDO explícitas de primer orden para los cuales existen métodos sistemáticos de resolución.

2.0.1. Métodos de Resolución de Tipos Canónicos

Los tipos canónicos que estudiaremos son:

1. **EDO Simples** de la forma: $y' = f(x)$
2. **EDO de Variables Separables**
3. **EDO de la Forma:** $y' = f(ax + by + c)$
4. **EDO Homogéneas**
5. **EDO Exactas**
6. **EDO Lineales de Primer Orden**
7. **EDO Reducibles** (reducción de orden, ec. de Bernoulli y ec. de Riccati).

2.1. EDO Simple de la forma $y' = f(x)$

Es el caso más sencillo de EDO. Su resolución es directa mediante integración.

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad ; \quad dy = f(x) dx \quad ; \quad \int dy = \int f(x) dx \quad ; \quad y = \int f(x) dx + c \quad (2.1)$$

Nota 2.1. Una forma alternativa de expresar la integral indefinida anterior es mediante una integral definida de la siguiente forma:

$$\int f(x) dx + c = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

donde x_0 corresponde con la *condición inicial*⁴ del problema.

En algunos casos la **Ecuación (2.1)** se puede determinar por métodos de cálculo más o menos sencillos, sin embargo en otros puede ser muy difícil o incluso imposible hallar una fórmula para el valor de la integral⁵.

Definición 2.1. Integral no Elemental

Una **integral no elemental** es aquella para la cual se puede demostrar que no existe ninguna fórmula en términos de funciones elementales (polinomios, funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas y productos y composiciones de estas funciones) en la que pueda expresarse.

¹Ver la **Definición 1.6**, página 8.

²Ver la **Sección 1.3.2**, página 11.

³Ver la **Definición 1.19**, página 16.

⁴Ver la **Definición 1.17**, página 15.

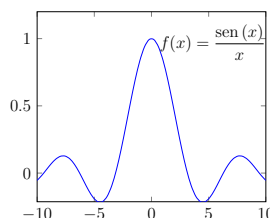
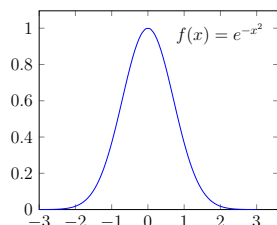
⁵En todos los casos de este curso nos referimos a la integral de Riemann.

Ejemplo 2.1. Integrales no elementales

Las siguientes integrales:

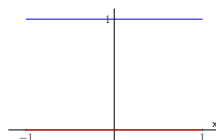
$$\int e^{-x^2} dx \quad , \quad \int \frac{\sin x}{x} dx$$

son no elementales, ya que existen pero sus valores *no* son expresables mediante un número finito de funciones elementales. En las siguientes funciones se observa que sus gráficas son curvas suaves y por tanto sus integrales están bien definidas.



Un ejemplo de una función no integrable Riemann es la función de Dirichlet, definida en el intervalo $[0, 1]$ como:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

**Definición 2.2.** Ecuación Resoluble o Integrable

- En caso de que **no** exista la integral de la **Ecuación (2.1)**, se dice que **no existe solución** para la EDO o que la EDO **no es resoluble**.
- En caso de que **sí** exista, se dice que es una EDO **resoluble** o **integrable**, y puede ser de dos tipos:
 - **Resoluble Analíticamente**: si se puede obtener una solución mediante funciones elementales.
 - **Resoluble por Cuadraturas**⁶: en caso contrario, la solución se tendrá que obtener mediante métodos numéricos.

Ejercicio 2.1. Dada la ecuación: $y' = xe^x$

1. Hallar la solución general.
2. Hallar la solución particular, que verifica $y = 3$ cuando $x = 1$.

1. Calculando la integral por partes se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = xe^x \quad ; \quad dy = xe^x dx \quad ; \quad \int dy = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = e^x(x-1) + c$$

2. Calculamos la constante c para las condiciones iniciales dadas:

$$3 = e^1(1-1) + c \quad ; \quad c = 3 \quad \implies \quad y = e^x(x-1) + 3$$

⁶Las cuadraturas son métodos numéricos de integración.

2.2. EDO de Variables Separables o Separable

Se denominan EDO de variables separables a aquellas de la forma⁷:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x) h(y)}{f(x, y)}$$

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x) dx \quad ; \quad \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx \quad \left\{ \begin{array}{l} H'(y) = 1/h(y) \\ G'(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow H(y) = G(x) + c$$

Al igual que en el caso anterior este tipo de EDO son *sencillas* de resolver, quedando reducidas a un problema de integración, aunque es posible que las integrales resultantes sean difíciles o imposibles de calcular explícitamente.

Las EDO de variables separables son las más sencillas y a la vez son las más importantes, ya que cualquier otro método de resolución de tipos canónicos, se basa esencialmente en aplicar diversos *trucos* para llegar a una EDO separable.

Ejercicio 2.2. Integrar la siguiente ecuación EDO de variables separables:

$$xyy' = y - 1$$

$$\frac{y}{y-1} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \quad ; \quad \int \frac{y dy}{y-1} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \begin{cases} \int \frac{y dy}{y-1} = \int \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) dy = y + \log(y-1) \\ \int \frac{dx}{x} = \log x + k = \log x + \log c = \log(cx) \end{cases}$$

$$y + \log(y-1) = \log(cx) \quad ; \quad \log e^y + \log(y-1) = \log(cx) \Rightarrow e^y(y-1) = cx$$

2.3. EDO de la Forma: $y' = f(ax + by + c)$

Vamos a estudiar las soluciones de las EDO donde aparecen bloques con términos de la forma:

$$y' = f(ax + by + c)$$

siendo⁸ $a, b \neq 0$.

Haciendo el cambio de variable:

$$y' = f(ax + by + c) : \quad t = ax + by + c \quad \longrightarrow \quad \frac{dt}{dx} = a + b \frac{dy}{dx} \Rightarrow y' = \frac{t' - a}{b}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$\frac{t' - a}{b} = f(t) \quad ; \quad t' = a + bf(t) \quad (\text{EDO Separable})$$

pudiéndose resolver y deshaciendo posteriormente el cambio de variable para obtener la solución $y(x)$.

Veamos un ejemplo de aplicación de este método.

⁷Este tipo de ecuaciones se ha introducido previamente en la [Sección 1.3.3, página 12](#).

⁸Ya que sería de variables separables en estos casos.

Ejercicio 2.3. Integrar la siguiente ecuación:

$$y' = (x + y)^2$$

Claramente es del tipo $y' = f(ax + by + c)$, por tanto:

$$t = x + y \quad ; \quad t' = 1 + y' \quad ; \quad y' = t' - 1$$

Sustituyendo en el ecuación e integrando:

$$t' - 1 = t^2 \quad ; \quad \frac{dt}{t^2 + 1} = dx \quad ; \quad \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \int dx \quad ; \quad \arctan t = x + c \quad ; \quad t = \tan(x + c)$$

Deshaciendo el c.v.: $x + y = \tan(x + c)$

2.4. EDO Homogéneas

Definición 2.3. Función Homogénea de Grado n

Una función $f(x, y)$ se dice que es **homogénea de grado n** si se cumple:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

Ejemplo 2.2. Funciones Homogéneas

- $f(x, y) = x^2 + y^2 \rightarrow f(tx, ty) = t^2(x^2 + y^2)$ **Función homogénea de grado 2**
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow f(tx, ty) = t\sqrt{x^2 + y^2}$ **Función homogénea de grado 1**
- $f(x, y) = \sin \frac{x}{y} \rightarrow f(tx, ty) = \sin \frac{x}{y}$ **Función homogénea de grado 0**

Definición 2.4. EDO Homogénea

Una EDO de la forma:

$$M(x, y) dx - N(x, y) dy = 0$$

se dice que es **homogénea**⁹ si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son *funciones homogéneas de igual grado*. En tal caso:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)} = f(x, y)$$

siendo la función $f(x, y)$ *homogénea de grado 0* y pudiéndose poner de la forma:

$$f(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right) = f(t)$$

⁹Aquí el término *homogéneo* es algo confuso, ya que no significa lo mismo que en la [Definición 3.2, página 59](#), donde en el caso más sencillo de una ecuación diferencial *lineal de primer orden* (ver la [Sección 2.6.1, página 42](#)) del tipo:

$$a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

se denomina *homogénea* cuando el término independiente $c(x) = 0$.

La búsqueda de la solución de una *EDO homogénea* se hace a través del siguiente cambio de variable¹⁰:

$$\boxed{t = \frac{y}{x}} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = tx \quad ; \quad y' = t'x + t \\ y' = \frac{M(x, y)}{N(x, y)} = \frac{M(x, tx)}{N(x, tx)} = \frac{x^\alpha M(1, t)}{x^\alpha N(1, t)} = \frac{M(1, t)}{N(1, t)} = f(1, t) = f(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{xt' + t = f(t)}$$

Esta es una *EDO Separable*¹¹:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{f(t) - t}{x} \quad ; \quad \frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x} \quad ; \quad \int \frac{dt}{f(t) - t} = \int \frac{dx}{x} \quad (2.2)$$

$$H(t) = \ln(cx) = \ln(x/c') \xrightarrow{c.v.} \boxed{H(y/x) = \ln(cx) = c + \ln x}$$

Notar que la constante de integración c puede ponerse en el numerador, en el denominador ($c = 1/c'$) o como sumando, según interese en cada caso.

En la **Ecuación (2.2)** hay que estudiar dos casos distintos en función de que se anule o no el denominador de la primera integral¹²:

$$\boxed{\int \frac{dt}{f(t) - t} = \int \frac{dx}{x}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Caso 1: } f(t) \neq t \\ \text{Caso 2: } f(t) = t \end{array} \right.$$

Caso 1: $f(t) \neq t$

$$\underbrace{\int \frac{dt}{f(t) - t}}_{\phi(t)} = \int \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{x}{c}\right) \Rightarrow \phi(t) = \ln\left(\frac{x}{c}\right) \Rightarrow \boxed{x = c e^{\phi(t)}}$$

Deshaciendo el cambio de variable se puede obtener la solución en forma paramétrica como:

$$\xrightarrow{y=tx} \left\{ \begin{array}{l} x = c e^{\phi(t)} \\ y = t c e^{\phi(t)} \end{array} \right. ; \quad t \in \mathbb{R}$$

Esta solución corresponde con una familia uniparamétrica de curvas¹³ en *forma paramétrica* que también en muchos casos se puede expresar de forma tradicional¹⁴ $y = F(x)$ (ver **Ejercicio 2.4**, página 32).

Caso 2: $f(t) = t$

Si existe algún valor $t_0 \in \mathbb{R}$ para el cual $f(t_0) = t_0$ no podemos utilizar la versión integral de la **Ecuación (2.2)**, ya que se anula el primer denominador. Sin embargo en este caso se tiene:

$$(\text{Ecuación (2.2)}) \longrightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{f(t_0) - t_0}{x} = 0 \quad ; \quad t = \text{cte} = t_0 \xrightarrow{c.v.} \boxed{y = t_0 x}$$

que corresponde con una recta que pasa por el origen y tiene por pendiente t_0 . Notar que este tipo de soluciones no puede obtenerse a partir de la familia de curvas obtenidas en el Caso 1 y por tanto se trata de una **solución singular**¹⁵.

Veamos unos ejemplos de aplicación de este método.

¹⁰También se puede hacer el cambio de variable $t = x/y$, pudiéndose elegir uno u otro en función de la sencillez de la ecuación resultante. Notar que estos tipos de cambio de variable solo tendrán sentido cuando **no** se anule la variable del denominador.

¹¹Ver la **Sección 2.2**, página 29.

¹²Que corresponderá al caso en el que se anule el valor de la x en la segunda integral.

¹³Ver la **Sección 2.11.1**, página 48.

¹⁴Notar que si podemos despejar t en la expresión $x = c e^{\phi(t)}$, la solución puede expresarse de forma más sencilla como:

$$t = F(x, c) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = xt = x F(x, c)}$$

¹⁵Ver la **Definición 1.19**, página 16.

Ejercicio 2.4. Resolver la EDO:

$$(x + y) dx - (x - y) dy = 0$$

Como $(x + y)$ y $(x - y)$ son funciones homogéneas de grado 1, ésta es una EDO homogénea, por tanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = y' = \frac{x+y}{x-y} = \frac{1+y/x}{1-y/x} \stackrel{t=y/x}{=} \frac{1+t}{1-t} \\ y = tx \quad ; \quad y' = xt' + t \end{array} \right\} \implies xt' + t = \frac{1+t}{1-t} \quad ; \quad xt' = \frac{1+t^2}{1-t}$$

Esta es una EDO separable, por tanto reorganizando e integrando se tiene:

$$\int \frac{1-t}{1+t^2} dt = \int \frac{dx}{x} = \log(cx) \quad ; \quad \arctan t - \frac{1}{2} \log(1+t^2) = \log(x) + c$$

$$\arctan t = \log(x\sqrt{1+t^2}) + c \quad \stackrel{t=y/x}{\longrightarrow} \quad \boxed{\arctan \frac{y}{x} = \log \sqrt{x^2 + y^2} + c}$$

Buscamos si existen soluciones singulares en este caso, analizando cuándo el denominador de la integral en t se anula:

$$1 + t^2 = 0 \implies t = \sqrt{-1}$$

Por tanto, no existen soluciones singulares (reales) en este caso.

Ejercicio 2.5. Integrar la siguiente ecuación:

$$x^2 y' - 3xy - 2y^2 = 0$$

Reordenando los términos:

$$y' = \frac{y(2y + 3x)}{x^2} \implies \text{Función homogénea de grado 2}$$

Por tanto, dividiendo numerador y denominador entre x :

$$y' = \frac{y(2\frac{y}{x} + 3)}{x} \stackrel{t=y/x}{=} t(2t + 3) \quad y' \stackrel{y=tx}{=} t'x + t = t(2t + 3) \quad ; \quad t'x = 2t^2 + 2t = 2t(t + 1)$$

Ahora integramos esta EDO separable:

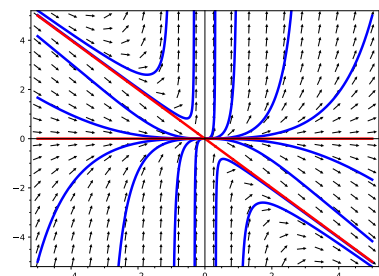
$$\int \frac{dt}{t(t+1)} = 2 \int \frac{dx}{x} \implies \left\{ \begin{array}{l} \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \log(t) - \log(t+1) = \log \frac{t}{t+1} \\ \int \frac{dx}{x} = \log(cx) \end{array} \right.$$

$$\log \frac{t}{t+1} = 2 \log(cx) \quad ; \quad \frac{t}{t+1} = cx^2 \quad ; \quad t = \frac{cx^2}{1 - cx^2} \quad \stackrel{t=y/x}{\longrightarrow} \quad \boxed{y = \frac{cx^3}{1 - cx^2} = \frac{x^3}{c - x^2} \quad ; \quad c \in \mathbb{R}}$$

Buscamos si existen soluciones singulares en este caso:

$$t(t+1) = 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} t = 0 \\ t = -1 \end{array} \right\} \stackrel{y=tx}{\longrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ y = -x \end{array} \right.$$

En esta gráfica se muestran en azul algunas curvas integrales pertenecientes a la familia de curvas solución del problema, y en rojo las dos soluciones singulares $y = 0$ e $y = -x$.



2.4.1. EDO Reducibles a Homogéneas

Consideremos las EDO de la forma:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \quad ; \quad a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

Si $a_1 = b_1 = 0$ ó $a_2 = b_2 = 0$ se trata de una EDO de la forma¹⁶:

$$y' = F(ax + by + c)$$

mientras que si $c_1 = c_2 = 0$ se trata de una EDO *homogénea*¹⁷.

En caso contrario, la EDO se puede reducir a una *homogénea* o a una *separable*¹⁸, en función del tipo de soluciones del siguiente sistema homogéneo de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Caso 1: Rectas Secantes

Si el sistema (2.4) tiene una única solución (x_0, y_0) , entonces se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0) \\ a_2x + b_2y + c_2 = a_2(x - x_0) + b_2(y - y_0) \end{cases}$$

y haciendo el C.V.: $\begin{cases} u = x - x_0 \longrightarrow du = dx \\ v = y - y_0 \longrightarrow dv = dy \end{cases} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$

se tiene:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = f\left(\frac{a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0)}{a_2(x - x_0) + b_2(y - y_0)}\right) \implies v' = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right) \longrightarrow \text{EDO Homog.}$$

donde se puede resolver mediante el C.V:

$$t = \frac{u}{v} = \frac{x - x_0}{y - y_0}$$

Este último cambio de variable se puede realizar desde el principio, una vez que se ha determinado que corresponde al caso de rectas secantes (ver el siguiente [Ejercicio 2.6](#)).

Caso 2: Rectas Paralelas

Si las rectas de la [Ecuación \(2.4\)](#) son paralelas, $(a_1, b_1) = k(a_2, b_2)$, con $k \in \mathbb{R}$, (sistema sin solución), entonces:

$$y' = f\left(\frac{k(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \xrightarrow{\text{c.v.}} \left\{ \begin{array}{l} t = a_2x + b_2y \\ t' = a_2 + b_2y' \end{array} ; y' = \frac{t' - a_2}{b_2} \right\} \left[\frac{t' - a_2}{b_2} = f\left(\frac{kt + c_1}{t + c_2}\right) \right] \longrightarrow \text{EDO Var. Separables}$$

Ejercicio 2.6. Integrar la siguiente ecuación mediante un C.V. apropiado:

$$y' = \frac{x + y + 4}{x - y - 6}$$

Se trata de una EDO reducible a homogénea, ver la [Ecuación \(2.3\)](#), por tanto vamos a encontrar el tipo de soluciones del sistema homogéneo formado por el numerador y denominador. En este caso claramente corresponde con un par de rectas secantes, con solución:

$$\begin{cases} x + y + 4 = 0 \\ x - y - 6 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = -5 \end{cases} \quad (2.5)$$

¹⁶Ver la [Sección 2.3](#), página 29.

¹⁷Ver la [Sección 2.4](#), página 30.

¹⁸Ver la [Sección 2.2](#), página 29.

$$y' = \frac{(x-1) + (y+5)}{(x-1) - (y+5)} = \frac{1 + \frac{y+5}{x-1}}{1 - \frac{y+5}{x-1}} \xrightarrow{\text{C.V.}} \begin{cases} u = \frac{y+5}{x-1} \\ y = u(x-1) - 5 \end{cases} ; \quad y' = u'(x-1) + u$$

Aplicamos por tanto el método visto en la sección anterior:

$$u'(x-1) + u = \frac{1+u}{1-u} \quad ; \quad u'(x-1) = \frac{1+u^2}{1-u} \quad ; \quad \int \frac{1-u}{1+u^2} du = \int \frac{dx}{x-1}$$

$$\arctan u - \frac{1}{2} \log(1+u^2) = \log[c(x-1)] \quad ; \quad u = \tan \log \left[c(x-1) \sqrt{1+u^2} \right] \quad (2.6)$$

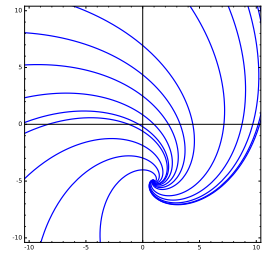
Estudiamos ahora la existencia de soluciones singulares:

$$\frac{1+u}{1-u} = u \quad ; \quad 1+u = u - u^2 \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{-1} \quad (\text{No tiene sol. singulares})$$

Finalmente deshaciendo el cambio de variable en la Ecuación (2.6) se tiene la solución final:

$$\frac{y+5}{x-1} = \tan \log \left[c(x-1) \sqrt{1 + \left(\frac{y+5}{x-1} \right)^2} \right]$$

En la gráfica vemos que las soluciones corresponden a espirales con centro $(1, -5)$ correspondiente con el punto solución del sistema de la Ecuación (2.5).



Ejercicio 2.7. Integrar la siguiente ecuación mediante un C.V. apropiado:

$$y' = \frac{x-2y+1}{x-2y-2}$$

En este caso claramente las dos rectas son paralelas no coincidentes, (al tener la misma pendiente pero distinta ordenada en el origen), y por tanto el sistema no tiene solución. Realizamos el siguiente cambio de variable:

$$t = x - 2y \quad \Rightarrow \quad t' = 1 - 2y' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1-t'}{2}$$

Sustituyendo en la EDO: $\frac{1-t'}{2} = \frac{t+1}{t-2} \quad ; \quad \frac{dt}{dx} = 1 - 2 \frac{t+1}{t-2} = \frac{-t-4}{t-2}$

Se trata de una EDO separable, por tanto:

$$\frac{2-t}{t+4} dt = dx \quad ; \quad \int \left(-1 + \frac{6}{t+4} \right) dt = \int dx \quad ; \quad -t + 6 \log(t+4) = x + c$$

Deshaciendo el cambio de variable se obtiene la siguiente familia de curvas solución:

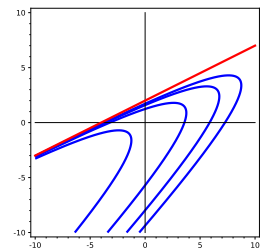
$$-x + 2y + 6 \log(x - 2y + 4) = x + c \quad \Rightarrow \quad 2y + 6 \log(x - 2y + 4) = 2x + c$$

Analizamos ahora la existencia de soluciones singulares.

$$t + 4 = 0 \quad ; \quad t = -4 \quad \Rightarrow \quad x - 2y = -4 \quad \Rightarrow \quad y_s = \frac{1}{2}x + 2$$

En la siguiente gráfica se muestran algunas de las curvas de la familia de soluciones (en azul) junto con la solución singular (en rojo).

Vemos que la familia de curvas son una especie de parábolas que se transforman en una recta en la solución singular.



2.5. EDO Exactas

Dada una familia de curvas¹⁹:

$$f(x, y) = c$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es un parámetro²⁰, se puede calcular la *diferencial total*²¹ a ambas partes de la expresión:

$$Df(x, y) = \underbrace{Dc}_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

obteniéndose una EDO de la forma:

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (2.7)$$

y donde en este caso particular las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ verifican:

$$M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad ; \quad N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Definición 2.5. Diferencial Exacta y Función Potencial

Sea una EDO de la siguiente forma:

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad \xrightarrow{\text{solución}} \quad f(x, y) = c \quad \text{cumpliendo} \quad \begin{cases} f_x = M(x, y) \\ f_y = N(x, y) \end{cases}$$

entonces cada uno de estos términos se denominan:

- $M(x, y) dx + N(x, y) dy$ **Diferencial Exacta**
- $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ **Ecuación Diferencial Exacta**
- $f(x, y)$ **Función Potencial**²²

Toda EDO de primer orden explícita $y' = f(x, y)$ se puede expresar como²³:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y) = \frac{-M(x, y)}{N(x, y)} \quad \Rightarrow \quad M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

Aunque no todas serán *EDO exactas*, al no existir una función $f(x, y)$ que verifique que $f_x = M$ y $f_y = N$.

¹⁹Ver la Sección 2.11.1, página 48.

²⁰Ver la Definición 1.14, página 13.

²¹La **diferencial total** de una función escalar de varias variables $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, denotada por df o Df , corresponde con la *combinación lineal* de los diferenciales de las variables x_i y cuyos coeficientes son las componentes del vector gradiente de la función, $\nabla f = [\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}]$, de la forma:

$$df = Df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

²²De forma general, una función vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que verifica $\vec{F} = \nabla f$ para alguna función escalar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, se denomina *campo vectorial gradiente*, siendo f la *función o campo potencial* de $\vec{F}$, y se dice que $\vec{F}$ *deriva de un potencial*. En estos casos la función $\vec{F}$ es un *campo conservativo* y verifica que su integral de línea sobre cualquier curva cerrada es cero. Ver por ejemplo "Clases de Cálculo II para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 517..

²³Las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ asociadas a una EDO no son únicas.

Teorema 2.1. EDO Exacta

La condición necesaria y suficiente para que la ecuación (2.7) con $M(x, y), N(x, y) \in \mathcal{C}^1$ sea una **diferencial exacta** en un determinado dominio $\mathcal{D}$, es que se cumpla:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Demostración 2.1.

Si la función $f(x, y) \in \mathcal{C}^2$, lo cual es común en la mayoría de aplicaciones prácticas, se cumple la igualdad de las derivadas cruzadas²⁴, verificándose entonces:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \implies \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

siendo ésta la condición necesaria y suficiente para que una EDO de la forma (2.7) sea exacta.

Ejercicio 2.8. Determinar cuáles de las siguientes EDO son exactas.

- a) $(2x - 1)dx + (3y + 7)dy = 0$ b) $(2x + y)dx - (x + 6y)dy = 0$
 c) $(x^2y^3 + y\sqrt{x})dx + x^3y^2dy = 0$ d) $\left(\frac{y}{x^2} - 4x^3 + 3y \sin 3x\right)dx + \left(2y - \frac{1}{x} - \cos 3x\right)dy = 0$

Según el Teorema 2.1 tenemos que comprobar si existe un dominio donde $M, N \in \mathcal{C}^1$ y además $M_y = N_x$.

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} M = 2x - 1 \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(2x - 1) = 0 \\ N = 3y + 7 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(3y + 7) = 0 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} M, N \in \mathcal{C}^1 \text{ en } \mathbb{R}^2 \\ \text{EDO exacta en } \mathbb{R}^2 \end{array} \right.$$

$$\text{b) } \left\{ \begin{array}{l} M = 2x + y \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(2x + y) = 1 \\ N = -(x + 6y) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(-x - 6y) = -1 \end{array} \right\} \implies \text{No es una EDO exacta}$$

$$\text{c) } \left\{ \begin{array}{l} M = x^2y^3 + y\sqrt{x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^3 + y\sqrt{x}) = 3x^2y^2 + \sqrt{x} \\ N = x^3y^2 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(x^3y^2) = 3x^2y^2 \end{array} \right\} \implies \text{No es una EDO exacta}$$

- d) En este caso M y N solo son de clase $\mathcal{C}^1$ en la región $\mathcal{D}$ formada por la unión de los semiplanos $x > 0$ y $x < 0$ de $\mathbb{R}^2$, siendo ambos simplemente conexos. Además:

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \frac{y}{x^2} - 4x^3 + 3y \sin 3x \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2} - 4x^3 + 3y \sin 3x \right) = \frac{1}{x^2} + 3 \sin 3x \\ N = 2y - \frac{1}{x} + \cos 3x \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(2y - \frac{1}{x} + \cos 3x \right) = \frac{1}{x^2} + 3 \sin 3x \end{array} \right\} \implies \text{EDO exacta en } \mathcal{D}$$

²⁴Ver por ejemplo "Clases de Cálculo II para Ingeniería" en la Bibliografía, pág. 517..

En algunos casos simples es relativamente sencillo hallar la solución de una *EDO exacta* por inspección y atendiendo a las reglas de derivación.

Ejercicio 2.9. Encontrar la familia uniparamétrica de curvas asociada a las siguientes EDO exactas.

a) $y \, dx + x \, dy = 0$ b) $\frac{1}{y} \, dx - \frac{x}{y^2} \, dy = 0$ c) $\frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} \, dx - \frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y} \, dy = 0$

- a) Si consideramos la función $xy = c$ donde c es una constante y derivamos ambas partes (primero con respecto a x y después con respecto a y) y teniendo en cuenta la derivada de un producto, se tiene la ecuación diferencial del enunciado:

$$xy = c \implies y \, dx + x \, dy = 0$$

Notar que este mismo resultado se obtiene derivando con respecto a x ambas partes de la igualdad y posteriormente reordenando los términos:

$$xy = c \implies \frac{d}{dx}(xy) = \frac{d}{dx}c \implies y + x \frac{dy}{dx} = 0 \implies y \, dx + x \, dy = 0$$

Por tanto la solución general de esta ecuación diferencial es la familia de soluciones:

$$\boxed{xy = c}$$

- b) En este caso si consideramos la función $\frac{x}{y} = c$ con c constante y derivamos ambas partes (con respecto a x e y) se tiene la ecuación diferencial del enunciado:

$$xy^{-1} = c \implies y^{-1} \, dx - xy^{-2} \, dy = 0 \implies \frac{1}{y} \, dx - \frac{x}{y^2} \, dy = 0$$

De igual forma se obtiene el mismo resultado derivando con respecto a x ambas partes de la igualdad y teniendo en cuenta la regla de la cadena:

$$\frac{x}{y} = c \implies \frac{d}{dx} \frac{x}{y} = \frac{d}{dx}c \implies \frac{1y - x \frac{dy}{dx}}{y^2} = 0 \implies \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \frac{dy}{dx} = 0 \implies \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \frac{dy}{dx} = 0$$

Por tanto la solución general de esta ecuación diferencial es:

$$\boxed{\frac{x}{y} = c}$$

- c) En este caso si consideramos la función $\sin \frac{x}{y} = c$ con c constante y derivamos ambas partes (con respecto a x e y) se tiene la ecuación diferencial del enunciado:

$$\sin \frac{x}{y} = c \implies \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} \, dx - \frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y} \, dy = 0$$

También se obtiene el mismo resultado derivando con respecto a x ambas partes de la igualdad y teniendo en cuenta la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \sin \frac{x}{y} = c &\implies \frac{d}{dx} \sin \frac{x}{y} = \frac{d}{dx}c \implies \cos \left(\frac{x}{y} \right) \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \frac{dy}{dx} \right) = 0 \implies \\ &\implies \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} \, dx - \frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y} \, dy = 0 \end{aligned}$$

Por tanto la solución general de esta ecuación diferencial es:

$$\boxed{\sin \frac{x}{y} = c}$$

Método General de Resolución de EDO Exactas

Dada una EDO exacta²⁵ de la forma: $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$

1. Buscamos una función $f(x, y)$ que cumpla²⁶:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \implies f(x, y) = \int M(x, y) dx + c(y) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) \implies f(x, y) = \int N(x, y) dy + c(x) \quad (2.9)$$

En caso de ser posible, calculamos ambas integrales, teniendo en cuenta que $c(x)$ y $c(y)$ son las constantes de integración, pero dependiendo cada una de ellas de una única variable distinta, (son por tanto funciones en este caso).

2. Determinación de las funciones $c(x)$ y $c(y)$.

$$\int M(x, y) dx + c(y) = \int N(x, y) dy + c(x)$$

Generalmente se pueden determinar por simple comparación, para que los dos términos sean iguales. En los casos más complicados, teniendo en cuenta el Teorema 2.1, página 36 se tiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = M \xrightarrow{(2.9)} \frac{\partial}{\partial x} \left[\int N dy + c(x) \right] = M \implies \frac{\partial}{\partial x} \int N dy + c'(x) = M \\ \frac{\partial f}{\partial y} = N \xrightarrow{(2.8)} \frac{\partial}{\partial y} \left[\int M dx + c(y) \right] = N \implies \frac{\partial}{\partial y} \int M dx + c'(y) = N \end{cases}$$

Despejando las constantes e integrando respecto a su variable se obtiene²⁷:

$$c(x) = \int \left[M - \frac{\partial}{\partial x} \int N dy \right] dx \quad ; \quad c(y) = \int \left[N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right] dy$$

Basta calcular solamente una de ellas para obtener el valor de $f(x, y)$.

3. La familia de curvas solución²⁸ de la EDO es:

$$f(x, y) = c \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 2.10. Integrar la siguiente ecuación:

$$(12x + 5y - 9) dx + (5x + 2y - 3) dy = 0$$

Primero vamos a comprobar si es una EDO exacta verificando la condición del Teorema 2.1, página 36, $M_y = N_x$.

$$\begin{cases} M(x, y) = 12x + 5y - 9 \longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 5 \\ N(x, y) = 5x + 2y - 3 \longrightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 5 \end{cases} \implies \text{Sí}$$

²⁵Ver la Definición 2.5, página 35.

²⁶Tener en cuenta que cuando se integra con respecto a una variable, la constante de integración no depende de esa variable, pero sí puede depender de otras. De ahí las funciones $c(x)$ y $c(y)$.

²⁷Por el teorema fundamental del Cálculo:

$$\int c'(x) dx = \int \frac{d}{dx} c(x) dx = \int d[c(x)] = c(x) \quad ; \quad \int c'(y) dy = \int \frac{d}{dy} c(y) dy = \int d[c(y)] = c(y)$$

²⁸Notar que la solución de la EDO **no** es la función potencial buscada $f(x, y)$, sino la función potencial igualada una constante c .

Seguimos entonces los pasos del método general:

1. Buscamos la función potencial $f(x, y)$.

$$\begin{cases} f(x, y) = \int M(x, y) dx = \int (12x - 9 + 5y) dx = \underbrace{6x^2 - 9x}_{c(x)} + 5xy + c(y) \\ f(x, y) = \int N(x, y) dy = \int (2y - 3 + 5x) dy = \underbrace{y^2 - 3y}_{c(y)} + 5xy + c(x) \end{cases}$$

2. Ahora tenemos que determinar las funciones $c(x)$ y $c(y)$. Por simple comparación vemos que ambas expresiones tienen en común el término $5xy$ que depende de x e y , y cada una de ellas tiene una parte (en azul) que solo depende de una de las variables en cada caso. Por tanto:

$$\begin{cases} c(x) = 6x^2 - 9x + c \\ c(y) = y^2 - 3y + c \end{cases} \implies \boxed{f(x, y) = 5xy + 6x^2 - 9x + y^2 - 3y + c}$$

siendo c una constante de integración y que por tanto no depende ni de x ni de y .

2.5.1. Factores Integrantes

Las EDO *exactas* son poco frecuentes. Sin embargo, una función **no** exacta se puede transformar en exacta, multiplicando por una determinada función $\mu(x, y)$.

$$\mu(x, y) [M(x, y) dx + N(x, y) dy] = 0 \implies \mu M dx + \mu N dy = 0$$

Definición 2.6. Factor Integrante

Cualquier función $\mu(x, y) \neq 0$ que transforme por multiplicación una EDO no exacta en exacta se denomina **factor integrante**.

Existencia de Factores Integrantes

Toda EDO que admite soluciones tiene al menos un factor integrante.

En el caso de una EDO exacta, dada una familia uniparamétrica de curvas $f(x, y) = c$, se tiene:

$$f(x, y) = c \implies \boxed{\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0} \implies \frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y} \quad (2.10)$$

Sea una EDO no exacta cuya familia de curvas solución es la anterior función $f(x, y) = c$:

$$\boxed{M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0} \implies \frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N} \quad (2.11)$$

Para transformar esta EDO en exacta podemos igualar los términos de la **Ecuación (2.10)** y de la **Ecuación (2.11)**:

$$-\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{M}{N} \implies \frac{f'_x}{M} = \frac{f'_y}{N} = \mu(x, y)$$

Por tanto:

$$\left. \begin{matrix} f'_x = \mu M \\ f'_y = \mu N \end{matrix} \right\} \implies \boxed{\mu M dx + \mu N dy = 0} \quad \text{EDO Exacta}$$

Generalmente hay diferentes factores integrantes para transformar una EDO en exacta. El siguiente teorema expresa las condiciones que tienen que cumplir los factores integrantes.

Teorema 2.2. Factor Integrante

Dada una EDO:

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

Según el **Teorema 2.1, página 36**, la condición necesaria y suficiente para que una función $\mu(x, y)$ sea un factor integrante de esta ecuación es:

$$\mu M dx + \mu N dy = 0 \implies \frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \implies \mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$\frac{1}{\mu} \left(N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \quad (2.12)$$

Esto corresponde con una EDP²⁹ cuyas soluciones $\mu(x, y)$ son todos los factores integrantes de la EDO.

En la mayoría de los casos, resolver la EDP **Ecuación (2.12)** es mucho más difícil que resolver la EDO original. Sin embargo, no necesitamos la solución general sino que cualquier solución particular puede valer.

Cálculo Práctico de Factores Integrantes

Una solución particular sencilla de la EDP **Ecuación (2.12)** aparece si μ solo dependiera o bien de x o bien de y , ya que en estos casos la EDP se transformaría en una EDO.

$$\bullet \mu(x, y) = \mu(x) \implies \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dx} \quad ; \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0 \implies \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N} = c(x)$$

Si existe un factor integrante que solo depende de x el segundo término $c(x)$ solo puede depender de x . Resolviendo entonces la EDO:

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx} = c(x) \quad ; \quad \frac{d(\log \mu)}{dx} = c(x) \implies \mu(x) = e^{\int c(x) dx}$$

$$\bullet \mu(x, y) = \mu(y) \implies \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dy} \implies \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dy} = \frac{N_x - M_y}{M} = c(y)$$

Si existe un factor integrante que solo depende de y el segundo término $c(y)$ solo puede depender de y . Resolviendo entonces la EDO:

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dy} = c(y) \quad ; \quad \frac{d(\log \mu)}{dy} = c(y) \implies \mu(y) = e^{\int c(y) dy}$$

Ejercicio 2.11. Integrar la siguiente EDO encontrando un factor integrante que dependa de una sola variable:

$$(4x + 3y^3) dx + 3xy^2 dy = 0$$

Primero vamos a comprobar si es una EDO exacta verificando la condición del **Teorema 2.1, página 36**:

$$M_y \stackrel{?}{=} N_x \implies \left\{ \begin{array}{ll} M(x, y) = 4x + 3y^3 & \longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 9y^2 \\ N(x, y) = 3x^2 & \longrightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 3y^2 \end{array} \right\} \implies \text{No}$$

²⁹Ecuación Diferencial en derivadas Parciales. Ver la definición en la **Sección 1.2.3, página 7** y el **Tema 11, página 359**.

Vemos que ambas expresiones son muy parecidas. Vamos a ver por ejemplo si existe un factor integrante de la forma $\mu(x)$. En tal caso se tiene que cumplir:

$$\begin{aligned} \mu(x)(4x + 3y^3) dx + \mu(x)(3xy^2) dy = 0 & \xrightarrow{M_y=N_x} \left\{ \begin{array}{l} M_y = 9y^2\mu \\ N_x = \mu'3xy^2 + \mu3y^2 \end{array} \right\} \\ \Rightarrow 9y^2\mu = 3xy^2\mu' + 3y^2\mu & ; \quad 3x\mu' = 6\mu \quad \Rightarrow \quad \text{EDO Separable !} \\ \int \frac{d\mu}{\mu} = 2 \int \frac{dx}{x} & ; \quad \log \mu = \log cx^2 & ; \quad \boxed{\mu = cx^2} \end{aligned}$$

Nos sirve cualquier solución particular que no sea nula, por tanto tomamos la más sencilla para $c = 1$: $\mu(x) = x^2$. Aplicamos entonces este factor integrante a la EDO original, transformándola en una EDO equivalente³⁰ pero exacta:

$$\begin{aligned} x^2(4x + 3y^3) dx + x^2(3xy^2) dy = 0 \\ \xrightarrow{\text{Met. General, pag. 38}} \left\{ \begin{array}{l} f(x, y) = \int M dx = \int (4x^3 + 3x^2y^3) dx = x^4 + x^3y^3 + c(y) \\ f(x, y) = \int N dy = \int (3x^3y^2) dy = x^3y^3 + c(x) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Comparando ambas, la solución final queda:

$$\left\{ \begin{array}{l} c(y) = 0 + c \\ c(x) = x^4 + c \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{x^4 + x^3y^3 = c}$$

Otros Factores Integrantes

En el caso de que no sea sencillo encontrar factores integrantes μ que solo dependan de x o de y , también se puede buscar otros factores integrantes sencillos de forma que la Ecuación (2.12) sea fácil de resolver.

Por ejemplo se puede buscar $\mu(x, y)$ que dependa de formas como: $x^\alpha y^\beta$, $x + y$, xy , etc. y que cumplan las condiciones para ser factor integrante:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

Otra forma de obtener factores integrantes μ es tener en cuenta fórmulas diferenciales sencillas como por ejemplo:

$$\begin{aligned} d(xy) &= xdy + ydx & ; & & d(x^2 + y^2) &= 2(xdx + ydy) \\ d\left(\frac{y}{x}\right) &= \frac{xdy - ydx}{x^2} & ; & & d\left(\frac{x}{y}\right) &= \frac{ydx - xdy}{y^2} \\ d(\arctan \frac{x}{y}) &= \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} & ; & & d(\log \frac{x}{y}) &= \frac{ydx - xdy}{xy} \end{aligned}$$

Si reordenando la EDO original y multiplicando por alguna expresión sencilla (factor integrante), se obtiene alguna de estas fórmulas, su resolución es inmediata.

Ejercicio 2.12. Resolver la siguiente EDO:

$$ydx + (x^2y - x)dy = 0$$

Reordenando los términos se tiene:

$$x^2ydy - (xdy - ydx) = 0$$

Dividiendo ahora por x^2 (es decir que el factor integrante es $\mu = 1/x^2$):

$$ydy - \frac{xdy - ydx}{x^2} = ydy - d\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int ydy - \int d\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} = c}$$

³⁰Es decir una EDO distinta pero con las mismas soluciones.

2.6. EDO Lineales

El tipo más importante de EDO es el de las **lineales**, en las que la *derivada de orden más alto* es una *función lineal*³¹ de las derivadas de órdenes inferiores. Las *EDO lineales* se clasifican en función de su orden³²:

- **EDO Lineal de Primer Orden** : $y' = a(x)y + b(x)$
- **EDO Lineal de Segundo Orden** : $y'' = a(x)y' + b(x)y + c(x)$
- **EDO Lineal de Orden n** : $y^{(n)} = a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y + f(x)$

2.6.1. EDO Lineal de Primer Orden

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (2.13)$$

De forma general este tipo de ecuaciones **no** son de *variables separables*³³, aunque puede ser *homogénea*³⁴ o *exacta*³⁵.

Resolución de EDO Lineales

La forma más sencilla de resolver este tipo de EDO es darse cuenta del siguiente resultado:

$$\frac{d}{dx} \left(y e^{\int a(x) dx} \right) = y' e^{\int a(x) dx} + y a(x) e^{\int a(x) dx} = e^{\int a(x) dx} [y' + a(x)y] \quad (2.14)$$

De forma que si multiplicamos ambas partes de la **Ecuación (2.13)** por $e^{\int a dx}$ se obtiene:

$$e^{\int a dx} [y' + ay] = e^{\int a dx} b \quad \xrightarrow{(2.14)} \quad \frac{d}{dx} [y e^{\int a dx}] = b e^{\int a dx} \implies y e^{\int a dx} = \int b e^{\int a dx} dx + c$$

$$y = e^{-\int a dx} \left[\int b e^{\int a dx} dx + c \right] \quad (2.15)$$

Explicación: Factor Integrante

La fórmula anterior puede explicarse matemáticamente buscando un *factor integrante*³⁶ de la ecuación. Primeramente reordenamos la **Ecuación (2.13)** :

$$\frac{dy}{dx} + ay = b \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = b - ay \implies \underbrace{(ay - b)}_{M(x,y)} dx + \underbrace{1}_{N(x,y)} dy = 0$$

Ahora buscamos un factor integrante de la forma³⁷ $\mu(x)$:

$$\mu(ay - b) dx + \mu dy = 0 \quad \xrightarrow{\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}} \quad \mu a = \mu'$$

Resolviendo esta EDO se obtiene el factor integrante:

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int a dx \implies \log \mu = \int a dx \implies \mu = e^{\int a dx}$$

Existen otros métodos de resolver la EDO lineal de primer orden, como suma de la solución general de la homogénea más una solución particular³⁸ $y = y_h + y_p$, la búsqueda de soluciones de la forma $u(x)v(x)$, o bien por el *método de variación de parámetros*³⁹, pero todos ellos dan el mismo resultado de la **Ecuación (2.15)**.

³¹Ver la **Definición 1.8**, página 9.

³²Ver la **Definición 1.6**, página 8.

³³Ver la **Sección 2.2**, página 29.

³⁴Ver la **Sección 2.4**, página 30.

³⁵Ver la **Sección 2.5**, página 35.

³⁶Ver la **Sección 2.5.1**, página 39.

³⁷Ver la **Sección 2.5.1**, página 40.

³⁸Ver el **Teorema 3.2**, página 64.

³⁹Ver la **Sección 3.3.2**, página 77.

Ejercicio 2.13. Integrar la siguiente EDO lineal de primer orden:

$$xy' - 3y = x^4$$

Utilizamos la fórmula:

$$y = e^{-\int a dx} \left[\int b e^{\int a dx} dx + c \right]$$

Solo tenemos que identificar las funciones $a(x)$ y $b(x)$ e integrar. Reordenando la EDO original a la forma $y' + a(x)y = b(x)$ se tiene:

$$y' + \underbrace{-\frac{3}{x}}_{a(x)} y = \underbrace{x^3}_{b(x)}$$

Calculamos primero las integrales:

$$\begin{cases} \int a dx = -\int \frac{3}{x} dx = -3 \log x = \log \frac{1}{x^3} & \Rightarrow e^{\int a dx} = e^{\log \frac{1}{x^3}} = \frac{1}{x^3} \\ \int b e^{\int a dx} dx = \int x^3 \frac{1}{x^3} dx = \int dx = x \end{cases}$$

Entonces:

$$y = e^{-\int a dx} \left[\int b e^{\int a dx} dx + c \right] = e^{-\log \frac{1}{x^3}} [x + c] = e^{\log x^3} (x + c) = x^3 (x + c) \Rightarrow y = x^3 (x + c)$$

2.7. Ecuación de Bernoulli

Definición 2.7. Ecuación de Bernoulli

Se denomina **ecuación de Bernoulli** a la siguiente EDO de primer orden no lineal:

$$y' + a(x)y = b(x)y^n \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } n = 0 & \text{EDO Lineal} \\ \text{Si } n = 1 & \text{EDO Separable} \\ \text{Si } n \neq \{0, 1\} & \text{Ec. Bernoulli} \end{cases}$$

La *ecuación de Bernoulli* se puede reducir a una EDO lineal mediante el siguiente cambio de variable.

$$\begin{aligned} t = y^{1-n} & \Rightarrow t' = (1-n)y^{-n}y' \quad ; \quad y' = \frac{1}{1-n}t'y^n \\ y' + a(x)y = b(x)y^n & \Rightarrow \frac{1}{1-n}t'y^n + a(x)y = b(x)y^n \quad ; \quad t' + (1-n)a(x)y^{1-n} = (1-n)b(x) \\ t' + (1-n)a(x)t & = (1-n)b(x) \quad \text{EDO Lineal} \end{aligned}$$

Las *ecuaciones de Bernoulli* para $n > 0$ tienen además como *solución singular*⁴⁰ la solución de equilibrio:

$$y(x) = 0 \quad ; \quad x \neq 0$$

⁴⁰Ver la Sección 1.3.6, página 16.

Ejercicio 2.14. Resolver la siguiente ecuación, de Bernoulli: $xy' + y = x^4y^3$

Como en este caso $n = 3$ hacemos el c.v.: $t = y^{1-3} = y^{-2}$; $t' = -2y^{-3}y'$; $y' = -\frac{1}{2}y^3t'$
Sustituyendo en la EDO:

$$-\frac{1}{2}xy^3t' + y = x^4y^3 \quad ; \quad -\frac{1}{2}xt' + t = x^4 \quad ; \quad t' - \frac{2}{x}t = -2x^3 \rightarrow \text{EDO Lineal}$$

Teniendo en cuenta⁴¹: $y' + a(x)y = b(x) \Rightarrow y = e^{-\int a dx} \left[\int b e^{\int a dx} dx + c \right]$

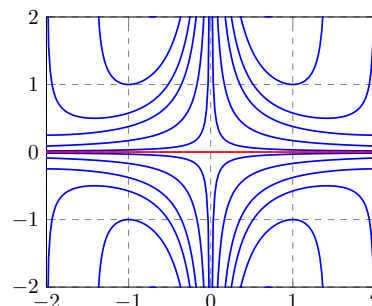
$$\left\{ \begin{array}{l} e^{-\int a dx} = e^{-\int -\frac{2}{x} dx} = e^{2 \log x} = e^{\log x^2} = x^2 \Rightarrow e^{\int a dx} = \frac{1}{x^2} \\ \int b e^{\int a dx} dx = \int (-2x^3) \frac{1}{x^2} dx = -2 \int x dx = -x^2 + c \end{array} \right\} \Rightarrow t = x^2(-x^2 + c)$$

Deshaciendo el cambio de variable $t = y^{-2}$ se obtiene la familia de curvas solución:

$$y^{-2} = x^2(c - x^2) \Rightarrow y^2 = \frac{1}{x^2(c - x^2)}$$

Como $n = 3 > 0$ además tiene la solución de equilibrio:

$$y(x) = 0$$



2.8. Ecuación de Riccati

Definición 2.8. Ecuación de Riccati

Se denomina **ecuación de Riccati**⁴² a la siguiente EDO de primer orden no lineal:

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$$

Generalmente es imposible resolver analíticamente la ecuación de Riccati, excepto que se conozca una *solución particular*⁴³ $y_p(x)$ de la ecuación. En estos casos, haciendo un cambio de variable apropiado puede transformarse la EDO original en una de Bernoulli⁴⁴ o mejor todavía en una lineal de primer orden⁴⁵.

- Cambio de Variable 1: $t = y - y_p$

$$y = y_p + t \quad ; \quad y' = y_p' + t'$$

Sustituyendo en la EDO:

$$(t' + y_p') + a(x)(t + y_p) + b(x)(t + y_p)^2 = c(x)$$

$$[t' + a(x)t + b(x)t(t + 2y_p)] + \underbrace{[y_p' + a(x)y_p + b(x)y_p^2]}_0 = c(x)$$

Reordenando los términos: $t' + [a(x) + 2b(x)y_p]t = -b(x)t^2$ (Ec. Bernoulli)

⁴¹Ver la Sección 2.6.1, página 42.

⁴²En honor al matemático italiano Jacopo Francesco Riccati (1676 – 1754).

⁴³Ver la Definición 1.19, página 16.

⁴⁴Ver la Sección 2.7, página 43.

⁴⁵Ver la Sección 2.6.1, página 42.

- Cambio de Variable 2: $\frac{1}{t} = y - y_p$

$$y = y_p + \frac{1}{t} \quad ; \quad y' = y'_p - \frac{t'}{t^2}$$

Sustituyendo en la EDO:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{t'}{t^2} + y'_p\right) + a(x) \left(\frac{1}{t} + y_p\right) + b(x) \left(\frac{1}{t} + y_p\right)^2 &= c(x) \\ \left[-\frac{t'}{t^2} + a(x)\frac{1}{t} + b(x)\frac{1}{t} \left(\frac{1}{t} + 2y_p\right)\right] + \underbrace{[y'_p + a(x)y_p + b(x)y_p^2]}_0 &= c(x) \end{aligned}$$

Multiplicando por $-t^2$ y reordenando los términos: $t' - [a(x) + 2b(x)y_p]t = b(x)$ (Ec. Lineal)

Ejercicio 2.15. Resolver la siguiente ecuación de Riccati:

$$y' + 2xy = 1 + x^2 + y^2$$

sabiendo que una solución particular de la misma es $y_p(x) = x$.

Haciendo el primer cambio de variable:

$$t = y - y_p = y - x \quad \Rightarrow \quad y = t + y_p = t + x \quad ; \quad y' = t' + y'_p = t' + 1$$

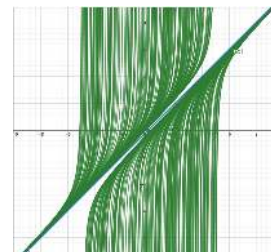
Sustituyendo en la EDO:

$$t' + 1 + 2x(t + x) = 1 + x^2 + (t + x)^2 \quad ; \quad t' + 2xt + 2x^2 = x^2 + t^2 + 2tx + x^2 \quad ; \quad t' = t^2$$

$$\int \frac{dt}{t^2} = \int dx \quad ; \quad -\frac{1}{t} = x + c \quad \xrightarrow{\text{c.v.}} \quad -\frac{1}{y-x} = x + c \quad ; \quad (x-y)(x+c) = 1$$

Notar que esta familia de curvas solución no incluye la solución particular dada en el enunciado, lo que hace suponer que se trata de una solución singular.

En la siguiente gráfica se muestra la familia de curvas solución (verde) junto con la solución particular $y_p = x$ que corresponde con una solución singular o extraña (azul).



Ejercicio 2.16. Resolver la siguiente ecuación de Riccati:

$$\begin{cases} y' = -2xy + y^2 + x^2 \\ y_p(x) = x + 1 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que en este caso $a(x) = 2x$, $b(x) = -1$ y $c(x) = x^2$, vamos a usar los dos tipos de cambio de variable en su resolución:

- Cambio de Variable 1: $t = y - y_p$

La ec. de Bernouilli que queda es:

$$t' + [a(x) + 2b(x)y_p]t = -b(x)t^2 \quad \Rightarrow \quad t' + [2x - 2(x+1)]t = t^2 \quad ; \quad t' - 2t = t^2$$

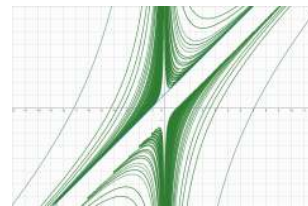
que en este caso particular, también es de variables separables, por tanto:

$$\int \frac{dt}{t(t+2)} = \int dx \quad ; \quad \int \left(\frac{1/2}{t} - \frac{1/2}{t+2}\right) dt = \int dx \quad ; \quad \frac{1}{2} \ln \frac{t}{t+2} = x+c \quad ; \quad \frac{t}{t+2} = ce^{2x}$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$t = y - y_p = y - x - 1 \implies \frac{y - x - 1}{y - x + 1} = ce^{2x}$$

Por la gráfica de las soluciones comprobamos que $y = x - 1$ también es otra solución singular.



- Cambio de Variable 2: $\frac{1}{t} = y - y_p$

La ec. lineal que queda es:

$$t' - [a(x) + 2b(x)y_p]t = b(x) \implies t' - [2x - 2(x+1)]t = -1 \quad ; \quad t' + 2t = -1$$

que también es de variables separables, por tanto:

$$\int \frac{dt}{2t+1} = - \int dx \quad ; \quad \frac{1}{2} \ln(2t+1) = -x + c \quad ; \quad 2t+1 = ce^{-2x}$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$t = \frac{1}{y - y_p} = \frac{1}{y - x - 1} \implies \frac{2}{y - x - 1} + 1 = ce^{-2x} \quad ; \quad \frac{y - x + 1}{y - x - 1} = ce^{-2x}$$

Que vemos que coincide con la anterior.

2.9. Reducción de EDO de Segundo Orden

Una EDO general de segundo orden tiene la forma:

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

Existen dos casos sencillos de este tipo de EDO que pueden ser resueltos mediante los métodos vistos de EDO de primer orden:

1. Ausencia de variable dependiente y : $F(x, y', y'') = 0$

Haciendo el cambio de variable: $t = y'$ donde ⁴⁶ $t(x)$ y $t' = \frac{dt}{dx}$.

$$y'' = \frac{dt}{dx} = t' \implies f(x, t, t') = 0 \quad (\text{EDO } 1^{\text{er}} \text{ Orden})$$

2. Ausencia de variable independiente x : $F(y, y', y'') = 0$

Haciendo el cambio de variable ⁴⁷: $t = y'$ donde ⁴⁸ $t(y)$ y $t' = \frac{dt}{dy}$.

Haciendo uso de la regla de la cadena se tiene:

$$y'' = \frac{dt}{dx} = \frac{dt}{dy} \frac{dy}{dx} = t' t \implies f(y, t, t') = 0 \quad (\text{EDO } 1^{\text{er}} \text{ Orden})$$

En ambos casos la solución se obtiene resolviendo **dos** EDO de primer orden sucesivas.

⁴⁶La variable t depende de la variable independiente x .

⁴⁷En este caso al no aparecer la variable independiente x , con el cambio de variable vamos a considerar t la variable dependiente e y la variable independiente, ya que de otra forma se tendrían tres variables: x , y y t .

⁴⁸En este caso la variable t depende de la variable y que pasa a ser la variable independiente en la ecuación transformada por el cambio de variable.

Ejercicio 2.17. Integrar la EDO: $y'' + x = 1$

Claramente es una EDO de segundo orden a la que le falta la variable dependiente y , por tanto hacemos el cambio de variable: $t = y'$, donde $t(x)$ y por tanto $t' = dt/dx$.

$$\left. \begin{array}{l} y' = t \\ y'' = t' \end{array} \right\} \implies t' + x = 1 \implies \int dt = \int (1 - x) dx \implies t = x - \frac{x}{2} + c_1$$

Teniendo en cuenta que $t = y'$ tenemos que deshacer el C.V. y volver a integrar:

$$y' = \frac{dy}{dx} = x - \frac{x}{2} + c_1 \quad ; \quad \int dy = \int \left(x - \frac{x^2}{2} + c_1 \right) dx \quad ; \quad \boxed{y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2}$$

Ejercicio 2.18. Integrar la EDO: $y'' + k^2 y = 0$; $k \in \mathbb{R}$

En este caso es una EDO de segundo orden a la que le falta la variable independiente x , por tanto hacemos el cambio de variable: $t = y'$, donde $t(y)$ y por tanto $t' = dt/dy$.

$$\left. \begin{array}{l} y' = t \\ y'' = tt' \end{array} \right\} \implies tt' + k^2 y = 0$$

Esta ecuación resultante es de *variables separables*, por tanto:

$$\int t dt = -k^2 \int y dy \quad ; \quad \frac{t^2}{2} = -k^2 \frac{y^2}{2} + c \quad ; \quad t = \sqrt{k^2 c_1 - k^2 y^2} = k \sqrt{c_1 - y^2}$$

Teniendo en cuenta que $t = y'$ tenemos que deshacer el C.V. y volver a integrar:

$$y' = \frac{dy}{dx} = k \sqrt{c_1 - y^2} \quad ; \quad \int \frac{dy}{\sqrt{c_1 - y^2}} = k \int dx \quad ; \quad \arcsen \frac{y}{c_1} = kx + c_2 \quad ; \quad \boxed{y = c_1 \sen(kx + c_2)}$$

2.10. Resumen: EDO Primer Orden

1	Var. Separables	$y' = g(x)h(y)$
2	C.V. Lineal	$y' = f(ax + by + c)$
3	Homogénea	$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$
4	Exacta	$\begin{cases} M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \\ M_y = N_x \end{cases}$
5	Factor Integrante	$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0$
6	Lineal	$y' = P(x)y + Q(x)$
7	Bernoulli	$y' = A(x)y + B(x)y^n$
8	Ricatti	$y' = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$
9	Reducibles Orden	$\begin{cases} F(x, y', y'') = 0 \\ F(y, y', y'') = 0 \end{cases}$

2.11. Aplicaciones de las EDO de Primer Orden

2.11.1. Familia de Curvas

Hasta ahora hemos visto que⁴⁹:

1. La **solución general** de una EDO de primer orden contiene normalmente un **parámetro**⁵⁰ (constante arbitraria).
2. Asignando valores a este parámetro se obtiene una **familia de soluciones** denominadas **curvas integrales**.
3. Cada *curva integral* es una **solución particular** correspondiente a unas **condiciones iniciales** o de **frontera**.

En este tema vamos a estudiar de forma general las familias de n -paramétricas de curvas y su relación con las EDO.

Definición 2.9. Familia n -paramétrica de Curvas

Una familia n -paramétrica de curvas es un conjunto de funciones que vienen dadas por una ecuación que depende de n parámetros c_i .

$$f(x, y; c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$$

Las funciones que componen una familia n -paramétrica de curvas, son curvas integrales de una EDO de orden n . De forma general, los pasos a seguir para obtener esta EDO son:

1. Derivar la ecuación n veces con respecto a la variable independiente x :

$$f(x, y; c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{d}{dx} f = g_1(x, y, y'; c_1, \dots, c_n) = 0 \\ \frac{d^2}{dx^2} f = g_2(x, y, y', y''; c_1, \dots, c_n) = 0 \\ \vdots \\ \frac{d^n}{dx^n} f = g_n(x, y, y', \dots, y^{(n)}; c_1, \dots, c_n) = 0 \end{cases}$$

De esta forma se obtiene un conjunto de n ecuaciones $\{g_1 = 0, \dots, g_n = 0\}$ con n incógnitas $\{c_1, \dots, c_n\}$, cuyas soluciones son del tipo:

$$c_i = h_i(x, y, y', \dots, y^{(n)})$$

2. Sustituyendo los valores c_i anteriores en la familia de curvas, se obtiene la EDO buscada:

$$f(x, y; c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \quad \xrightarrow{c_1, \dots, c_n} \quad F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Si la familia es **uniparamétrica**, hay una forma alternativa para los casos en los que se pueda despejar el único parámetro: $f(x, y) = c$.

1. Calcular la derivada total: $Df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$

2. Despejar la derivada: $\frac{dy}{dx} = \frac{-f'_x}{f'_y}$

⁴⁹Ver la Sección 1.3.6, página 16.

⁵⁰Ver la Definición 1.14, página 13.

Ejercicio 2.19. Encontrar la EDO correspondiente a la siguiente familia de curvas:

$$x^2 + y^2 = 2cx$$

Como en este caso se trata de una familia uniparamétrica de curvas, lo vamos a hacer por las dos formas:

Forma 1:

1. Aplicando la regla de la cadena: $\frac{d}{dx}F[y(x)] = \frac{dF}{dy} \frac{dy}{dx}$, derivamos la ecuación con respecto a x :
 $2x + 2yy' = 2c$

2. Eliminamos c , despejando c de las dos funciones e igualando:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 2cx \\ 2x + 2yy' = 2c \end{array} \right\} \frac{x^2 + y^2}{2x} = x + yy'$$

3. Despejamos, si es posible, el valor de la derivada:

$$y' = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{2xy} = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

Forma 2:

1. Aislamos c : $x + \frac{y^2}{x} = 2c$

2. Calculamos la derivada total Df : $\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx + \frac{2y}{x} dy = 0$

3. Despejamos la derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y} \left(\frac{y^2}{x^2} - 1 \right) = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

- En general, una *familia de curvas* no engloba a todas las soluciones de una EDO, ya que pueden existir otras soluciones *singulares* o *extrañas*⁵¹.
- Tampoco se puede asegurar que toda EDO tenga una *familia de curvas* que sea su solución.

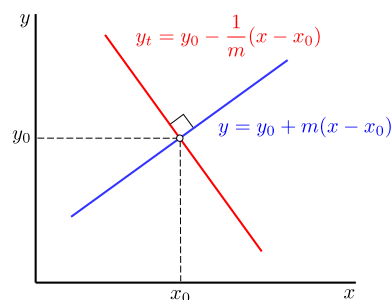
2.11.2. Trayectorias Ortogonales

Recordamos que dada una recta r que pasa por el punto del plano (x_0, y_0) con pendiente m , tiene por ecuación:

$$y = y_0 + m(x - x_0),$$

La ecuación de la recta ortogonal (perpendicular) a r que pasa por el punto (x_0, y_0) tiene por ecuación:

$$y = y_0 - \frac{1}{m}(x - x_0)$$



Vamos a extender este concepto al de *familia de curvas*.

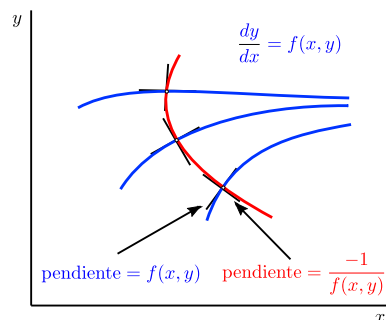
⁵¹Ver la Definición 1.19, página 16.

Definición 2.10. Trayectorias o Curvas Ortogonales

Se dice que una determinada **curva** es **ortogonal** a una **familia de curvas**, si cada uno de los puntos de la curva es ortogonal a cada una de las curvas de la familia en algún punto.

En la siguiente gráfica se muestra una familia de curvas (en azul) correspondientes a la solución general de una EDO, y una trayectoria (en rojo) que es ortogonal en puntos determinados de cada una de las curvas de la familia.

La recta tangente de cada curva es ortogonal a la recta tangente de la trayectoria en cada uno de los puntos de corte.

**Definición 2.11. Familia de Trayectorias Ortogonales**

Dada una familia uniparamétrica de curvas, definida por una EDO de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

entonces la familia de las trayectorias ortogonales a la primera familia viene dada por la siguiente EDO de primer orden⁵²:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{f(x, y)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = -f(x, y)$$

Dada una familia uniparamétrica de curvas:

$$f(x, y; c) = 0$$

Los pasos a seguir para obtener la familia de trayectorias ortogonales a dicha familia son:

1. Derivando y eliminando el parámetro⁵³ c , obtener la EDO asociada a la familia⁵⁴:

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y; c) = 0 \\ \frac{df}{dx} \rightarrow g(x, y, y'; c) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y' = F(x, y)$$

2. La EDO asociada a la familia de trayectorias ortogonales es:

$$y' = -\frac{1}{F(x, y)}$$

3. Resolver la EDO anterior:

$$h(x, y, c) = 0$$

⁵²Ambas expresiones en rojo son equivalentes.

⁵³Para ello se despeja la constante c de ambas expresiones y se igualan.

⁵⁴Ver la Sección 2.11.1, página 48.

Ejercicio 2.20. Calcular las trayectorias ortogonales a la familia de curvas.

$$y = ce^{-x}$$

Seguimos los pasos descritos anteriormente:

1. Derivamos con respecto a x :

$$y' = -ce^{-x}$$

Ahora eliminamos el parámetro c :

$$\left. \begin{array}{l} y = ce^{-x} \\ y' = -ce^{-x} \end{array} \right\} \implies y' = -y$$

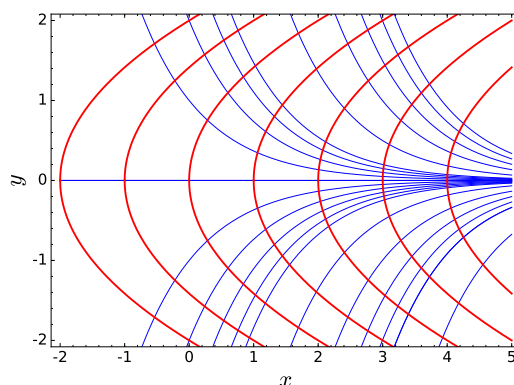
2. Encontramos la EDO asociada a la familia de trayectorias ortogonales:

$$y' = \frac{1}{y}$$

3. Resolvemos la EDO:

$$ydy = dx \quad ; \quad \int ydy = \int dx \quad \implies \quad \boxed{\frac{y^2}{2} = x + c}$$

En la siguiente gráfica se muestran algunas curvas de la familia de curvas original (en azul) y de su correspondiente familia de curvas ortogonales (en rojo), comprobándose que en los puntos de corte mostrados entre ambas, sus respectivas rectas tangentes son ortogonales.



2.11.3. Envoltente de una Familia de Curvas

Definición 2.12. Envoltente

Se denomina **envoltente** de una familia uniparamétrica de curvas en el plano, en caso de que exista, a una nueva curva φ tal que cada uno de sus puntos sea tangente a una curva de la familia⁵⁵.

Pasos para calcular la **envoltente** de una familia uniparamétrica de curvas.

$$f(x, y, c) = 0$$

1. Derivación con respecto al *parámetro*⁵⁶ c $f'_c(x, y, c) = 0$

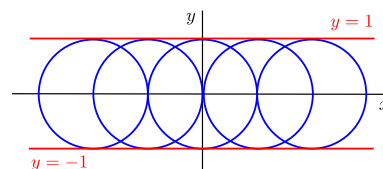
2. Eliminación del *parámetro* c $\left\{ \begin{array}{l} f(x, y, c) = 0 \\ f'_c(x, y, c) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow F(x, y) = 0$

Ejercicio 2.21. Calcular la envoltente de la siguiente familia de curvas:

$$(x + c)^2 + y^2 = 1$$

1. $f'_c = 2(x + c) = 0 \Rightarrow c = -x$

2. Introduciéndolo en la familia: $y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$



En el caso de que la familia uniparamétrica de curvas esté definida en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = x(t, c) \\ y = y(t, c) \end{cases}$$

las **envoltentes** se obtienen despejando $c = c(t)$ en el **jacobiano**⁵⁷ e igualado a cero:

$$\begin{vmatrix} x'_c & x'_t \\ y'_c & y'_t \end{vmatrix} = 0$$

e introduciendo este valor en la definición inicial de la familia.

Nota 2.2. Con ambos procedimientos no solo aparecen las **envoltentes**, sino también los lugares geométricos de los **puntos singulares** (puntos de retroceso, de inflexión, de cúspide, etc.). Por tanto, después de aplicar este método, hay que comprobar siempre qué es lo que hemos encontrado.

⁵⁵Es decir que coincidan las tangentes de ambas curvas en esos puntos.

⁵⁶Con esto buscamos las condiciones bajo las cuales no hay cambios con respecto al parámetro c .

⁵⁷La **matriz jacobiana** de una función $f(x_1, \dots, x_n)$ es la matriz formada por las derivadas parciales de primer orden de la función con respecto a todas sus variables independientes, ordenadas por filas y columnas:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

siendo el **jacobiano** es el determinante de la **matriz jacobiana**. Ver por ejemplo "Clases de Cálculo II para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 517.

2.11.4. Modelización Matemática

Muchos de los problemas ingenieriles pueden estudiarse y solucionarse más fácilmente si se expresan en lenguaje matemático. La descripción matemática de un sistema o fenómeno se denomina *modelización matemática*.

Los pasos a seguir para la formulación de un modelo matemático son:

1. Identificación de las variables que definen el sistema. El número y tipo de variables elegidas definen el nivel de resolución del modelo.
2. Establecimiento de hipótesis (leyes, teoremas, etc.) razonables sobre el sistema.
3. Resolución del sistema y comprobación con la respuesta esperada y si es necesario cambio del modelo (nivel de resolución, hipótesis, etc.)

Las EDO de primer orden representan una forma de modelar fenómenos de muy diversa índole (físicos, químicos, ingenieriles, etc.). Vamos a ver algunos de los más representativos.

Ley de Newton del Enfriamiento

Cuando la diferencia de temperaturas entre un cuerpo y su medio ambiente no es demasiado grande, el calor (Q) transferido en la unidad de tiempo (t) hacia el cuerpo o desde el cuerpo por *convección* es aproximadamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo (T) y el medio ambiente (T_a).

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha S(T - T_a) \quad ; \quad dQ = -mCdT$$

donde α es el coeficiente de intercambio de calor, S la superficie del cuerpo, $m = \rho V$ su masa y C el calor específico.

$$\rho VC \frac{dT}{dt} = -\alpha S(T - T_a) \implies \boxed{\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)} \quad ; \quad k = \frac{\alpha S}{\rho VC}$$

donde k

Dinámica de Poblaciones

En 1798 el economista inglés Thomas Malthus estableció una sencilla ecuación para modelar el *crecimiento demográfico* humano. Para ello supuso que la *tasa de crecimiento de la población* (variación de la población en un determinado periodo de tiempo) es proporcional a la población total (P).

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = kP}$$

Básicamente establece que a mayor población mayor crecimiento de la misma.

Ecuación Logística

La ecuación anterior es bastante aproximada y no tiene en cuenta muchos otros factores. Una ecuación más precisa es considerar que k es función de P : $k = f(P)$.

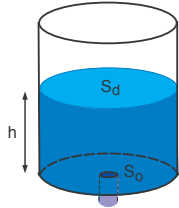
La dependencia más sencilla es $k = a - bP$, la cual tiene en cuenta también los efectos negativos de la masificación sobre el crecimiento de poblaciones:

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = (a - bP)P = aP - bP^2}$$

Esta ecuación se le denomina *ecuación logística* o de *Verhulst*.

Ley de Torricelli

La velocidad de vaciado de un depósito con agua a una altura h , a través de un pequeño orificio (sin rozamiento) situado en el fondo del depósito, es la misma que la que tendría una gota de agua al caer libremente de una altura h , es decir $v = \sqrt{2gh}$. Llamando V al volumen de líquido en el depósito a un tiempo t , S_d a la superficie de depósito y S_o a la superficie del orificio, se tiene:



$$\frac{dV}{dt} = -S_o \sqrt{2gh} \quad ; \quad V = hS_d \quad ; \quad \boxed{\frac{dh}{dt} = -\frac{S_o}{S_d} \sqrt{2gh}}$$

Desintegración Radiactiva

La desintegración radiactiva consiste en la transformación de átomos inestables (radio, uranio, etc.) en otro tipo de átomos. Aproximadamente la velocidad de desintegración es proporcional a la cantidad de sustancia radiactiva (A):

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = -kA}$$

Caída Libre y Resistencia del Aire

La velocidad (v) de caída de un objeto desde una altura h viene dada por la acción de dos fuerzas: la gravedad, que tira del cuerpo, y la fricción con el aire, que se opone a la caída. Según la segunda ley del movimiento de Newton, si la masa del cuerpo es m y g la aceleración de la gravedad, esto puede expresarse como:



$$\boxed{m \frac{dv}{dt} = mg - kv}$$

Ejercicio 2.22. El modelo logístico de crecimiento de una población viene regulado por la ecuación diferencial $P' = aP - bP^2$.

- Determinar la población en un instante t sabiendo que la población inicial es M .
- Calcular la población de peces en un estanque el año 1998 sabiendo que se inició con 1.000 peces el año 1990 y se estimó que durante los años 1992 y 1994 era de 3.000 y 5.000 peces respectivamente.
- ¿Cuál es la población de equilibrio a largo plazo?

i) Resolvemos la EDO de variables separables:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP}{dt} = aP - bP^2 \\ P(t_0) = M \end{array} \right\} \quad ; \quad \int_M^P \frac{dP}{P(a - bP)} = \int_{t_0}^t dt \quad ; \quad -\frac{1}{a} \log \frac{bP - a}{P} \Big|_M^P = t - t_0$$

$$\frac{1}{a} \log \frac{P(a - bM)}{M(a - bP)} = t - t_0 \quad ;$$

$$\boxed{P(t) = \frac{aM}{bM + (a - bM)e^{a(t-t_0)}}$$

ii) Primero vamos a reordenar la ecuación:

$$P(t) = \frac{aM}{bM + (a - bM)e^{a(t-t_0)}} = \frac{1}{\frac{b}{a} + \left(\frac{1}{M} - \frac{b}{a}\right)e^{a(t_0-t)}}$$

Ahora hacemos un cambio de variables que simplifique el resultado.

$$P(T) = \frac{1}{X + (1/M - X)Y^{T/2}} \quad \begin{cases} X = b/a \\ Y = e^{-2a} \\ T = t - t_0 \end{cases} ; \quad P = P/1000$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_0 = 1990; T = 0 \\ M = 1000 \rightarrow 1 \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{l} t = 1992; T = 2 \\ P = 3000 \rightarrow 3 \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{l} t = 1994; T = 4 \\ P = 5000 \rightarrow 5 \end{array} \right\}$$

Por último determinamos el valor de los parámetros con los datos del problema.

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 = \frac{1}{X + (1 - X)Y^{-2}} \\ 5 = \frac{1}{X + (1 - X)Y^{-4}} \end{array} \right\} \quad \begin{cases} X = 1/6 \\ Y = 1/5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = \frac{6}{1 + 5^{1-T/2}}}$$

Entonces para los datos pedidos:

$$1998 \rightarrow P(8) = \frac{6}{1 + 5^{1-4}} = 5.95238 \Rightarrow P(1998) \approx 5952 \text{ peces}$$

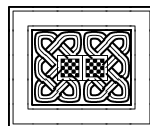
iii)

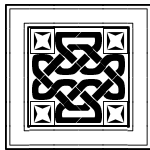
Forma 1: equilibrio $\Leftrightarrow P' = \frac{dP}{dt} = 0$

$$aP - bP^2 = 0 \quad ; \quad P = \frac{a}{b} = \frac{1}{X} = 6 \quad (\text{miles de peces})$$

Forma 2: largo plazo $\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{6}{1 + 5^{1-T/2}} = 6$$

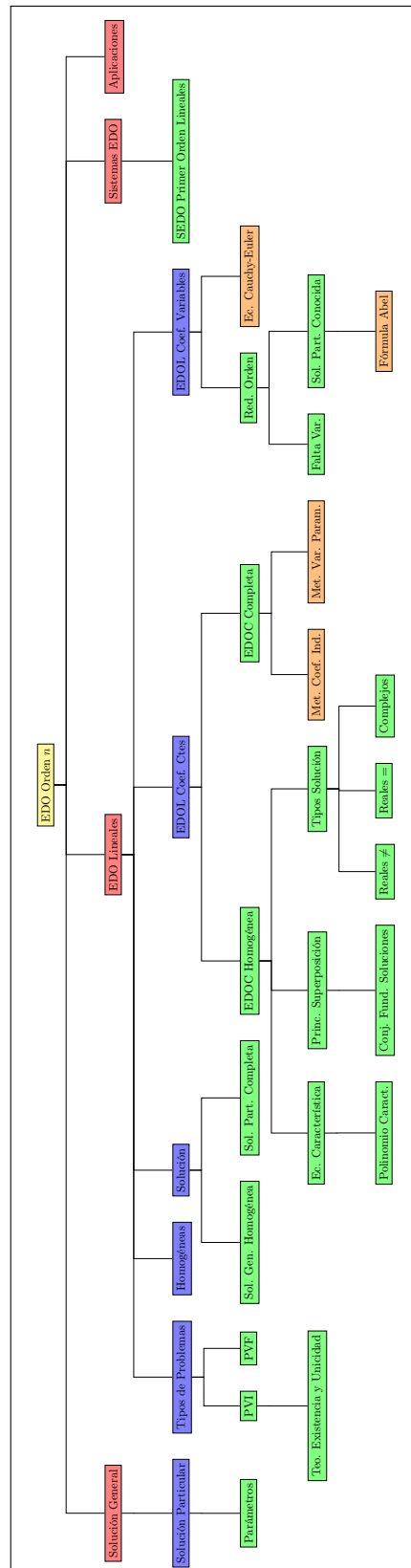




EDO Lineales de Orden Superior

Contenido

3.1	EDOL Lineales de Orden n	59
3.1.1	Introducción	59
3.1.2	Solución de una EDOL	59
3.1.3	Tipos de Problemas con EDOL	60
3.1.4	Existencia y Unicidad de las Soluciones	62
3.1.5	Solución de una EDOL	64
3.2	EDOL con Coeficientes Constantes Homogénea (EDOCH)	65
3.2.1	Dependencia e Independencia Lineal de Funciones: Wronskiano	67
3.2.2	Solución de una EDOCH: Casos Particulares	68
3.2.3	Resumen: Soluciones de una EDOCH	71
3.3	EDOL con Coeficientes Constantes Completa (EDOC)	72
3.3.1	Método de los Coeficientes Indeterminados	72
3.3.2	Método de Variación de Parámetros	77
3.3.3	Función de Green	83
3.4	EDOL con Coeficientes Variables	84
3.4.1	Reducción de Orden por falta de un Tipo de Variable	84
3.4.2	Reducción de Orden conocida una Solución Particular: Fórmula de Abel	84
3.4.3	Ecuación de Cauchy-Euler	87
3.5	Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (SEDO)	90
3.5.1	Sistemas de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden Lineales	91
3.6	Aplicaciones de las EDO de Orden Superior	92
3.6.1	Circuitos Eléctricos	92
3.6.2	Sistemas Mecánicos	93



3.1. EDO Lineales de Orden n

3.1.1. Introducción

Una EDO de orden n (EDON) tiene la forma¹:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

donde x es la variable independiente, $y(x)$ es la variable dependiente o función incógnita de la ecuación e $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}$ son las derivadas de orden k de $y(x)$ con respecto a x .

Ejemplo 3.1. Ejemplos de EDO de orden n

- $xy'' + yy' = \sin x$
- $y''' - x^2 y'' = y' - \log y$
- $3 \frac{d^5 x}{dt^5} + y \frac{d^4 x}{dt^4} - 2 \frac{d^3 x}{dt^3} = 0$

Ya que muy pocas EDO no lineales se pueden resolver de forma explícita, necesitando métodos numéricos para su resolución, en este curso nos centraremos únicamente en las EDO *lineales*² de orden n (EDOL).

Definición 3.1. EDO Lineal de Orden n (EDOL)

Una EDO Lineal de orden n (EDOL) es aquella que tiene la forma general:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (3.1)$$

donde las funciones $a_i(x)$ y la función $f(x)$ son continuas en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.2. Ejemplos de EDOL de diferentes órdenes.

- $xy'' + x^2 y' = \sin x$
- $2y''' - 3y'' = y' - \log x$
- $(3x^2 - \sin x) \frac{d^5 y}{dx^5} + 2 \frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{d^3 y}{dx^3} = 0$

Definición 3.2. EDO Lineal de Orden n Homogénea (EDOLH)

Se dice que una EDOL dada por la Ecuación (3.1) es **homogénea**³ si $f(x) = 0$.

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (3.2)$$

3.1.2. Solución de una EDOL

Definición 3.3. Solución de una EDOL

Una solución de una EDOL es cualquier función $y(x) = \phi(x)$ que verifique la EDOL⁴.

¹Ver la Definición 1.9, página 10.

²Ver la Definición 1.8, página 9.

³Esta terminología no debe confundirse con la utilizada en la Sección 2.4, página 30.

⁴Obligatoriamente la función solución tendrá que ser n veces derivable.

Ejemplo 3.3. Solución de una EDOL

La siguiente función:

$$y = 3 \operatorname{sen}(2x) + \cos(2x)$$

es una solución de la EDOL de segundo orden:

$$y'' + 4y = 0$$

ya que:

$$\begin{aligned} y' &= 6 \cos(2x) - 2 \operatorname{sen}(2x) & ; & & y'' &= -12 \operatorname{sen}(2x) - 4 \cos(2x) \\ \Rightarrow & & & & y'' + 4y &= -12 \operatorname{sen}(2x) - 4 \cos(2x) + 4[3 \operatorname{sen}(2x) + \cos(2x)] = 0 \end{aligned}$$

Definición 3.4. Solución General y Particular de una EDOL

- El conjunto de todas las soluciones de una EDOL se denomina **solución general**⁵ y viene dada en forma de una *familia n -paramétrica de curvas*⁶:

$$y(x) = \phi(x; c_1, c_2, \dots, c_n)$$

donde los c_i son los *parámetros* (ver la **Definición 1.14**, página 13).

- Cada una de las soluciones que componen la *solución general* se denominan **solución particular** y están asociadas a unos valores determinados de los *parámetros* c_i .

Solo en las EDO lineales (EDOL) se puede asegurar una *solución general* que contenga **todas** las soluciones de la ecuación⁷. De forma general las EDO de orden⁸ n (EDON) pueden tener soluciones en forma de familias de curvas, pero éstas no necesariamente agrupan a todas las soluciones de la ecuación⁹.

3.1.3. Tipos de Problemas con EDOL

Para poder determinar la solución de un *problema*¹⁰ de una EDOL debe estar **bien definido**, es decir, es necesario que además de especificar la ecuación, se den n condiciones adicionales que permitan obtener las n constantes c_i de la solución general.

Existen dos formas de especificar las n condiciones, dando lugar a dos tipos de problemas distintos¹⁰:

- Problema de Valor Inicial (PVI)
- Problema de Valores en la Frontera (PVF)

Definición 3.5. Problema de Valor Inicial (PVI)

Se denomina un **problema de valor inicial** (PVI) de una EDOL, al conjunto de la EDO y de n *condiciones iniciales*¹¹ en un mismo punto $x = x_0$.

$$\begin{cases} a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

⁵Ver la **Definición 1.19**, página 16.

⁶Ver la **Sección 1.3.4**, página 14.

⁷Sin *soluciones singulares* o *extrañas*, ver la **Sección 1.3.3**, página 13.

⁸Ver la **Sección 3.1.1**, página 59.

⁹Ver el **Ejemplo 1.15**, página 17 y el **Ejercicio 2.5**, página 32.

¹⁰Ver la **Sección 1.3.5**, página 14.

¹¹Ver la **Definición 1.17**, página 15.

Ejemplo 3.4. Ejemplo de un PVI,

$$\begin{cases} xy''' + 3y'' + (1 + x^2)y = \cos x \\ y(-2) = 3, \quad y'(-2) = 0, \quad y''(-2) = 1 \end{cases}$$

Definición 3.6. Problema de Valores en la Frontera (PVF)

Se denomina un **problema de valores frontera** (PVF) de una EDOL, al conjunto de la EDO y de n *condiciones frontera*¹² definidas en puntos distintos del dominio.

$$\begin{cases} a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \\ \sum_{i=1}^n \alpha_{1i} y^{(i-1)}(x_1) = \beta_1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \alpha_{ni} y^{(i-1)}(x_n) = \beta_n \end{cases}$$

siendo las constantes $\alpha_{ij}, \beta_i \in \mathbb{R}$ y $x_i \in I$ los puntos del dominio de definición de la ecuación.

En una EDOL de orden 2, las *condiciones frontera* se pueden expresar de forma general como:

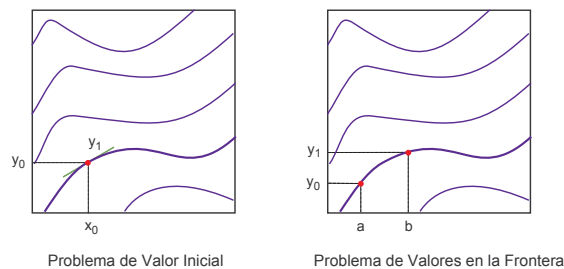
$$\begin{cases} \alpha_{11} y(a) + \alpha_{12} y'(a) = \beta_1 \\ \alpha_{21} y(b) + \alpha_{22} y'(b) = \beta_2 \end{cases}$$

donde $a, b \in I$ y $\alpha_{ij}, \beta_i \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.5. PVF con EDOL de distintos órdenes.

$$\begin{cases} y'' + 3y' - y = 0 \\ y(0) = 3, \quad y(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} xy''' + 3y'' + (1 + x^2)y = \cos x \\ 2y(0) + y'(1) = 3 \\ y(1) = 0, \quad y''(1) = 2 \end{cases}$$

Ejemplo 3.6. PVI y PVF.



En esta figura se muestra de forma esquemática la *solución general* de una EDO lineal de segundo orden correspondiente a los dos tipos de problemas: PVI y PVF.

A la izquierda se representa un *problema de condiciones iniciales* (PVI) en el punto $x = x_0$ donde se especifican los valores de la función y_0 y de su primera derivada y_1 en dicho punto, permitiendo identificar una *solución particular*.

¹²Ver la [Definición 1.18](#), página 15.

En la gráfica de la derecha se muestra un *problema de valores en la frontera* (PVF) donde se han especificado el valor de la solución particular en dos puntos distintos a y b del dominio. En este caso también se podría haber especificado el valor y la pendiente en dos puntos distintos, dos pendientes en puntos distintos o alguna relación lineal de ambos.

En realidad la situación es más complicada, ya que normalmente las curvas integrales se intersectan unas con otras¹³, como muestra el siguiente ejemplo con una situación más realista del problema.

Ejemplo 3.7. Soluciones particulares.

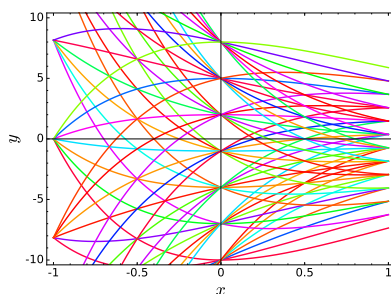
La siguiente EDOL,

$$y'' + 2y' + y = 0$$

tiene por solución general:

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-x}$$

Dando valores a c_1 y c_2 se obtienen sus infinitas soluciones particulares. En la siguiente gráfica se muestran algunas de esas soluciones particulares, en diferentes colores, en un determinado dominio.



Podemos observar como las curvas integrales se intersectan mutuamente, lo que indica que existen infinitas curvas integrales que pasan por cada uno de los puntos del dominio.

Por ello, en las EDO de orden $n > 1$ es necesario especificar más de una condición inicial o de frontera para obtener una única solución, ya que al aumentar el número de *parámetros* en la familia de curvas, aumenta la densidad de curvas en el gráfico.

Por ejemplo en esta EDO al ser de segundo orden necesitamos dos condiciones para referenciar una solución particular que pasa por un punto (x_0, y_0) del plano $x - y$, que podría ser por ejemplo el valor $y(x_0) = y_0$ y el de su derivada $y'(x_0) = y'_0$.

3.1.4. Existencia y Unicidad de las Soluciones

Teorema 3.1. Existencia y Unicidad para un PVI

Para todo PVI¹⁴ de una EDOL¹⁵ del tipo¹⁶:

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

donde las funciones $a_i(x)$ y $f(x)$ son continuas en un intervalo I , **existe** siempre una **única** solución en I .

¹³Notar que si no fuera así, no serían necesarias varias condiciones iniciales. Si por cada punto del dominio pasase una única solución, como ocurre con algunos problemas de primer orden vistos en el tema anterior, solo sería necesario especificar una condición que sería por ejemplo un punto determinado del dominio de la solución.

¹⁴Ver la **Definición 3.5**, página 60.

¹⁵Ver la **Definición 3.1**, página 59.

¹⁶Aquí se considera que el coeficiente $a_n(x) \neq 0$ en todo el dominio I y se ha dividido la ecuación por esa función para tener un coeficiente 1 en la derivada $y^{(n)}$.

Este teorema solo es válido para los PVI. En los PVF, aun verificando las hipótesis del teorema, puede ocurrir cualquier cosa: solución única, varias soluciones o sin solución.

Ejemplo 3.8. Existencia y unicidad de soluciones.

El siguiente PVI,

$$\begin{cases} y'' + \frac{1}{x}y' + (1+x^2)y = \cos x \\ y(0) = 1, y'(0) = 1 \end{cases}$$

No tiene asegurada ni la existencia ni la unicidad de sus soluciones en el intervalo $[-1, 1]$, ya que la función $\frac{1}{x}$ **no** es continua en ese intervalo. Por tanto su solución puede existir o no para esas condiciones y en caso de existir puede ser una sola función solución o varias.

Ejemplo 3.9. Existencia y unicidad de soluciones.

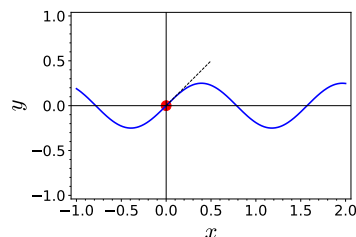
Sea la siguiente EDO:

$$y'' + 16y = 0$$

- Al tratarse de una EDO de segundo orden **lineal**, las soluciones de **cualquiera** de sus PVI siempre *existirán* y serán *únicas*. El siguiente es un ejemplo.

$$\begin{cases} y'' + 16y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

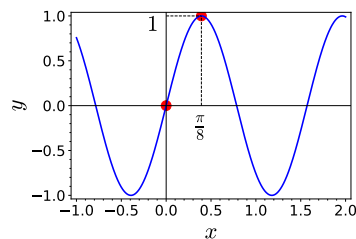
En la gráfica podemos ver la única curva solución que cumple las dos condiciones iniciales.



- Los PVF formados por esta ecuación no tienen garantizada ni la *existencia* ni la *unicidad* de sus soluciones. Aquí mostramos tres ejemplos con comportamientos distintos.

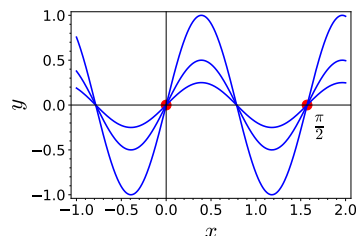
PVF con solución única.

$$\begin{cases} y'' + 16y = 0 \\ y(0) = 0, y(\frac{\pi}{8}) = 1 \end{cases}$$



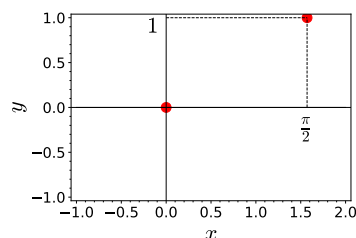
PVF con infinitas soluciones.

$$\begin{cases} y'' + 16y = 0 \\ y(0) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$



PVF sin solución.

$$\begin{cases} y'' + 16y = 0 \\ y(0) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$$



3.1.5. Solución de una EDOL

Teorema 3.2. Solución General de una EDOL

La solución general de una EDOL:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

es igual a la suma de la *solución general*¹⁷ de su *ecuación homogénea*¹⁸:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

más una *solución particular*¹⁹ de la *ecuación completa* original:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \quad \begin{cases} y(x) & : \text{Sol. general de la ec. completa} \\ y_h(x) & : \text{Sol. general de la ec. homogénea} \\ y_p(x) & : \text{Sol. particular de la ec. completa} \end{cases}$$

Demostración 3.2.

Calculando la derivadas de esta fórmula se tiene:

$$y = y_h + y_p ; \quad y' = y'_h + y'_p ; \quad \dots ; \quad y^{(n)} = y_h^{(n)} + y_p^{(n)}$$

Introduciéndolas en la EDOL:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f$$

$$a_n (y_h^{(n)} + y_p^{(n)}) + a_{n-1} (y_h^{(n-1)} + y_p^{(n-1)}) + \dots + a_1 (y'_h + y'_p) + a_0 (y_h + y_p) = f$$

Agrupando las soluciones homogéneas y particulares y teniendo en cuenta su significado se tiene:

$$\underbrace{[a_n y_h^{(n)} + a_{n-1} y_h^{(n-1)} + \dots + a_1 y'_h + a_0 y_h]}_0 + \underbrace{[a_n y_p^{(n)} + a_{n-1} y_p^{(n-1)} + \dots + a_1 y'_p + a_0 y_p]}_0 = f$$

Con lo que queda demostrado.

Vamos a estudiar la solución de EDOL²⁰ siguiendo el siguiente plan de trabajo:

$$\text{EDOL} \begin{cases} \text{Con Coeficientes Constantes} \\ \text{Con Coeficientes Variables} \end{cases} \begin{cases} \text{Homogénea} \\ \text{Completa} \end{cases}$$

Empezamos viendo la definición de estos dos tipos de EDOL.

¹⁷Ver la Definición 1.19, página 16.

¹⁸Ver la Definición 3.2, página 59.

¹⁹Puede ser cualquiera de las infinitas funciones que forman la solución general que estamos buscando.

²⁰Ver la Definición 3.1, página 59.

Definición 3.7. EDOL con Coeficientes Constantes (EDOC)

Una **EDOL con coeficientes constantes** (EDOC) es aquella donde las funciones $a_i(x)$ son constantes²¹,

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_1y'(x) + a_0y = f(x)$$

siendo su *ecuación homogénea asociada* (EDOCH):

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_1y'(x) + a_0y = 0 \quad (3.3)$$

Definición 3.8. EDOL con Coeficientes Variables (EDOV)

Una **EDOL con coeficientes variables** (EDOV) tiene la forma²²:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y = f(x)$$

siendo su *ecuación homogénea asociada* (EDOVH):

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y = 0$$

Empezaremos el estudio de las EDOL con coeficientes constantes y en la [Sección 3.4, página 84](#) se verán las EDOL con coeficientes variables.

3.2. EDOL con Coeficientes Constantes Homogénea (EDOCH)

Teniendo en cuenta la solución del problema simple:

$$y' = ay \quad \implies \quad y = ce^{ax}$$

vamos a ver bajo qué condiciones la EDOCH tiene soluciones de la forma $y = e^{\lambda x}$.

$$y = e^{\lambda x} \quad \implies \quad \begin{cases} y' &= \lambda e^{\lambda x} \\ y'' &= \lambda^2 e^{\lambda x} \\ \vdots & \\ y^{(n)} &= \lambda^n e^{\lambda x} \end{cases}$$

Sustituyendo en la [Ecuación \(3.3\)](#) tenemos:

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \dots + a_1\lambda e^{\lambda x} + a_0e^{\lambda x} = 0 \quad \implies \quad \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Teorema 3.3. Condiciones de la Solución de una EDOCH

La función $e^{\lambda x}$ es solución de la [Ecuación \(3.3\)](#) si y solo si λ es una raíz del denominado **polinomio característico** que al igualarlo a cero da lugar a la denominada **ecuación característica**:

$$\underbrace{\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0}_{\text{Polinomio Característico}} = 0 \quad (\text{Ec. Característica})$$

²¹Como el coeficiente a_n nunca puede ser nulo, de forma general se puede dividir la ecuación entre él para que aparezca el término $y^{(n)}$ en solitario.

²²Las soluciones de este tipo de ecuaciones se estudian en el [Tema 4, página 95](#).

Ejercicio 3.1. Encontrar soluciones del siguiente EDOCH y comprobar su validez.

$$y''' - y' = 0$$

Primeramente encontramos las soluciones de su *polinomio característico*:

$$\lambda^3 - \lambda = 0 \quad ; \quad \lambda(\lambda^2 - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases}$$

Por tanto tres soluciones de esta ecuación son:

$$y_1 = e^{0x} = 1 \quad ; \quad y_2 = e^x \quad ; \quad y_3 = e^{-x}$$

Comprobamos la validez de estas soluciones:

- $y_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = y''' = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 - 0 = 0$
- $y_2 = e^x \quad \Rightarrow \quad y' = y''' = e^x \quad \Rightarrow \quad e^x - e^x = 0$
- $y_3 = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad y' = y''' = -e^{-x} \quad \Rightarrow \quad -e^{-x} - (-e^{-x}) = 0$

Teorema 3.4. Principio de Superposición

- Si $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ son soluciones de la **Ecuación (3.2)**, entonces cualquier **combinación lineal**²³ de ellas también es solución.
- El conjunto de todas las soluciones de una EDO lineal homogénea de dimensión n forma un **espacio vectorial**²⁴ de funciones de dimensión n .

Ejercicio 3.2. Comprobar que toda combinación lineal posible de las soluciones encontradas en el SEDOC del **Ejercicio 3.1**, también es solución de dicho sistema.

Todas las posibles combinaciones lineales de las tres soluciones encontradas forman la siguiente función:

$$\phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$$

donde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ son las constantes de la combinación lineal.

Comprobamos ahora que esta familia de funciones es solución de la ecuación dada:

$$\phi = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \phi' = c_2 e^x - c_3 e^{-x} \\ \phi''' = c_2 e^x - c_3 e^{-x} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \phi''' - \phi' = 0$$

Verificándose por tanto la ecuación.

Para que un conjunto de funciones forme un **espacio vectorial** de dimensión n es necesario que en ese conjunto existan n funciones **linealmente independientes**.

Vamos a ver el concepto de dependencia e independencia lineal en funciones.

²³Una combinación lineal de un conjunto de funciones $f_1, f_2, \dots, f_k$ es una nueva función de la forma $f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_k f_k$, donde los c_i son números reales cualesquiera. Esta definición es análoga por ejemplo a la combinación lineal de *ecuaciones* y de *vectores*.

²⁴Ver por ejemplo "Clases de Álgebra Lineal para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 517.

3.2.1. Dependencia e Independencia Lineal de Funciones: Wronskiano

Definición 3.9. Dependencia e Independencia Lineal Funcional

Se dice que un conjunto de funciones $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ es **linealmente dependiente** en un dominio, si cualquiera de ellas se puede expresar en ese dominio como *combinación lineal* del resto de las funciones.

$$f_k(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) \quad c_i \in \mathbb{R}$$

En caso contrario se dice que las funciones son **linealmente independientes** en el dominio.

Ejemplo 3.10. Funciones linealmente dependientes e independientes.

- Las funciones $f_1(x) = 2 \sin(x)$ y $f_2(x) = 3 \sin(x)$ son linealmente dependientes en cualquier intervalo de $\mathbb{R}$ ya que:

$$f_1(x) = \frac{2}{3} f_2(x)$$

- Las funciones $f_1(x) = \sin(2x)$ y $f_2(x) = \sin(3x)$ son linealmente independientes en cualquier intervalo de $\mathbb{R}$ ya que:

$$f_1(x) \neq c f_2(x) \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

En principio no es fácil la determinación de la dependencia e independencia lineal de funciones generales. Vamos a ver un teorema que nos permite determinarla de forma sistemática.

Teorema 3.5. Wronskiano

Un conjunto de n funciones $f_1(x), \dots, f_n(x)$ definidas en un intervalo I son **linealmente independientes** si y solo si el siguiente determinante denominado **wronskiano** $W(x)$, no se anula en todos los puntos de dicho intervalo.

$$W[f_1, \dots, f_n](x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall x \in I$$

De otra forma se dice que las funciones son **linealmente dependientes** en I .

Ejemplo 3.11. Funciones Linealmente Dependientes e Independientes

- Las funciones $y_1 = 2 \sin(x)$ y $y_2 = 3 \sin(x)$ son linealmente dependientes en $\mathbb{R}$ ya que:

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} 2 \sin(x) & 3 \sin(x) \\ 2 \cos(x) & 3 \cos(x) \end{vmatrix} = 6 \sin(x) \cos(x) - 6 \sin(x) \cos(x) = 0$$

- Las funciones $y_1 = \sin(2x)$ y $y_2 = \sin(3x)$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}$ ya que:

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} \sin(2x) & \sin(3x) \\ 2 \cos(2x) & 3 \cos(3x) \end{vmatrix} = 3 \sin(2x) \cos(3x) - 2 \sin(3x) \cos(2x),$$

no se anula para todos los puntos de $\mathbb{R}$, ya que por ejemplo para $x = \pi/4$ se tiene:

$$W(x = \pi/4) = 3 \sin \frac{\pi}{2} \cos 3 \frac{\pi}{4} - 2 \sin 3 \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2} = 3 * 1 * \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2 * \frac{\sqrt{2}}{2} * 0 = -3 \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$$

Definición 3.10. Conjunto Fundamental de Soluciones

Un conjunto de n soluciones *linealmente independientes* $y_i(x)$ de una EDO lineal *homogénea* de orden n (EDOLH), forman una **base**²⁵ del espacio vectorial de todas las soluciones²⁶ del problema, y se denomina **conjunto fundamental de soluciones**.

Cualquier solución $\phi(t)$ de una EDOLH se puede expresar como combinación lineal de las soluciones de un *conjunto fundamental* $\{y_1, \dots, y_n\}$ para unos únicos valores reales $c_1, c_2, \dots, c_n$, de la forma:

$$\phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

Por tanto esta expresión corresponde con la **solución general**²⁷ de la ecuación.

3.2.2. Solución de una EDOCH: Casos Particulares

Para determinar la solución general de una EDOCH²⁸ es necesario tener presentes las siguientes cuestiones:

- La *solución general* de la EDOCH está formada por un conjunto de n soluciones linealmente independientes.
- Sabemos que dada una EDOCH, podemos encontrar soluciones $\{e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}\}$ resolviendo su correspondiente *ecuación característica*²⁹ y mediante combinación lineal de ellas obtener una *familia n-paramétrica de soluciones* de la ecuación.
- Por el teorema fundamental del álgebra, el polinomio característico tiene exactamente n soluciones λ_i pudiendo ser reales o complejas, iguales o distintas.
- Si **todas** las soluciones del polinomio característico $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son **reales** y **distintas** podemos formar fácilmente un conjunto de soluciones *linealmente independientes* $\{e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}\}$ y por *combinación lineal* de ellas obtener la *solución general* de la ecuación.

Vamos a estudiar cómo obtener soluciones linealmente independientes³⁰ cuando aparecen raíces λ_i de los otros dos tipos: raíces reales múltiples y raíces complejas.

Raíces Reales con Multiplicidad $m > 1$

En este caso el *polinomio característico* tiene alguna raíz real repetida m veces (*multiplicidad* m) y naturalmente éstas son *linealmente dependientes*, al ser todas iguales.

Si tenemos una raíz λ real con multiplicidad $m > 1$, podemos formar un conjunto linealmente independiente de m soluciones de la ecuación de la siguiente forma:

$$y_1 = e^{\lambda x} \quad ; \quad y_2 = x e^{\lambda x} \quad ; \quad y_3 = x^2 e^{\lambda x} \quad ; \quad \dots \quad ; \quad y_m = x^{m-1} e^{\lambda x}$$

Siendo por tanto la *solución general*³¹:

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_m x^{m-1}) e^{\lambda x}$$

²⁵Ver por ejemplo "Clases de Álgebra Lineal para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 517.

²⁶También conocido como *espacio funcional*.

²⁷Ver la **Definición 1.19**, página 16.

²⁸Ver la **Definición 3.7**, página 65.

²⁹Ver el **Teorema 3.3**, página 65.

³⁰Y a través de ellas obtener la solución general.

³¹Considerando que éstas son las únicas raíces.

Ejercicio 3.3. Encontrar dos familias linealmente independientes de soluciones del siguiente EDOCH y su solución general, comprobando su validez.

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Primeramente encontramos las soluciones de su polinomio característico:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0 \quad \implies \quad \lambda_{1,2} = 1 \quad (\text{multiplicidad } 2)$$

Por tanto las dos familias linealmente independientes de soluciones de esta ecuación son:

$$y_1 = ce^x \quad ; \quad y_2 = cxe^x \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

Como las dos soluciones son linealmente independientes, forman una base del espacio de soluciones de la ecuación y por tanto su solución general es:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x = (c_1 + c_2 x) e^x$$

Comprobamos la validez de la solución general:

- $y = (c_1 + c_2 x) e^x$
- $y' = c_2 e^x + (c_1 + c_2 x) e^x = (c_1 + c_2 + c_2 x) e^x$
- $y'' = c_2 e^x + (c_1 + c_2 + c_2 x) e^x = (c_1 + 2c_2 + c_2 x) e^x$

Entonces:

$$y'' - 2y' + y = (c_1 + 2c_2 + c_2 x) e^x - 2(c_1 + c_2 + c_2 x) e^x + (c_1 + c_2 x) e^x = 0$$

Raíces Complejas

En el caso de que el *polinomio característico* tenga soluciones complejas, éstas siempre aparecen como pares conjugados.

$$\lambda_{1,2} = r \pm mi \quad ; \quad r, m \in \mathbb{R}$$

donde r es la parte real y m es la parte imaginaria de las raíces. En este caso las dos soluciones son complejas:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \quad ; \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

Vamos a expresar estas soluciones en forma real y para ello tenemos en cuenta la *fórmula de Euler*³²:

$$e^{zx} = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} e^{\beta i x} = e^{\alpha x} [\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)]$$

las soluciones complejas se pueden expresar entonces como:

$$\begin{cases} y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(r+mi)x} = e^{rx} e^{mxi} = e^{rx} (\cos mx + i \sin mx) \\ y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(r-mi)x} = e^{rx} e^{-mxi} = e^{rx} [\cos(-mx) + i \sin(-mx)] = e^{rx} (\cos mx - i \sin mx) \end{cases}$$

Se puede comprobar que cada uno de los términos $e^{rx} \cos mx$ y $e^{rx} \sin mx$ son soluciones reales linealmente independientes de la EDOCH, asociadas a las raíces complejas $\lambda_{1,2}$.

³²Ver el Teorema 6.2, página 192.

³³Notar que por cada dos soluciones complejas conjugadas (linealmente independientes) que forman una base del espacio vectorial de soluciones complejas de un problema, hay siempre otras dos soluciones reales linealmente independientes que forman una base del espacio de soluciones reales del mismo problema.

Las funciones $e^{rx} \cos mx$ y $e^{rx} \operatorname{sen} mx$ son dos soluciones reales *linealmente independientes* de la EDOCH y por tanto forman una *base* del espacio de soluciones reales del problema³³.

Si tenemos una raíz compleja conjugada $\lambda_{1,2} = r \pm mi$ con multiplicidad 1, podemos formar un conjunto linealmente independiente de 2 soluciones de la ecuación de la forma:

$$y_1 = e^{rx} \cos mx \quad ; \quad y_2 = e^{rx} \operatorname{sen} mx$$

Siendo por tanto la solución general:

$$y = (c_1 \cos mx + c_2 \operatorname{sen} mx)e^{rx}$$

Ejercicio 3.4. Encontrar dos familias linealmente independientes de soluciones del siguiente EDOCH y su solución general, comprobando su validez.

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

Primeramente encontramos las soluciones de su polinomio característico:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = -1 \pm 2i \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$$

Al ser complejas, las dos familias de soluciones linealmente independientes de esta ecuación son:

$$y_1 = ce^{-x} \cos(2x) \quad ; \quad y_2 = ce^{-x} \operatorname{sen}(2x) \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

las cuales forman una base del espacio de soluciones de la ecuación y por tanto su solución general es:

$$y(x) = [c_1 \cos(2x) + c_2 \operatorname{sen}(2x)]e^{-x}$$

Comprobamos la validez de la solución general:

- $y = [c_1 \cos(2x) + c_2 \operatorname{sen}(2x)]e^{-x}$
- $y' = 2[-c_1 \operatorname{sen}(2x) + c_2 \cos(2x)]e^{-x} - [c_1 \cos(2x) + c_2 \operatorname{sen}(2x)]e^{-x}$
 $= [(2c_2 - c_1) \cos(2x) - (2c_1 + c_2) \operatorname{sen}(2x)]e^{-x}$
- $y'' = 2[-(2c_2 - c_1) \operatorname{sen}(2x) - (2c_1 + c_2) \cos(2x)]e^{-x} - [(2c_2 - c_1) \cos(2x) - (2c_1 + c_2) \operatorname{sen}(2x)]e^{-x}$
 $= [(-3c_1 - 4c_2) \cos(2x) + (4c_1 - 3c_2) \operatorname{sen}(2x)]e^{-x}$

Entonces:

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + 5y &= [(-3c_1 - 4c_2) \cos(2x) + (4c_1 - 3c_2) \operatorname{sen}(2x)]e^{-x} + \\ &2[(2c_2 - c_1) \cos(2x) - (2c_1 + c_2) \operatorname{sen}(2x)]e^{-x} + 5[c_1 \cos(2x) + c_2 \operatorname{sen}(2x)]e^{-x} = \\ &= [(-3c_1 - 4c_2 + 4c_2 - 2c_1 + 5c_1) \cos(2x) + (4c_1 - 3c_2 - 4c_1 - 2c_2 + 5c_2) \operatorname{sen}(2x)]e^{-x} = 0 \end{aligned}$$

La solución general correspondiente a una raíz compleja conjugada $\lambda_{1,2} = r \pm mi$ con multiplicidad M , tiene la forma³⁴:

$$\begin{aligned} y &= e^{rx} [(c_1 \cos mx + c_2 \operatorname{sen} mx) + x (c_3 \cos mx + c_4 \operatorname{sen} mx) + \\ &+ x^2 (c_5 \cos mx + c_6 \operatorname{sen} mx) + \cdots + x^{M-1} (c_{2M-1} \cos mx + c_{2M} \operatorname{sen} mx)] \end{aligned}$$

³⁴Similar al caso real de multiplicidad m , ver la [Sección 3.2.2, página 68](#).

Ejercicio 3.5. Encontrar la solución general de la siguiente ecuación diferencial lineal:

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

Primeramente encontramos las soluciones de su polinomio característico:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \implies \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = -1 \pm 2i \implies \lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$$

Al ser complejas, las dos familias de soluciones linealmente independientes de esta ecuación son:

$$y_1 = ce^{-x} \cos(2x) \quad ; \quad y_2 = ce^{-x} \sin(2x) \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

Como las dos soluciones son linealmente independientes, forman una base del espacio de soluciones de la ecuación y por tanto su solución es:

$$y(x) = [c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)]e^{-x}$$

Comprobamos la validez de la solución general:

- $y = [c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)]e^{-x}$
- $y' = 2[-c_1 \sin(2x) + c_2 \cos(2x)]e^{-x} - [c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)]e^{-x}$
 $= [(2c_2 - c_1) \cos(2x) - (2c_1 + c_2) \sin(2x)]e^{-x}$
- $y'' = 2[-(2c_2 - c_1) \sin(2x) - (2c_1 + c_2) \cos(2x)]e^{-x} - [(2c_2 - c_1) \cos(2x) - (2c_1 + c_2) \sin(2x)]e^{-x}$
 $= [(-3c_1 - 4c_2) \cos(2x) + (4c_1 - 3c_2) \sin(2x)]e^{-x}$

Entonces:

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + 5y &= [(-3c_1 - 4c_2) \cos(2x) + (4c_1 - 3c_2) \sin(2x)]e^{-x} + \\ & 2[(2c_2 - c_1) \cos(2x) - (2c_1 + c_2) \sin(2x)]e^{-x} + 5[c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)]e^{-x} = \\ & = [(-3c_1 - 4c_2 + 4c_2 - 2c_1 + 5c_1) \cos(2x) + (4c_1 - 3c_2 - 4c_1 - 2c_2 + 5c_2) \sin(2x)]e^{-x} = 0 \end{aligned}$$

3.2.3. Resumen: Soluciones de una EDOCH

Soluciones en función de la multiplicidad m de las soluciones de la ecuación característica.

Tipo Solución Ec. Característica	Tipo Solución de la EDO
Reales con multiplicidad m : λ^m	$e^{\lambda x}(c_1 + c_2 x + \dots + c_m x^{m-1})$
Complejas con multiplicidad m : $[\lambda \pm \mu i]^m$	$e^{\lambda x}[(c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x) +$ $+ x(c_3 \cos \mu x + c_4 \sin \mu x) + \dots$ $+ x^{m-1}(c_{2m-1} \cos \mu x + c_{2m} \sin \mu x)]$

Ejercicio 3.6. Encontrar la solución particular del siguiente PVI.

$$\begin{cases} y'' - y' - 6y = 0 \\ y(0) = 2, y'(0) = 1 \end{cases}$$

Primeramente encontramos las soluciones de su polinomio característico:

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \implies \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \implies \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

Al ser reales y distintas, la solución general es:

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$$

Vamos a encontrar la solución particular a través de las condiciones iniciales.

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = 2 \rightarrow c_1 + c_2 = 2 \\ y'(0) = 1 \rightarrow 3c_1 - 2c_2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2c_1 + 2c_2 = 4 \\ 3c_1 - 2c_2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5c_1 = 5 \rightarrow c_1 = 1 \\ c_2 = (3c_1 - 1)/2 \rightarrow c_2 = 1 \end{array} \right.$$

$$y(x) = e^{3x} + e^{-2x}$$

3.3. EDOL con Coeficientes Constantes Completa (EDOC)

En esta sección vamos a estudiar la forma de resolver las EDO Lineales de Orden n con coeficientes constantes completa (*no homogénea*), donde el término independiente $f(x) \neq 0$.

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_1y'(x) + a_0y = f(x) \quad (3.4)$$

Como hemos visto³⁵ su solución general viene dada por:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_h(x) : \text{Sol. General de la Ec. Homogénea} \\ y_p(x) : \text{Particular de la Ec. Completa} \end{array} \right.$$

Como la solución $y_h(x)$ de la EDO homogénea (EDOC) ya ha sido estudiado en la sección anterior³⁶, vamos a ver ahora la forma de encontrar una solución particular $y_p(x)$ de la ecuación completa. Hay dos métodos:

1. Método de los Coeficientes Indeterminados
2. Método de Variación de Parámetros

3.3.1. Método de los Coeficientes Indeterminados

El **método de los coeficientes indeterminados** solo es válido en EDOC cuando el término independiente $f(x)$ de la **Ecuación (3.4)**, es de uno de estos tipos³⁷:

- Polinomios: $P_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$
- Exponenciales: ae^{bx}
- Senos y Cosenos: $a_1 \cos bx + a_2 \sin bx$

o bien sumas o productos de funciones de estas formas.

Cuando la forma del término independiente $f(x)$ es de alguna de las formas anteriores (o mezcla de ellas), la solución particular $y_p(x)$ de la EDOC, necesaria para obtener su solución general $y(x)$, tiene una forma *similar* a su $f(x)$, pero con coeficientes a_i no necesariamente iguales³⁸.

Se puede generalizar el producto de estos tres tipos de funciones (polinomios, exponenciales y senos-cosenos) de la siguiente forma:

$$e^{\alpha x} [P_m(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \alpha = 0 \text{ no aparece la exponencial} \\ \text{Si } \beta = 0 \text{ no aparecen senos-cosenos} \end{array} \right. \quad (3.5)$$

³⁵Ver el Teorema 3.2, página 64.

³⁶Ver la Sección 3.2, página 65.

³⁷Estos tres tipos de funciones tienen la particularidad de que sus derivadas son del mismo tipo que ellas. Así la derivada de un polinomio es otro polinomio, la derivada de una exponencial es otra exponencial y las derivadas de seno y coseno son cosenos y senos.

³⁸De ahí el nombre de *coeficientes indeterminados*.

En la **Tabla 3.1** se resume la forma que tiene la solución particular en función de la forma del término independiente $f(x)$, diferenciando dos posibles casos (soluciones reales y complejas).

Término Independiente $f(x)$	Raíces de la Ec. Característica	Forma de Sol. Particular $y_p(x)$
$e^{\alpha x}[P_m(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x]$	$\alpha \pm i\beta$ no es raíz	$e^{\alpha x}[\tilde{P}_m(\mathbf{x}) \cos \beta x + \tilde{Q}_m(\mathbf{x}) \sin \beta x]$
	$\alpha \pm i\beta$ sí es raíz de mul. s	$x^s e^{\alpha x}[\tilde{P}_m(\mathbf{x}) \cos \beta x + \tilde{Q}_m(\mathbf{x}) \sin \beta x]$

Tabla 3.1: Forma de la solución particular $y_p(x)$ dada por el método de los coeficientes indeterminados en función del término independiente $f(x)$ de la EDO. Los términos $P_m(x)$ y $Q_m(x)$ hacen referencia a polinomios de grado m y los términos $\tilde{P}_m(\mathbf{x})$ y $\tilde{Q}_m(\mathbf{x})$ a polinomios del mismo grado pero con coeficientes no necesariamente iguales a los anteriores (coeficientes indeterminados).

Térm. Indep. $f(x)$	Raíz $\alpha + \beta i$	Sol. Ec. Caract.	Forma de Sol. Particular $y_p(x)$
3	0	{1, 2}	A
-2	0	{0, ± 1 , -2}	Ax
$2x + 1$	0	{ ± 3 , 0 (doble)}	$x^2(Ax + B)$
$x^3 + 2$	0	{-1 (doble)}	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$
$\sin 2x$	$\pm 2i$	{0, $1 \pm 2i$ }	$A \cos 2x + B \sin 2x$
$x \cos 2x$	$\pm 2i$	{ $\pm 2i$ }	$x(Ax + B) \cos 2x + x(Cx + D) \sin 2x$
$x^2 \cos 2x + \sin 2x$	$\pm 2i$	{1, $\pm i$ }	$(Ax^2 + Bx + C) \cos 2x + (Dx^2 + Ex + F) \sin 2x$
$x \cos x + \sin 2x$	$\pm i, \pm 2i$	{1, 2}	$(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x + E \cos 2x + F \sin 2x$
$x \cos x + \sin 2x$	$\pm i, \pm 2i$	{0, 1, $\pm i$ }	$x(Ax + B) \cos x + x(Cx + D) \sin x + E \cos 2x + F \sin 2x$
$-2e^{-3x}$	-3	{1, 2}	Ae^{-3x}
$-xe^{-2x}$	-2	{0, -2 (doble)}	$x^2(Ax + B)e^{-2x}$
$e^{-2x} \sin 2x$	$-2 \pm 2i$	{ ± 2 }	$e^{-2x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$
$e^x \sin 2x - \cos x$	$1 \pm 2i, \pm i$	{ $\pm i$ }	$e^x(A \cos 2x + B \sin 2x) + x(C \cos x + D \sin x)$
$e^{3x} \sin x + e^x \cos x$	$3 \pm i, 1 \pm i$	{1, 3}	$e^{3x}(A \cos x + B \sin x) + e^x(C \cos x + D \sin x)$
$e^{3x} \sin x + e^x \cos x$	$3 \pm i, 1 \pm i$	{ $1 \pm i$ }	$e^{3x}(A \cos x + B \sin x) + xe^x(C \cos x + D \sin x)$
$xe^{-x} \sin x$	$-1 \pm i$	{0, ± 1 , 2}	$e^{-x}[(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x]$
$xe^{-x} \sin x$	$-1 \pm i$	{-1 $\pm i$ }	$xe^{-x}[(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x]$
$-6e^x \sin 3x + \sin 2x$	$1 \pm 3i, \pm 2i$	{-2, $1 \pm 3i$ }	$xe^x(A \cos 3x + B \sin 3x) + C \cos 2x + D \sin 2x$
$-6e^x \sin 3x + \sin 2x$	$1 \pm 3i, \pm 2i$	{0, $\pm 2i$ }	$e^x(A \cos 3x + B \sin 3x) + x(C \cos 2x + D \sin 2x)$

Tabla 3.2: Casos prácticos de la determinación de la forma de la solución particular y_p dada por el método de los coeficientes indeterminados. En la primera columna de la izquierda aparecen ejemplos del término independiente $f(x)$ de la EDO. En la segunda columna aparece la raíz $\alpha + i\beta$ asociada a $f(x)$ en base a su forma (Ecuación 3.5 de la pág. 72). En la tercera columna se da un posible ejemplo de soluciones de la ecuación característica asociada a la EDO homogénea. Por último, en la cuarta columna se muestra la correspondiente forma de la solución particular según el método de los coeficientes indeterminados para ese caso, en base a la **Tabla 3.1**.

En la [Tabla 3.2, página 73](#) se muestran diferentes ejemplos de funciones del término independiente en distintos casos y la correspondiente forma de la solución particular, en función de las raíces de la ecuación característica.

El procedimiento de cálculo para encontrar la solución general de una EDOC no homogénea es el siguiente:

1. Encontrar la solución general de la ec. homogénea asociada correspondiente³⁹.
2. A través de la forma del término independiente $f(x)$ y del tipo de soluciones de la ecuación característica (columnas 1 y 2 de la tabla anterior), determinar la forma de la solución particular (columna 3).
3. Los **coeficientes indeterminados**⁴⁰ de la solución particular $y_p(x)$ se determinan encontrando sus n derivadas, sustituyendo en la EDOC y comparando los términos para que la verifiquen.
4. La solución general $y(x)$ de la EDOC será la suma de la solución homogénea $y_h(x)$ más la solución particular $y_p(x)$.

Vamos a ver algunos ejercicios donde se presenta la forma de operar con el *método de los coeficientes indeterminados* en diferentes casos.

Ejercicio 3.7. Encontrar la solución general de las siguientes EDOC.

a) $y'' - y' = 2$

c) $y'' - 3y' + 2y = 144xe^{-2x}$

b) $y'' + 2y' + y = x^2 + x$

d) $y'' - y = x \cos(x) + \sin(x)$

a) Primeramente encontramos la solución general de la ec. homogénea asociada: $y'' - y' = 0$.

$$\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y_h = c_1 + c_2 e^x$$

Encontramos ahora la solución particular de la completa.

1. Nos fijamos en la forma del término independiente. En este caso al ser una constante corresponde con un polinomio de grado 0.
2. Mirando la [Tabla 3.1, página 73](#) vemos que la forma de la solución particular depende de las raíces de la ecuación característica anterior. Como cero sí es una raíz con multiplicidad 1, por tanto la forma de la particular es $y_p = xa$, donde a es una constante a determinar (coeficiente indeterminado).
3. Derivamos la solución particular e introducimos sus valores en la ecuación completa.

$$\begin{cases} y_p = ax \\ y_p' = a \\ y_p'' = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 0 - a = 2 \quad \Rightarrow \quad a = -2 \quad \Rightarrow \quad y_p = -2x$$

Finalmente la solución general de la completa es la suma de la general de la homogénea más la particular de la completa:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 + c_2 e^x - 2x$$

b) Primeramente encontramos la solución general de la ec. homogénea asociada: $y'' + 2y' + y = 0$.

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y_h = (c_1 + c_2 x)e^{-x}$$

Encontramos ahora la solución particular de la completa. Como el término independiente $x^2 + x$ es un polinomio de grado 2 y cero no es una raíz de la ec. característica, la forma de la solución particular es un polinomio de segundo grado con coeficientes indeterminados, $y_p(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\begin{cases} y_p = ax^2 + bx + c \\ y_p' = 2ax + b \\ y_p'' = 2a \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2a + 4ax + 2b + ax^2 + bx + c = x^2 + x$$

³⁹Ver la [Sección 3.2.2, página 68](#).

⁴⁰Correspondientes a los coeficientes a_i de los polinomios $\tilde{P}_m(x)$ y $\tilde{Q}_m(x)$.

Comparando términos de igual grado se tiene:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 4a + b = 1 \rightarrow b = 1 - 4 = -3 \\ 2a + 2b + c = 0 \rightarrow c = 4 \end{cases} \implies \boxed{y_p = x^2 - 3x + 4}$$

Finalmente la solución general es:

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (c_1 + c_2x)e^{-x} + x^2 - 3x + 4}$$

c) Primeramente encontramos la solución general de la homogénea asociada: $y'' - 3y' + 2y = 0$.

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \implies \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \implies \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{y_h = c_1e^x + c_2e^{2x}}$$

Encontramos ahora la solución particular de la completa. En este caso el término independiente $144xe^{-2x}$ es un polinomio de primer grado multiplicado por una exponencial, sin coincidir ninguna de las raíces con su exponente.

Por tanto buscamos una solución particular con la forma: $y_p = (a + bx)e^{-2x}$.

$$\begin{cases} y_p = (a + bx)e^{-2x} \\ y'_p = (b - 2a - 2bx)e^{-2x} \\ y''_p = (-4b + 4a + 4bx)e^{-2x} \end{cases}$$

$$[-4b + 4a + 4bx - 3(b - 2a - 2bx) + 2(a + bx)]e^{-2x} = 144xe^{-2x} \implies 12a - 7b + 12bx = 144x$$

Comparando términos de igual grado se tiene:

$$\begin{cases} 12a - 7b = 0 \rightarrow a = 7b/12 = 7 \\ 12b = 144 \rightarrow b = 12 \end{cases} \implies \boxed{y_p = (7 + 12x)e^{-2x}}$$

Finalmente la solución general es:

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + (7 + 12x)e^{-2x}}$$

d) Primeramente encontramos la solución general de la homogénea asociada: $y'' - y = 0$.

$$\lambda^2 - 1 = 0 \implies \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \implies \boxed{y_h = c_1e^x + c_2e^{-x}}$$

Encontramos ahora la solución particular de la completa. En este caso el término independiente $x \cos(x) + \sin(x)$ está formado por polinomios que multiplican a senos y cosenos y además su coeficiente x no coincide con la raíz compleja de la ec. característica (debería ser $\pm i$). Por tanto buscamos una solución particular con la forma: $y_p = (ax + b) \cos(x) + (cx + d) \sin(x)$.

$$\begin{cases} y_p = (ax + b) \cos(x) + (cx + d) \sin(x) \\ y'_p = a \cos(x) - (ax + b) \sin(x) + c \sin(x) + (cx + d) \cos(x) \\ \quad = (a + cx + d) \cos(x) + (c - ax - b) \sin(x) \\ y''_p = c \cos(x) - (a + cx + d) \sin(x) - a \sin(x) + (c - ax - b) \cos(x) \\ \quad = (2c - ax - b) \cos(x) - (2a + cx + d) \sin(x) \end{cases}$$

Sustituyendo en la EDOC:

$$(2c - ax - b) \cos(x) - (2a + cx + d) \sin(x) - (ax + b) \cos(x) - (cx + d) \sin(x) = x \cos(x) + \sin(x)$$

$$(2c - 2ax - 2b) \cos(x) - (2a + 2cx + 2d) \sin(x) = x \cos(x) + \sin(x)$$

Comparando términos:

$$\left\{ \begin{array}{l} -2a = 1 \rightarrow a = -1/2 \\ 2c - 2b = 0 \rightarrow b = c = 0 \\ -2c = 0 \rightarrow c = 0 \\ -2a - 2d = 1 \rightarrow d = (-2a - 1)/2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y_p(x) = -\frac{1}{2}x \cos(x)$$

Finalmente la solución general es:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2}x \cos(x)$$

Ejercicio 3.8. Encontrar la solución particular del siguiente problema.

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = xe^x \sin(x) \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$$

Se trata de una EDOC cuyo término independiente es el producto de un polinomio por una exponencial y una función seno, por tanto podemos aplicar el método de los coeficientes indeterminados para calcular su solución general y a través de ella y mediante las condiciones iniciales del problema, determinar la solución particular pedida.

Primeramente encontramos la solución general de la homogénea asociada: $y'' + 3y' + 2y = 0$.

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

Encontramos ahora la solución particular de la completa. En este caso el término independiente está formado por el producto de polinomio, exponenciales y senos, aunque no coinciden sus coeficientes con la raíz compleja de la ec. característica (ya que solo tiene raíces reales). Por tanto buscamos una solución particular con la forma:

$$y_p = e^x[(ax + b) \cos(x) + (cx + d) \sin(x)]$$

Es importante tener en cuenta que aunque no aparece el coseno en el término independiente, es necesario buscar si existe este término en la solución particular. Encontramos ahora las correspondientes derivadas.

$$\begin{cases} y_p = e^x[(ax + b) \cos(x) + (cx + d) \sin(x)] \\ y_p' = e^x[(ax + b) \cos(x) + (cx + d) \sin(x) + a \cos(x) + c \sin(x) - (ax + b) \sin(x) + (cx + d) \cos(x)] = \\ = e^x[(ax + cx + a + b + d) \cos(x) + (-ax + cx - b + c + d) \sin(x)] \\ y_p'' = e^x[(ax + cx + a + b + d) \cos(x) + (-ax + cx - b + c + d) \sin(x)] + \\ + e^x[(a + c) \cos(x) + (-a + c) \sin(x) - (ax + cx + a + b + d) \sin(x) + \\ + (-ax + cx - b + c + d) \cos(x)] = \\ = 2e^x[(cx + a + c + d) \cos(x) + (-ax - a - b + c) \sin(x)] \end{cases}$$

Sustituyendo:

$$2e^x[(cx + a + c + d) \cos(x) + (-ax - a - b + c) \sin(x)] + 3e^x[(ax + cx + a + b + d) \cos(x) + (-ax + cx - b + c + d) \sin(x)] + 2e^x[(ax + b) \cos(x) + (cx + d) \sin(x)] = xe^x \sin(x)$$

$$5xe^x[(a + c) \cos(x) + (-a + c) \sin(x)] + e^x[(5a + 5b + 2c + 5d) \cos(x) + (-2a - 5b + 5c + 5d) \sin(x)] = xe^x \sin(x)$$

Comparando términos:

$$\begin{cases} a + c = 0 \rightarrow a = -1/10 \\ 5(-a + c) = 1 \rightarrow 10c = 1 \rightarrow c = 1/10 \\ 5a + 5b + 2c + 5d = 0 \rightarrow c = -5d/2 = 1/10 \\ -2a - 5b + 5c + 5d = 0 \rightarrow 3a + 7c + 10d = 0 \rightarrow 10d = 3/10 - 7/10 \rightarrow d = -1/25 \end{cases}$$

Por tanto la solución particular de la EDOC es:

$$y_p(x) = e^x \left[\frac{1}{10}(-x+1)\cos(x) + \frac{1}{50}(5x-2)\sin(x) \right]$$

Y la solución general de la EDOC:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + e^x \left[\frac{1}{10}(-x+1)\cos(x) + \frac{1}{50}(5x-2)\sin(x) \right]$$

Para encontrar la solución particular del problema, tenemos que determinar los coeficientes c_1 y c_2 de la solución general, utilizando las condiciones iniciales $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$. Entonces:

$$y(0) = c_1 + c_2 + \frac{1}{10} = 0 \quad (3.6)$$

Determinamos la primera derivada de la solución:

$$y'(x) = -c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-2x} + e^x \left[\frac{1}{10}(-x+1)\cos(x) + \frac{1}{50}(5x-2)\sin(x) \right] + e^x \left[\frac{1}{10}\cos(x) - \frac{1}{10}(-x+1)\sin(x) + \frac{1}{10}\sin(x) + \frac{1}{50}(5x-2)\cos(x) \right]$$

Por tanto:

$$y'(0) = -c_1 - 2c_2 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{25} = 0 \quad (3.7)$$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas formados por la **Ecuación (3.6)** y la **Ecuación (3.7)**, se obtiene:

$$c_1 = -\frac{18}{50} \quad ; \quad c_2 = \frac{13}{50}$$

y por tanto la solución particular del problema es:

$$y(x) = -\frac{18}{50}e^{-x} + \frac{13}{50}e^{-2x} + e^x \left[\frac{1}{10}(-x+1)\cos(x) + \frac{1}{50}(5x-2)\sin(x) \right]$$

3.3.2. Método de Variación de Parámetros

El **método de variación de parámetros**⁴¹ es un procedimiento para determinar soluciones particulares de todo tipo de EDOL, no solo con coeficientes constantes⁴². Generalmente, su aplicación suele ser más complicada que un que el de *método de los coeficientes indeterminados*⁴³, de forma que se suele utilizar solo en aquellos casos en los que falla este último método.

Por sencillez y claridad en los cálculos, vamos a ver primero la explicación y utilización de este método para EDOC de segundo orden del tipo:

$$\alpha_2 y'' + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = F(x) \quad ; \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \quad , \quad \alpha_2 \neq 0$$

Es necesario que el coeficiente que multiplica a la derivada de mayor orden y'' sea la unidad, en caso de no serlo se divide todo la ecuación por el coeficiente α_2 quedando⁴⁴:

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad (3.8)$$

⁴¹Desarrollado por el matemático Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

⁴²En teoría solo está limitado por la cantidad y complejidad de las operaciones que involucra. Sin embargo en la práctica primero se debe conocer la solución general de la ecuación homogénea, lo que suele ser difícil calcular de forma general.

⁴³Ver la **Sección 3.3.1, página 72**.

⁴⁴Notar que $a_1 = \alpha_1/\alpha_2$, $a_0 = \alpha_0/\alpha_2$ y $f(x) = F(x)/\alpha_2$.

Como se ha visto⁴⁵, su solución general viene dada por:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \implies \begin{cases} y_h & : \text{Sol. gen. de la ec. homogénea} & y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \\ y_p & : \text{Sol. par. de la ec. completa} & y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \end{cases}$$

Partimos de que ya disponemos de la *solución general* de la ecuación homogénea, formada por un *conjunto fundamental de soluciones*⁴⁶ $y_1(x)$ y $y_2(x)$:

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad ; \quad c_i : \text{parámetros}$$

El **método de variación de parámetros** consiste en sustituir los *parámetros* c_1 y c_2 en la solución *homogénea* y_h por funciones⁴⁷ $c_1(x)$ y $c_2(x)$, y buscar con ella una *solución particular* de la EDOL completa, de la forma:

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

donde $c_i(x)$ son funciones a determinar.

Para ello calculamos la primera derivada de y_p :

$$y'_p = c'_1 y_1 + c_1 y'_1 + c'_2 y_2 + c_2 y'_2$$

Ya que en principio hay infinitas funciones c_i que nos podría valer, vamos a poner una condición que nos simplifique el cálculo de las mismas.

$$\underbrace{c'_1 y_1 + c'_2 y_2}_{\text{Condición}} = 0 \implies y'_p = c_1 y'_1 + c_2 y'_2 \quad (3.9)$$

Calculamos ahora la segunda derivada, teniendo en cuenta lo anterior:

$$y''_p = c'_1 y'_1 + c_1 y''_1 + c'_2 y'_2 + c_2 y''_2 \quad (3.10)$$

Sustituyendo los valores de la **Ecuación (3.9)** y **Ecuación (3.10)** en la ecuación completa **Ecuación (3.8)**, se tiene:

$$\begin{aligned} y''_p + a_1 y'_p + a_0 y_p &= f \\ y''_p + a_1 y'_p + a_0 y_p &= [c'_1 y'_1 + c_1 y''_1 + c'_2 y'_2 + c_2 y''_2] + a_1 [c_1 y'_1 + c_2 y'_2] + a_0 [c_1 y_1 + c_2 y_2] \\ &= c_1 \underbrace{[y''_1 + a_1 y'_1 + a_0 y_1]}_0 + c_2 \underbrace{[y''_2 + a_1 y'_2 + a_0 y_2]}_0 + c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 \\ &= f \end{aligned}$$

Los valores entre corchetes son nulos ya que las soluciones y_1 e y_2 son soluciones de la *ecuación homogénea*, por tanto se reduce a:

$$c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 = f \quad (3.11)$$

La condición impuesta en la **Ecuación (3.9)** junto con la **Ecuación (3.11)** forman un sistema de dos ecuaciones algebraicas lineales para las derivadas⁴⁸ c'_1 y c'_2 de las funciones desconocidas c_1 y c_2 :

$$\begin{cases} c'_1 y_1 + c'_2 y_2 &= 0 \\ c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 &= f \end{cases}$$

Aplicando la regla de Cramer:

$$c'_1 = \frac{W_1}{W} = -\frac{y_2 f}{W} \quad ; \quad c'_2 = \frac{W_2}{W} = \frac{y_1 f}{W}$$

⁴⁵Ver el Teorema 3.2, página 64.

⁴⁶Ver la Definición 3.10, página 68.

⁴⁷De ahí el nombre de *variación de parámetros*.

⁴⁸Es decir, es un sistema de ecuaciones diferenciales 2×2 , generalmente no lineal y que de forma general suele ser difícil de calcular, de ahí la complejidad del método.

donde los valores del **wronskiano**⁴⁹ W y de W_1 y W_2 vienen dados por:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}$$

Finalmente, las funciones c_1 y c_2 se obtienen integrando las expresiones anteriores.

$$c_1(x) = - \int \frac{y_2 f}{W} dx \quad ; \quad c_2(x) = \int \frac{y_1 f}{W} dx$$

Hay infinitas funciones válidas $c_1(x)$ y $c_2(x)$, dando valores a las constantes de integración de estas dos integrales. Todas ellas son válidas, siendo las más sencillas las que resultan de el valor cero para las constantes.

Ejercicio 3.9. Encontrar una solución particular de la siguiente ecuación.

$$y'' + y = \tan x \quad ; \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

Vamos a aplicar el *método de variación de parámetros*. Notar que el coeficiente de y'' es la unidad, de otra forma habría que dividir toda la ecuación por ese coeficiente. Primeramente necesitamos la solución general de la homogénea asociada. Resolvemos entonces la ecuación característica:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i \quad \Rightarrow \quad y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad \begin{cases} y_1 = \cos x \\ y_2 = \sin x \end{cases}$$

donde y_1 e y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones de la homogénea.

Vamos a encontrar unas funciones $c_1(x)$ y $c_2(x)$ que verifiquen las dos ecuaciones del *método de variación de parámetros* donde $y_p = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$.

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0 \\ -c_1' \sin x + c_2' \cos x = \tan x \end{cases}$$

Aplicando Cramer:

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \tan x & \cos x \end{vmatrix} = -\sin x \tan x \quad ; \quad W_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \tan x \end{vmatrix} = \cos x \tan x = \sin x$$

Calculamos la funciones c_i .

$$c_1' = \frac{W_1}{W} = -\sin x \tan x \quad ; \quad c_1 = - \int \sin x \tan x dx$$

$$\begin{aligned} \int \sin x \tan x dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} dx = \int \sec x dx - \int \cos x dx = \\ &= \log(\sec x + \tan x) - \sin x \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\log(\sec x + \tan x) + \sin x \end{aligned}$$

$$c_2' = \frac{W_2}{W} = \sin x \quad ; \quad c_2 = \int \sin x dx = -\cos x$$

Por tanto:

$$y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x = (-\log(\sec x + \tan x) + \sin x) \cos x - \cos x \sin x$$

$$y_p = -\log(\sec x + \tan x) \cos x = \log\left(\frac{\cos x}{1 + \sin x}\right) \cos x$$

⁴⁹Ver el Teorema 3.5, página 67.

Extensión del Método de Variación de Parámetros a EDOL de Orden n

La técnica vista en el apartado anterior para resolver una EDO de segundo orden (Ecuación 3.8, página 77), se puede extender a EDO lineales de cualquier orden n , obteniéndose un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias (SEDO) de primer orden en las n funciones incógnitas $c_i(x)$, y resolverse de la misma forma por el método de Cramer. Veamos a modo de ejemplo cómo sería el proceso para una EDOL de tercer orden:

$$\alpha_3(x)y''' + \alpha_2(x)y'' + \alpha_1(x)y' + \alpha_0(x)y = F(x) \quad ; \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \quad , \quad \alpha_3 \neq 0$$

Al igual que antes⁵⁰, es necesario que el coeficiente que multiplica a la derivada de mayor orden y''' sea la unidad, dividiendo toda la ecuación en caso necesario por $\alpha_3(x)$ quedando:

$$y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{\alpha_3(x)}F(x) \quad (3.12)$$

La solución general viene dada por:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \implies \begin{cases} y_h & : \text{Sol. gen. de la ec. homogénea} & y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0 \\ y_p & : \text{Sol. par. de la ec. completa} & y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x) \end{cases}$$

Una vez calculada la *solución general* de la ecuación homogénea a través de su ecuación característica, tendremos tres soluciones linealmente independientes $y_1(x)$, $y_2(x)$ y $y_3(x)$ de forma que:

$$y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + c_3y_3(x) \quad ; \quad c_i : \text{parámetros}$$

A través del método de variación de parámetros buscamos una solución particular de la forma:

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + c_3(x)y_3(x) \quad ; \quad c_i(x) : \text{funciones a determinar}$$

Derivando esta expresión tres veces e imponiendo simplificaciones se tiene:

$$\begin{aligned} y_p' &= c_1y_1' + c_2y_2' + c_3y_3' + \underbrace{c_1'y_1 + c_2'y_2 + c_3'y_3}_0 \\ y_p'' &= c_1y_1'' + c_2y_2'' + c_3y_3'' + \underbrace{c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_3'y_3'}_0 \\ y_p''' &= c_1y_1''' + c_2y_2''' + c_3y_3''' + c_1'y_1'' + c_2'y_2'' + c_3'y_3'' \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación completa Ecuación (3.12), reordenando y simplificando se tiene::

$$\begin{aligned} y_p''' + a_2(x)y_p'' + a_1(x)y_p' + a_0(x)y_p &= f \\ y_p''' + a_2(x)y_p'' + a_1(x)y_p' + a_0(x)y_p &= c_1'y_1'' + c_2'y_2'' + c_3'y_3'' + \\ + c_1 \underbrace{[y_1''' + a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1]}_0 &+ c_2 \underbrace{[y_2''' + a_2(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2]}_0 + \\ + c_3 \underbrace{[y_3''' + a_2(x)y_3'' + a_1(x)y_3' + a_0(x)y_3]}_0 &= f \\ c_1'y_1'' + c_2'y_2'' + c_3'y_3'' &= f \end{aligned}$$

Finalmente se tiene un sistema de 3 ecuaciones algebraicas lineales para las derivadas c_1' , c_2' y c_3' de las funciones desconocidas:

$$\begin{cases} c_1'y_1'' + c_2'y_2'' + c_3'y_3'' = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_3'y_3' = 0 \\ c_1'y_1'' + c_2'y_2'' + c_3'y_3'' = f \end{cases}$$

⁵⁰Ver la Sección 3.3.2, página 77.

Aplicando la regla de Cramer:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & y_2' & y_3' \\ f & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_3 \\ y_1' & 0 & y_3' \\ y_1'' & f & y_3'' \end{vmatrix}, \quad W_3 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y_1' & y_2' & 0 \\ y_1'' & y_2'' & f \end{vmatrix}$$

$$c_1' = \frac{W_1}{W} \quad ; \quad c_2' = \frac{W_2}{W} \quad ; \quad c_3' = \frac{W_3}{W}$$

Integrando estas EDO de primer orden se tiene finalmente:

$$c_1(x) = \int \frac{W_1}{W} dx \quad ; \quad c_2(x) = \int \frac{W_2}{W} dx \quad ; \quad c_3(x) = \int \frac{W_3}{W} dx$$

De forma general para una EDO lineal de orden n de la forma:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

El sistema que hay que resolver por el método de *variación de parámetros* es:

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 + \dots + c_n'y_n = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' + \dots + c_n'y_n' = 0 \\ \vdots \\ c_1'y_1^{(n-1)} + c_2'y_2^{(n-1)} + \dots + c_n'y_n^{(n-1)} = f \end{cases}$$

donde las funciones $y_i(x)$ corresponden al conjunto fundamental de soluciones de la EDO homogénea asociada.

Ejercicio 3.10. Encontrar la solución general de la siguiente ecuación usando el método de los coeficientes indeterminados y el método de variación de parámetros.

$$y''' - y'' = 12x^2 + 6x$$

Al tratarse de una EDO lineal, la solución general puede expresarse como:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

La solución general de la homogénea se puede obtener a través de la ecuación característica:

$$y''' - y'' = 0 \quad \implies \quad \lambda^3 - \lambda^2 = 0 \quad ; \quad \lambda^2(\lambda - 1) = 0 \quad \implies \quad \begin{cases} \lambda_{1,2} = 0 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

$$y_h(x) = c_1 + c_2x + c_3e^x$$

Para encontrar una solución particular vamos a utilizar los dos métodos que nos indica el enunciado.

• Método de los Coeficientes Indeterminados

Como el término independiente es de tipo polinómico con raíz asociada $\alpha \pm \beta i = 0$ y ésta está presente como raíz de la ec. característica con multiplicidad 2, la solución particular tiene la forma:

$$y_p(x) = x^2(Ax^2 + Bx + C) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$$

Derivando y sustituyendo en la EDO completa se tiene:

$$y_p'(x) = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx \quad ; \quad y_p''(x) = 12Ax^2 + 6Bx + 2C \quad ; \quad y_p'''(x) = 24Ax + 6B$$

$$y''' - y'' = 24Ax + 6B - (12Ax^2 + 6Bx + 2C) = -12Ax^2 + (24A - 6B)x + (6B - 2C) = 12x^2 + 6x$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -12A = 12 \Rightarrow A = -1 \\ 24A - 6B = 6 \Rightarrow B = -5 \\ 6B - 2C = 0 \Rightarrow C = -15 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{y_p(x) = -x^4 - 5x^3 - 15x^2}$$

Finalmente, la solución general de la EDO dada es:

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 + c_2x + c_3e^x - x^4 - 5x^3 - 15x^2}$$

• Método de Variación de Parámetros

Notar que el coeficiente de y''' es la unidad, de otra forma habría que dividir toda la ecuación por ese coeficiente **antes** de encontrar la solución de la homogénea.

Buscamos una solución particular de la forma:

$$y_p(x) = c_1(x) + c_2(x)x + c_3(x)e^x$$

Para encontrar las funciones $c_i(x)$ resolvemos el siguiente sistema, teniendo en cuenta que $y_1 = 1$, $y_2 = x$ e $y_3 = e^x$.

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1'y_1 + c_2'y_2 + c_3'y_3 = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_3'y_3' = 0 \\ c_1'y_1'' + c_2'y_2'' + c_3'y_3'' = f \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1' + c_2'x + c_3'e^x = 0 \\ c_2' + c_3'e^x = 0 \\ c_3'e^x = 12x^2 + 6x \end{array} \right.$$

Lo resolvemos por Cramer:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & x & e^x \\ 0 & 1 & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} = e^x ; \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x & e^x \\ 0 & 1 & e^x \\ 12x^2 + 6x & 0 & e^x \end{vmatrix} = (12x^3 - 6x^2 - 6x)e^x$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & e^x \\ 0 & 0 & e^x \\ 0 & 12x^2 + 6x & e^x \end{vmatrix} = -e^x(12x^2 + 6x) ; \quad W_3 = \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12x^2 + 6x \end{vmatrix} = 12x^2 + 6x$$

Por tanto:

$$c_1' = \frac{W_1}{W} = 12x^3 - 6x^2 - 6x ; \quad c_2' = \frac{W_2}{W} = -12x^2 - 6x ; \quad c_3' = \frac{W_3}{W} = (12x^2 + 6x)e^{-x}$$

Integrando:

$$c_1' = \frac{dc_1}{dx} = 12x^3 - 6x^2 - 6x \Rightarrow c_1(x) = \int (12x^3 - 6x^2 - 6x) dx = 3x^4 - 2x^3 - 3x^2$$

$$c_2' = \frac{dc_2}{dx} = -12x^2 - 6x \Rightarrow c_2(x) = \int (-12x^2 - 6x) dx = -4x^3 - 3x^2$$

$$c_3' = \frac{dc_3}{dx} = (12x^2 + 6x)e^{-x} \Rightarrow c_3(x) = 12 \int x^2 e^{-x} dx + 6 \int x e^{-x} dx$$

Integrando por partes:

$$c_3(x) = -12(x^2 + 2x + 2)e^{-x} - 6(x + 1)e^{-x} = -6(2x^2 + 5x + 5)e^{-x}$$

Por tanto la solución particular buscada será:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= c_1(x) + c_2(x)x + c_3(x)e^x = 3x^4 - 2x^3 - 3x^2 - (4x^3 + 3x^2)x - 6(2x^2 + 5x + 5)e^{-x}e^x = \\ &= -x^4 - 5x^3 - 15x^2 - 30x - 30 \end{aligned}$$

Finalmente, la solución general es:

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 + c_2x + c_3e^x - x^4 - 5x^3 - 15x^2 - 30x - 30}$$

Notar que las dos soluciones generales de ambos apartados son distintas ya que cada uno de los métodos (**coeficientes indeterminados** y **variación de parámetros**) ha dado como resultado una solución particular distinta. Esto suele ser normal, ya que existen infinitas soluciones particulares de la ecuación (todo el conjunto de funciones dado por la familia de curvas tri-paramétrica de la solución general) cada método devuelve una cualquiera de ellas, no teniendo porqué ser iguales.

Podemos comprobar fácilmente la validez de ambas soluciones generales por ejemplo con *SageMath*⁵¹.

```
sage: var('c1 c2 c3')
sage: # Solución general del apartado a)
sage: y1=c1+c2*x+c3*e^x-x^4-5*x^3-15*x^2
sage: # Comprobación de la solución en la EDO
sage: diff(y1,x,3)-diff(y1,x,2)-12*x^2-6*x
0
sage: # Solución general del apartado b)
sage: y2=c1+c2*x+c3*e^x-x^4-5*x^3-15*x^2-30*x-30
sage: # Comprobación de la solución en la EDO
sage: diff(y2,x,3)-diff(y2,x,2)-12*x^2-6*x
0
```

Por tanto ambas soluciones generales son válidas.

En la práctica, al igual que se observa en el ejercicio anterior, el *método de los coeficientes indeterminados*, siempre que se pueda aplicar⁵², suele resultar más sencillo de realizar que el *método de variación de parámetros*.

3.3.3. Función de Green

Definición 3.11. Función de Green

Dada la EDO:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

Su solución general viene dada por:

$$y = y_h + y_p = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x)$$

La solución particular puede obtener por el **método de variación de parámetros** como:

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \implies c_1(x) = - \int_{x_0}^x \frac{y_2(s)R(s)}{W(s)} ds \quad ; \quad c_2(x) = \int_{x_0}^x \frac{y_1(s)R(s)}{W(s)} ds$$

donde x_0 es un punto cualquiera del dominio de la ecuación⁵³. Por tanto:

$$y_p(x) = -y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{y_2(s)R(s)}{W(s)} ds + y_2(x) \int_{x_0}^x \frac{y_1(s)R(s)}{W(s)} ds = \int_{x_0}^x \underbrace{\frac{y_1(s)y_2(x) - y_2(s)y_1(x)}{W(s)}}_{G(x,s)} R(s) ds$$

$$y_p(x) = \int_{x_0}^x G(x,s) R(s) ds$$

donde la función $G(x,s)$ recibe el nombre de **función de Green** de la ecuación.

Como se verá esta forma de expresar la solución de una ecuación diferencial a través de su **función de Green** aparecerá en diferentes problemas a lo largo de los temas⁵⁴.

⁵¹<https://www.sagemath.org/>

⁵²Ver la Sección 3.3.1, página 72.

⁵³La solución particular obtenida es la solución del problema formado por la ecuación y las condiciones iniciales $y(x_0) = y'(x_0) = 0$.

⁵⁴Ver por ejemplo la Sección 11.4.2, página 376.

3.4. EDOL con Coeficientes Variables

No existe métodos generales para resolver las EDO lineales de orden n con coeficientes variables de la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y = f(x)$$

El mejor procedimiento para obtener soluciones de este tipo de EDO es en forma de *series infinitas*⁵⁵ Existen sin embargo dos casos donde es posible encontrar soluciones analíticas de forma simple:

1. Reducción de orden (para orden 2)

- Falta de variable independiente o dependiente.
- Conocida una solución particular.

2. Ecuación de Cauchy-Euler

3.4.1. Reducción de Orden por falta de un Tipo de Variable

Como se vio en el [Sección 2.9, página 46](#), una EDO de segundo orden en la falte la variable x o y se puede transformar, mediante un cambio de variable apropiado, en una EDO de primer orden.

Ausencia de y : $F(x, y', y'') = 0$

Se realiza haciendo el c.v.: $y' = t$ con $t(x)$ y $t' = \frac{dt}{dx}$

$$y'' = \frac{dt}{dx} = t' \quad \Rightarrow \quad f(x, t, t') = 0 \quad \text{EDO 1}^{er} \text{ Orden}$$

Ausencia de x : $F(y, y', y'') = 0$

Se realiza haciendo el c.v.: $y' = t$ con $t(y)$ y $t' = \frac{dt}{dy}$

$$y'' = \frac{dt}{dx} = \frac{dt}{dy} \frac{dy}{dx} = t' t \quad \Rightarrow \quad f(y, t, t') = 0 \quad \text{EDO 1}^{er} \text{ Orden}$$

En ambos casos la solución se obtiene resolviendo **dos** EDO de primer orden sucesivas⁵⁶.

3.4.2. Reducción de Orden conocida una Solución Particular: Fórmula de Abel

Dada una EDO lineal homogénea de segundo orden:

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

se puede reducir a una de *primer orden* si se conoce una solución $y_1(x)$ no trivial. La solución general será:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

siendo $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluciones *linealmente independientes*⁵⁷, es decir, su cociente no puede ser constante.

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{cte} \quad \xrightarrow{\text{c.v.}} \quad u(x) = \frac{y_1(x)}{y_2(x)} \quad ; \quad y_2(x) = u(x)y_1(x)$$

Sustituyendo este valor de $y_2(x)$ en la EDO de segundo orden, se reduce a una EDO de primer orden, siendo la incógnita $u(x)$.

⁵⁵Este método no se estudiará en este curso. Ver por ejemplo "Clases de Ampliación de Matemáticas para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 517.

⁵⁶Ver el [Ejercicio 2.17, página 47](#) y el [Ejercicio 2.18, página 47](#).

⁵⁷Ver la [Definición 3.9, página 67](#).

Entonces, cuando tenemos un problema general de segundo orden en *forma canónica*⁵⁸:

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ \text{Sol. Particular: } y_1(x) \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{C.V.}} y(x) = u(x)y_1(x)$$

Sustituyendo: $\left\{ \begin{array}{l} y' = uy_1' + y_1u' \\ y'' = uy_1'' + 2y_1'u' + y_1u'' \end{array} \right\}$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = \underbrace{u[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1]}_0 + y_1u'' + (2y_1' + p(x)y_1)u' = 0$$

Por tanto, podemos realizar una reducción de orden de la siguiente forma:

$$y_1u'' + (2y_1' + p(x)y_1)u' = 0 \quad \xrightarrow{w = u'} \quad y_1w' + (2y_1' + p(x)y_1)w = 0$$

La ecuación anterior es lineal y separable, de forma que separando variables e integrando:

$$\frac{dw}{w} + 2\frac{y_1'}{y_1}dx + p(x)dx = 0 \quad \xrightarrow{\int dx} \quad \log w + 2\log y_1 = -\int p(x)dx + c$$

$$\log |wy_1^2| = -\int p(x)dx + c \quad ; \quad wy_1^2 = c_1 e^{-\int p(x)dx}$$

Despejando w , deshaciendo el C.V. $w = u'$ e integrando de nuevo:

$$u = c_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx + c_2$$

Como cualquier solución particular $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ no trivial es válida, haciendo $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$ se tiene la conocida como **fórmula de Abel**⁵⁹:

$$y_2(x) = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx$$

Finalmente, la solución general será:

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Este procedimiento se puede generalizar para determinar la solución general de una ecuación **no homogénea** de segundo orden de la forma:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (3.13)$$

Siempre que:

- Se conozca una **solución particular** $y_1(x)$ de la *ecuación homogénea asociada*.
- Se aplique, posteriormente a la **reducción de orden** (*fórmula de Abel*), el *método de variación de parámetros*⁶⁰ para determinar una **solución particular** de la *ecuación completa* (3.13).

De forma general, este método de *reducción de orden* se puede aplicar para reducir una EDO lineal de orden n a otra EDO de orden $n - m$ siempre que se conozcan m soluciones particulares de la ecuación original.

Nota 3.1. Dada la EDO homogénea $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, se puede demostrar que el *wronskiano*⁶¹ de dos soluciones cualesquiera de esta ecuación viene dado por:

$$W = ce^{\int p(x)dx} \quad \implies \quad y_2 = y_1 \int \frac{W}{y_1^2} dx \quad (\text{Fórmula de Abel})$$

para una determinada constante c .

⁵⁸Donde $p(x) = b(x)/a(x)$ y $q(x) = c(x)/a(x)$. Ver la Sección 4.4.3, página 110.

⁵⁹También conocida a veces como *fórmula de reducción de orden* o de *Abel-Liouville*.

⁶⁰Ver la Sección 3.3.2, página 77.

⁶¹Ver el Teorema 3.5, página 67.

Ejercicio 3.11. Encontrar la solución general de la siguiente ecuación, conociendo una solución particular $y_1(x)$ de su ecuación homogénea.

$$(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2 - 1)^2 \quad ; \quad y_1(x) = x$$

Notar que es una EDO lineal de segundo orden con coeficientes variables y no homogénea, de forma que no hay un método para su resolución. Vamos a aplicar el procedimiento descrito en la sección anterior.

Primeramente ponemos la ecuación en su *forma canónica*:

$$(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2 - 1)^2 \implies y'' - \underbrace{\frac{2x}{x^2 - 1}}_{p(x)} y' + \frac{2}{x^2 - 1} y = \underbrace{\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}}_{f(x)}$$

Notar que esta segunda EDO tiene las mismas soluciones que la original, excepto en $x = \pm 1$, que es un *punto singular*⁶² de la primera EDO. Aplicamos la fórmula de Abel:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx = x \int \frac{e^{\int \frac{2x}{x^2-1} dx}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{\ln(x^2-1)}}{x^2} dx = x \int \frac{x^2-1}{x^2} dx = \\ &= x \int (1 - x^{-2}) dx = x(x + x^{-1}) = x^2 + 1 \end{aligned}$$

Por tanto la solución general de la homogénea es:

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = \boxed{c_1 x + c_2 (x^2 + 1)}$$

Aplicamos ahora el *método de variación de parámetros* para obtener una solución particular de la completa. Notar que en este método siempre el coef. de la derivada de mayor orden debe ser la unidad (*forma canónica*) que es la que hemos utilizado en la *fórmula de Abel*.

$$y_p = c_1(x)x + c_2(x)(x^2 + 1)$$

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f \end{cases} \implies \begin{cases} c_1' x + c_2' (x^2 + 1) = 0 \\ c_1' + 2xc_2' = x^2 - 1 \end{cases} \implies \begin{cases} -c_1' - c_2' \frac{x^2+1}{x} = 0 \\ c_1' + 2xc_2' = x^2 - 1 \end{cases} \quad (3.14)$$

Sumando ambas:

$$(-x - x - 1 + 2x)c_2' = x^2 - 1 \quad ; \quad (x - x^{-1})c_2' = x^2 - 1 \quad ; \quad \frac{x^2-1}{x}c_2' = x^2 - 1 \quad ; \quad c_2' = x$$

$$\implies \boxed{c_2(x) = \frac{x^2}{2}}$$

De la primera ecuación de (3.14):

$$-c_1' - x \frac{x^2 + 1}{x} = 0 \quad ; \quad c_1' = -x^2 - 1 \quad ; \quad \boxed{c_1(x) = -\frac{x^3}{3} - x}$$

Por tanto, una solución particular de la EDO es:

$$y_p(x) = c_1(x)x + c_2(x)(x^2 + 1) = \left(-\frac{x^3}{3} - x\right)x + \frac{x^2}{2}(x^2 + 1) = -\frac{x^4}{3} - x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2} = \boxed{\frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{2}}$$

Finalmente, la solución general pedida es:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \boxed{c_1 x + c_2 (x^2 + 1) + \frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{2}}$$

⁶²Ver la Definición 4.10, página 110.

3.4.3. Ecuación de Cauchy-Euler

Se denomina **ecuación de Cauchy-Euler**⁶³ o **equidimensional completa** a una EDO de la forma:

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y'(x) + a_0 y = g(x)$$

donde los coeficientes a_i son constantes y el grado k de los coeficientes monomiales x^k coincide con el orden k de las derivadas $y^{(k)}$ (puede faltar algún bloque $a_k x^k y^{(k)}$).

La solución general de esta ecuación completa, será como siempre la suma de la solución general de la homogénea asociada más una solución particular de la completa.

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Una solución particular de la ecuación completa se puede obtener mediante el *método de variación de parámetros*⁶⁴. Veamos ahora como determinar la solución general de la **ecuación de Cauchy-Euler** o **equidimensional homogénea**⁶⁵:

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y'(x) + a_0 y = 0 \quad (3.15)$$

Hay dos métodos:

- Buscar soluciones de la forma: $y(x) = x^m$
- Mediante el cambio de variable: $x = e^z$

Soluciones de la forma: $y(x) = x^m$

Este método es el más sencillo y se basa en buscar soluciones de la forma:

$$y(x) = x^m \rightarrow \frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2} \dots$$

por tanto:

$$a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} = a_k x^k m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1) x^{m-k} = a_k m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1) x^m$$

de forma que cualquier EDO de tipo Cauchy-Euler de orden n se transforma en una ecuación algebraica de orden n .

Por ejemplo, sea la siguiente EDO de Cauchy-Euler de segundo orden y homogénea:

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = 0$$

Al buscar soluciones de la forma $y = x^m$ se obtiene:

$$ax^2 m(m-1)x^{m-2} + bmx^{m-1} + cx^m = ax^m m(m-1) + bx^m + cx^m = 0$$

Quedando la ecuación algebraica, denominada **ecuación auxiliar** o **indicial**, de la forma:

$$am(m-1) + bm + c = 0 \rightarrow am^2 + (b-a)m + c = 0$$

De forma general, para una EDO de Cauchy-Euler homogénea de orden n (**Ecuación (3.15)**), la *ecuación indicial* es una ecuación polinómica de grado n y por tanto con n soluciones (reales y/o complejas, iguales y/o distintas). Para cada una de ellas existe una solución de una determinada forma $y_k(x)$, siendo la solución general de la ecuación homogénea $y_h(x)$ una combinación lineal de todas ellas.

$$y_h(x) = \sum_{k=1}^n c_k y_k(x)$$

⁶³En la **Sección 4.4.5, página 122** se analizan las soluciones de esta ecuación, de orden dos.

⁶⁴El método de los *coeficientes indeterminados* (ver la **Sección 3.3.1, página 72**) en general solo es válido para las EDO con coeficientes constantes. Por tanto para determinar la solución particular del ecuación de Cauchy-Euler solo es posible utilizar el *método de variación de parámetros*, ver la **Sección 3.3.2, página 77**.

⁶⁵En algunos textos es a esta ecuación a la que se refieren como de Cauchy o equidimensional.

En la siguiente tabla se muestra la forma de las soluciones $y_k(x)$, donde s representa la multiplicidad de una determinada solución m_k de la ecuación indicial.

Solución $m_k = \alpha + i\beta$	Tipo solución $y_k(x)$
Reales : α^s	$x^\alpha [c_1 + c_2 \log x + \dots + c_s (\log x)^{s-1}]$
Complejas : $[\alpha \pm \beta i]^s$	$x^\alpha \{c_1 \cos(\beta \log x) + c_2 \sin(\beta \log x) + \log x [c_3 \cos(\beta \log x) + c_4 \sin(\beta \log x)] + \dots + (\log x)^{s-1} [c_{2s-1} \cos(\beta \log x) + c_{2s} \sin(\beta \log x)]\}$

A continuación se muestran algunos ejemplos prácticos del uso de esta tabla:

- $x^2 y'' + 2x^2 y' - 2y = 0$

Ec. Indicial:

$$m(m-1) + 2m - 2 = 0$$

Ec. Indicial Simplificada:

$$m^2 + m - 2 = 0$$

Sol. Ec. Indicial:

$$m = \{1, -2\}$$

Sol. General:

$$y(x) = c_1 x + c_2 x^{-2}$$

- $x^4 y^{(4)} + 3x^3 y''' - 2x^2 y'' + 4xy' = 0$

Ec. Indicial:

$$m(m-1)(m-2)(m-3) + 3m(m-1)(m-2) - 2m(m-1) + 4m = 0$$

Ec. Indicial Simplificada:

$$m^4 - 3m^3 + 4m = 0$$

Sol. Ec. Indicial:

$$m = \{0, -1, 2 \text{ (doble)}\}$$

Sol. General:

$$y(x) = c_1 + c_2 x^{-1} + x^2(c_3 + c_4 \log x)$$

- $x^3 y''' + 3x^2 y'' + 4xy' - 52y = 0$

Ec. Indicial:

$$m(m-1)(m-2) + 3m(m-1) + 4m - 52 = 0$$

Ec. Indicial Simplificada:

$$m^3 - 3m - 52 = 0$$

Sol. Ec. Indicial:

$$m = \{4, -2 \pm 3i\}$$

Sol. General:

$$y(x) = c_1 x^4 + x^{-2}(c_3 \cos(3 \log x) + c_4 \sin(3 \log x))$$

Ejercicio 3.12. Resolver la siguiente EDO de Cauchy-Euler.

$$x^3 y''' + 5x^2 y'' + 7xy' + 8y = 0$$

Buscamos soluciones de la forma: $y = x^m$

$$x^m m(m-1)(m-2) + 5x^m m(m-1) + 7x^m m + 8x^m = 0 \implies m(m-1)(m-2) + 5(m-1) + 7m + 8 = 0$$

Reordenando:

$$(m+2)(m^2+4) = 0$$

Las soluciones son en este caso: $m_1 = -2$; $m_{2,3} = \pm 2i$

Por tanto, la solución general de la EDO será:

$$y(x) = c_1 x^{-2} + c_2 \cos(2 \log x) + c_3 \sin(2 \log x)$$

Cambio de Variable: $x = e^z$

Este segundo método para calcular la solución de la **Ecuación (3.15)** es más laborioso, aunque no necesita una tabla de soluciones como el caso anterior. Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$x = e^z \quad \implies \quad z = \log x \quad \implies \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$$

con lo que las derivadas pasan a ser:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{1}{x} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left[\frac{dy}{dz} \frac{1}{x} \right] = \frac{d^2y}{dz^2} \frac{1}{x^2} - \frac{dy}{dz} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \left[\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} \right] \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{d}{dx} \frac{d^2y}{dx^2} = \dots = \frac{1}{x^3} \left[\frac{d^3y}{dz^3} - 3 \frac{d^2y}{dz^2} + 2 \frac{dy}{dz} \right] \\ \frac{d^4y}{dx^4} &= \frac{d}{dx} \frac{d^3y}{dx^3} = \dots = \frac{1}{x^4} \left[\frac{d^4y}{dz^4} - 6 \frac{d^3y}{dz^3} + 11 \frac{d^2y}{dz^2} - 6 \frac{dy}{dz} \right] \end{aligned}$$

El cambio de variable anterior transforma la ecuación original en una EDO Lineal de orden n de coeficientes constantes de la forma:

$$b_n \frac{d^n y}{dz^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dy}{dz} + b_0 y = 0$$

que puede resolverse a través de la *ecuación característica*⁶⁶ y después deshacer el cambio de variable: $z = \log x$.

Ejercicio 3.13. Resolver la EDO de Cauchy-Euler del **Ejercicio 3.12** a través del cambio de variable $x = e^z$

$$x^3 y''' + 5x^2 y'' + 7xy' + 8y = 0$$

Buscamos soluciones de la forma: $x = e^z$

$$y' = x^{-1} \frac{dy}{dz} \quad ; \quad y'' = x^{-2} \left[\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} \right] \quad ; \quad y''' = x^{-3} \left[\frac{d^3y}{dz^3} - 3 \frac{d^2y}{dz^2} + 2 \frac{dy}{dz} \right]$$

Sustituyendo en el EDO:

$$\left[\frac{d^3y}{dz^3} - 3 \frac{d^2y}{dz^2} + 2 \frac{dy}{dz} \right] + 5 \left[\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} \right] + 7 \frac{dy}{dz} + 8y = 0 \quad ; \quad \frac{d^3y}{dz^3} + 2 \frac{d^2y}{dz^2} + 4 \frac{dy}{dz} + 8y = 0$$

cuya ecuación característica es:

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0 \quad \implies \quad \lambda = \{-2, \pm 2i\}$$

Por tanto la solución en la variable z es:

$$y = c_1 e^{-2z} + c_2 \cos(2z) + c_3 \sin(2z)$$

Deshaciendo el cambio de variable $z = \log x$ se obtiene finalmente la misma solución que en el ejercicio anterior:

$$y(x) = c_1 x^{-2} + c_2 \cos(2 \log x) + c_3 \sin(2 \log x)$$

⁶⁶Ver la **Sección 3.2**, página 65.

3.5. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (SEDO)

En muchos problemas prácticos aparecen diferentes magnitudes, dependientes todas de una misma variable independiente, que *interaccionan* unas con otras siguiendo determinadas leyes (ecuaciones). Una buena forma de modelizar estos problemas, generalmente complejos, es a través de *sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*.

Definición 3.12. Sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Un *Sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* (SEDO) de orden m es un conjunto de n ecuaciones que puede definirse de la forma:

$$\vec{F}(x, \vec{y}, \vec{y}', \dots, \vec{y}^{(m)}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F_1(x, \vec{y}, \vec{y}', \dots, \vec{y}^{(m)}) = 0 \\ F_2(x, \vec{y}, \vec{y}', \dots, \vec{y}^{(m)}) = 0 \\ \vdots \\ F_n(x, \vec{y}, \vec{y}', \dots, \vec{y}^{(m)}) = 0 \end{cases}$$

Donde $\vec{F} = [F_1, \dots, F_n]$ es una función vectorial de n componentes⁶⁷ F_i que dependen de una variable escalar x (variable independiente), de una función vectorial $\vec{y} = [y_1, \dots, y_n]$ con⁶⁸ $y_i = f_i(x)$ y de sus respectivas derivadas respecto a x de orden k , $\vec{y}^{(k)} = [y_1^{(k)}, \dots, y_n^{(k)}]$.

Ejemplo 3.12. Sistema de ecuaciones diferenciales (SEDO) de orden 3.

$$\begin{cases} 3y_1' - y_1y_2 + y_2'' = 0 \\ y_2''' - y_1'' + xy_1 - 1 = 0 \end{cases}$$

Este sistema relaciona dos funciones incógnitas $y_1(x)$ e $y_2(x)$ y sus respectivas derivadas hasta orden 3.

Definición 3.13. Solución de un SEDO

Se dice que un SEDO de orden m tiene **solución** en un intervalo I , si existen n funciones:

$$y_1 = f_1(x) \quad ; \quad y_2 = f_2(x) \quad ; \quad \dots \quad ; \quad y_n = f_n(x)$$

suficientemente derivables en I de forma que satisfacen todas las ecuaciones del sistema en todos los puntos de I .

Ejercicio 3.14. Comprobar que el conjunto de funciones (1) es una solución del SEDO (2):

$$(1) \begin{cases} x(t) = \sin t + t^2 \\ y(t) = e^{2t} \\ z(t) = \cos t \end{cases} \quad ; \quad (2) \begin{cases} x' = z + 2t \\ y' = 2y \\ z' = -x + t^2 \end{cases}$$

Vamos comprobar si ambas partes de las igualdades del SEDO son iguales:

$$\begin{array}{llllll} x' = \cos t + 2t & \rightarrow & z + 2t & = & \cos t + 2t & = & x' & \Rightarrow & \text{Cierto!} \\ y' = 2e^{2t} & \rightarrow & 2y & = & 2e^{2t} & = & y' & \Rightarrow & \text{Cierto!} \\ z' = -\sin t & \rightarrow & -x + t^2 & = & -\sin t & = & z' & \Rightarrow & \text{Cierto!} \end{array}$$

⁶⁷Al igualarlas a cero dan lugar a las ecuaciones del sistema.

⁶⁸Funciones incógnitas del sistema.

Si habitualmente resulta complicado el estudio de una única EDO, aun más complicado es el estudio general de los SEDO. En esta sección solo vamos a analizar los SEDO de *primer orden lineales*⁶⁹ (SEDO1L), ya que están íntimamente relacionados con las EDO lineales de orden n .

3.5.1. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden Lineales

Nos vamos a centrar en SEDO1L formados por dos ecuaciones y dos incógnitas, de la forma:

$$\begin{cases} x' = ax + by + f(t) \\ y' = cx + dy + g(t) \end{cases}$$

donde $x(t)$ e $y(t)$ son las funciones incógnitas, a, b, c, d son constantes y $f(t)$ y $g(t)$ son funciones de la variable independiente t .

Este tipo de sistemas se pueden reducir a una EDO lineal con coeficientes constantes de segundo orden, que dependa solo de una variable (x o y) y resolverlo por los métodos vistos en la [Sección 3.3, página 72](#). Para ello se sigue el siguiente proceso.

1. Derivar una de las dos ecuaciones con respecto a la variable independiente t . Por ejemplo, si queremos quedarnos con la variable x elegimos la primera ecuación:

$$\frac{d}{dt}[x' = ax + by + f(t)] \implies x'' = ax' + by' + f'(t) \quad (3.16)$$

2. Con las dos ecuaciones originales del sistema se despeja la variable y su derivada a eliminar. Por ejemplo en nuestro caso la variable a eliminar es y por tanto:

$$\begin{cases} \text{(Ec.1)} & : by = x' - ax - f(t) \\ \text{(Ec.2)} & : y' = cx + dy + g(t) \end{cases}$$

3. Sustituyendo en (3.16):

$$\begin{aligned} x'' = ax' + by' + f'(t) &= x'' = ax' + b[cx + dy + g(t)] + f'(t) = ax' + bcx + d[x' - ax - f(t)] + bg(t) + f'(t) \\ x'' &= (a + d)x' + (bc - ad)x - df(t) + bg(t) + f'(t) \end{aligned}$$

Que es una EDO de segundo orden lineal.

4. Una vez resuelta, se puede determinar fácilmente $y(t)$ de la primera ecuación del sistema.

Ejercicio 3.15. Encontrar la solución general y particular del siguiente SEDO:

$$\begin{cases} x' = 2x - 2y - t^2 \\ y' = x - y - 2t \\ x(0) = y(0) = 1 \end{cases}$$

Como se trata de un SEDO1L, vamos a reducirla a una EDO de segundo orden lineal:

$$\begin{aligned} x'' = 2x' - 2y' - 2t &= 2x' - 2(x - y - 2t) - 2t = 2x' - 2x - (x' - 2x + t^2) + 4t - 2t = x' - t^2 + 2t \\ x'' - x' &= -t^2 + 2t \end{aligned}$$

Resolvemos por el método de los coeficientes indeterminados (ver la [Sección 3.3.1, página 72](#)):

$$\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) = 0 \implies \lambda = \{0, 1\} \implies x_h = c_1 + c_2 e^t$$

Como 0 es raíz de la ec. característica, la forma de la solución particular es:

$$x_p = t(at^2 + bt + c) = at^3 + bt^2 + ct \quad ; \quad x'_p = 3at^2 + 2bt + c \quad ; \quad x''_p = 6at + 2b$$

⁶⁹Ver la definición de orden y linealidad de una ecuación diferencial en la [Sección 1.2.3, página 7](#).

Sustituyendo en la EDO:

$$x'' - x' = 6at + 2b - 3at^2 - 2bt - c = -t^2 + 2t \implies \begin{cases} -3a = -1 \rightarrow a = 1/3 \\ 6a - 2b = 2 \rightarrow b = (6a - 2)/2 = 0 \\ 2b - c = 0 \rightarrow c = 0 \end{cases} \implies x_p = \frac{1}{3}t^3$$

La solución de $x = x_h + x_p$ es:

$$x(t) = c_1 + c_2 e^t + \frac{1}{3}t^3$$

De la primera ecuación del sistema se obtiene la solución general para y :

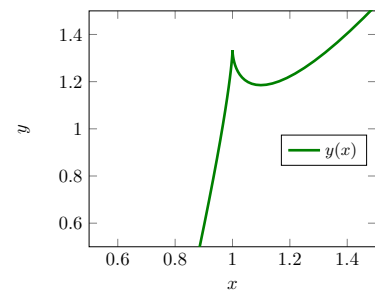
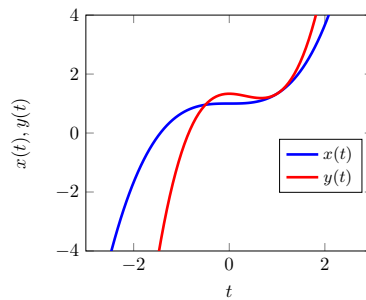
$$y(t) = \frac{2x - x' - t^2}{2} = \frac{2c_1 + 2c_2 e^t + \frac{2}{3}t^3 - c_2 e^t - t^2 - t^2}{2} = c_1 + \frac{1}{2}c_2 e^t + \frac{1}{3}t^3 - t^2$$

Imponiendo las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} x(0) = 1 \implies x(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ y(0) = c_1 + \frac{1}{2}c_2 = 1 \end{cases} \implies c_1 = 1, c_2 = 0$$

La solución particular es finalmente:

$$\begin{cases} x(t) = 1 + \frac{1}{3}t^3 \\ y(t) = 1 + \frac{1}{3}t^3 - t^2 \end{cases}$$



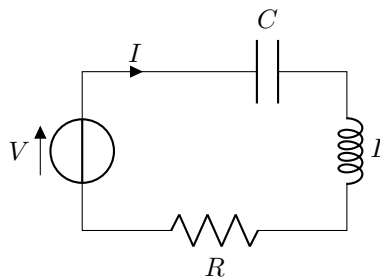
Notar que la solución se puede interpretar como dos funciones $x(t)$ e $y(t)$ con variable independiente t , o bien una única función $y(x)$ definida de forma paramétrica a través del parámetro t .

3.6. Aplicaciones de las EDO de Orden Superior

3.6.1. Circuitos Eléctricos

Un circuito eléctrico básico de tipo RLC está formado por una fuente de voltaje, una resistencia, un alternador y un condensador

- Una resistencia de R ohms
- Un inductor⁷⁰ con una inductancia de L henries
- Un condensador con una capacitancia de C faradios
- Una fuente de corriente eléctrica $E(t)$ que suministra un voltaje V voltios



⁷⁰Un inductor, bobina o reactor es un componente pasivo de un circuito eléctrico que, debido al fenómeno de la autoinducción, almacena energía en forma de campo magnético.

La fuente genera un flujo de carga eléctrica Q a través del circuito que varía con el tiempo dando lugar a una intensidad de corriente $I(t) = Q'(t)$. Los otros tres elementos del circuito causan una caída de voltaje⁷¹ siguiendo las leyes de Ohm y Faraday de la siguiente forma:

Elemento	Símbolo	Unidad	Caída de Voltaje
Fuente	E	voltios	
Carga	Q	culombios	$Q(t) = \int I(t) dt$
Corriente	I	amperios (A)	$I(t) = \frac{dQ}{dt}$
Resistencia	R	ohmios (Ω)	RI
Condensador	C	faradios (F)	Q/C
Inductor	L	henrios (H)	$L \frac{dI}{dt}$

Según la ley de Kirchhoff, la fuerza electromotriz generada por la fuente tiene que ser igual a la suma de las caídas de tensión de los tres elementos RLC:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E(t) \quad (3.17)$$

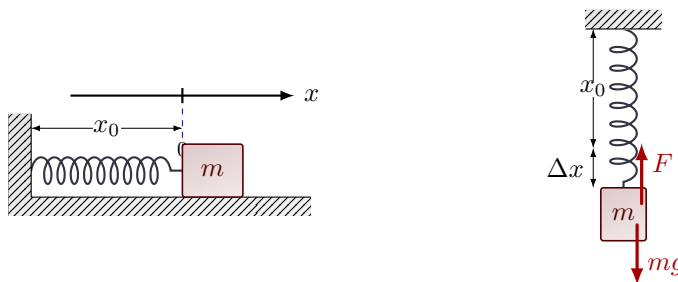
Esta expresión se puede poner en función de una sola variable, como por ejemplo Q :

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Y si derivamos (3.17) se puede expresar en función de I :

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt} \quad (3.18)$$

3.6.2. Sistemas Mecánicos



Las vibraciones forzadas de una masa m sujeta a un muelle (vertical u horizontal) con rozamiento pueden ser modeladas⁷² mediante la EDO:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

donde $x(t)$ es el desplazamiento de la masa, a es la constante de amortiguamiento debida al rozamiento, k es la constante elástica del muelle⁷³ y $F(t)$ es una fuerza externa.

Notar la semejanza de esta ecuación con la Ecuación 3.18, página 93 donde hay una equivalencia entre las variables:

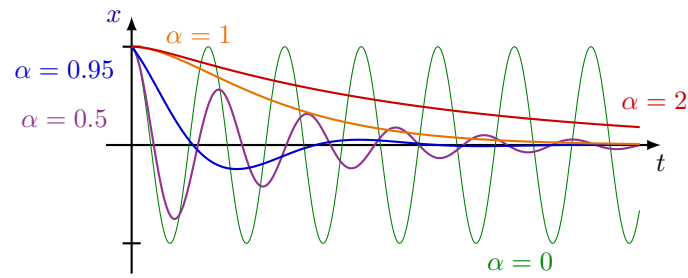
$$m \leftrightarrow L \quad x \leftrightarrow I \quad a \leftrightarrow R \quad k \leftrightarrow 1/C \quad F \leftrightarrow E$$

En ausencia de fuerza externa $f(t) = 0$, y en función de los valores del rozamiento a y del tipo de muelle k se pueden obtener diferentes soluciones (movimiento de la masa), que vienen determinados por el signo del término $a^2 - 4km$. Si definimos $\alpha = a/(2\sqrt{km})$, se tiene que para valores de $\alpha = 0$ (sin rozamiento) se obtienen un sistema oscilante, para valores $0 < \alpha < 1$ se tiene un sistema oscilante amortiguado y para $\alpha \geq 1$ se tiene un sistema sobreamortiguado.

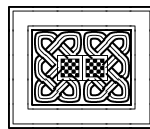
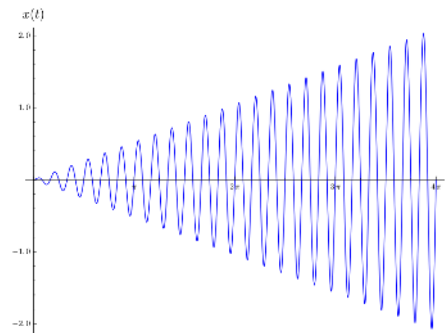
⁷¹También llamada tensión o potencial.

⁷²A través de las leyes del Newton y la ley de Hooke.

⁷³Esta constante caracteriza las propiedades del muelle y se determina a través de la ley de Hooke, $F = -k\delta$, donde F es la fuerza ejercida por el resorte al aplicar una fuerza externa y δ es la elongación o variación de longitud del muelle (valor pequeño para que se verifique la ley de Hooke) producida por la fuerza externa. El signo negativo indica que la fuerza ejercida por el muelle es siempre contraria a la fuerza externa aplicada.



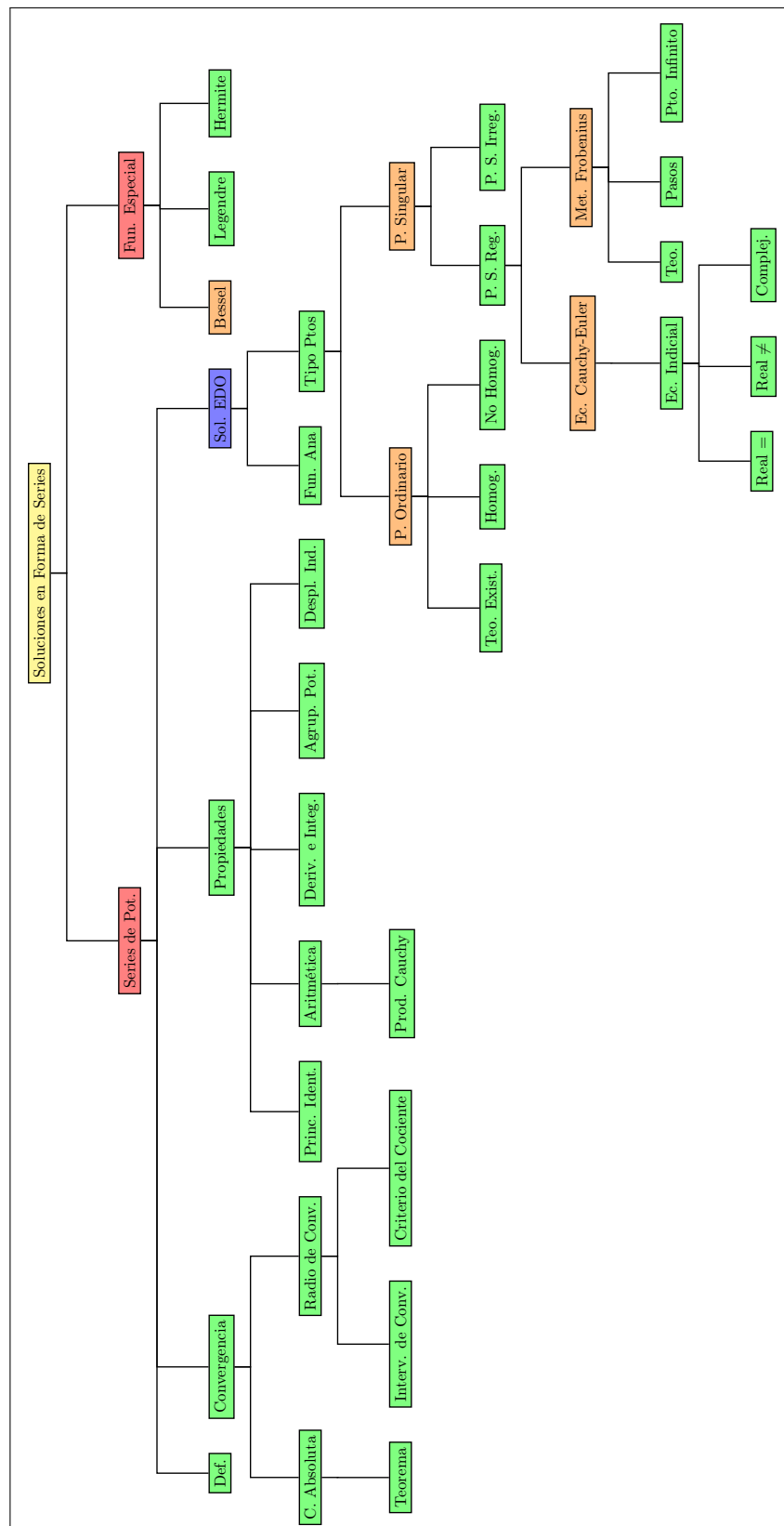
Para el caso oscilatorio $\alpha = 0$ y con fuerza externa puede aparecer el fenómeno de **resonancia** cuando la fuerza tiene una forma sinusoidal $F(t) = A \cos(\omega t)$ y cuya frecuencia ω coincide con la frecuencia natural de vibración $\sqrt{k/m}$. En estos caso se produce un movimiento oscilante con amplitud creciente.



Soluciones en Forma de Series

Contenido

4.1	Soluciones de EDOL en Forma de Series	97
4.1.1	Introducción	97
4.2	Series de Potencias	98
4.2.1	Convergencia de las Series de Potencia	100
4.2.2	Radio de Convergencia	102
4.2.3	Criterios de Convergencia	102
4.3	Función Especial en Serie de Potencia	104
4.3.1	Propiedades de las Funciones Especiales en Series de Potencia	105
4.4	Soluciones de EDO en Series	109
4.4.1	Función Analítica	109
4.4.2	Clasificación de los Puntos	110
4.4.3	Puntos Ordinarios	110
4.4.4	Puntos Singulares	119
4.4.5	Puntos Singulares Regulares	121
4.5	Funciones Especiales	132
4.5.1	Ecuación de Bessel	132
4.5.2	Ecuación de Legendre	137
4.5.3	Ecuación de Hermite	139



4.1. Soluciones de EDOL en Forma de Series

4.1.1. Introducción

Definición 4.1. Funciones Elementales

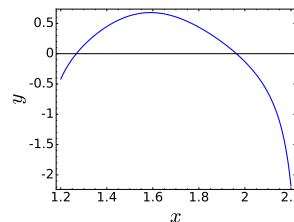
Las **funciones elementales**¹ son aquellas que están formadas por suma, resta, multiplicación, división o composición de los siguientes dos tipos de funciones:

- **Funciones Algebraicas:** Polinómicas, Racionales e Irracionales.
- **Funciones Trascendentes:** Trigonómicas y sus inversas, logarítmicas y exponenciales.

Ejemplo 4.1. Función elemental

El siguiente es un ejemplo de función elemental:

$$y = \tan \left[\frac{xe^{1/x} + \tan^{-1}(1+x^2)}{\sin(x) \cos(2x) - \sqrt{\log x}} \right]$$



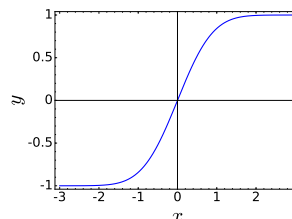
Definición 4.2. Funciones Especiales

Las **funciones especiales** son un grupo de funciones no elementales referida a alguno de los siguientes tipos:

- Función Gamma² $\Gamma(x)$ y otras relacionadas.
- Integrales de Fresnel³, integral logarítmica⁴ y otras funciones que pueden expresarse como integrales indefinidas de funciones elementales.
- Funciones Elípticas⁵.
- Funciones definidas a través de series de potencias⁶.
- Soluciones de determinadas EDO lineales de segundo orden⁷.

Ejemplo 4.2. Funciones especiales

- Función error: $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$



¹ Algunos ejemplos de funciones no elementales básicas son: el valor absoluto, la función parte entera y la función signo, entre otras.

² Ver la Sección 4.5.1, página 132.

³ Se definen como: $C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt$, $S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$.

⁴ Ver el Ejemplo 4.2.

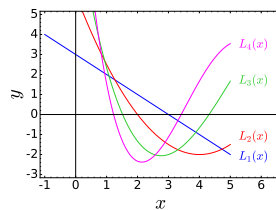
⁵ Generalización de funciones trigonométricas en el campo complejo.

⁶ Ver la Sección 4.2, página 98 y la Sección 4.3, página 104.

⁷ Como las funciones de Bessel, de Airy, de Mathieu, de Weber y los polinomios de Legendre, de Hermite, de Chebyshev, de Jacobi y de Laguerre entre otros. Ver el Ejemplo 4.2.

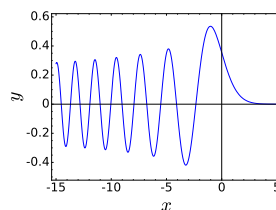
- Polinomios de Laguerre:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!k!} x^k$$



- Función de Airy:

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt$$



- La mayoría de las funciones solución de las EDO **no** pueden expresarse como *funciones elementales*.
- La herramienta más importante en la búsqueda de soluciones de EDOL⁸ de segundo orden son las funciones definidas mediante **series de potencias**.

4.2. Series de Potencias

Definición 4.3. Series de Potencias

Una **serie de potencias** de x en torno al punto x_0 , denominado **centro**, es una expresión del tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n a_i (x - x_0)^i = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

donde x es la *variable independiente* y a_i son *constantes*.

Las *series de potencia* aparecen en los **desarrollos de Taylor**⁹ de las funciones elementales.

Ejemplo 4.3. Ejemplos de *series de potencia* correspondientes a **desarrollos de McLaurin**¹⁰.

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ $|x| < 1$ Serie Geométrica
- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ $x \in \mathbb{R}$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$ $x \in \mathbb{R}$
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$ $x \in \mathbb{R}$
- $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ $|x| < 1$

⁸Ver la **Definición 1.8**, página 9.

⁹Ver por ejemplo "Clases de Cálculo I para Ingeniería" en la bibliografía, pág. 517. Ver también una generalización de la *serie de Taylor* para funciones complejas en la **Sección 8.1.5**, página 276.

¹⁰Los *desarrollos de McLaurin* corresponden a desarrollos de Taylor de una función en torno a $x = 0$.

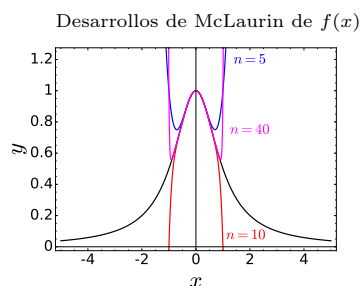
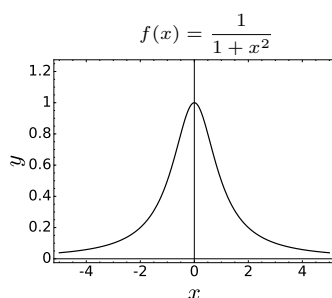
Ejemplo 4.4. Representación gráfica de los desarrollos de McLaurin de distintos órdenes de la función,

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Su desarrollo de McLaurin es:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \dots \quad ; \quad |x| < 1$$

En las siguientes gráficas se muestra la función $f(x)$ y algunos desarrollos de McLaurin de distintos órdenes n , observándose el ajuste progresivo de los desarrollos a la función en el dominio¹¹ $(-1, 1)$.



Las funciones definidas mediante *series de potencia* (funciones especiales) extienden el concepto de *funciones elementales*, permitiendo generar un conjunto mucho más amplio de funciones, al poder seleccionar los coeficientes y potencias de forma ilimitada.

Ejemplo 4.5. Desarrollos de Taylor en distintos puntos de la función:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Los desarrollos de Taylor de $f(x)$ en torno a $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$ son los siguientes:

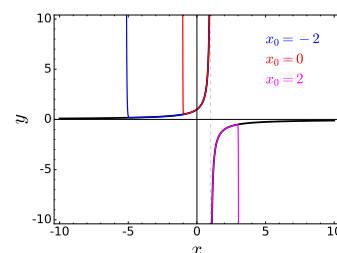
$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}(x+2) + \frac{1}{27}(x+2)^2 + \frac{1}{81}(x+2)^3 + \frac{1}{243}(x+2)^4 + \dots \quad ; \quad x \in (-5, 1)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \dots \quad ; \quad x \in (-1, 1)$$

$$\frac{1}{1-x} = -1 + (x-2) - (x-2)^2 + (x-2)^3 - (x-2)^4 + \dots \quad ; \quad x \in (1, 3)$$

En la siguiente gráfica podemos observar la función $f(x)$ (en negro) junto con los desarrollos obtenidos en los puntos $x = -2$ (azul), $x = 0$ (rojo) y $x = 2$ (rosa).

Se puede observar que cada desarrollo ajusta a la función en un dominio determinado. Este *intervalo de convergencia* (ver la [Definición 4.6, página 102](#)) depende de la función y del punto de desarrollo, pudiendo ser en algunas funciones todo $\mathbb{R}$.



Cada uno de los *desarrollos de Taylor* de una función en torno a puntos distintos x_0 , vienen dados por series **distintas**¹² que tienden a la función original en determinados dominios. Cada una de estas series corresponden con una función (especial) distinta¹³.

¹¹En el [Teorema 8.6, página 277](#) se dará una explicación a la existencia de este dominio.

¹²Ya que poseen coeficientes distintos correspondientes a los valores de los términos $f^{(n)}(x_0)$.

¹³Que pueden coincidir en determinados intervalos cuando el número de términos de la serie tiende a infinito.

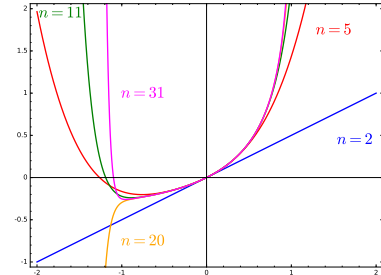
Ejemplo 4.6. Series de potencia con distintos centros.

Vamos a analizar una misma serie¹⁴, con los mismos *coeficientes* y *potencias*, pero con *centros* distintos.

- Serie de potencias en torno a $x_0 = 0$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1} x^n = 0 + \frac{1}{2}x + \frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{10}x^3 + \frac{4}{17}x^4 + \frac{5}{26}x^5 + \frac{6}{37}x^6 + \frac{7}{50}x^7 + \dots$$

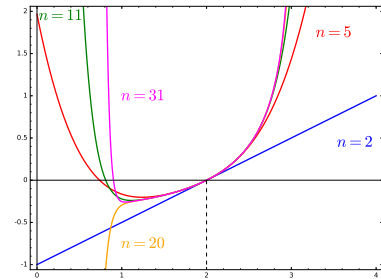
En la siguiente gráfica se muestran algunas funciones correspondientes a trozos de la serie truncados para distintos valores de n . Vemos que cada uno de ellos corresponde con una función distinta, pero que son similares en torno al punto $x_0 = 0$. También podemos observar que mientras que las partes derechas (positivas) tienden a parecerse, las partes izquierdas (negativas) en función de que n sea par o impar tiende a $-\infty$ y $+\infty$ respectivamente.



- Serie de potencias igual que la anterior pero en torno a $x_0 = 2$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1} (x - 2)^n = 0 + \frac{1}{2}(x - 2) + \frac{2}{5}(x - 2)^2 + \frac{3}{10}(x - 2)^3 + \frac{4}{17}(x - 2)^4 + \dots$$

Vemos que todas las gráficas son iguales a las calculadas en torno al punto $x_0 = 0$, pero desplazadas dos unidades a la derecha.

**4.2.1. Convergencia de las Series de Potencia****Definición 4.4. Convergencia**

Se dice que una serie de potencias **converge** en un punto $x = c$, si existe y es finito el siguiente límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n a_i (c - x_0)^i \in \mathbb{R}$$

En tal caso, se denomina **suma de la serie** al valor de dicho límite. Si este límite no existe (**oscilante**) o es $\pm\infty$, se dice que la serie de potencias es **divergente** en $x = c$.

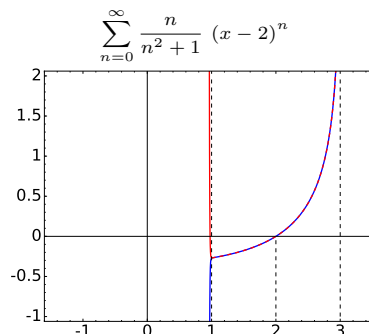
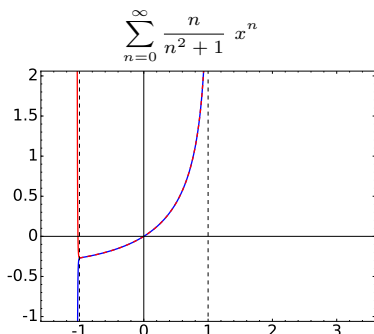
Ejemplo 4.7. Características de las series de potencias.

Consideramos las series del anterior **Ejemplo 4.6** para valores altos de n , observando que:

- Se tiende a una única *función*, que puede o no corresponder con una función elemental (ver la **Definición 4.1, página 97**) cuyo dominio es $[x_0 - 1, x_0 + 1]$, donde $x_0 = \{0, 2\}$.

¹⁴En principio esta serie no corresponde con el desarrollo de Taylor de ninguna función.

- Cada una de las funciones parciales tienden hacia $+\infty$ cuando se acercan al punto $x = x_0 + 1$ y tienden a $-\infty$ o $+\infty$ cuando se acercan al punto $x = x_0 - 1$, en función de que n sea par (gráfica inferior azul) o impar (gráfica superior roja), respectivamente.
- Esto indica que estas dos series son *convergentes* en el intervalo $(x_0 - 1, x_0 + 1)$.



- Toda serie de potencias centrada en un punto $x = x_0$ se puede expresar como una serie de potencias centrada en cero haciendo el cambio de variables $x = x - x_0$.
- Una serie de potencias de x en torno al punto x_0 , siempre es convergente en $x = x_0$, ya que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x_0 - x_0) + a_2(x_0 - x_0)^2 + \dots = a_0$$

Definición 4.5. Convergencia Absoluta

Se dice que una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ **converge absolutamente** en un punto de su intervalo, si converge la serie formada por sus términos en valor absoluto $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x - x_0)^n|$.

Ejemplo 4.8. Convergencia absoluta.

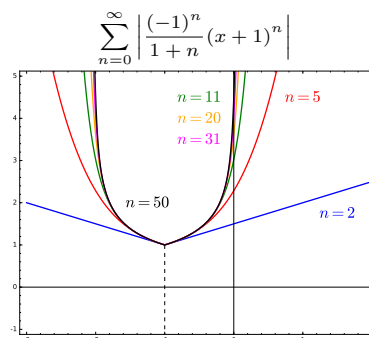
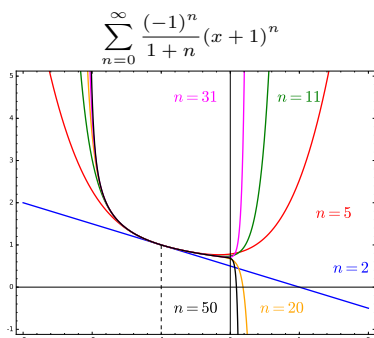
La serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n} (x+1)^n = 1 - \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{3}(x+1)^2 - \frac{1}{4}(x+1)^3 + \frac{1}{5}(x+1)^4 + \dots$$

en valor absoluto se transforma en:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{1+n} (x+1)^n \right| = |1| + \left| -\frac{1}{2}(x+1) \right| + \left| \frac{1}{3}(x+1)^2 \right| + \left| -\frac{1}{4}(x+1)^3 \right| + \dots$$

En las siguientes gráficas se compara el comportamiento de varios términos de ellas. Podemos observar que en valor absoluto el comportamiento cambia y se simplifica, haciéndose simétrico con respecto al punto sobre el que se hace el desarrollo $x = 2$.



Teorema 4.1. Convergencia Absoluta

Si una serie es **absolutamente convergente** en un punto, también es **convergente** en el mismo punto¹⁵.

Generalmente el estudio de la *convergencia* de una serie se realiza analizando su *convergencia absoluta*.

- Si la serie *converge absolutamente* en un punto, también *converge* en dicho punto.
- Si la serie **no** es *absolutamente convergente*, este método **no decide** y habrá que determinar su *convergencia* con otro método.

4.2.2. Radio de Convergencia**Teorema 4.2. Radio de Convergencia**

Para toda serie de potencias existe un valor $0 \leq R \leq \infty$ denominado **radio de convergencia** de la serie de potencias en torno a x_0 , para el cual la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \begin{cases} \text{Converge absolutamente para } |x - x_0| < R \\ \text{Diverge para } |x - x_0| > R \end{cases}$$

Nota 4.1.

- si $R = 0 \rightarrow$ Únicamente converge en x_0
- si $R = \infty \rightarrow$ Converge para todo $x \in \mathbb{R}$

Ejemplo 4.9. Radio de Convergencia

El radio de convergencia en las series del **Ejemplo 4.6**, del **Ejemplo 4.7** y del **Ejemplo 4.8** es $R = 1$.

Definición 4.6. Intervalo de Convergencia

Dada una serie de potencias en torno a $x = x_0$ con *radio de convergencia* R , se denomina **intervalo de convergencia** al intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$, de forma que:

$$|x - x_0| < R \iff x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

Los extremos del intervalo $x_0 - R$ y $x_0 + R$ son puntos de convergencia *indeterminada*, que necesitan de un estudio aparte.

4.2.3. Criterios de Convergencia

Para determinar el *radio de convergencia* R de una serie, se pueden utilizar diferentes **criterios de convergencia** en función de los casos. Vamos a ver un par de ellos que suelen ser muy útiles en la determinación del *radio de convergencia* R de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

¹⁵La afirmación inversa no es necesariamente cierta.

Teorema 4.3. Criterio de la Raíz

Si $0 \leq R \leq \infty$ es el radio de convergencia de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, entonces si el siguiente límite existe, el valor de R queda determinado de la siguiente forma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \quad (0 \leq L \leq \infty) \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{L}$$

$$|x - x_0| < R \quad \Rightarrow \quad x_0 - R < x < x_0 + R \quad \Rightarrow \quad \text{Intervalo de Conv.} = (x_0 - R, x_0 + R)$$

Consideraciones a tener en cuenta sobre el *criterio de la raíz*:

- Solo es válido si existe el límite. En caso contrario hay que utilizar otro criterio.
- No se puede aplicar directamente si infinitos términos a_i son cero.
- En los puntos frontera del intervalo: $x = x_0 - R$ y $x = x_0 + R$, este criterio no decide la convergencia.

Teorema 4.4. Criterio del Cociente

Si $0 \leq R \leq \infty$ es el radio de convergencia de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, entonces si el siguiente límite existe, el valor de R queda determinado de la siguiente forma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \quad (0 \leq L \leq \infty) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{L}$$

$$|x - x_0| < R \quad \Rightarrow \quad x_0 - R < x < x_0 + R \quad \Rightarrow \quad \text{Intervalo de Conv.} = (x_0 - R, x_0 + R)$$

Las consideraciones a tener en cuenta sobre este criterio son las mismas que en el *criterio de la raíz*.

Ejercicio 4.1. Determinar, en caso de ser posible, el radio de convergencia de las siguientes series de potencia.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$

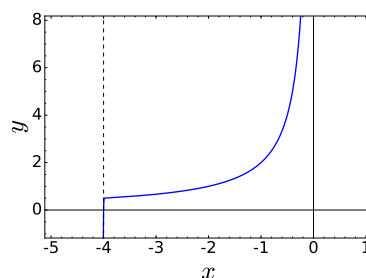
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} (x-5)^n$

a) Aplicamos el criterio de la raíz.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$R = \frac{1}{L} = 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{si } |x+2| < 2 & \text{Serie Convergente} & -4 < x < 0 \\ \text{si } |x+2| > 2 & \text{Serie Divergente} & x < -4, x > 0 \end{cases}$$

En los extremos $x = -4$ y $x = 0$ no podemos asegurar la convergencia con este criterio. Si dibujamos la serie para un valor alto de n vemos que la serie converge para $x = -4$ y diverge para $x = 0$.



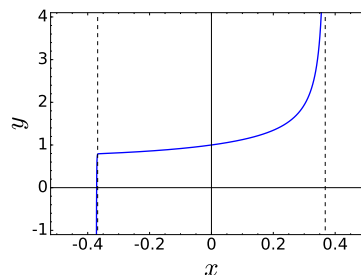
b) Aplicamos en este caso el criterio del cociente.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} n!}{n^n (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+1} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

$$\boxed{R = \frac{1}{L} = \frac{1}{e}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{si } |x| < 1/e & \text{Serie Convergente} & -1/e < x < 1/e \\ \text{si } |x| > 1/e & \text{Serie Divergente} & x < -1/e, x > 1/e \end{cases}$$

Notar que se podría haber calculado el valor del límite del cociente $|a_n/a_{n+1}|$ obteniéndose directamente el valor del radio de convergencia R , (sin necesidad de invertir el resultado).

En los extremos $x = -1/e$ y $x = 1/e$ no podemos asegurar la convergencia con este criterio. Si dibujamos la serie para un valor alto de n vemos que la serie converge para $x = -1/e$ y diverge para $x = 1/e$.

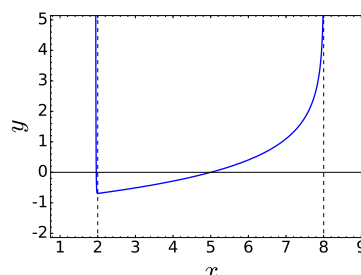


c) Intentamos también aplicar el criterio del cociente.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)3^{n+1}}}{\frac{1}{n3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{R = \frac{1}{L} = 3} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{si } |x-5| < 3 & \text{Serie Convergente} & 2 < x < 8 \\ \text{si } |x-5| > 3 & \text{Serie Divergente} & x < 2, x > 8 \end{cases}$$

En los extremos $x = 2$ y $x = 8$ no podemos asegurar la convergencia con este criterio. Si dibujamos la serie para un valor alto de n vemos que la serie converge para $x = 2$ y diverge para $x = 8$.



4.3. Función Especial en Serie de Potencia

Definición 4.7. Función Especial en Serie de Potencia

Para cada serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, se puede definir la función:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

para todo x donde la serie converge¹⁶, siendo $f(x)$ su suma¹⁷.

¹⁶Ver la Sección 4.2.1, página 100.

¹⁷Ver la Definición 4.4, página 100.

4.3.1. Propiedades de las Funciones Especiales en Series de Potencia

Una de las ventajas importantes de las series de potencias es la facilidad de operar matemáticamente con ellas.

Vamos a ver algunas de las propiedades más importantes de las funciones especiales en series de potencias. Sean:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n && \text{convergente en } I_1 \\ g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n && \text{convergente en } I_2 \end{aligned} \right\} \text{ con } I = I_1 \cap I_2$$

Principio de Identidad

$$\text{Si } \forall x \in I \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = 0, \quad \text{con } R > 0 \quad \Rightarrow \quad a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Este hecho será clave en la búsqueda de soluciones de ecuaciones diferenciales en forma de series.

Aritmética de las Funciones Especiales en Series de Potencia

La suma, resta, multiplicación y división (con denominador no nulo), de series de potencias convergentes, generan series de potencias convergentes.

- **Suma y Resta**

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) (x - x_0)^n = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)(x - x_0) + (a_2 \pm b_2)(x - x_0)^2 + \dots$$

- **Multiplicación**

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \right) = \\ &= [a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots] [b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \dots] = \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)(x - x_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)(x - x_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

Los coeficientes de la serie resultado del producto de dos funciones en series de potencia pueden determinarse mediante una fórmula conocida como *producto de Cauchy*.

Definición 4.8. Producto de Cauchy

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \quad \text{con} \quad c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$$

- **División**

$$\frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{con} \quad g(x_0) \neq 0$$

Los términos de la serie resultado del cociente se puede obtener calculando $1/g(x)$ (mediante división de polinomios) y multiplicándolo por $f(x)$. Una alternativa mejor es buscar una función general $c(x)$:

$$c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

con coeficientes desconocidos y aplicar el *producto de Cauchy* a $c(x)g(x)$:

$$c(x)g(x) \implies p_n = \sum_{i=0}^n c_i g_i$$

Entonces para que la función $c(x)$ sea el resultado de nuestro cociente se tiene:

$$c(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \implies c(x)g(x) = f(x) \longrightarrow f_i = p_i = \sum_{i=0}^n c_i g_i$$

de donde por cada i se tiene una ecuación de donde se puede despejar c_i .

Continuidad y Derivabilidad

La función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ es continua en su intervalo de convergencia y de clase $\mathcal{C}^\infty$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots \\ f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + 4a_4(x - x_0)^3 + \dots \\ f''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2} = 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + 12a_4(x - x_0)^2 + 20a_5(x - x_0)^3 + \dots \end{aligned}$$

Integral

La función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ es integrable en su intervalo de convergencia:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n (x - x_0)^n dx = c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} = \\ &= c + a_0(x - x_0) + \frac{a_1}{2}(x - x_0)^2 + \frac{a_2}{3}(x - x_0)^3 + \frac{a_3}{4}(x - x_0)^4 + \dots \end{aligned}$$

Agrupación de Potencias y Desplazamiento del Índice de un Sumatorio

- En la búsqueda de soluciones de ecuaciones diferenciales en forma de serie se necesitará reagrupar la variable x en bloques $(x - x_0)^n$. Para ello es necesario tener en cuenta que:

$$\begin{aligned} (x - x_0)^c \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n &= (x - x_0)^c [a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots] = \\ &= a_0(x - x_0)^c + a_1(x - x_0)^{1+c} + a_2(x - x_0)^{2+c} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+c} \end{aligned} \quad (4.1)$$

- Podemos *desplazar* los índices del sumatorio, los de a_i y los de las potencias de $(x - x_0)$.

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=k-p}^{\infty} a_{n+p} (x - x_0)^{n+p} ; \quad \sum_{n=k}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=k+p}^{\infty} a_{n-p} (x - x_0)^{n-p} \quad (4.2)$$

Ejercicio 4.2. Reescribir la siguiente serie para que empiece en $n = 0$ en lugar de $n = 3$.

$$\sum_{n=3}^{\infty} n^2 a_{n-1} (x+4)^{n+2}$$

Vamos a hacer el proceso paso a paso, definiendo un nuevo índice $i = n - 3$ que desplace el inicio de la serie al cero. Por tanto reescribimos la serie en términos de i teniendo en cuenta que $n = i + 3$.

$$\sum_{n=3}^{\infty} n^2 a_{n-1} (x+4)^{n+2} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+3)^2 a_{i+3-1} (x+4)^{i+3+2} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+3)^2 a_{i+2} (x+4)^{i+5}$$

Notar que el límite superior no cambia ya que $\infty - 3 = \infty$. Finalmente restauramos el índice de i por n .

$$\sum_{n=3}^{\infty} n^2 a_{n-1} (x+4)^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)^2 a_{n+2} (x+4)^{n+5}$$

Normalmente este proceso se hace directamente sin pasar por el índice i , aplicando las ecuaciones (4.2).

Ejercicio 4.3. Reescribir la siguiente serie para que empiece en $n = 5$ en lugar de $n = 3$.

$$\sum_{n=3}^{\infty} n^2 a_{n-1} (x+4)^{n+2}$$

Para que empiece en 5 es necesario aumentar el comienzo en 2 y por tanto disminuir el antiguo n en esa misma cantidad (ver la [Ecuación 4.2, página 106](#)).

$$\sum_{n=3}^{\infty} n^2 a_{n-1} (x+4)^{n+2} = \sum_{n=5}^{\infty} (n-2)^2 a_{n-3} (x+4)^n$$

Ejercicio 4.4. Reescribir cada una de estas series en términos de potencias $(x - x_0)^n$.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & (x+2)^2 \sum_{n=3}^{\infty} n a_n (x+2)^{n-4} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x+2)^{n+1} & \text{b)} \quad & x \sum_{n=0}^{\infty} (n-5)^2 b_{n+1} (x-3)^{n+3} \\ \text{c)} \quad & (x^2 + x + 3) \sum_{n=6}^{\infty} (n-1)^3 a_{n+2} (x+1)^{n-5} \end{aligned}$$

a) Vemos que inicialmente hay dos series y tenemos que reagruparlas en una sola. Para ello necesitamos que ambas series empiecen en el mismo índice y tener el mismo exponente en las potencias $(x - x_0)$.

Primeramente teniendo en cuenta la [Ecuación \(4.3.1\)](#):

$$(x+2)^2 \sum_{n=3}^{\infty} n a_n (x+2)^{n-4} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x+2)^{n+1} = \sum_{n=3}^{\infty} n a_n (x+2)^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x+2)^{n+1}$$

Ahora *desplazamos los índices* (ver la [Sección 4.3.1, página 106](#)) para tener en ambas series potencias de $(x - x_0)^n$. Hay que tener en cuenta que la cantidad que se añade a un exponente hay también que añadirse al índice de a_k y quitárselo al índice del sumatorio. De igual forma lo que se quita a un exponente hay que quitárselo al índice de a_k y añadirse al índice del sumatorio.

$$\sum_{n=3}^{\infty} n a_n (x+2)^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x+2)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+2) a_{n+2} (x+2)^n - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_{n-1} (x+2)^n$$

Finalmente, para poder restar las dos series es necesario que ambas empiecen en el un mismo valor de n . Dependiendo de las series se puede hacer de diferentes formas. en este caso, como la segunda empieza en 2, vamos a tomar la que empieza en 1, restándole el primer término.

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)a_{n-1}(x+2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)a_{n-1}(x+2)^n - 0a_0(x+2) = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)a_{n-1}(x+2)^n$$

En este caso, como el primer término es nulo, la segunda serie queda igual al cambiar de índice. Como ahora las dos series empiezan en 1 se pueden restar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)a_{n+2}(x+2)^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)a_{n-1}(x+2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)a_{n+2} - (n-1)a_{n-1}](x+2)^n$$

- b) En este caso no se puede agrupar las potencias de x ya que no tienen la misma forma, una es x y la otra $(x-3)$. Por tanto lo primero es ajustarlo para que coincidan:

$$\begin{aligned} x \sum_{n=0}^{\infty} (n-5)^2 b_{n+1}(x-3)^{n+3} &= (x-3+3) \sum_{n=0}^{\infty} (n-5)^2 b_{n+1}(x-3)^{n+3} = \\ &= (x-3) \sum_{n=0}^{\infty} (n-5)^2 b_{n+1}(x-3)^{n+3} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} (n-5)^2 b_{n+1}(x-3)^{n+3} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n-5)^2 b_{n+1}(x-3)^{n+4} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n-5)^2 b_{n+1}(x-3)^{n+3} \end{aligned}$$

Ahora hay que conseguir potencias $(x-3)^n$, para ello *desplazamos los índices* de forma apropiada:

$$\sum_{n=4}^{\infty} (n-9)^2 b_{n-3}(x-3)^n + \sum_{n=3}^{\infty} 3(n-8)^2 b_{n-2}(x-3)^n$$

Como los índices de los sumatorios son distintos, vamos a sacar un término de la segunda para que ambas empiecen en $n=4$

$$\sum_{n=4}^{\infty} (n-9)^2 b_{n-3}(x-3)^n + 3(-5)^2 b_1(x-3)^3 + \sum_{n=4}^{\infty} 3(n-8)^2 b_{n-2}(x-3)^n$$

Finalmente podemos agrupar las dos series en una sola:

$$75b_1(x-3)^3 + \sum_{n=4}^{\infty} [(n-9)^2 b_{n-3} + 3(n-8)^2 b_{n-2}](x-3)^n$$

No hay que preocuparse del primer término extra (en verde), ya que cuando se trabaje encontrado soluciones en forma de series en las ecuaciones diferenciales se verá como tratar este término.

- c) En este caso tenemos un polinomio de segundo grado multiplicando al sumatorio. Necesitamos expresar esta función en potencias de $(x+1)$ como tiene su sumatorio, por tanto lo que se hace es obtener el desarrollo de Taylor del polinomio en torno al punto $x=-1$:

$$x^2 + x + 3 = f(-1) + f'(-1)\frac{(x+1)}{1!} + f''(-1)\frac{(x+1)^2}{2!} + \dots = 3 - (x+1) + (x+1)^2$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} &[(x+1)^2 - (x+1) + 3] \sum_{n=6}^{\infty} (n-1)^3 a_{n+2}(x+1)^{n-5} = \\ &= (x+1)^2 \sum_{n=6}^{\infty} (n-1)^3 a_{n+2}(x+1)^{n-5} - (x+1) \sum_{n=6}^{\infty} (n-1)^3 a_{n+2}(x+1)^{n-5} + 3 \sum_{n=6}^{\infty} (n-1)^3 a_{n+2}(x+1)^{n-5} \end{aligned}$$

Ahora podemos *reagrupar términos*:

$$\sum_{n=6}^{\infty} (n-1)^3 a_{n+2} (x+1)^{n-3} - \sum_{n=6}^{\infty} (n-1)^3 a_{n+2} (x+1)^{n-4} + \sum_{n=6}^{\infty} 3(n-1)^3 a_{n+2} (x+1)^{n-5}$$

Ahora *desplazamos los índices*:

$$\sum_{n=3}^{\infty} (n+2)^3 a_{n+5} (x+1)^n - \sum_{n=2}^{\infty} (n+3)^3 a_{n+6} (x+1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} 3(n+4)^3 a_{n+7} (x+1)^n$$

Todos los índices de las series deben empezar en el mismo valor, para ello igualamos los tres a $n = 3$, sacando fuera del sumatorio un término de la segunda serie y dos términos de la tercera:

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{\infty} (n+2)^3 a_{n+5} (x+1)^n - 5^3 a_8 (x+1)^2 - \sum_{n=3}^{\infty} (n+3)^3 a_{n+6} (x+1)^n + \\ + 3 \cdot 5^3 a_8 (x+1) + 3 \cdot 6^3 a_9 (x+1)^2 + \sum_{n=3}^{\infty} 3(n+4)^3 a_{n+7} (x+1)^n \end{aligned}$$

Finalmente reorganizando y agrupando las tres series se tiene:

$$3 \cdot 5^3 a_8 (x+1) + (3 \cdot 6^3 a_9 - 5^3 a_8) (x+1)^2 + \sum_{n=3}^{\infty} [(n+2)^3 a_{n+5} - (n+3)^3 a_{n+6} + 3(n+4)^3 a_{n+7}] (x+1)^n$$

4.4. Soluciones de EDO en Series

Vamos a empezar con la EDO lineal de segundo orden **homogénea** con coeficientes variables general:

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \quad (4.3)$$

La solución de esta ecuación depende fuertemente del tipo de funciones $a(x)$, $b(x)$ y $c(x)$ que aparecen en ella. Vamos a dar una definición muy importante sobre funciones.

4.4.1. Función Analítica

Definición 4.9. Función Analítica

Un función $f(x)$ es **analítica**¹⁸ en un punto $x = x_0$ de su dominio, si existe una *serie de potencias* centrada en x_0 y convergente con $f(x)$ con un radio de convergencia¹⁹ $r > 0$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad ; \quad x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

Nota 4.2. No confundir la función coeficiente $a(x)$ de la EDO en la **Ecuación (4.3)**, con los coeficientes a_n de la serie anterior.

De forma alternativa, una función es *analítica* en un punto si admite un desarrollo de Taylor en dicho punto.

¹⁸Ver la definición para el caso complejo en la **Sección 8.1.4, página 275**.

¹⁹En función del dominio de la función, se cumple que $r \leq R$, donde R es el radio de convergencia de la serie de potencias que define la función. Si una función es analítica en un punto, la serie de potencias asociada debe de existir aunque no necesariamente tiene porqué conocerse.

4.4.2. Clasificación de los Puntos

La solución de la Ecuación (4.3) en las cercanías de un punto x_0 depende del comportamiento de $a(x)$ en ese intervalo.

Definición 4.10. Puntos Ordinarios y Singulares

Los puntos x_0 del dominio de la Ecuación (4.3) se clasifican en dos tipos:

- **Punto Ordinario** : aquellos en los que las funciones,

$$\frac{b(x)}{a(x)} \quad \text{y} \quad \frac{c(x)}{a(x)}$$

son *analíticas*, es decir admiten un desarrollo de Taylor en torno $x = x_0$.

Si las funciones $a(x)$, $b(x)$ y $c(x)$ son *polinomios*²⁰ que **no** tienen factores en común²¹ la condición anterior es equivalente a decir que: $a(x_0) \neq 0$.

- **Punto Singular**²²: aquel que no es un *punto ordinario*.

Ejemplo 4.10. Tipos de puntos

$$2y'' + x^3y' - xy = 0$$

Todos sus puntos son ordinarios

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' + 6y = 0$$

$x = \pm 1$ puntos singulares (resto puntos ordinarios)

$$(x^2 + 1)y'' + (x + 1)y' + x(1 - x^2)y = 0$$

$x = \pm i$ puntos singulares (resto puntos ordinarios)

4.4.3. Puntos Ordinarios

Dividiendo por $a(x)$ la Ecuación (4.3) se obtiene la ecuación en la forma **estándar** o **canónica**:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad \begin{cases} p(x) = b(x)/a(x) \\ q(x) = c(x)/a(x) \end{cases} \quad (4.4)$$

Teorema 4.5. Existencia de Soluciones con Series de Potencias

Si x_0 es un *punto ordinario* de la EDO Ecuación (4.3), siempre se pueden determinar dos soluciones linealmente independientes y_1 e y_2 en forma de una serie de potencias centradas en x_0 :

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad ; \quad y_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Ambas convergen al menos en un intervalo definido por: $|x - x_0| < R$, donde R es la distancia de x_0 al *punto singular* (real o complejo)²³ más cercano²⁴.

²⁰En este texto solo vamos a considerar este caso, ya que a pesar de que los métodos de resolución son generales para todo tipo de funciones, en el caso de los polinomios las operaciones son más sencillas.

²¹Si existieran, se dividiría la ecuación por el producto de ellos, obteniendo tres polinomios $a(x)$, $b(x)$ y $c(x)$ sin factores comunes. De forma general para funciones analíticas no necesariamente polinómicas también se cumple una condición similar a esta, pero en ese caso se dividiría por $(x - x_0)^\alpha$ donde α corresponde con el orden como cero de x_0 en $a(x)$.

²²La generalización del término *punto singular* en funciones de variable compleja se verá en la Definición 7.9, página 243.

²³Ver el Ejercicio 4.7, página 115.

²⁴En el Teorema 8.6, página 277 se dará una explicación de este hecho en el campo complejo.

El procedimiento de búsqueda de las soluciones y_i en forma de series de potencia, consiste en la determinación de los coeficientes a_i que verifiquen la EDO.

$$y_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

1. Se sustituye la solución y sus derivadas²⁵ en forma de series de potencia en la **Ecuación (4.4)**.

$$y'_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x - x_0)^{n-1} \quad ; \quad y''_i = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) (x - x_0)^{n-2}$$

2. Se encuentran fórmulas para la determinación de sus coeficientes²⁶, dados a través de una **relación de recurrencia**.
3. Se obtienen dos²⁷ soluciones y_i en forma de serie de potencias, linealmente independientes cuya combinación lineal produce la *solución general* de la ecuación.

Nota 4.3. Cuando $x_0 \neq 0$, es apropiado realizar el cambio de variable $z = x - x_0$ para obtener una nueva EDO en la variable z , buscar entonces soluciones de la forma $\sum a_n z^n$ y finalmente deshacer el cambio de variable sustituyendo z por $x - x_0$. Ver la **Sección 4.4.5, página 121**.

Vamos a ver varios ejemplos, en orden creciente de dificultad, mostrando el método de cálculo.

Ejercicio 4.5. Determinar una solución general en forma de serie de potencias de la siguiente ecuación.

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Como en este caso el polinomio que multiplica a y'' es $a(x) = 1$, todos los puntos son *puntos ordinarios* (ver **Definición 4.10, página 110**) y por el **Teorema 4.5** podemos encontrar soluciones en forma de series de potencia en torno a cualquier punto, con radio de convergencia infinito. En este caso, elegimos como centro de las series el valor más sencillo $x_0 = 0$. Entonces buscamos soluciones de la ecuación en la forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Seguimos los pasos del procedimiento anterior:

1. Vamos a meter esta solución en la ecuación, para ello necesitamos sus dos primeras derivadas:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad ; \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Introducimos estas series en la ecuación del problema:

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad \implies \quad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

2. El objetivo ahora es combinar los tres sumatorios en uno solo. Para ello primero ajustamos las potencias como x^n , realizando el correspondiente desplazamiento de índices.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

²⁵Notar que al derivar la función y_i se obtiene como primer término a_1 , de ahí que el sumatorio que define y'_i empiece en $n = 1$. De igual forma, al derivar una segunda vez y_i , el primer término es a_2 y por tanto el sumatorio que define y''_i empieza en $n = 2$.

²⁶Este proceso no suele ser difícil pero sí tedioso por lo que en la práctica se utiliza software matemático con posibilidad de manipulación simbólica.

²⁷En algunos casos no es posible determinar la *fórmula general* de estas dos soluciones aunque esto no es importante, siempre que se tenga la posibilidad de expresar la solución en forma de serie pudiendo tomar tantos términos como se quiera.

En este caso todos los índices de los tres sumatorios empiezan en el mismo valor y podemos sumarlos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n+1)a_{n+1} + a_n]x^n = 0$$

Ahora, teniendo en cuenta el *principio de identidad* (ver la [Sección 4.3.1, página 105](#)), todos los coeficientes tienen que ser cero.

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n+1)a_{n+1} + a_n = 0 \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Esta expresión se denomina **relación de recurrencia**. Queremos encontrar el valor de todos los a_k , y para ello despejamos a_{n+2} en función de los dos anteriores a_{n+1} y a_n .

$$a_{n+2} = \frac{2(n+1)a_{n+1} - a_n}{(n+2)(n+1)}$$

Dando valores para $n = 0, 1, \dots$ podemos expresar los a_k en función de los dos primeros: a_0 y a_1 .

$$\begin{aligned} n=0 & : a_2 = \frac{2a_1 - a_0}{2} = \frac{2a_1 - a_0}{2!} \\ n=1 & : a_3 = \frac{4a_2 - a_1}{6} = \frac{4a_1 - 2a_0 - a_1}{6} = \frac{3a_1 - 2a_0}{6} = \frac{3a_1 - 2a_0}{3!} \\ n=2 & : a_4 = \frac{6a_3 - a_2}{12} = \frac{3a_1 - 2a_0 - a_1 + a_0/2}{12} = \frac{4a_1 - 3a_0}{24} = \frac{4a_1 - 3a_0}{4!} \\ n=3 & : a_5 = \frac{8a_4 - a_3}{20} = \frac{\frac{8a_1 - 6a_0}{6} - \frac{3a_1 - 2a_0}{6}}{20} = \frac{5a_1 - 4a_0}{120} = \frac{5a_1 - 4a_0}{5!} \end{aligned}$$

En este caso sencillo, en base a los resultados obtenidos, se puede deducir fácilmente la siguiente expresión general para todos los términos a_n :

$$a_n = \frac{na_1 - (n-1)a_0}{n!}, \quad n > 1$$

3. Por tanto la solución general es:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{na_1 - (n-1)a_0}{n!} x^n = a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n - a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n!} x^n$$

Aquí a_0 y a_1 pueden tomar cualquier valor, por tanto se pueden considerar como los *parámetros* c_1 y c_2 de la solución general de la EDO. Simplificando se tiene:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n + c_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-n}{n!} x^n = c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n - c_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n + c_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \\ &= (c_1 - c_2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n + c_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \boxed{c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n + c_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n} = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donde hemos definido un nuevo parámetro $c_1 = c_1 - c_2$.

Nota 4.4. Teniendo en cuenta los desarrollos de McLaurin de:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad ; \quad xe^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n$$

la solución anterior se puede expresar, en este caso sencillo, a través de funciones elementales como:

$$y(x) = c_1 xe^x + c_2 e^x = (c_1 x + c_2) e^x$$

Ejercicio 4.6. Determinar los cinco primeros términos de cada una de las series solución de la siguiente EDO en torno a $x = -1$.

$$y'' + xy' + x^2y = 0$$

Como el punto de desarrollo $x = -1$ es un punto *ordinario* y la EDO no tiene puntos *singulares*, la solución en forma de serie de potencias convergerá en todo $\mathbb{R}$. Vamos a seguir los pasos del problema anterior. Buscamos soluciones en forma series centradas en $x_0 = -1$:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n \quad ; \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x+1)^{n-1} \quad ; \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x+1)^{n-2}$$

Sustituimos en la ecuación:

$$y'' + xy' + x^2y = 0 \implies \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x+1)^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x+1)^{n-1} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n = 0$$

Vamos a combinar ahora los sumatorios, para ello todas las potencias de x deben ser iguales y todos los índices de los sumatorios tienen que empezar en el mismo valor. Empezamos con las potencias de x , para poder aplicar la ecuación (4.3.1) tenemos que expresarlas como potencias de $(x+1)$, que son los valores que aparecen dentro de los sumatorios. Con la segunda serie que multiplica a x es sencillo ya que $x = (x+1) - 1$. Con la tercera serie que tiene el término x^2 hay que encontrar el desarrollo de Taylor de la función $f(x) = x^2$ en torno al punto $x = -1$:

$$x^2 = 1 - \frac{2}{1!}(x+1) + \frac{2}{2!}(x+1)^2$$

Entonces sustituyendo estos valores en nuestra expresión se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x+1)^{n-2} + (x+1-1) \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x+1)^{n-1} + [1-2(x+1)+(x+1)^2] \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n = 0 \\ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x+1)^{n-2} + (x+1) \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x+1)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x+1)^{n-1} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n - 2(x+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n + (x+1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n = 0 \end{aligned}$$

Agrupamos las potencias de $(x+1)$ dentro de los sumatorios según la Ecuación 4.3.1, página 106:

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x+1)^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x+1)^n - \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x+1)^{n-1} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(x+1)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^{n+2} = 0 \end{aligned}$$

Ahora tenemos que conseguir que todas las potencias de $(x+1)$ dentro de los sumatorios sean iguales. Se podrían fijar a cualquier valor, **siempre y cuando el valor del índice del sumatorio no quede negativo**, de forma que lo más sencillo es hacerlo al valor que más se repita, en este caso n . Así, teniendo en cuenta la Ecuación 4.2, página 106 se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}(x+1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x+1)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(x+1)^n + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1}(x+1)^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}(x+1)^n = 0 \end{aligned}$$

Por último vamos a desplazar los índices de los sumatorios para que todos empiecen en el mismo valor (sin modificar las potencias de $(x+1)$). Para ello vamos a hacer que todos los índices empiecen en valor **mayor** $n = 2$, sacando los términos necesarios en cada sumatorio con índice **menor** que $n = 2$ para conseguirlo.

$$2a_2 + 6a_3(x+1) + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}(x+1)^n + a_1(x+1) + \sum_{n=2}^{\infty} na_n(x+1)^n -$$

$$\begin{aligned}
& -a_1 - 2a_2(x+1) - \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(x+1)^n + a_0 + a_1(x+1) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(x+1)^n - \\
& -2a_0(x+1) - \sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-1}(x+1)^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}(x+1)^n = 0
\end{aligned}$$

Reagrupamos los términos fuera de los sumatorios y formamos un único sumatorio:

$$\begin{aligned}
& 2a_2 + 6a_3(x+1) + a_1(x+1) - a_1 - 2a_2(x+1) + a_0 + a_1(x+1) - 2a_0(x+1) + \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n - (n+1)a_{n+1} + a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2}](x+1)^n = 0
\end{aligned}$$

Según el *principio de identidad* (Sección 4.3.1, página 105), para que esta expresión se cumpla todos los coeficientes de todas las potencias de $(x+1)^n$ tienen que anularse, por tanto:

$$\begin{cases}
\text{potencia } (x+1)^0 & : & 2a_2 - a_1 + a_0 & = & 0 \\
\text{potencia } (x+1)^1 & : & 6a_3 + a_1 - 2a_2 + a_1 - 2a_0 & = & 0 \implies 2a_1 - 2a_2 + 6a_3 - 2a_0 = 0 \\
\text{potencia } (x+1)^n & : & (n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n - (n+1)a_{n+1} + a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} & = & 0
\end{cases}$$

Tenemos que tener en cuenta que los coeficientes a_0 y a_1 se transformarán en los coeficientes c_0 y c_1 de la solución, por tanto todos los a_n se tienen que expresar en función de a_0 y a_1 .

Por tanto de la primera ecuación podemos despejar a_2 , de la segunda a_3 y de la tercera a_{n+2} para $n > 1$ obteniéndose la siguiente ley de recurrencia:

$$\begin{cases}
a_2 = \frac{a_1 - a_0}{2} \\
a_3 = \frac{a_2 - a_1 - a_0}{3} = \frac{\frac{a_1 - a_0}{2} - a_1 - a_0}{3} = -\frac{3a_0 + a_1}{6} \\
a_{n+2} = \frac{-na_n + (n+1)a_{n+1} - a_n + 2a_{n-1} - a_{n-2}}{(n+2)(n+1)} \quad ; \quad n > 1
\end{cases}$$

Como el ejercicio nos pide los cinco primeros términos vamos a obtener a_4 (el primero es para $n = 0$) a través de la fórmula de recurrencia dada arriba para $n = 2$:

$$n = 2 \quad : \quad a_4 = \frac{-2a_2 + 3a_3 - a_2 + 2a_1 - a_0}{12} = \frac{-3\frac{a_1 - a_0}{2} - 3\frac{3a_0 + a_1}{6} + 2a_1 - a_0}{12} = -\frac{a_0}{12}$$

Por tanto, los cinco primeros términos son:

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + a_3(x+1)^3 + a_4(x+1)^4 + \dots = \\
&= a_0 + a_1(x+1) + \frac{a_1 - a_0}{2}(x+1)^2 - \frac{3a_0 + a_1}{6}(x+1)^3 - \frac{a_0}{12}(x+1)^4 + \dots = \\
&\underbrace{\underbrace{a_0}_{c_1} \left[1 - \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{2}(x+1)^3 - \frac{1}{12}(x+1)^4 + \dots \right]}_{y_1(x)} + \underbrace{\underbrace{a_1}_{c_2} \left[(x+1) + \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{6}(x+1)^3 + \dots \right]}_{y_2(x)}
\end{aligned}$$

Esta *función especial* (no puede expresarse como una función elemental) corresponde con la solución general de la EDO formada por una combinación lineal de dos soluciones linealmente independientes en forma de series de potencia.

En el caso de **EDO homogéneas** (con término independiente nulo) puede resultar más sencillo estudiar los casos $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$ para obtener la dependencia de a_0 y posteriormente hacer $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$ para obtener la dependencia de a_1 , como se indica en el siguiente ejemplo.

Ejercicio 4.7. Determinar los tres primeros términos no nulos de cada una de las series solución de la siguiente EDO en torno a $x = 0$.

$$(x^2 + 1)y'' - 6y = 0$$

Claramente el punto $x = 0$ es un punto *ordinario* de la ecuación, por tanto seguimos los pasos para determinar una solución general en forma de serie de potencia:

1. Sustituimos en la EDO.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad ; \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad ; \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$(x^2 + 1) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 6 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

2. Operamos.

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} 6 a_n x^n &= 0 \\ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 6 a_n x^n &= 0 \\ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + 2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - 6a_0 - 6a_1 x - \sum_{n=2}^{\infty} 6 a_n x^n &= 0 \\ 2(a_2 - 3a_0) + 6(a_3 - a_1)x + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1)a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} - 6a_n]x^n &= 0 \end{aligned}$$

Aplicamos el principio de identidad:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 = 3a_0 \\ a_3 = a_1 \\ (n^2 - n - 6)a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} = 0 \end{array} \right. \rightarrow a_{n+2} = \frac{(-n^2 + n + 6)a_n}{(n+2)(n+1)}$$

3. Para encontrar las soluciones y_1 e y_2 que son las que aparecen multiplicadas respectivamente por a_0 y a_1 , vamos a aislar la dependencia de cada uno de los parámetros haciendo primeramente $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$ y posteriormente $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$.

- $a_0 = 1, a_1 = 0$.

$$a_2 = 3 \quad , \quad a_3 = 0 \quad , \quad a_4 = \frac{4a_2}{12} = 1 \quad , \quad \dots$$

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + 0x + 3x^2 + 0x^3 + x^4 + \dots$$

- $a_0 = 0, a_1 = 1$.

$$a_2 = 0 \quad , \quad a_3 = 1 \quad , \quad a_4 = \frac{4a_2}{12} = 0 = a_n$$

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 + x + 0x^2 + x^3 = x(1 + x^2)$$

4. Finalmente, la solución general de la EDO se puede expresar como:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 (1 + 3x^2 + x^4 + \dots) + c_2 x (1 + x^2) \quad ; \quad |x| < 1$$

Como la EDO tiene dos *puntos singulares* complejos²⁸ en $\pm i$, por el **Teorema 4.5, página 110**, el radio de convergencia de la solución es 1, que corresponde con la distancia del punto de desarrollo (origen) a cualquiera de los dos puntos singulares.

Si las funciones $a(x)$, $b(x)$ y $c(x)$ de la **Ecuación 4.3, página 109** no son polinomios, es necesario obtener sus desarrollos de Taylor en torno al punto ordinario para obtener la solución de la ecuación.

Ejercicio 4.8. Determinar una solución general en forma de serie de potencias de la siguiente ecuación.

$$y'' + e^x y = 0$$

Como el coeficiente de y'' es 1 y la función e^x es analítica para todo $\mathbb{R}$, todos los puntos de esta ecuación son puntos *ordinarios*, por tanto vamos a obtener la solución de la ecuación como series de potencias en torno al punto $x = 0$. Teniendo en cuenta el desarrollo de McLaurin de e^x (ver el **Ejemplo 4.3, página 98**) se tiene:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \implies y'' + \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) y = 0 \quad (4.5)$$

Siguiendo el procedimiento de los casos anteriores, buscamos soluciones de la ecuación de la forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad ; \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad ; \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Sustituyendo estos valores en la **Ecuación (4.5)** se tiene:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Entonces desarrollando se tiene:

$$2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \dots + \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots) = 0$$

Reagrupando en potencias de x :

$$(2a_2 + a_0) + (6a_3 + a_1 + a_0)x + \left(12a_4 + a_2 + a_1 + \frac{a_0}{2}\right)x^2 + \left(20a_5 + a_3 + a_2 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_0}{6}\right)x^3 + \dots = 0$$

Aplicamos ahora la propiedad de identidad:

- $2a_2 + a_0 = 0 \implies a_2 = \frac{-a_0}{2}$
- $6a_3 + a_1 + a_0 = 0 \implies a_3 = \frac{-a_0 - a_1}{6}$
- $12a_4 + a_2 + a_1 + \frac{a_0}{2} = 0 \implies a_4 = \frac{-a_2 - a_1 - a_0/2}{12} = \frac{a_0/2 - a_1 - a_0/2}{12} = \frac{-a_1}{12}$
- $20a_5 + a_3 + a_2 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_0}{6} = 0 \implies a_5 = \frac{-a_3 - a_2 - a_1/2 - a_0/6}{20} = \frac{3a_0 - 2a_1}{120}$

²⁸Correspondientes a las soluciones de la ecuación $x^2 + 1 = 0$.

Por tanto:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots \\ &= a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!} x^2 + \frac{-a_0 - a_1}{3!} x^3 + \frac{-2a_1}{4!} x^4 + \frac{3a_0 - 2a_1}{5!} x^5 + \dots \end{aligned}$$

Finalmente reagrupando términos de a_0 y a_1 y haciendo $c_1 = a_0$ y $c_2 = a_1$ se tiene:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 \left(1 - \frac{1}{2!} x^2 - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{3}{5!} x^5 + \dots \right) + c_2 \left(x - \frac{1}{3!} x^3 - \frac{2}{4!} x^4 - \frac{2}{5!} x^5 + \dots \right) ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Como no hay *puntos singulares*, por el **Teorema 4.5, página 110**, estas series convergen para todo x .

EDO Lineales No Homogéneas

Un punto x_0 es un *punto ordinario*²⁹ de una EDO lineal *no homogénea*³⁰ de segundo orden:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

si $p(x)$, $q(x)$ y $f(x)$ son *analíticas*³¹ en x_0 , extendiéndose el **Teorema 4.5, página 110** a esta clase de EDO. Por tanto, calculando el desarrollo de Taylor de la función $f(x)$ en torno a x_0 , podemos encontrar de la misma manera que en el caso anterior, soluciones en serie de potencias de la siguiente forma:

$$y = y_h + y_p = \underbrace{c_1 y_1 + c_2 y_2}_{y_h} + y_p = c_1 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n}_{y_h} + c_2 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n}_{y_h} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n}_{y_p}$$

Ejercicio 4.9. Determinar una solución general en forma de serie de potencias de la siguiente ecuación.

$$y'' + y = \cos x$$

En este caso se trata de una EDO lineal no homogénea. Como $\cos x$ es *analítica* en todo punto, (**Definición 8.7, página 275**), y el coeficiente de y'' no se anula nunca, todos los puntos de la ecuación son *ordinarios* y por tanto podemos encontrar soluciones en forma de series de potencia en torno a cualquier punto con radio de convergencia infinito. Tomamos como centro de las series el punto más sencillo $x_0 = 0$ y buscamos soluciones de la ecuación en la forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Teniendo en cuenta que el desarrollo de McLaurin de $\cos x$ (ver el **Ejemplo 4.3, página 98**) es:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

la ecuación se puede expresar de la forma:

$$y'' + y = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (4.6)$$

Siguiendo el procedimiento de cálculo conocido, buscamos soluciones de la ecuación de la forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad ; \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad ; \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

²⁹Ver la **Definición 4.10, página 110**.

³⁰Ver la **Sección 3.2, página 65** y la **Sección 3.3, página 72**.

³¹Ver la **Definición 8.7, página 275**.

Sustituyendo estos valores en la **Ecuación (4.6)** se tiene:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Entonces desarrollando:

$$(2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \dots) + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Reagrupando en potencias de x ,

$$(2a_2 + a_0 - 1) + (6a_3 + a_1)x + \left(12a_4 + a_2 + \frac{1}{2}\right)x^2 + (20a_5 + a_3)x^3 + \dots = 0$$

y aplicando el *principio de identidad*:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2a_2 + a_0 - 1 = 0 & \rightarrow \boxed{a_2 = \frac{1 - a_0}{2}} \\ 6a_3 + a_1 = 0 & \rightarrow \boxed{a_3 = \frac{-a_1}{6}} \\ 12a_4 + a_2 + \frac{1}{2} = 0 & \rightarrow a_4 = \frac{-a_2 - 1/2}{12} = \frac{(a_0 - 1)/2 - 1/2}{12} = \boxed{\frac{a_0 - 2}{24}} \\ 20a_5 + a_3 = 0 & \rightarrow a_5 = \frac{-a_3}{20} = \boxed{\frac{a_1}{120}} \\ & \vdots \end{array} \right.$$

Por tanto:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \dots = a_0 + a_1x - \frac{1 - a_0}{2!}x^2 + \frac{-a_1}{3!}x^3 + \frac{a_0 - 2}{4!}x^4 + \frac{a_1}{5!}x^5 + \dots$$

Finalmente haciendo $c_1 = a_0$ y $c_2 = a_1$ y llamando y_1 e y_2 a las soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea e y_p a la solución particular de la ecuación completa se tiene:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p =$$

$$c_1 \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots\right) + c_2 \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \dots\right) + \left(-\frac{1}{2!}x^2 - \frac{2}{4!}x^4 + \dots\right) \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Como no hay puntos *singulares*, estas series convergen para todo x .

Ejercicio 4.10. Determinar una solución general en forma de serie de potencias de la siguiente ecuación.

$$y'' + xy = 1$$

En este caso $x_0 = 0$ es un punto *ordinario* de la EDO, por tanto buscamos soluciones en forma de series de potencia:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad ; \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad ; \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \implies \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 1 \quad ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = 1$$

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = 1 \quad ; \quad (2a_2 - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_{n-1}]x^n = 0$$

Aplicando el *principio de identidad*:

$$\begin{cases} 2a_2 - 1 = 0 & \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} \\ a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_{n-1} = 0 & \Rightarrow a_{n+2} = -\frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \end{cases}$$

Dando valores en la relación de recurrencia se tiene:

$$\begin{cases} n = 1 & : a_3 = -\frac{a_0}{6} \\ n = 2 & : a_4 = -\frac{a_1}{12} \\ n = 3 & : a_5 = -\frac{a_2}{20} = -\frac{1}{40} \\ n = 4 & : a_6 = -\frac{a_3}{30} = \frac{a_0}{180} \\ n = 5 & : a_7 = -\frac{a_4}{42} = \frac{a_1}{504} \\ n = 6 & : a_8 = -\frac{a_5}{56} = \frac{1}{2240} \end{cases}$$

Notar que algunos términos dependen de a_0 , otros de a_1 y otros no dependen de ninguno de ellos. Cada tipo se agrupa por separado dando lugar a tres series. Llamando $c_1 = a_0$ y $c_2 = a_1$, la solución final es por tanto:

$$y = c_1 \left(1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6 + \dots \right) + c_2 \left(x - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{504}x^7 + \dots \right) + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{2240}x^8 + \dots \right)$$

que corresponde con los desarrollos en serie de potencia de las dos soluciones de la ec. homogénea linealmente independientes y de una solución particular de la ecuación completa.

Cuando la EDO **no** es homogénea no se puede aplicar la técnica utilizada en el [Ejercicio 4.7, página 115](#) de anular alternativamente a_0 y a_1 para encontrar la dependencia de cada una de ellas, ya que al hacerlo, la solución particular y_p aparece mezclada con y_1 e y_2 , sin poder determinar ninguna de ellas.

4.4.4. Puntos Singulares

Los **puntos singulares**³² de una EDO suelen ser un conjunto reducido de valores por lo que en un principio se podría pensar en ignorarlos. Pero en realidad estos puntos son los que determinan las características principales de la solución, en mucha mayor medida que lo hacen los puntos *ordinarios*.

Las soluciones en las cercanías de los *puntos singulares* son las que generalmente tienen un mayor interés desde un punto de vista práctico, ya que suelen ser producidas por condiciones geométricas tales como bordes, esquinas, etc. teniendo un efecto *no regular*, que determina el comportamiento global³³.

³²Ver la [Definición 4.10, página 110](#).

³³Notar que los *puntos singulares* son los que anulan el término de la segunda derivada, por lo que en ellos hay un cambio de orden en la EDO, pasando de segundo a primer orden o incluso a orden cero. En los casos aplicados, esto representa un cambio físico en el comportamiento del sistema en estudio, teniendo generalmente un gran interés práctico.

Puntos Singulares y Métodos Numéricos

Las EDO de interés práctico normalmente tienen que ser resueltas mediante *métodos numéricos*³⁴ a través de la utilización de ordenadores, en lugar de los métodos analíticos que estudiamos aquí. Sin embargo los métodos numéricos solo son válidos para la obtención de soluciones en las cercanías de *puntos regulares* ya que estos métodos también fallan en los *puntos singulares*.

Por tanto, incluso si se adopta un enfoque numérico, es necesario *combinarlo* con los métodos analíticos estudiados en este capítulo, a fin de determinar el comportamiento de las soluciones cerca de los *puntos singulares*³⁵.

El procedimiento mostrado en la **Sección 4.4.3, página 110** para determinar la solución general de la **Ecuación (4.3)** en torno a un *punto regular* no es válido para los *puntos singulares*, ya que su solución normalmente no es *analítica*³⁶ en ese punto y por tanto no puede representarse como una *serie de potencias*³⁷, así que es necesario utilizar desarrollos en serie más generales que los de potencia.

Clasificación de los Puntos Singulares

No todos los *puntos singulares* tienen el mismo comportamiento, ya que hay singularidades más *débiles* que otras y en las cuales es más fácil resolver la EDO en su vecindad.

Por tanto los puntos singulares se clasifican en dos tipos:

- Puntos Singulares Regulares
- Puntos Singulares Irregulares

Definición 4.11. Puntos Singulares Regulares e Irregulares

Los *puntos singulares*³⁸ x_0 de la ecuación:

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \quad (4.7)$$

se clasifican en dos tipos:

- **Punto Singular Regular:** Son aquellas singularidades más *débiles* en las cuales se cumple que las funciones³⁹,

$$(x - x_0) \frac{b(x)}{a(x)} \quad \text{y} \quad (x - x_0)^2 \frac{c(x)}{a(x)}$$

son *analíticas* en x_0 , es decir admiten un desarrollo de Taylor en torno a ese punto, cumpliéndose en este caso que los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \frac{b(x)}{a(x)} \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 \frac{c(x)}{a(x)}$$

existen y son finitos.

- **Punto Singular Irregular**⁴⁰: Son aquellos *puntos singulares* que no son *regulares*.

³⁴Ver la **Sección 1.3.2, página 11**.

³⁵La solución en un *punto singular* puede o no estar acotada en ese punto, aún así es necesario tener una forma precisa de determinar la solución en un entorno del mismo.

³⁶Ver la **Definición 8.7, página 275**.

³⁷Ver la **Definición 4.3, página 98**.

³⁸Ver la **Definición 4.10, página 110**.

³⁹Estas condiciones indican que el *infinito* $b(x)/a(x)$ es del mismo *orden* que el *infinito* $1/(x - x_0)$ en $x = x_0$, y de igual forma que el *infinito* $c(x)/a(x)$ es del mismo orden que el *infinito* $1/(x - x_0)^2$ en $x = x_0$. Ver el concepto de *órdenes* en *infinitésimos* e *infinitos* en algún texto sobre *Cálculo Infinitesimal*.

⁴⁰Las técnicas empleadas para tratar este tipo de singularidades son bastante más elaboradas y no se verán aquí.

Ejercicio 4.11. Determinar los puntos singulares de la siguiente ecuación diferencial y clasificarlos como regulares o irregulares.

$$3(x^2 - 1)^2 y'' + (x - 1)y' - y = 0$$

En este caso $a(x) = 3(x^2 - 1)^2$, $b(x) = (x - 1)$ y $c(x) = -1$. Los puntos singulares serán las raíces de $a(x) = 0$.

$$(x^2 - 1)^2 = (x - 1)^2(x + 1)^2 = 0 \implies \begin{cases} x_1 = 1 \text{ (doble)} \\ x_2 = -1 \text{ (doble)} \end{cases}$$

Hay por tanto dos puntos singulares: $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$. Vamos a estudiar el tipo de cada uno de ellos, analizando los siguientes límites:

$$x_1 = 1$$

- $\lim_{x \rightarrow x_1} (x - x_1) \frac{b(x)}{a(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \frac{x - 1}{(x - 1)^2(x + 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x + 1)^2} = \frac{1}{4}$
- $\lim_{x \rightarrow x_1} (x - x_1)^2 \frac{c(x)}{a(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 \frac{-1}{(x - 1)^2(x + 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x + 1)^2} = -\frac{1}{4}$

Por tanto al existir y ser finitos estos dos límites podemos afirmar que $x_1 = 1$ es un punto singular regular.

$$x_2 = -1$$

- $\lim_{x \rightarrow x_2} (x - x_2) \frac{b(x)}{a(x)} = \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) \frac{x - 1}{(x - 1)^2(x + 1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x - 1)(x + 1)} = (\text{No Existe})$

Por tanto sin necesidad de calcular el segundo límite podemos afirmar que $x_2 = -1$ es un punto singular irregular.

4.4.5. Puntos Singulares Regulares

Para simplificar, vamos a suponer que las funciones $a(x)$, $b(x)$ y $c(x)$ de la Ecuación (4.7) son **polinomios** sin factores comunes, aunque podría generalizarse para cualquier tipo de función. Dividiendo por $a(x)$ se obtiene la ecuación en la forma **estándar** o **canónica**:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (4.8)$$

En los puntos singulares regulares x_0 :

- $a(x_0) = 0$ y las funciones $p(x) = b(x)/a(x)$ y $q(x) = c(x)/a(x)$ **no** serán continuas en x_0 por lo que **no** puede aplicarse el teorema de existencia y unicidad para EDO lineales⁴¹.
- En x_0 **no** se puede obtener un desarrollo de Taylor en series de potencias, por tanto es necesario obtener **desarrollos en serie más generales**⁴².

Cambio de Variables

Sea la EDO homogénea:

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x) = 0$$

Queremos determinar las soluciones en las cercanías de un punto $x = x_0$. Haciendo el cambio de variable:

$$z = x - x_0 \implies dz = dx \implies y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} = y'$$

⁴¹Ver el Teorema 3.1, página 62.

⁴²Ver la Sección 8.1.6, página 281.

nuestro problema se transforma en encontrar la solución en torno a $z = 0$ de la ecuación:

$$a(z)y'' + b(z)y' + c(z) = 0$$

y posteriormente deshacer el cambio de variable. Por tanto, solo estudiaremos el caso de un punto *singular regular* en $x_0 = 0$.

Ecuación de Cauchy-Euler de Segundo Orden

El caso más sencillo de EDO con *punto singular regular* en $x_0 = 0$ es la ecuación de Cauchy-Euler⁴³ de segundo orden:

$$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0 \quad ; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (4.9)$$

Esta ecuación tiene soluciones expresables en funciones elementales de la forma⁴⁴:

$$y = x^r \quad ; \quad y' = r x^{r-1} \quad ; \quad y'' = r(r-1)x^{r-2}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$x^2 r(r-1)x^{r-2} + \alpha x r x^{r-1} + \beta x^r = 0 \quad ; \quad x^r [r(r-1) + \alpha r + \beta] = 0$$

La condición para que r sea solución es:

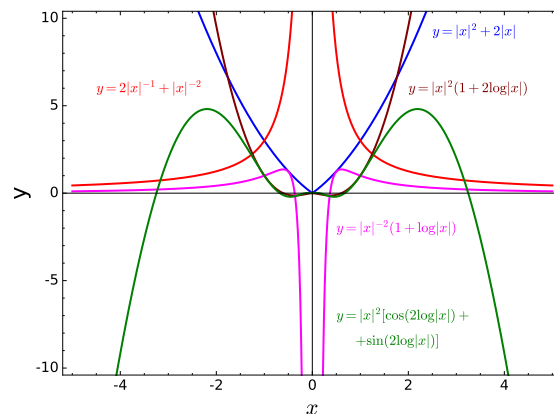
$$\text{Ec. Indicial} \quad F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta = 0 \quad \xrightarrow{\text{Sol.}} \quad r_1, r_2$$

En función de las raíces r_1 y r_2 de la ecuación indicial se obtienen tres tipos de soluciones:

- Raíces reales y distintas: $y = c_1 |x|^{r_1} + c_2 |x|^{r_2}$
- Raíces reales e iguales: $y = |x|^r (c_1 + c_2 \log |x|)$
- Raíces complejas ($r = \lambda \pm i\mu$): $y = |x|^\lambda [c_1 \cos(\mu \log |x|) + c_2 \sin(\mu \log |x|)]$

En la siguiente gráfica se muestra la forma típica de alguna de las soluciones de la ecuación de Cauchy-Euler en función de las raíces de la ecuación indicial.

Como puede observarse el comportamiento de las soluciones en las cercanías del punto singular $x = 0$ es muy variado lo que permite un amplio espectro de posibilidades combinando estas funciones.



Las ecuaciones del tipo:

$$(x - x_0)^2 y'' + \alpha(x - x_0)y' + \beta y = 0$$

se transforman en la ecuación de Cauchy-Euler con el cambio de variable⁴⁵ $z = x - x_0$. Una vez resuelta se deshace el cambio de variable sustituyendo z por $x - x_0$.

⁴³También conocida como *ecuación de Euler* o *equidimensional*, ver la [Sección 3.4.3, página 87](#).

⁴⁴Ver la [Sección 3.4.3, página 87](#).

⁴⁵Tener en cuenta que con este cambio de variable $z = x - x_0$ se tiene:

$$y' = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \quad ; \quad y'' = \frac{d^2 y}{dz^2} \frac{dz}{dx} = \frac{d^2 y}{dz^2}$$

Ejercicio 4.12. Encontrar la solución de las siguientes ecuaciones.

$$a) \quad x^2 y'' - xy' + 2y = 0$$

$$b) \quad (x+1)^2 y'' - 3(x+1)y' - 5y = 0$$

a) Se trata de una ecuación de Cauchy-Euler. Resolvemos por tanto la ec. indicial.

$$r(r-1) - r + 2 = 0 \quad ; \quad r^2 - 2r + 2 = 0 \quad \implies \quad r = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i$$

Al ser raíces complejas, la solución de la ecuación es (Sección 4.4.5, página 122):

$$y = |x|^\lambda [c_1 \cos(\mu \log |x|) + c_2 \operatorname{sen}(\mu \log |x|)] \quad \implies \quad y = |x| [c_1 \cos(\log |x|) + c_2 \operatorname{sen}(\log |x|)]$$

b) Sustituyendo $x+1$ por z se tiene una ecuación de Cauchy-Euler.

$$z^2 y'' - 3zy' - 5y = 0 \quad ; \quad y' = \frac{dy}{dz} \quad ; \quad y'' = \frac{d^2 y}{dz^2}$$

Resolvemos su ec. indicial.

$$r(r-1) - 3r - 5 = 0 \quad ; \quad r^2 - 4r - 5 = 0$$

$$\implies \quad r = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = 2 \pm 3 \quad \implies \quad r = \{5, -1\}$$

Al ser raíces reales y distintas la solución es del tipo:

$$y = c_1 |z|^{r_1} + c_2 |z|^{r_2} \quad \implies \quad y = c_1 |z|^5 + c_2 |z|^{-1}$$

Deshaciendo el cambio de variable se obtiene la solución de la ecuación original:

$$y = c_1 |x+1|^5 + c_2 |x+1|^{-1}$$

La importancia de la ecuación de Cauchy-Euler radica en que permite obtener soluciones *analíticas* en las cercanías de los *puntos singulares regulares*.

EDO Homogénea Lineal de Segundo Orden General

Vamos a considerar una EDO homogénea⁴⁶ lineal de segundo orden de la forma:

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \quad \xrightarrow{\text{Forma Canónica}} \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (4.10)$$

y sea⁴⁷ $x=0$ un *punto singular regular* de la EDO, es decir, las funciones:

$$xp(x) = x \frac{b(x)}{a(x)} \quad ; \quad x^2 q(x) = x^2 \frac{c(x)}{a(x)}$$

tienen límites finitos cuando $x \rightarrow 0$ y son *analíticas* en $x=0$, y por tanto las series:

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad ; \quad x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

son convergentes en torno al origen con un radio de convergencia $R > 0$.

⁴⁶Con el término independiente nulo.

⁴⁷Si el punto singular no es cero siempre se puede hacer un cambio de variable apropiado para que lo sea, ver el Sección 4.4.5, página 121.

Método de Frobenius

Este método se basa en transformar la EDO original **Ecuación (4.10)** en una ecuación *similar* a la *ecuación de Cauchy-Euler* de segundo orden **Ecuación (4.9)** y buscar soluciones *similares* a las suyas. Así, dividiendo la EDO original por $a(x)$ y multiplicándola por x^2 se tiene:

$$x^2 y'' + x[xp(x)]y' + [x^2 q(x)]y = 0 \quad (4.11)$$

Sustituyendo por los desarrollos en series de potencia de $xp(x)$ y $x^2 q(x)$ se obtiene:

$$x^2 y'' + x(p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots)y' + (q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots)y = 0 \quad (4.12)$$

la cual es similar a la *ecuación de Cauchy-Euler* pero donde los antiguos coeficientes α y β ahora son desarrollos en series de potencias.

Por tanto, se buscarán soluciones similares a las de la ecuación de Cauchy-Euler (**Sección 4.4.5, página 122**) multiplicadas por series de potencias para⁴⁸ $x > 0$ de la forma:

$$y = x^r (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Definición 4.12. Serie de Frobenius

Se denominan **series de Frobenius** aquellas que tienen la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \quad ; \quad r \in \mathbb{R}$$

Las *series de Frobenius* son más generales que las *series de potencias*, al incluirlas como casos particulares cuando r es cero o un entero positivo.

El siguiente teorema establece las condiciones de las soluciones de este tipo.

Teorema 4.6. Teorema de Frobenius

Si x_0 es un *punto singular regular*⁴⁹ de la ecuación diferencial **Ecuación (4.10)**, donde $xp(x)$ y $x^2 q(x)$ tienen desarrollos en series de potencia válidos en un intervalo $|x - x_0| < R$ con $R > 0$, entonces existe al menos una solución⁵⁰ de la forma:

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+r}$$

donde el número r es una constante a determinar y siendo la serie convergente al menos en un intervalo $|x - x_0| < R$.

Vamos a ver el proceso general de cálculo aplicando el denominado **Método de Frobenius** para una EDO lineal de segundo orden:

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

con un *punto singular regular* en $x = 0$.

Los siguientes pasos resumen el proceso general de cálculo. No se recomienda memorizar las ecuaciones que aparecen aquí, que dependerán de cada problema en cuestión⁵¹.

⁴⁸Para $x < 0$ es equivalente ya que basta con sustituir $-x$ por x , resolver y deshacer el cambio de variable.

⁴⁹Ver la **Definición 4.11, página 120**.

⁵⁰No se garantiza la existencia de dos soluciones linealmente independientes, ya que a veces solo se puede encontrar una.

⁵¹Ver los ejemplos de resolución en la **página 127**.

1. Buscamos soluciones de la forma⁵²:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \quad ; \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1} \quad ; \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$$

2. Sustituimos los desarrollos anteriores en la EDO original, operando⁵³ y simplificando queda una expresión del tipo:

$$a_0 F(r) x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ F(r+n) a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}] \right\} x^{r+n} = 0 \quad (4.13)$$

donde $F(r)$ es la **ecuación indicial**:

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0$$

3. Aplicando el *principio de identidad*⁵⁴ y teniendo en cuenta que $a_0 \neq 0$, se tiene:

– **Ecuación Indicial:** $F(r) = 0$

Por simplicidad consideramos⁵⁵ $a_0 = 1$ en la **Ecuación (4.13)** y por tanto la función $F(r)$ debe ser nula. Esto genera una ecuación que tiene dos soluciones denominadas **raíces indiciales**⁵⁶, que pueden ser reales distintas, reales iguales o complejas, generando soluciones de forma similar a las obtenidas en la ecuación de Cauchy-Euler⁵⁷.

- **Relación de Recurrencia:**

$$F(r+n) a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}] = 0 \quad ; \quad n \geq 1$$

Esta ecuación junto con las *raíces indiciales* permite obtener los coeficientes a_k de una o dos soluciones de la ecuación.

4. Las **raíces indiciales**, r_1 y r_2 , determinan la naturaleza cualitativa de la solución en el entorno del punto singular. Los posibles casos son:

– r_1, r_2 reales, distintas y $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$

En este caso se pueden formar dos soluciones en forma de series de potencia, y mediante ellas la solución general del problema.

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_1(x) = |x|^{r_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n \right] & ; \quad (a_0 = 1) \\ y_2(x) = |x|^{r_2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2) x^n \right] & ; \quad (a_0 = 1) \end{cases}$$

⁵²Notar que en este caso el sumatorio de y' no empieza en $n = 1$ ni el sumatorio de y'' en $n = 2$, como se hace en la **Sección 4.4.3, página 110**, debido a la existencia del término x^r que obliga a la presencia de un término a_0 en ambos casos.

⁵³Mediante *desplazamiento de índices*, ver **Sección 4.3.1, página 106**.

⁵⁴Ver la **Sección 4.3.1, página 105**.

⁵⁵Posteriormente será multiplicado por un parámetro c por lo que podrá tomar cualquier valor.

⁵⁶También denominadas *exponentes de la singularidad*.

⁵⁷Ver la **Sección 4.4.5, página 122**.

– r_1, r_2 reales e iguales

En este caso solo podemos formar una solución $y_1(x)$ en forma de serie. La segunda solución se puede obtener por diferentes métodos, siendo uno de los más utilizados la fórmula de reducción de orden o de Abel-Liouville⁵⁸:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2} dx \quad (4.14)$$

La solución final tiene la siguiente forma:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = |x|^{r_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n \right] & ; \quad (a_0 = 1) \\ y_2(x) = y_1(x) \log |x| + |x|^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_1) x^n \end{cases}$$

donde los coeficientes b_n se obtienen de la fórmula Abel-Liouville (Ecuación (4.14)).

– r_1, r_2 reales y distintas con $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$

En este caso pueden encontrarse una o dos⁵⁹ soluciones en forma de potencia. En el caso de que haya dos soluciones no habría ningún problema.

Si solo se puede encontrar una única solución $y_1(x)$, se puede emplear la fórmula de Abel-Liouville del caso anterior para obtener una segunda solución:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2} dx$$

quedando la solución final en este caso de la siguiente forma⁶⁰:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = |x|^{r_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n \right] & ; \quad (a_0 = 1) \\ y_2(x) = C y_1(x) \log |x| + |x|^{r_2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_2) x^n \right] \end{cases}$$

El parámetro C será cero si hay dos soluciones y será uno si solo hay una solución, obteniendo los coeficientes b_n por la fórmula Abel-Liouville.

– r_1, r_2 complejas

Este caso, debido a la extensión de sus cálculos, no será tratado aquí.

5. Obtenida la solución general en forma de serie en torno al punto singular regular $x = 0$, es necesario determinar su radio de convergencia⁶¹.

⁵⁸Ver la Sección 3.4.2, página 84.

⁵⁹En principio no puede determinarse cuantas se encontrarán hasta que no se resuelva.

⁶⁰Ver el Ejercicio 4.14, página 129.

⁶¹Ver la Sección 4.2.2, página 102.

Ejemplos de Problemas con Puntos Singulares Regulares

En esta sección vamos a ver ejemplos típicos de problemas con *puntos singulares regulares* correspondientes a los distintos tipos de raíces indiciales r_1 y r_2 vistas en el *método de Frobenius*⁶².

Ejercicio 4.13. Determinar una solución general en forma de serie de la siguiente ecuación, encontrando su intervalo de convergencia.

$$(x-1)y'' + \frac{1}{2}xy' - y = 0$$

Claramente la ecuación tiene un único *punto singular* en $x = 1$, correspondiente a la raíz del polinomio $x - 1$ que multiplica a y'' . Por simplicidad en los cálculos, vamos a hacer un cambio de variable para trasladar el punto singular a cero, para ello cambiamos la x antigua por $x - 1$, de forma:

$$xy'' + \frac{1}{2}(x+1)y' - y = 0$$

Vamos ahora a ver si el punto singular $x = 0$ es regular o irregular:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \frac{b(x)}{a(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{(x+1)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{c(x)}{a(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$

Como ambos límites existen y son finitos el punto singular $x = 0$ es regular, y por extensión el *punto singular* $x = 1$ en la ecuación original también es regular. Vamos entonces a aplicar el *método de Frobenius* para encontrar soluciones en forma de series en torno al *punto singular*.

1. Buscamos soluciones para $x > 0$ de la forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \quad ; \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1} \quad ; \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$$

2. Sustituimos en la ecuación:

$$x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2} + \frac{1}{2}(x+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

y metemos las potencias de los polinomios dentro de los sumatorios.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} a_n (n+r) x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} a_n (n+r) x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

3. Reagrupamos sumatorios de igual potencia e índice:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) \left(n+r-1 + \frac{1}{2} \right) x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{1}{2}(n+r) - 1 \right] x^{n+r} = 0$$

y por simplicidad podemos sacar x^r como factor común:

$$x^r \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) \left(n+r - \frac{1}{2} \right) x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{n+r-2}{2} x^n \right] = 0$$

Ahora vamos a desplazar índices para tener en ambas series potencias de x^n . Para hacerlo tenemos primero que sacar el término para $n = 0$ del primer sumatorio, ya que como su potencia es x^{n-1} si lo transformamos en x^n el índice del sumatorio pasaría de $x = 0$ a $x = -1$.

$$x^r \left[a_0 r \left(r - \frac{1}{2} \right) x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (n+r) \left(n+r - \frac{1}{2} \right) x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{n+r-2}{2} x^n \right] = 0$$

⁶²Ver la Sección 4.4.5, página 124.

Desplazamos los índices en el primer sumatorio

$$x^r \left[a_0 r \left(r - \frac{1}{2} \right) x^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1+r) \left(n+r+\frac{1}{2} \right) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{n+r-2}{2} x^n \right] = 0,$$

y agrupamos:

$$x^r \left\{ a_0 r \left(r - \frac{1}{2} \right) x^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n+1} (n+1+r) \left(n+r+\frac{1}{2} \right) + a_n \frac{n+r-2}{2} \right] x^n \right\} = 0$$

4. Ahora por el *principio de identidad* se tiene:

– Ecuación Indicial ($a_0 \neq 0$)

$$r \left(r - \frac{1}{2} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \left\{ 0, \frac{1}{2} \right\}$$

– Relación de Recurrencia

$$a_{n+1} (n+1+r) \left(n+r+\frac{1}{2} \right) + a_n \frac{n+r-2}{2} = 0$$

$$a_{n+1} = \frac{(2-n-r)a_n}{(n+r+1)(2n+2r+1)}$$

5. Como tenemos dos raíces reales indiciales distintas siendo su diferencia distinta de un entero positivo, podemos formar dos series.

$r = 0$	$r = 1/2$
$a_{n+1} = \frac{(2-n)a_n}{(n+1)(2n+1)}$	$a_{n+1} = \frac{(4-2n-1)a_n}{(2n+3)(2n+2)}$
$a_1 = 2a_0$	$a_1 = \frac{a_0}{2}$
$a_2 = \frac{a_1}{6} = \frac{a_0}{3}$	$a_2 = \frac{a_1}{20} = \frac{a_0}{40}$
$a_3 = 0$	$a_3 = -\frac{a_2}{42} = -\frac{a_0}{40 \cdot 42}$
$a_4 = -\frac{a_3}{28} = 0$	$a_4 = -\frac{a_3}{28} = \frac{a_0}{40 \cdot 42 \cdot 28}$
$\vdots$	$\vdots$

6. Con cada serie podemos formar una solución linealmente independiente, multiplicada por su correspondiente x^r . Como el valor a_0 no queda fijado en ninguna de las dos series, lo transformamos en parámetros libres c_1 y c_2 respectivamente en cada serie.

$$y = c_1 \left(1 + 2x + \frac{1}{3}x^2 \right) + c_2 x^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{40}x^2 - \frac{1}{40 \cdot 42}x^3 + \frac{1}{40 \cdot 42 \cdot 28}x^4 + \dots \right)$$

7. Tenemos que determinar el radio de convergencia de las dos series.

$$R_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \left| \frac{(n+1)(2n+1)}{(2-n)} \right| = \infty$$

$$R_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \left| \frac{(2n+3)(2n+2)}{(4-2n-1)} \right| = \infty$$

Por tanto el radio de convergencia de la solución es infinito y converge $\forall x \in (0, \infty)$, ya que $x^{1/2}$ solo está definido en ese intervalo.

8. Finalmente hay que deshacer el cambio de variable para obtener la solución de la ecuación original para $x > 1$, sustituyendo x por $x - 1$:

$$y = c_1 \left[1 + 2(x-1) + \frac{1}{3}(x-1)^2 \right] + c_2(x-1)^{1/2} \left[1 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{40}(x-1)^2 - \frac{1}{40 \cdot 42}(x-1)^3 + \frac{1}{40 \cdot 42 \cdot 28}(x-1)^4 + \dots \right] ; \quad \forall x \in (1, \infty)$$

Ejercicio 4.14. Determinar una solución general en forma de serie de la siguiente ecuación.

$$xy'' - y' - xy = 0$$

La ecuación tiene un único *punto singular* en $x = 0$. Determinamos su tipo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \frac{b(x)}{a(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{c(x)}{a(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0$$

Como ambos límites existen y son finitos el punto singular $x = 0$ es regular. Aplicamos el *método de Frobenius* para encontrar una solución en forma de series en torno al *punto singular*.

1. Buscamos soluciones para $x > 0$ de la forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \quad ; \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1} \quad ; \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$$

2. Sustituimos en la ecuación:

$$x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1} - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0,$$

y metemos las potencias de los polinomios dentro de los sumatorios.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = 0$$

3. Ahora reagrupamos sumatorios de igual potencia e índice y sacamos x^r como factor común:

$$x^r \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-2) x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \right] = 0$$

Vamos a desplazar índices para tener en ambas series potencias de x^n . En este caso es necesario sacar dos términos del primer sumatorio para poder igualar índices en las dos series, como se verá en el siguiente paso.

$$x^r \left[a_0 r(r-2) x^{-1} + a_1 (r+1)(r-1) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-2) x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \right] = 0$$

Desplazamos los índices de los dos sumatorios,

$$x^r \left[a_0 r(r-2)x^{-1} + a_1(r+1)(r-1) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}(n+r+1)(n+r-1)x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n \right] = 0$$

y agrupamos:

$$x^r \left\{ a_0 r(r-2)x^{-1} + a_1(r+1)(r-1) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_{n+1}(n+r+1)(n+r-1) - a_{n-1}]x^n \right\} = 0$$

4. Ahora por el principio de identidad se tiene:

– Ecuación Indicial ($a_0 \neq 0$)

$$r(r-2) = 0 \quad \implies \quad \boxed{r = \{2, 0\}}$$

– El segundo término sacado para $n = 1$ obliga a:

$$\boxed{a_1 = 0}$$

– Relación de Recurrencia

$$a_{n+1}(n+r+1)(n+r-1) - a_{n-1} = 0$$

$$\boxed{a_{n+1} = \frac{a_{n-1}}{(n+r+1)(n+r-1)}}$$

5. Como tenemos dos raíces reales indiciales distintas siendo su diferencia igual a un entero positivo, no podemos asegurar cuantas soluciones en forma de serie se podrá conseguir. Calculamos los términos.

$r = 2$	$r = 0$
$a_{n+1} = \frac{a_{n-1}}{(n+3)(n+1)}$	$a_{n+1} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)(n-1)}$
$a_1 = 0$	$a_1 = 0$
$a_2 = \frac{a_0}{2 \cdot 4}$	$a_2 = \frac{a_0}{0} = \text{No definido}$
$a_3 = \frac{a_1}{5 \cdot 3} = 0$	$a_3 = \frac{a_1}{3 \cdot 1} = 0$
$a_4 = -\frac{a_2}{6 \cdot 4} = -\frac{a_0}{2 \cdot 4^2 \cdot 6}$	$a_4 = \frac{a_2}{4 \cdot 2} = \text{No definido}$
$a_5 = 0$	$a_5 = 0$
$a_6 = -\frac{a_4}{8 \cdot 6} = \frac{a_0}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8}$	$a_6 = \frac{a_4}{6 \cdot 4} = \text{No definido}$
$\vdots$	$\vdots$

6. Claramente en este caso solo conseguimos una solución en forma de serie:

$$\boxed{y_1 = x^2 \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1}{2 \cdot 4^2 \cdot 6}x^4 + \frac{1}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8}x^6 + \dots \right)}$$

La segunda solución la podemos sacar a través de la fórmula de Abel-Liouville.

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx = y_1 \int \frac{e^{\int \frac{dx}{x}}}{y_1^2} dx = y_1 \int \frac{e^{\log x}}{y_1^2} dx = y_1 \int \frac{x}{y_1^2} dx$$

Calculamos primero la integral. Notar que estas operaciones han sido hechas con *SageMath*⁶³:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{y_1^2} dx &= \int \frac{x}{[x^2 (1 + \frac{1}{2 \cdot 4} x^2 + \frac{1}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} x^4 + \frac{1}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} x^6 + \dots)]^2} dx = \\ &= -\frac{1}{2} x^{-2} - \frac{1}{4} \log(x) + \frac{7}{384} x^2 + -\frac{19}{18432} x^4 + \frac{5}{73728} x^6 + \dots \end{aligned}$$

Por tanto:

$$y_2 = -y_1(x) \frac{1}{4} \log(x) + y_1(x) \left(-\frac{1}{2} x^{-2} + \frac{7}{384} x^2 - \frac{19}{18432} x^4 + \frac{5}{73728} x^6 + \dots \right)$$

$$y_2 = -y_1(x) \frac{1}{4} \log(x) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{16} x^2 - \frac{1}{64} x^4 + \frac{11}{9216} x^6 + \dots \right)$$

El Punto del Infinito

En ocasiones es deseable estudiar soluciones de la EDO:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \quad (4.15)$$

para valores grandes de la variable independiente. Por ejemplo, si la variable es el tiempo, nos podemos interesar por el estado del sistema a tiempos grandes (*punto del infinito*), cuando las perturbaciones transitorias han desaparecido.

Para ello se hace el cambio de variable:

$$t = \frac{1}{x} \quad \text{si} \quad x \rightarrow \infty \quad \implies \quad t \rightarrow 0$$

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -t^2 \frac{dy}{dt} = -t^2 \dot{y}(t)$$

$$y''(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{dt}{dx} = \left(-t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} - 2t \frac{dy}{dt} \right) (-t^2) = t^4 \ddot{y}(t) + 2t^3 \dot{y}(t)$$

Sustituyendo en la EDO original, se obtiene:

$$\ddot{y}(t) + \left[\frac{2}{t} - \frac{p(1/t)}{t^2} \right] \dot{y}(t) + \frac{q(1/t)}{t^4} y(t) = 0 \quad (4.16)$$

Se dice entonces que la EDO original **Ecuación (4.15)** tiene en $x = \infty$ un *punto ordinario*, *singular regular* o *singular irregular*, si el punto $t = 0$ tiene ese carácter para la ecuación transformada **Ecuación (4.16)**.

⁶³Se puede ver una introducción al programa por ejemplo en el anexo de "Clases de Cálculo II para Ingeniería". Ver la bibliografía, pag. 517.

4.5. Funciones Especiales

En problemas aplicados surgen con frecuencia algunas EDO de segundo orden particulares. Estas ecuaciones han sido estudiadas en forma extensa y sus soluciones corresponden a **funciones especiales**⁶⁴. Entre ellas vamos a estudiar las siguientes:

- $x^2 y'' + x y' + (x^2 - m^2)y = 0$ Ec. de Bessel
- $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$ Ec. de Legendre
- $y'' + (2p + 1 - x^2)y = 0$ Ec. de Hermite

4.5.1. Ecuación de Bessel

Se denomina **ecuación de Bessel** de orden⁶⁵ m a la siguiente EDO:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - m^2)y = 0 \quad ; \quad m \geq 0$$

Donde $x = 0$ es *punto singular regular*⁶⁶ y por tanto existe al menos una solución en su entorno de la forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Sustituyendo en la ecuación y simplificando se obtiene:

$$a_0(r^2 - m^2)x^r + x^r \sum_{n=1}^{\infty} a_n[(n+r)^2 - m^2]x^n + x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$$

Su *ecuación indicial* es:

$$r^2 - m^2 = 0 \quad \implies \quad r = \{m, -m\}$$

Para $r_1 = m$ se tiene:

$$(1 + 2m)a_1 x + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+2+2m)a_{n+2} + a_n]x^{n+2} = 0$$

De donde se obtiene:

$$\begin{cases} a_{2n-1} = 0 & n = 1, 2, 3, \dots \\ a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n! (1+m)(2+m) \cdots (n+m)} & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

La expresión que define a_{2n} se suele simplificar utilizando la *función gamma* que veremos a continuación.

Función Gamma, $\Gamma(z)$

La **función** $\Gamma(z)$ generaliza el concepto de *factorial* a los números complejos z y está definida mediante la siguiente integral impropia:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

⁶⁴Ver la Definición 4.2, página 97.

⁶⁵Suele ser también bastante común usar la variable m para denotar el orden en la ecuación de Bessel.

⁶⁶Ver la Definición 4.11, página 120.

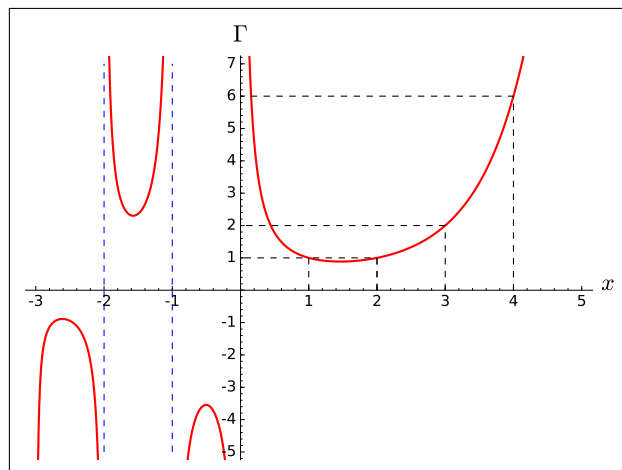
Si n es un número real entero positivo se tiene:

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \begin{cases} \Gamma(1) = 0! \\ \Gamma(2) = 1! \\ \Gamma(3) = 2! \\ \vdots \end{cases}$$

cumpléndose las siguientes dos propiedades:

$$\Gamma(1 + \alpha) = \alpha \Gamma(\alpha)$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$



Para simplificar y generalizar la solución de la ecuación de Bessel a distintos valores de m (no enteros, negativos, etc.), se suele tomar:

$$a_0 = \frac{1}{2^m \Gamma(1+m)}$$

entonces teniendo en cuenta que $\Gamma(1+m) = m!$ y $\Gamma(1+m+n) = (m+n)!$ se tiene:

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n! (1+m)(2+m) \cdots (n+m)} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} 2^m n! \Gamma(1+m)(1+m)(2+m) \cdots (n+m)}$$

y por tanto:

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+m} n! \Gamma(1+m+n)} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Funciones de Bessel de Primera Clase o Especie

Utilizando estos coeficientes y para valores $2m \notin \mathbb{Z}$ se obtienen soluciones del tipo⁶⁷:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n+m}$$

que se denotan mediante $J_m(x)$ y se definen como:

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1+m+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m} = \left(\frac{x}{2}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1+m+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

Para $m \geq 0$, esta serie converge al menos en el intervalo $[0, \infty)$. De igual forma para $-m$ se obtiene:

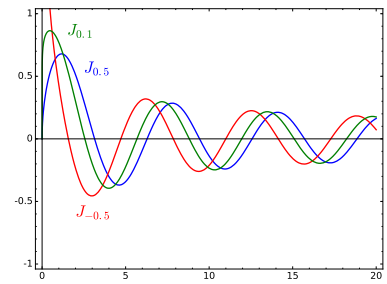
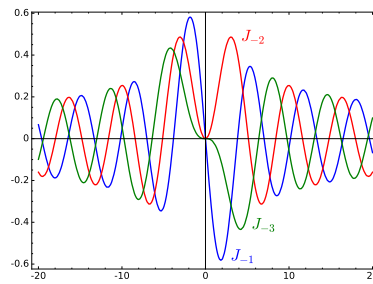
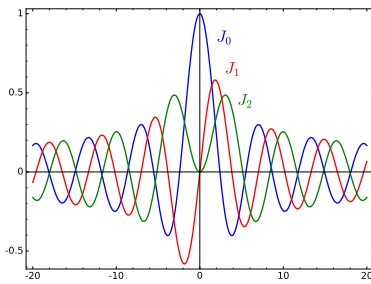
$$J_{-m}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1-m+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-m}$$

que solo está definida para valores positivos⁶⁸ de x .

Las funciones $J_m(x)$ y $J_{-m}(x)$ se llaman **funciones de Bessel de primera clase o especie** y de **orden** m y $-m$, respectivamente. En las siguientes gráficas se muestran algunos de sus miembros para m cero y valores enteros positivos (izquierda), para valores de m enteros negativos (centro) y para valores fraccionarios positivos y negativos (derecha).

⁶⁷Notar que se han eliminado los términos nulos de la serie.

⁶⁸A través de diferentes relaciones se puede extender su dominio a todo $\mathbb{R}$.



Algunas Propiedades de las Funciones de Bessel

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \frac{x^8}{2^2 4^2 6^2 8^2} \cdots \\ J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 4} + \frac{x^5}{2^2 4^2 6} - \frac{x^7}{2^2 4^2 6^2 8} \cdots \end{array} \right\} \quad J'_0(x) = \frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x)$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}[x^{-p}J(p)(x)] = -x^{-p}J_{p+1}(x)} \quad , \quad p \geq 0$$

$$\bullet J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\tau - x \sin \tau) d\tau \quad ; \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \quad , \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \quad (\text{Funciones Esféricas})$$

Solución de la Ecuación de Bessel para m no Entero

Cuando m **no** es un entero, se puede demostrar que las soluciones $J_m(x)$ y $J_{-m}(x)$ son *linealmente independientes*. Por tanto la solución de la EDO:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0 \quad ; \quad m \notin \mathbb{Z}$$

es:

$$\boxed{y(x) = c_1 J_m(x) + c_2 J_{-m}(x)}$$

Ejercicio 4.15. Encontrar la solución general de la siguiente ecuación de Bessel.

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0$$

En este caso $m = \sqrt{1/9} = 1/9$ que al no ser un entero, la solución general de la ecuación es:

$$\boxed{y(x) = c_1 J_{1/3}(x) + c_2 J_{-1/3}(x)}$$

Solución de la Ecuación de Bessel para m Entero

Si m es un entero no negativo se puede demostrar que $J_m(x)$ y $J_{-m}(x)$ son *linealmente dependientes*, ya que se verifica:

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$$

Por tanto es necesario determinar una segunda solución linealmente independiente. Hay varias formas de obtenerla⁶⁹, pero la más común viene dada por:

$$\boxed{y(x) = c_1 J_m(x) + c_2 Y_m(x)} \quad (4.17)$$

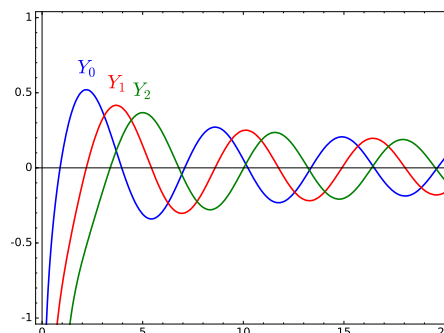
donde Y_m se le denomina⁷⁰ **función de Bessel de segunda clase**⁷¹ de orden m y viene definida por:

⁶⁹Una de ellas es mediante la *fórmula de Abel-Liouville* vista en la **Sección 4.4.5, página 124**.

⁷⁰También se le suele llamar a veces *funciones de Neumann* o *de Weber* y se representa por N_ν .

⁷¹O especie.

$$\begin{cases} Y_m(x) = \frac{\cos(m\pi)J_m(x) - J_{-m}}{\sin(m\pi)} & m \notin \mathbb{Z} \\ Y_m(x) = \lim_{n \rightarrow m} Y_n(x) & m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



Para $m \in \mathbb{Z}$ se cumple:

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x) \quad ; \quad Y_{-m}(x) = (-1)^m Y_m(x)$$

Ejercicio 4.16. Encontrar la solución general de la siguiente ecuación de Bessel.

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$$

En este caso $m = 0$ por tanto la solución general es:

$$y(x) = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x)$$

Para m entero y no entero la **Ecuación (4.17)** es una solución general de la ecuación de Bessel, ya que la definición de Y_m para m no entero no es más que una combinación lineal de J_m y J_{-m} .

Ejemplo 4.11. Equivalencia en la ecuación de Bessel

Para la ecuación de Bessel de orden $1/2$ la siguiente solución:

$$y(x) = J_{1/2}(x) + J_{-1/2}(x)$$

es la misma que:

$$y(x) = J_{1/2}(x) - Y_{1/2}(x)$$

EDO Resolubles en Términos de Funciones de Bessel

A veces es posible transformar algunas EDO en la ecuación de Bessel mediante determinados cambios de variable. Estas ecuaciones son importantes ya que aparecen de forma habitual en diferentes problemas de EDP⁷².

• Ecuación Paramétrica de Bessel de orden m

$$x^2 y'' + xy' + (\alpha^2 x^2 - m^2)y = 0 \quad ; \quad \text{c.v.: } z = \alpha x \quad , \quad \alpha > 0$$

$$x = \frac{z}{\alpha} \quad ; \quad y(x) = y(z/\alpha) = \phi(z) \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d\phi}{dz} \frac{dz}{dx} = \phi'(z)\alpha \quad ; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dz}[\phi'(z)\alpha] \frac{dz}{dx} = \phi''(z)\alpha^2$$

$$\frac{z^2}{\alpha^2} \phi'' \alpha^2 + \frac{z}{\alpha} \phi' \alpha + \left(\alpha^2 \frac{z^2}{\alpha^2} - m^2 \right) \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{z^2 \phi'' + z \phi' + (z^2 - m^2) \phi = 0}$$

cuya solución es, después de deshacer el cambio de variable:

$$\phi(z) = c_1 J_m(z) + c_2 Y_m(z) \quad \xrightarrow{\text{c.v.}} \quad \boxed{y = c_1 J_m(\alpha x) + c_2 Y_m(\alpha x)}$$

⁷²Ver por ejemplo: Sección 11.4.3, página 382, Sección 11.5.2, página 393, Sección 11.5.3, página 396 y Sección 11.7.3, página 417.

• **Ecuación Generalizada de Bessel**

$$y'' + \frac{1-2a}{x}y' + \left(b^2c^2x^{2c-2} + \frac{a^2-p^2c^2}{x^2}\right)y = 0 \quad ; \quad p, b \geq 0$$

Un gran número de EDO se ajustan a esta forma para determinados valores de a , b , c y p . Mediante el cambio de variable:

$$z = bx^c \quad ; \quad y(x) = \left(\frac{z}{b}\right)^{a/c} w(z)$$

se transforma en una ecuación de Bessel de orden p cuya solución, después de deshacer el c.v. es:

$$y(x) = x^a [c_1 J_p(bx^c) + c_2 Y_p(bx^c)]$$

• **Ecuación Modificada de Bessel de orden m**

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + m^2)y = 0$$

con el cambio de variable $t = ix$ se transforma en la ecuación de Bessel:

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + (t^2 - m^2)y = 0$$

donde las soluciones de valores complejos son $J_m(ix)$ e $Y_m(ix)$. Las soluciones de valores reales se denominan **función modificada de Bessel de primera clase** de orden m :

$$I_m(x) = i^{-m} J_m(ix)$$

y **función modificada de Bessel de segunda clase** de orden m

$$\begin{cases} K_m(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-m}(x) - I_m(x)}{\sin(m\pi)} & m \notin \mathbb{Z} \\ K_m = \lim_{n \rightarrow m} K_n(x) & m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

La solución general de valores reales se puede expresar como:

$$y(x) = c_1 I_m(x) + c_2 K_m(x)$$

Aplicaciones de la Ecuación de Bessel

La ecuación y funciones de Bessel aparecen en muchas áreas prácticas, como fenómenos de propagación de ondas, potenciales estáticos y otros problemas descritos por las ecuaciones de Helmholtz⁷³ o Laplace⁷⁴ con simetría radial, cilíndrica o esférica.

En el **Tema 11, página 359** se verán aplicaciones de la ecuación de Bessel en los siguientes campos:

- Conducción del calor en coordenadas polares con simetría radial (**Sección 11.4.3, página 382**)
- Propagación de ondas en un disco con simetría radial (**Sección 11.5.2, página 393**)
- Ecuación de ondas en una membrana circular (**Sección 11.5.3, página 396**)
- Resolución de la ecuación de Laplace en coordenadas polares (**Sección 11.6.1, página 409**)
- Ecuación del calor en coordenadas cilíndricas (**Sección 11.7.3, página 417**)

⁷³Ver la **Sección 11.7.1, página 412**.

⁷⁴Ver la **Sección 11.6.1, página 402**.

4.5.2. Ecuación de Legendre

La ecuación de Legendre de orden n es:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad ; \quad x \in [-1, 1]$$

donde los puntos singulares regulares son $x = \{1, -1\}$ y los demás son puntos ordinarios. Vamos a calcular soluciones en torno al punto ordinario $x = 0$ de la forma tradicional⁷⁵:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad ; \quad y' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \quad ; \quad y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} \\ (1 - x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + n(n+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0 \\ \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2k a_k x^k + n(n+1) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k &= 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2k a_k x^k + n(n+1) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k &= 0 \\ [2a_2 + n(n+1)a_0] + [6a_3 + 2a_1 + n(n+1)a_1]x + & \\ + \sum_{k=2}^{\infty} \{ (k+2)(k+1)a_{k+2} - [k^2 + k - n(n+1)]a_k \} x^k &= 0 \end{aligned}$$

Por el principio de identidad⁷⁶:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2a_2 + n(n+1)a_0 = 0 & \rightarrow a_2 = -\frac{n(n+1)}{2}a_0 \\ 6a_3 + 2a_1 + n(n+1)a_1 = 0 & \rightarrow a_3 = -\frac{(n-1)(n+2)}{6}a_1 \\ (k+2)(k+1)a_{k+2} - [k^2 + k - n(n+1)]a_k = 0 & \rightarrow a_{k+2} = -\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+2)(k+1)}a_k \end{array} \right.$$

Con esto salen dos soluciones linealmente independientes y convergentes para $|x| < 1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = a_0 \left[1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{((n-2)n(n+1)(n+3))}{4!}x^4 - \frac{(n-4)(n-2)n(n+3)(n+5)}{6!}x^6 + \dots \right] \\ y_2 = a_1 \left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{((n-3)(n-1)(n+1)(n+2)(n+6))}{5!}x^5 - \right. \\ \left. - \frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}x^7 + \dots \right] \end{array} \right.$$

Si n es entero positivo y par la primera serie es finita y la segunda infinita pero convergente y de igual forma, si n es entero positivo e impar la primera serie es infinita pero convergente y la segunda finita⁷⁷.

Las constantes a_0 y a_1 se toman⁷⁸ de forma que se simplifiquen las expresiones. Así para $n = 0$ y $n = 1$ se toman respectivamente $a_0 = 1$ y $a_1 = 1$. Para el resto:

$$\begin{aligned} a_0 &= (-1)^{n/2} \frac{1 \cdot 3 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdots n} & n &= 2, 4, 6, \dots \\ a_1 &= (-1)^{(n-1)/2} \frac{1 \cdot 3 \cdots n}{2 \cdot 4 \cdots (n-1)} & n &= 3, 5, 7, \dots \end{aligned}$$

⁷⁵Ver la Sección 4.4.3, página 110.

⁷⁶Ver la Sección 4.3.1, página 105.

⁷⁷Si n no es un entero no negativo, entonces ambas series son infinitas y convergentes en $(-1, 1)$ y divergentes (sin límite) en $x = \pm 1$. Las únicas funciones de Legendre que están acotadas en el intervalo cerrado $[-1, 1]$ son los polinomios de Legendre $P_n(x)$ o múltiplos constantes de estos polinomios.

⁷⁸Ya que son constantes arbitrarias se puede tomar cualquier valor no nulo de ellas.

4.5.3. Ecuación de Hermite

La ecuación de Hermite puede escribirse de la forma:

$$y'' - 2xy + 2py = 0 \quad ; \quad p \in \mathbb{R}$$

Claramente no tiene puntos singulares y al ser todos los coeficientes polinómicos las soluciones en serie centrada sobre cualquier punto tienen un radio de convergencia infinito. Buscamos soluciones en torno al origen $x = 0$ de la forma tradicional⁷⁹:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad ; \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad ; \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \\ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2p \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2p a_n x^n &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + (p-n)2a_n] x^n &= 0 \quad \implies \quad (n+2)(n+1) a_{n+2} + (p-n)2a_n \\ a_{n+2} &= \frac{2(n-p)}{(n+2)(n+1)} a_n \end{aligned}$$

Mediante esta relación de recurrencia salen dos series, una para los términos pares y otra para los impares en función de que se empiece con $n = 0$ ó $n = 1$.

<u>$n = 0$</u>	<u>$n = 1$</u>
$a_2 = -2p a_0$	$a_3 = \frac{2(1-p)}{3 \cdot 2} a_1$
$a_4 = \frac{2(2-p)}{4 \cdot 3} a_2 = \frac{-2^2 p(2-p)}{4 \cdot 3} a_0$	$a_5 = \frac{2(3-p)}{5 \cdot 4} a_3 = \frac{2^2(3-p)(1-p)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} a_1$
$\vdots$	$\vdots$
$a_{2n} = \frac{(-2)^n}{(2n)!} p(p-2) \cdots (p-2n+2) a_0$	$a_{2n+1} = \frac{(-2)^n}{(2n+1)!} (p-1)(p-3) \cdots (p-2n+1) a_1$

Por tanto definiendo dos funciones $y_0(x)$ e $y_1(x)$ de la siguiente forma, la solución general de la ecuación queda:

$$\left. \begin{aligned} y_0(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(2n)!} p(p-2) \cdots (p-2n+2) x^{2n} \\ y_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} = \frac{(-2)^n}{(2n+1)!} (p-1)(p-3) \cdots (p-2n+1) x^{2n+1} \end{aligned} \right\} \quad \boxed{y(x) = c_0 y_0(x) + c_1 y_1(x)}$$

Estas series se transforman en polinomios para determinados valores de p . Así la solución $y_0(x)$ es un polinomio para valores $p = 2N$ con $N = 0, 1, 2, \dots$. Y de igual forma $y_1(x)$ es un polinomio para valores $p = 2N + 1$ con $N = 0, 1, 2, \dots$. Estos polinomios tienen la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{aligned} P_{2N}(x) &= \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{N!}{(N-n)!} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} & p = 2N \\ P_{2N+1}(x) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{N!}{(N-n)!} \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} & p = 2N + 1 \end{aligned} \right.$$

⁷⁹Ver la Sección 4.4.3, página 110.

Polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite $H_k(x)$ son proporcionales a los anteriores $P_k(x)$ lo cual permite su simplificación con fines prácticos. Los primeros polinomios se muestran a continuación.

$$H_0(x) = 1$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

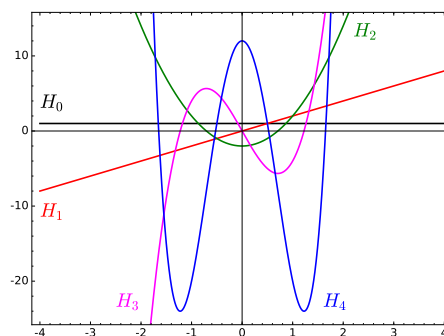
$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$$

En esta gráfica se muestran algunos de estos polinomios en su dominio.



Conociendo dos polinomios consecutivos se puede calcular los siguientes de forma recursiva a través de la siguiente relación, sin necesidad de recurrir a los términos de la serie:

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x)$$

También se puede calcular un determinado polinomio de forma directa a través de la **fórmula de Rodrigues** para estos polinomios:

$$H_n(x) = (-1)^k e^{x^2} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2}$$

Cada uno de estos polinomios corresponde con una solución particular de la ecuación de Hermite con $p = n$:

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0 \quad ; \quad n = 0, 1, \dots$$

Aplicaciones de la Ecuación y Polinomios de Hermite

Entre otras, sus aplicaciones son:

- Cálculo de integrales definidas mediante cuadratura gaussiana.
- Interpolación.
- Problemas de mecánica cuántica.

Ejemplo 4.12. Determinar una solución general en forma de serie de potencias de la siguiente ecuación.

$$(x-1)y'' + \frac{1}{2}xy' - y = 0$$

Claramente la ecuación tiene un único punto singular en $x = 1$ correspondiente a la raíz del polinomio $x - 1$ que multiplica a y'' . Por simplicidad en los cálculos, vamos a hacer un cambio de variable para trasladar el punto singular a cero, para ello cambiamos la x antigua por $x + 1$, de forma:

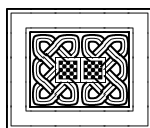
$$xy'' + \frac{1}{2}(x+1)y' - y = 0$$

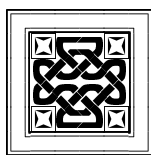
Vamos ahora a ver si el punto singular $x = 0$ es regular o irregular:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \frac{b(x)}{a(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{(x+1)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{c(x)}{a(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$

Como ambos límites existen y son finitos el punto singular $x = 0$ es regular. Notar que por extensión el punto singular $x = 1$ en la ecuación también es regular. Vamos entonces a aplicar el método de Frobenius para encontrar soluciones en forma de series entorno al punto singular.

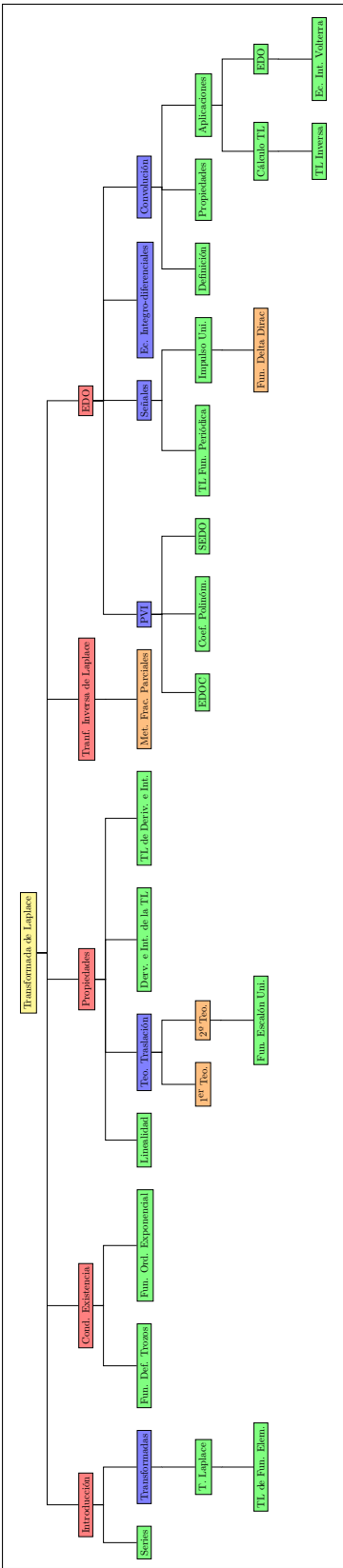




Transformada de Laplace

Contenido

5.1	Introducción	145
5.1.1	Series de Potencias	145
5.2	Transformadas	146
5.3	Transformada de Laplace	147
5.3.1	Definición	147
5.3.2	Función Gamma $\Gamma(t)$	150
5.3.3	Tabla de Transformadas de Laplace Elementales	151
5.3.4	Condiciones Suficientes de Existencia	151
5.3.5	Propiedades de la Transformada de Laplace	153
5.3.6	Transformadas Inversa de Laplace	160
5.3.7	Transformada de la Derivada e Integral	163
5.4	Método de Descomposición en Fracciones Simples	165
5.5	Transformada de Laplace y EDO	167
5.5.1	PVI de EDOC	167
5.5.2	EDOL con Coeficientes Polinómicos	168
5.5.3	Sistemas de EDO Lineales de Orden n	169
5.5.4	Ecuaciones Integrales e Integrodiferenciales	170
5.5.5	Transformada de un Producto: Convolución	172
5.6	EDOS y Señales	179
5.6.1	Función Delta de Dirac	181



5.1. Introducción

Hay diferentes caminos¹ que llevan a la definición de la transformada de Laplace, aunque generalmente no de una forma sencilla. Aquí vamos a ver uno de ellos basado en las *series de potencias*².

5.1.1. Series de Potencias

Una determinada función $f(x)$ se puede expresar³ como una serie de potencias en torno a $x = 0$ de la forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

con un *radio de convergencia*² determinado. Aquí hay dos variables distintas de dos funciones distintas relacionadas mediante un sumatorio:

- n es una variable discreta y es la variable independiente de la función $a_n = a(n)$ que va de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.
- x es una variable continua y es la variable independiente de la función $f(x)$ que va de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Se puede pensar que las *series de potencias* son la expresión discreta de *algo* continuo. Si cambiamos la variable discreta n por la variable continua s y el sumatorio por una integral se tiene la versión *continua* de una *serie de potencias*:

$$f(x) = \int_0^{\infty} a(s) x^s ds$$

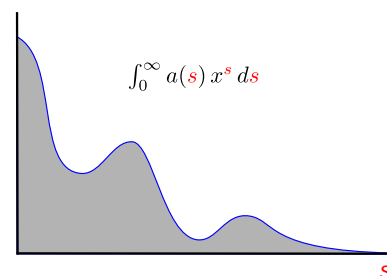
Ahora tenemos dos variables continuas x y s correspondientes a dos funciones reales de variable real $f(x)$ y $a(s)$ que están *relacionadas* mediante una expresión integral. En este caso se trata de una integral *impropia*⁴ que se define como:

$$f(x) = \int_0^{\infty} a(s) x^s ds = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r a(s) x^s ds$$

Al igual que pasaba con las series de potencias, esta integral solo tendrá sentido en los casos convergentes, es decir cuando este límite exista y sea finito.

Naturalmente para que esto ocurra el producto $a(s)x^s$ debe generar una gráfica cuyo área en el intervalo $[0, \infty)$ sea finita. Es importante notar que la variable x dentro de la integral se comporta como una constante ya que esta integral es sobre la variable s .

La relación entre la variable x y la variable s no es sencilla. Para cada valor de x hay un área debajo de la curva $h(s) = a(s)x^s$ que corresponde con el valor de $f(x)$.



Como la función potencial x^s tiene un crecimiento infinito cuando las variables $x, s \rightarrow \infty$, la función $a(s)$ debe contrarrestar este crecimiento para que la integral converja, lo cual limita el número de funciones $a(s)$ útiles, salvo que $x \in [0, 1]$ ya que en este caso x^s es potencialmente decreciente.

Vamos a modificar esta expresión para ampliar el rango de validez de x al intervalo $[0, \infty)$. Para ello primeramente expresamos la potencia como una exponencial:

$$x^s = e^{s \log x}$$

esto además va a ampliar bastante la aplicación de esta expresión debido a la relación de la exponencial con los números complejos. Si $x \in [0, 1]$ entonces $\log x \in (-\infty, 0]$. Vamos a realizar un cambio de variables apropiado para tener dos nuevas variables⁵ en el rango $[0, \infty)$, para ello se puede sustituir:

$$e^{s \log x} \implies e^{-sx}$$

¹Como por ejemplo a través de temas relacionados con las ecuaciones diferenciales, con las series, con la teoría de probabilidades y con las integrales impropias, entre otros.

²Ver por ejemplo "Clases de Ampliación de Matemáticas para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 517

³Las *series* presentan una forma mucho más general de definir funciones que las tradicionales *funciones elementales*.

⁴En una *integral impropia*, uno o ambos de los extremos del intervalo de integración tienden a $+\infty$ ó $-\infty$. Hay una clara analogía entre las series y las integrales impropias, ver por ejemplo *Advanced Calculus*, W. Kaplan.

⁵Aunque vamos a conservar los mismos nombres.

Con ello:

- Se cambia la antigua variable $x \in [1, 0]$ a una nueva variable $x \in [0, \infty)$.
- Se cambia la antigua variable $s \in (-\infty, \infty)$ por una nueva variable $s \in [0, \infty)$.

De esta forma se extiende el intervalo de validez de la fórmula para ambas variables a $[0, \infty)$, quedando:

$$f(x) = \int_0^\infty a(s) e^{-sx} ds$$

Como resumen, podemos ver esta expresión como una *generalización* de una *serie de potencias* en el campo continuo. En ella se relacionan dos funciones $f(x)$ y $a(s)$ cada una con su variable independiente correspondiente. La relación se establece mediante una integral impropia y un *núcleo* e^{-sx} que ajusta la relación $x \leftrightarrow s$ de forma apropiada en el rango de nuestro interés $[0, \infty)$.

Que existan dos funciones distintas $f(x)$ y $a(s)$ de variables distintas x y s relacionadas mediante una determinada expresión, puede ser entendido como la *interconexión* de dos propiedades distintas de un mismo sistema. Como veremos a continuación, esta relación nos va a permitir, entre otras cosas, *transformar* un problema que en la variable x puede ser complicado, en otro problema distinto que en la variable s puede ser más sencillo.

5.2. Transformadas

Como hemos visto un *operador matemático*⁶ transforma una función en otra función.

Ejemplo 5.1. Ejemplos de operadores matemáticos.

- Derivación: $D[f(x)] = f'(x)$
- Integración: $I[f(x)] = \int_0^x f(t) dt$
- Multiplicación: $M_g[f(x)] = f(x)g(x)$

La transformación de estos operadores es de una función en otra *de la misma variable*. Vamos a ver ahora un tipo especial de operadores matemáticos que transforma unas funciones en otras pero de variable distinta.

Definición 5.1. Transformada

En matemáticas una **transformada** es una aplicación *lineal*⁷ entre dos conjuntos de funciones.

Un tipo de *transformada* especialmente útil son las *transformadas integrales*.

Definición 5.2. Transformada Integral

Una **transformada integral** es cualquier transformada T aplicada sobre una función $f(t)$ de la forma siguiente⁸:

$$T[f(t)] = \int_{t_1}^{t_2} K(s, t) f(t) dt = F(s) \quad \left\{ \begin{array}{ll} f(t) & : \text{función original en la variable } t \text{ (tiempo)} \\ F(s) & : \text{transformada de } f(t) \text{ en la variable } s \\ K(s, t) & : \text{núcleo o kernel de la transformación integral } T \\ t_1, t_2 & : \text{límites de integración de la variable } t \end{array} \right.$$

⁶Ver la Definición 1.4, página 5.

⁷Una aplicación T es lineal si para cualquier función admisible $f(x)$ y $g(x)$ y cualquier par de constantes α y β se cumple:

$$T[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha T[f(x)] + \beta T[g(x)]$$

⁸Notar que la integral está *definida* sobre t y por tanto s se comporta como una constante dentro de la integral. El resultado de la integral es una función únicamente de s desapareciendo la dependencia de la variable original t .

Una *transformada integral* T relaciona dos funciones generalmente de naturaleza distinta.

$$f(t) \xrightarrow{T} F(s)$$

Algunos *núcleos* tienen una función K inversa asociada, $K^{-1}(s, t)$, que permiten⁹ obtener su *transformada inversa*:

$$f(t) = \int_{s_1}^{s_2} K^{-1}(s, t) F(s) ds$$

Existen diferentes *transformadas integrales*, siendo tres de las más conocidas las mostradas en la siguiente tabla.

TRANSFORMADA	SÍMBOLO	K	t_1	t_2	K^{-1}	s_1	s_2
Transformada de Laplace ¹⁰	$\mathcal{L}$	e^{-st}	0	∞	$\frac{e^{st}}{2\pi i}$	$\gamma - i\infty$	$\gamma + i\infty$
Transformada de Fourier	$\mathcal{F}$	e^{-ist}	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{e^{ist}}{2\pi}$	$-\infty$	$+\infty$
Transformada de Hilbert	$\mathcal{Hil}$	$\frac{1}{\pi} \frac{1}{s-t}$	$-\infty$	∞	$\frac{1}{\pi} \frac{1}{s-t}$	$-\infty$	∞

5.3. Transformada de Laplace

5.3.1. Definición

Definición 5.3. Transformada de Laplace

Dada una función $f(t)$ definida para $t \geq 0$, se denomina **transformada de Laplace** de $f(t)$, y se representa mediante $\mathcal{L}\{f(t)\}$, a la siguiente integral impropia:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt$$

siempre y cuando la integral converja¹¹.

Hay dos formas de calcular la *transformada de Laplace* de una función:

- A través de la definición, calculando la integral correspondiente.
- A través de las *propiedades de la transformada de Laplace* (ver la [Sección 5.3.5, página 153](#)).

Ejemplo 5.2. Cálculo de transformada de Laplace de funciones elementales a través de la definición.

- $f(t) = 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{1\} &= \int_0^\infty e^{-st} 1 dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{-e^{-st}}{s} \right|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-sb}}{s} + \frac{e^{-s0}}{s} \right]_{s \geq 0} \\ &= \left[0 + \frac{1}{s} \right] = \frac{1}{s}, \quad s > 0 \end{aligned}$$

⁹Las características de la transformación dependen de cada caso particular.

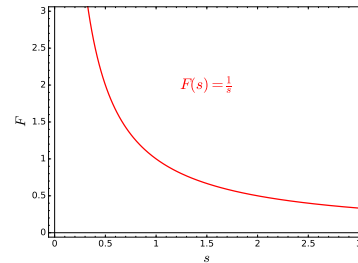
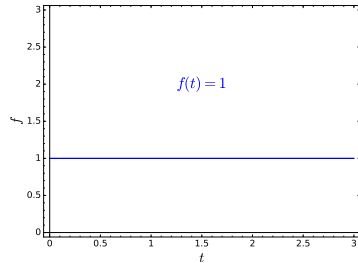
¹⁰En la transformada inversa de Laplace, la integración se realiza en el plano complejo a lo largo de la línea vertical $\text{Re}(s) = \gamma$, tal que γ es un número mayor que la parte real de todas las *singularidades* de $F(s)$. Ver por ejemplo "Clases de Ampliación de Matemáticas para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 517.

¹¹Es decir, el límite de la integral exista y sea finito.

Generalmente la notación del límite se simplifica de la siguiente forma:

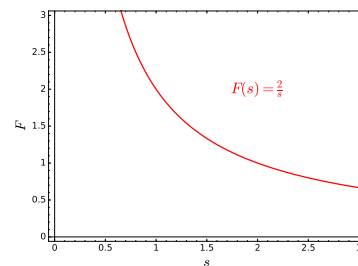
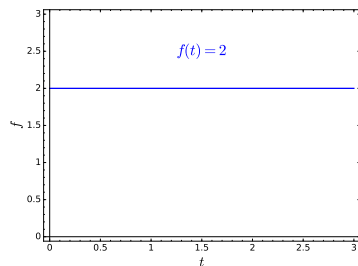
$$\lim_{b \rightarrow \infty} X \Big|_0^b = X \Big|_0^\infty$$

En las siguiente figura se muestran las gráficas de la función original y su transformada.



- $f(t) = k$, $k \in \mathbb{R}$

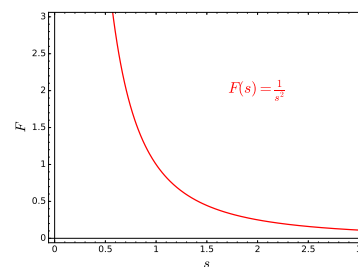
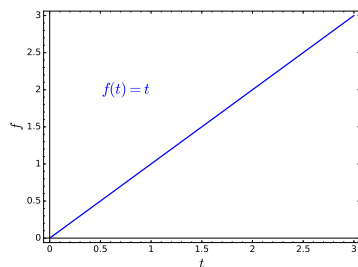
$$\mathcal{L}\{k\} = \int_0^\infty e^{-st} k dt = k \int_0^\infty e^{-st} dt = k \mathcal{L}\{1\} = k \frac{1}{s} = \frac{k}{s} \quad , \quad s > 0$$



- $f(t) = t$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t\} &= \int_0^\infty e^{-st} t dt \stackrel{\text{P.Partes}}{=} \left\{ \begin{array}{ll} u = t & \rightarrow du = dt \\ dv = e^{-ts} dt & \rightarrow v = -\frac{e^{-ts}}{s} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{-te^{-st}}{s} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s} dt = \frac{-te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \Big|_0^\infty = 0 - 0 + 0 + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} \quad , \quad s > 0 \end{aligned}$$

Notar que: $\lim_{t \rightarrow \infty} te^{-st} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{st}} \stackrel{\hat{H}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{se^{st}} = 0$



- $f(t) = t^n$; $n \in \mathbb{N}$

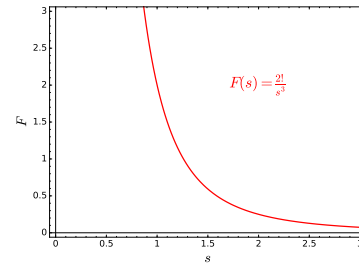
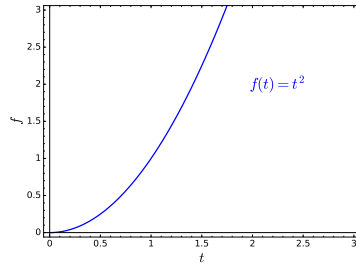
$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t^n\} &= \int_0^\infty e^{-st} t^n dt \stackrel{\text{P.Partes}}{=} \left\{ \begin{array}{ll} u = t^n & \rightarrow du = nt^{n-1} dt \\ dv = e^{-ts} dt & \rightarrow v = -\frac{e^{-ts}}{s} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{-t^n e^{-st}}{s} \Big|_0^\infty + \frac{n}{s} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-st} dt \end{aligned}$$

Como:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^n e^{-st} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^n}{e^{st}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n!}{s^n e^{st}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{-t^n e^{-st}}{s} \right|_0^\infty = 0 - 0 = 0$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t^n\} &= \frac{n}{s} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-st} dt = \frac{n(n-1)}{s^2} \int_0^\infty t^{n-2} e^{-st} dt = \dots = \frac{n!}{s^n} \int_0^\infty e^{-st} dt = \\ &= \boxed{\frac{n!}{s^{n+1}}} \quad ; \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\} \quad , \quad s > 0 \end{aligned}$$

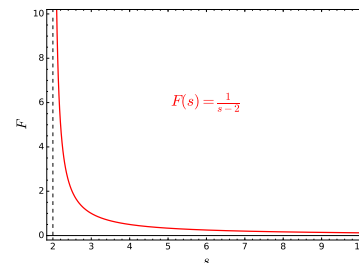
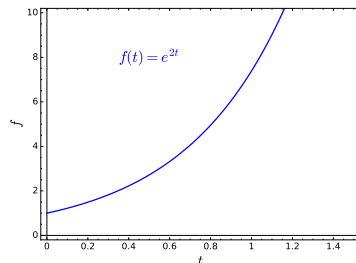


En la [Sección 5.3.2, página 150](#) se generaliza este resultado a través de la función $\Gamma(t)$ para valores de n reales con $n > -1$.

- $f(t) = e^{at}$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t} dt = \left. \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right|_0^\infty \stackrel{s > a}{=} 0 - \frac{1}{a-s} = \boxed{\frac{1}{s-a}} \quad ; \quad s > a$$

Para $s \leq a$ la integral no converge.

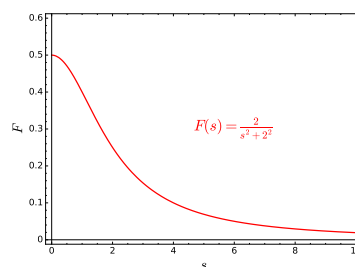
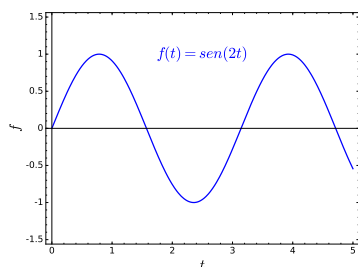


- $f(t) = \text{sen } at$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\text{sen } at\} &= \int_0^\infty e^{-st} \text{sen } at dt \stackrel{\text{P. Partes}}{=} \left\{ \begin{array}{ll} u = \text{sen } at & \rightarrow du = a \cos at dt \\ dv = e^{-ts} dt & \rightarrow v = -\frac{e^{-ts}}{s} \end{array} \right\} = \\ &= \left. -\frac{\text{sen } at}{s} e^{-st} \right|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{a}{s} e^{-st} \cos at dt \stackrel{\text{P. Partes}}{=} \left\{ \begin{array}{ll} u = \cos at & \rightarrow du = -a \text{sen } at dt \\ dv = e^{-ts} dt & \rightarrow v = -\frac{e^{-ts}}{s} \end{array} \right\} = \\ &= \left(-\frac{\text{sen } at}{s} - \frac{a \cos at}{s^2} \right) e^{-st} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{a^2}{s^2} e^{-st} \text{sen } at dt \end{aligned}$$

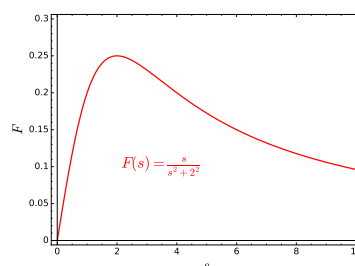
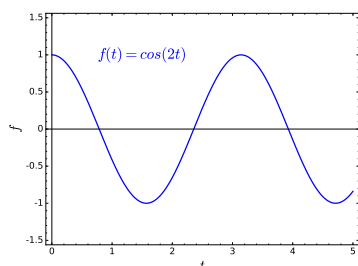
Por tanto, pasando la segunda integral al primer miembro:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{a^2}{s^2} \right) \int_0^\infty e^{-st} \text{sen } at dt &= \left(-\frac{\text{sen } at}{s} - \frac{a \cos at}{s^2} \right) e^{-st} \Big|_0^\infty \\ \mathcal{L}\{\text{sen } at\} &= \frac{s^2}{s^2 + a^2} \left(0 - 0 + 0 + \frac{a}{s^2} \right) = \boxed{\frac{a}{s^2 + a^2}} \quad , \quad s > 0 \end{aligned}$$



• $f(t) = \cos at$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos at\} &= \int_0^\infty e^{-st} \cos at \, dt \stackrel{\text{P. Partes}}{=} \left\{ \begin{array}{l} u = \cos at \rightarrow du = -a \operatorname{sen} at \, dt \\ dv = e^{-ts} dt \rightarrow v = -\frac{e^{-ts}}{s} \end{array} \right\} = \\ &= -\frac{\cos at}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty - \frac{a}{s} \int_0^\infty e^{-st} \operatorname{sen} at \, dt = \frac{1}{s} - \frac{a}{s} \frac{a}{s^2 + a^2} = \frac{1}{s} \left(1 - \frac{a^2}{s^2 + a^2} \right) = \boxed{\frac{s}{s^2 + a^2}}, \quad s > 0 \end{aligned}$$



Generalmente se utilizan letras minúsculas para representar la *función original* y letras mayúsculas para su *transformada de Laplace*:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \quad ; \quad \mathcal{L}\{g(t)\} = G(s) \quad ; \quad \mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$$

5.3.2. Función Gamma $\Gamma(t)$

Vamos a calcular $\mathcal{L}\{t^r\}$ para cualquier $r > -1$:

$$\mathcal{L}\{t^r\} = \int_0^\infty e^{-st} t^r \, dt \stackrel{u=st}{=} \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^r \left(\frac{1}{s}\right) \frac{du}{s} = \frac{1}{s^{r+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^r \, du$$

Teniendo en cuenta la definición de la **función Gamma**¹²:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u} u^{z-1} \, du$$

se puede generalizar la transformada de una potencia¹³ se la siguiente forma:

$$\mathcal{L}\{t^r\} = \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}} \quad ; \quad r > -1$$

¹²Ver la Sección 4.5.1, página 132.

¹³Ver el Ejemplo 5.2, página 148.

5.3.3. Tabla de Transformadas de Laplace Elementales

Como resumen de los cálculos realizados en el [Ejemplo 5.2, página 147](#), podemos organizar una pequeña tabla con las *transformadas de Laplace* de algunas funciones elementales¹⁴.

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
1	$\frac{1}{s}$	k	$\frac{k}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}, n \in \mathbb{N}$
t^r	$\frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}, r > -1$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}, s > a$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$

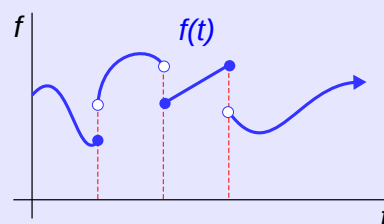
5.3.4. Condiciones Suficientes de Existencia

No existe la *transformada de Laplace* de toda función, por ejemplo no existe para la función $\frac{1}{t}$ ni para e^{t^2} , ya que la integral que define la *transformada de Laplace* no converge en estos casos.

Vamos a ver las condiciones bajo las cuales existe la *transformada de Laplace* de una función, para ello previamente veremos dos tipos de funciones.

Definición 5.4. Función Definida a Trozos

Se dice que una función $f(t)$ es **definida a trozos** en un intervalo, si posee un número finito de *discontinuidades finitas* (sin asíntotas verticales) en ese intervalo.



Ejercicio 5.1. Calcular la transformada de Laplace de la siguiente función definida a trozos:

$$f(t) = \begin{cases} at + b & \text{si } 0 \leq t \leq \alpha \\ ce^{dt} & \text{si } t > \alpha \end{cases}$$

Teniendo en cuenta la definición de la transformada de Laplace, las propiedades de la integral y los intervalos de definición de la función $f(t)$, se tiene:

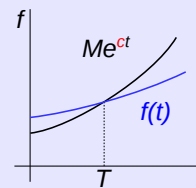
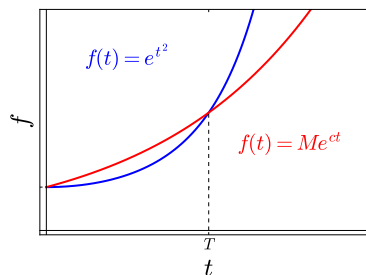
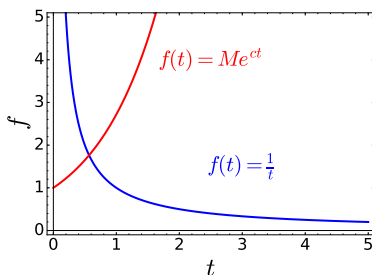
$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^\alpha e^{-st} (at + b) dt + \int_\alpha^\infty ce^{(d-s)t} dt = \\ &= \left. \frac{-ate^{-st}}{s} - \frac{ae^{-st}}{s^2} \right|_0^\alpha - \left. \frac{be^{-st}}{s} \right|_0^\alpha + \left. \frac{ce^{(d-s)t}}{d-s} \right|_\alpha^\infty \stackrel{s > d}{=} \\ &\stackrel{s > d}{=} \left(\frac{-a\alpha e^{-s\alpha}}{s} - \frac{ae^{-s\alpha}}{s^2} + 0 + \frac{a}{s^2} \right) + \left(\frac{-be^{-s\alpha}}{s} + \frac{b}{s} \right) + \left(0 + \frac{ce^{(d-s)\alpha}}{s-d} \right) = \\ &= \frac{b - (a\alpha + b)e^{-s\alpha}}{s} + \frac{a(1 - e^{-s\alpha})}{s^2} + \frac{ce^{(d-s)\alpha}}{s-d}, \quad s > d \end{aligned}$$

¹⁴En la [Tabla 5.1, página 162](#) se muestra una colección más grande de transformadas inversas de Laplace.

Definición 5.5. Función de Orden Exponencial

Se dice que una función $f(t)$ es de **orden exponencial c** si existen constantes $c, T > 0$ y $M > 0$ tales que:

$$|f(t)| \leq Me^{ct} \quad \forall t > T$$

**Ejemplo 5.3. Funciones Definidas a Trozos y de Orden Exponencial.**

La función $1/t$ (gráfica izquierda) no es *definida a trozos* en $\mathbb{R}$, pero sí de *orden exponencial* $c > 0$. La función e^{t^2} (gráfica derecha) sí es *continua a trozos* en $\mathbb{R}$, pero no de *orden exponencial*.

Teorema 5.1. Condiciones Necesarias de Existencia de la Transf. de Laplace

Si una función $f(t)$ es *continua a trozos* en $[0, \infty)$ y de *orden exponencial* c para $t > T$, entonces $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > c$.

Demostración 5.1.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \underbrace{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}_{I_1} + \underbrace{\int_T^\infty e^{-st} f(t) dt}_{I_2}$$

La integral I_1 existe porque se puede expresar como una suma de integrales sobre intervalos en donde $e^{-st} f(t)$ es continua.

Con respecto a I_2 , por ser la función $f(t)$ de orden exponencial c se tiene:

$$|I_2| \leq \int_T^\infty |e^{-st} f(t)| dt \leq M \int_T^\infty e^{-st} e^{ct} dt = M \int_T^\infty e^{-(s-c)t} dt = -M \frac{e^{-(s-c)t}}{s-c} \Big|_T^\infty = M \frac{e^{-(s-c)T}}{s-c} ; s > c$$

por tanto es acotada y la integral que define la transformada es convergente.

Estas condiciones son *suficientes* pero no *necesarias*.

Ejemplo 5.4. Existencia de la transformada.

La función: $f(t) = t^{-1/2}$ no es continua a trozos en $[0, \infty)$, sin embargo existe su transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

Teorema 5.2. Comportamiento de la Transformada de Laplace

Si f es continua a trozos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial para $t > T$, entonces:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}\{f(t)\} = 0$$

Demostración 5.2.

- Como $f(t)$ es continua en $[0, \infty) \Rightarrow f(t)$ acotada en $[0, \infty)$: $|f(t)| \leq M_1 = M_1 e^{0t}$
- Como $f(t)$ es de orden exponencial para $t > T$: $|f(t)| \leq M_2 e^{\gamma t} \quad \forall t > T$

Tomando $M = \max\{M_1, M_2\}$ y $c = \max\{0, \gamma\}$ tenemos:

$$|\mathcal{L}\{f(t)\}| \leq \int_0^\infty e^{-st} |f(t)| dt \leq M \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{ct} dt = -M \frac{e^{-(s-c)t}}{s-c} \Big|_0^\infty = \frac{M}{s-c}, \quad s > c$$

Tomando límites: $\lim_{s \rightarrow \infty} |\mathcal{L}\{f(t)\}| = 0 \Rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}\{f(t)\} = 0$

Ejemplo 5.5. Transformadas imposibles

Las siguientes funciones:

$$F_1(s) = 1 \quad ; \quad F_2(s) = \frac{s}{s+1}$$

no pueden ser transformadas de Laplace de ninguna función continua a trozos de orden exponencial, ya que no tienden a cero cuando $s \rightarrow \infty$.

5.3.5. Propiedades de la Transformada de Laplace

En las funciones complicadas no es práctico utilizar la definición de la transformada de Laplace para calcular la misma. Por ejemplo, la transformada de Laplace de funciones del tipo:

$$f(t) = e^t t^2 \sin 3t$$

requieren un esfuerzo importante a través de su definición.

Las propiedades de la transformada de Laplace permiten ahorrar trabajo en la determinación de transformadas de Laplace de funciones generales.

Aquí veremos las primeras propiedades:

- Linealidad
- Teoremas de Traslación
- Derivada e Integral de $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

Linealidad

Debido a las propiedades *lineales* de la integral:

$$\int_0^\infty e^{-st} [\alpha f(t) + \beta g(t)] dt = \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt + \beta \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt$$

Por tanto:

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}$$

Ejercicio 5.2. Calcular la transformada de Laplace del siguiente polinomio:

$$f(t) = 3t^2 - 2t + 5$$

Teniendo en cuenta la propiedad de linealidad y los valores de las transformadas de Laplace de funciones elementales (ver [Sección 5.3.3, página 151](#)) se tiene:

$$\mathcal{L}\{3t^2 - 2t + 5\} = 3\mathcal{L}\{t^2\} - 2\mathcal{L}\{t\} + 5\mathcal{L}\{1\} = 3\frac{2}{s^3} - 2\frac{1}{s^2} + 5\frac{1}{s} = \frac{6}{s^3} - \frac{2}{s^2} + \frac{5}{s}$$

Primer Teorema de Traslación: Traslación en el eje s

Teorema 5.3. Primer Teorema de Traslación: Traslación en el eje s

Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ y $a \in \mathbb{R}$ entonces:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

Nota 5.1. A veces se utiliza la nomenclatura: $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}|_{s \rightarrow s-a}$

Demostración 5.3.

Aplicando la definición:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t) dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{C.V.:} \\ w = s-a \end{array} \right\} = \\ &= \int_0^\infty e^{-wt} f(t) dt \stackrel{w \geq 0}{=} F(w) \stackrel{CV}{=} F(s-a), \quad s > a \end{aligned}$$

De forma resumida podemos expresar el *primer teorema de traslación* como:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a) \iff \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}|_{s \rightarrow s-a}, \quad a \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 5.3. Calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

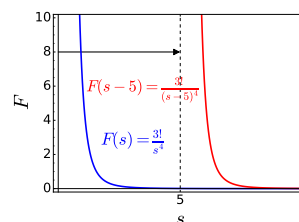
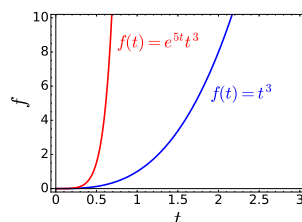
a) $f(t) = e^{5t}t^3$

b) $g(t) = e^{-2t} \sin 4t$

Teniendo en cuenta el primer teorema de traslación y los valores de las transformadas de Laplace de funciones elementales, se tiene:

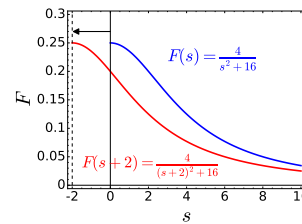
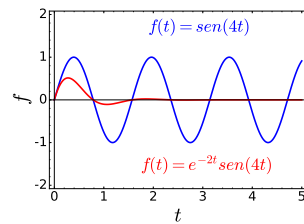
a)

$$\mathcal{L}\{e^{5t}t^3\} = \mathcal{L}\{t^3\}|_{s \rightarrow s-5} = \frac{3!}{s^4}|_{s \rightarrow s-5} = \frac{6}{(s-5)^4}, \quad s > 5$$



b)

$$\mathcal{L}\{e^{-2t} \operatorname{sen} 4t\} = \mathcal{L}\{\operatorname{sen} 4t\}|_{s \rightarrow s-(-2)} = \frac{4}{s^2 + 16} \Big|_{s \rightarrow s+2} = \frac{4}{(s+2)^2 + 16}, \quad s > -2$$



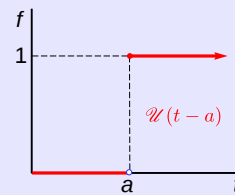
Segundo Teorema de Traslación: Traslación en el eje \$t\$

Con frecuencia se utilizan en la práctica funciones del tipo *encendido/apagado* (*on/off*), de forma que una señal de entrada se *activa* o *desactiva* después de un cierto tiempo. Para ello, suele ser útil definir una función que sea 0 (*apagado*) hasta un cierto tiempo $t = a$ a partir del cual vale 1 (*encendido*).

Definición 5.6. Función Escalón Unitario

La función **escalón unitario** o de **Heaviside** denotado¹⁵ por $\mathcal{U}(t-a)$ se define:

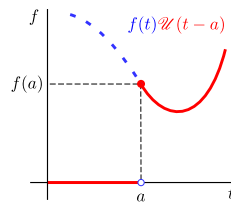
$$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < a \\ 1 & \text{si } t \geq a \end{cases}$$



Vamos a ver las propiedades de la *función escalón unitario*:

1. Para *desactivar* una determinada señal de entrada $f(t)$ hasta un tiempo $t < a$ y *activarla* a partir de $t = a$ se multiplica la función por la función escalón.

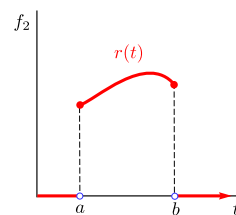
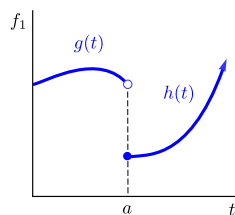
$$f(t) \mathcal{U}(t-a)$$



2. La *función escalón* puede utilizarse para describir funciones *definidas a trozos* generales de forma *compacta*:

$$f_1(t) = \begin{cases} g(t) & \text{si } 0 \leq t < a \\ h(t) & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < a \\ r(t) & \text{si } a \leq t < b \\ 0 & \text{si } t \geq b \end{cases}$$



$$f_1(t) = g(t) - g(t) \mathcal{U}(t-a) + h(t) \mathcal{U}(t-a)$$

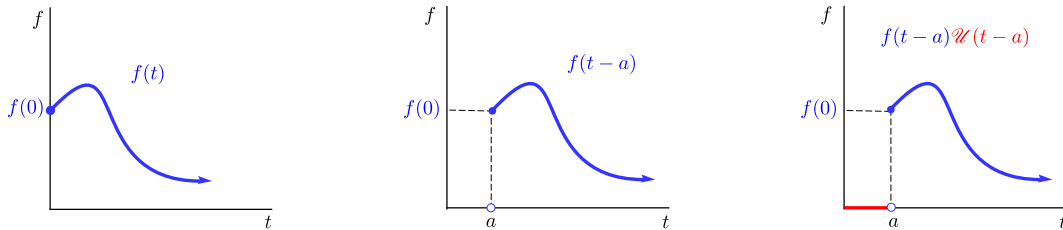
$$f_2(t) = r(t) [\mathcal{U}(t-a) - \mathcal{U}(t-b)]$$

¹⁵En algunos textos la función *escalón unitario* se denota por u_a y en otros por $H(t-a)$.

3. La *función escalón unitario* permite activar una función *desplazada*.

Sea una función general $f(t)$ definida para $t \geq 0$. La función $f(t-a)$ es la misma función $f(t)$ desplazada a unidades a la derecha. Sin embargo esta función no queda definida en el intervalo $[0, a)$. Esto puede arreglarse a través de la función escalón de la siguiente forma:

$$f(t-a)\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < a \\ f(t-a) & \text{si } t \geq a \end{cases}$$



Esta función desempeña un papel importante en el *segundo teorema de traslación*.

Teorema 5.4. Segundo Teorema de Traslación: Traslación en el eje t

Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ y $a > 0$ entonces:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as} F(s)$$

Demostración 5.4.

Aplicando la definición:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} &= \int_0^a e^{-st} f(t-a) \underbrace{\mathcal{U}(t-a)}_{\text{CERO } 0 \leq t < a} dt + \int_a^\infty e^{-st} f(t-a) \underbrace{\mathcal{U}(t-a)}_{\text{UNO } t \geq a} dt \\ &= \int_a^\infty e^{-st} f(t-a) dt \end{aligned}$$

Haciendo el C.V.: $v = t - a$; $dv = dt$

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-s(v+a)} f(v) dv = e^{-as} \int_0^\infty e^{-sv} f(v) dv = e^{-as} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Ejercicio 5.4. Calcular la transformada de Laplace de la siguiente función:

$$f(t) = \cos(t-5)\mathcal{U}(t-5)$$

Teniendo en cuenta que $F(s) = s/(s^2 + 1)$ se tiene:

$$\mathcal{L}\{\cos(t-5)\mathcal{U}(t-5)\} \xrightarrow{\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as} F(s)} \frac{se^{-5s}}{s^2 + 1}$$

La forma estándar del *segundo teorema de traslación* tiene sobre todo aplicaciones en el cálculo de *transformadas inversas*¹⁶:

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = f(t-a)\mathcal{U}(t-a)$$

¹⁶Ver la Sección 5.3.6, página 160.

Ejercicio 5.5. Calcular la transformada inversa de Laplace de la siguiente función:

$$F(s) = \frac{e^{-2s}}{s+3}$$

Teniendo en cuenta que $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s+3)\} = e^{-3t}$ se tiene:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s+3}\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}=f(t-a)\mathcal{U}(t-a)} e^{-3(t-2)}\mathcal{U}(t-2)$$

Teorema 5.5. Forma Alternativa del Segundo Teorema de Traslación

Con frecuencia la función f no tiene la forma deseada $f(t-a)$. En estos casos se puede hacer un cambio de variable: $u = t - a$.

$$\mathcal{L}\{f(t)\mathcal{U}(t-a)\} = \int_a^\infty e^{-st}f(t) dt = \int_0^\infty e^{-s(u+a)}f(u+a) du$$

Por tanto:

$$\mathcal{L}\{f(t)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-sa}\mathcal{L}\{f(t+a)\}$$

Ejercicio 5.6. Calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

a) $f(t) = \mathcal{U}(t-a)$

b) $g(t) = e^{2t}\mathcal{U}(t-1)$

c) $h(t) = e^{2(t-3)}\mathcal{U}(t+5)$

- a) Para calcular la transformada de Laplace de la función escalón podemos aplicar el segundo teorema de traslación¹⁷ para $f(t) = 1$, de forma que en este caso $f(t-a) = 1$ ya que al trasladar una función constante no varía dicha función, y teniendo en cuenta que $F(s) = 1/s$.

$$\mathcal{L}\{1\mathcal{U}(t-a)\} \xrightarrow{\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\}=e^{-as}F(s)} \frac{e^{-as}}{s}$$

- b) Aplicando la forma alternativa del segundo teorema de traslación¹⁸ y teniendo en cuenta que $\mathcal{L}\{e^{2t}\} = 1/(s-2)$, se tiene:

$$\mathcal{L}\{e^{2t}\mathcal{U}(t-1)\} \xrightarrow{\mathcal{L}\{f(t)\mathcal{U}(t-a)\}=e^{-sa}\mathcal{L}\{f(t+a)\}} e^{-s}\mathcal{L}\{e^{2(t+1)}\} = e^{-s}e^2\mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{e^{2-s}}{s-2}$$

- c) Primero tenemos que tener en cuenta que las funciones $f(t)$ que estamos considerando solo están definidas para¹⁹ $t > 0$, de forma que:

$$f(t)\mathcal{U}(t+a) = f(t)\mathcal{U}(t) = f(t) \quad , \quad a \geq 0$$

En nuestro caso:

$$h(t) = e^{2(t-3)}\mathcal{U}(t+5) = e^{2(t-3)}$$

Por tanto:

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{e^{2(t-3)}\} = e^{-6}\mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{e^6(s-2)}$$

¹⁷Ver el Teorema 5.4, página 156.

¹⁸Ver el Teorema 5.5, página 157.

¹⁹Ya que en la práctica t suele hacer referencia al tiempo.

Ejercicio 5.7. Calcular la transformada de Laplace de la siguiente función definida a trozos, utilizando el segundo teorema de traslación.

$$f(t) = \begin{cases} at + b & \text{si } 0 \leq t \leq \alpha \\ ce^{dt} & \text{si } t > \alpha \end{cases}$$

La transformada de esta función fue calculada, a través de la definición de transformada de Laplace, en el [Ejercicio 5.1, página 151](#). Entonces lo primero es expresar la función mediante la función escalón unitario. Hay varias formas:

$$f(t) = (at + b)[1 - \mathcal{U}(t - \alpha)] + ce^{dt}\mathcal{U}(t - \alpha) = (at + b) + [ce^{dt} - (at + b)]\mathcal{U}(t - \alpha)$$

Ahora tomamos transformada de Laplace teniendo en cuenta la linealidad de la transformada, la forma alternativa del segundo teorema de traslación y los valores de las transformadas de Laplace de funciones elementales. Tomamos por ejemplo la primera forma de $f(t)$ obtenida:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{at + b\} - \mathcal{L}\{(at + b)\mathcal{U}(t - \alpha)\} + \mathcal{L}\{ce^{dt}\mathcal{U}(t - \alpha)\} = \\ &= \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s} - e^{-\alpha s} \mathcal{L}\{a(t + \alpha) + b\} + e^{-\alpha s} \mathcal{L}\{ce^{d(t+\alpha)}\} = \\ &= \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s} - e^{-\alpha s} \mathcal{L}\{at + (a\alpha + b)\} + e^{-\alpha s} ce^{d\alpha} \mathcal{L}\{e^{dt}\} = \\ &= \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s} - e^{-\alpha s} \left[\frac{a}{s^2} + \frac{a\alpha + b}{s} \right] + ce^{\alpha(d-s)} \frac{1}{s-d} \end{aligned}$$

Reordenando se obtiene la misma solución del problema anterior.

$$F(s) = \frac{b - (a\alpha + b)e^{-s\alpha}}{s} + \frac{a(1 - e^{-s\alpha})}{s^2} + \frac{ce^{(d-s)\alpha}}{s-d}, \quad s > d$$

Derivada de una Transformada de Laplace

Interesa conocer si la derivada con respecto a s de una transformada $F(s)$ corresponde a la transformada de alguna función particular $f(t)$.

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} [e^{-st} f(t)] dt = - \int_0^\infty e^{-st} t f(t) dt = -\mathcal{L}\{t f(t)\}$$

Por tanto:

$$\mathcal{L}\{t f(t)\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

De igual forma:

$$\mathcal{L}\{t^2 f(t)\} = \mathcal{L}\{t \cdot t f(t)\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{t f(t)\} = \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}\{f(t)\} \implies \mathcal{L}\{t^2 f(t)\} = \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Y para la tercera derivada:

$$\mathcal{L}\{t^3 f(t)\} = \mathcal{L}\{t \cdot t^2 f(t)\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{t^2 f(t)\} = -\frac{d^3}{ds^3} \mathcal{L}\{f(t)\} \implies \mathcal{L}\{t^3 f(t)\} = -\frac{d^3}{ds^3} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Generalizando a la derivada n -ésima se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 5.6. Derivada de una Transformada

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

;

$$f(t) = \frac{(-1)^n}{t^n} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}\{f(t)\} \right\}$$

Ejercicio 5.8. Calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

$$a) f(t) = t \operatorname{sen} kt$$

$$b) g(t) = t^2 e^{-3t}$$

a) Aplicando la propiedad de la derivada de una transformada²⁰:

$$\mathcal{L}\{t \operatorname{sen} kt\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{\operatorname{sen} kt\} = -\frac{d}{ds} \left[\frac{k}{s^2 + k^2} \right] = \boxed{\frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}}$$

b) Teniendo en cuenta: $\mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \frac{1}{s+3}$

$$\mathcal{L}\{t^2 e^{-3t}\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \frac{d}{ds} \left[\frac{d}{ds} \frac{1}{s+3} \right] = \frac{d}{ds} \frac{-1}{(s+3)^2} = \boxed{\frac{2}{(s+3)^3}}$$

Ejercicio 5.9. Calcular la transformada de Laplace de la siguiente función:

$$f(t) = t^n e^{at}$$

Podemos resolverlo de dos formas:

- Forma 1: Aplicando el primer teorema de traslación²¹:

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at} t^n\} = \mathcal{L}\{t^n\}_{s \rightarrow s-a} = \frac{n!}{s^{n+1}} \Big|_{s \rightarrow s-a} = \boxed{\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}}$$

- Forma 2: Aplicando la derivada de la transformada:

$$\boxed{\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}\{f(t)\}}$$

$$\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}\{e^{at}\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \left[\frac{1}{s-a} \right] = (-1)^n \frac{(-1)^n n!}{(s-a)^{n+1}} = \boxed{\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}}$$

Ejercicio 5.10. Calcular la transformada inversa de Laplace de la siguiente función:

$$F(s) = \log \left(\frac{s-1}{s+1} \right)$$

Aplicando el teorema de la derivada de la transformada:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \log \left(\frac{s-1}{s+1} \right) \right\} = -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{d}{ds} \log \left(\frac{s-1}{s+1} \right) \right\} = -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} \right\} = \boxed{-\frac{e^t - e^{-t}}{t}}$$

²⁰Ver el Teorema 5.6, página 158.

²¹Ver el Teorema 5.3, página 154.

Integral de una Transformada de Laplace

Teorema 5.7. Integral de una Transformada

Si el siguiente límite existe y es finito:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} \implies \mathcal{L} \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\} = \int_s^\infty F(r) dr$$

Demostración 5.7.

Llamando $G(s) = \mathcal{L} \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\}$, y aplicando la derivada de una transformada se tiene:

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L} \{f(t)\} = -\mathcal{L} \{tf(t)\} \implies \frac{d}{ds} G(s) = -\mathcal{L} \left\{ t \frac{f(t)}{t} \right\} = \mathcal{L} \{f(t)\} = -F(s)$$

Integrando con respecto a s : $\int_{s_1}^{s_2} \frac{d}{ds} G(s) ds = G(s_2) - G(s_1) = -\int_{s_1}^{s_2} F(r) dr = \int_{s_2}^{s_1} F(r) dr$

Finalmente haciendo $s_1 \rightarrow \infty$ y teniendo en cuenta $\lim_{s_1 \rightarrow \infty} G(s_1) = 0$: $\mathcal{L} \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\} = \int_s^\infty F(r) dr$

Ejercicio 5.11. Calcular la transformada de Laplace de la siguiente función:

$$f(t) = \frac{\sin 2t}{t}$$

Para poder aplicar el teorema de la integral de una transformada debemos comprobar primeramente el siguiente límite:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{t} \stackrel{H}{=} \frac{2 \cos 2t}{1} = 2$$

Como existe y es finito, aplicamos el teorema:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\sin 2t}{t} \right\} \xrightarrow{\mathcal{L}\{f(t)/t\} = \int_s^\infty F(r) dr} \int_s^\infty \mathcal{L} \{ \sin 2t \} dr = \int_s^\infty \frac{2}{r^2 + 4} dr = \arctan \frac{r}{2} \Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{s}{2}$$

5.3.6. Transformadas Inversa de Laplace

Definición 5.7. Transformada Inversa de Laplace

Se dice que $f(t)$ es la **transformada inversa de Laplace**,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{F(s)\}$$

si $\mathcal{L} \{f(t)\} = F(s)$ es la *transformada de Laplace* de la función $f(t)$,

$$\mathcal{L} \{f(t)\} = F(s) \iff f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{F(s)\}$$

Resumen: Propiedades de $\mathcal{L}\{f(t)\}$

PROPIEDAD	EXPRESIÓN
Linealidad	$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}$
1 ^{er} T. Traslación	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
2 ^o T. Traslación (1)	$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}$
2 ^o T. Traslación (2)	$\mathcal{L}\{f(t)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-sa}\mathcal{L}\{f(t+a)\}$
Derivada de la Transformada	$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}\{f(t)\}$
Integral de la Transformada	$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(r) dr$

PROPIEDADES DE $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	
PROPIEDAD	EXPRESIÓN
Linealidad	$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$
1 ^{er} T. Traslación	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s) _{s \rightarrow s-a}\} = e^{at}f(t)$
2 ^o T. Traslación (1)	$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)\mathcal{U}(t-a)$
2 ^o T. Traslación (2)	$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-sa}\mathcal{L}\{f(t+a)\}\} = f(t)\mathcal{U}(t-a)$
Derivada de la Transformada	$\mathcal{L}^{-1}\left\{(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}\{f(t)\}\right\} = t^n f(t)$
Integral de la Transformada	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty F(r) dr\right\} = \frac{f(t)}{t}$

Ejemplo 5.6. Ejemplos de cálculo de transformadas inversas de Laplace.

- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^3}\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}\{t^n\}=n!/(s^{n+1})} \boxed{\frac{3t^2}{2}}$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-6}\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}\{e^{at}\}=1/(s-a)} \boxed{2e^{6t}}$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+7}\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}\{\sin at\}=a/(s^2+a^2)} \boxed{\frac{1}{\sqrt{7}} \sin t\sqrt{7}}$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2-2s+5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}\{e^{at} \cos bt\}=(s-a)/[(s-a)^2+b^2]} \boxed{e^t \cos 2t}$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{2s^2+8s+10}\right\} = \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s+5}\right\} = \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\}$
 $\xrightarrow{\mathcal{L}\{e^{at} \sin bt\}=b/[(s-a)^2+b^2]} \boxed{\frac{3}{2}e^{-t} \sin t}$

Tablas de Transformadas Inversas de Laplace

En la siguiente tabla se muestran algunas importantes transformadas inversas de Laplace.

TABLA DE TRANSFORMADAS INVERSAS DE LAPLACE			
$F(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$	$F(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$
$\frac{1}{s}$	1	$\frac{k}{s}$	k
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n , $n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$, $a \in (-1, \infty)$	t^a
$\frac{\pi}{2s^{1/2}}$	$\sqrt{t}$	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+1/2}}$	$t^{n-1/2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$
$\frac{1}{s-a}$, $s > a$	e^{at}	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$, $s > a$	$e^{at} t^n$
$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$
$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\text{sen } at$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$	$e^{at} \text{sen } bt$
$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$	$e^{at} \cos bt$
$\frac{s \text{sen}(b) + a \cos(b)}{s^2 + a^2}$	$\text{sen}(at + b)$	$\frac{s \cos(b) - a \text{sen}(b)}{s^2 + a^2}$	$\cos(at + b)$
$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\sinh at$	$\frac{b}{(s-a)^2 - b^2}$	$e^{at} \sinh bt$
$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh at$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 - b^2}$	$e^{at} \cosh bt$
$\frac{2as}{[s^2 + a^2]^2}$	$t \text{sen } at$	$\frac{2\beta(s-\alpha)}{[(s-\alpha)^2 + \beta^2]^2}$	$e^{\alpha t} t \text{sen } \beta t$
$\frac{s^2 - a^2}{[s^2 + a^2]^2}$	$t \cos at$	$\frac{(s-\alpha)^2 - \beta^2}{[(s-\alpha)^2 + \beta^2]^2}$	$e^{\alpha t} t \cos \beta t$
$\frac{2a^3}{[s^2 + a^2]^2}$	$\text{sen } at - at \cos at$	$\frac{2\beta^3}{[(s-\alpha)^2 + \beta^2]^2}$	$e^{\alpha t}(\text{sen } \beta t - \beta t \cos \beta t)$

Tabla 5.1: Transformadas inversas de Laplace de algunas funciones sencillas.

5.3.7. Transformada de la Derivada e Integral

En las secciones anteriores²² se estudió la *derivada e integral de una transformada de Laplace*. Ahora vamos a estudiar algo distinto, la *transformada de la derivada e integral* de una función.

Transformada de la Derivada de una Función

Sea una función continua $f(t)$ con derivada $\frac{df}{dt} = f'(t)$ continua a trozos, y ambas de orden exponencial para $t \geq 0$. Entonces:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

Por otra parte si $f(t)$ y $f'(t)$ son continuas y $\frac{d^2f}{dt^2} = f''(t)$ continua a trozos y todas de orden exponencial para $t \geq 0$, entonces:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

y de igual forma:

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s\mathcal{L}\{f''(t)\} - f''(0) = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

Generalizando se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 5.8. Transformada de la Derivada de una Función

Si $f(t)$, $f'(t)$, $\dots$, $f^{(n-1)}(t)$ son continuas y $f^{(n)}(t)$ continua a trozos, y todas de orden exponencial para $t \geq 0$, entonces:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i} f^{(i)}(0) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Este resultado complementa a la *derivada de una transformada*, vista anteriormente²³:

Transformada de una Derivada : $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$

$$f'(t) = \mathcal{L}^{-1}\{sF(s) - f(0)\}$$

Derivada de una Transformada : $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}$

$$tf(t) = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}\right\}$$

Ejercicio 5.12. Encontrar la transformada de Laplace de la función $y(t)$, sabiendo que cumple la siguiente EDO:

$$y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = 0$$

Empezamos tomando transformadas de Laplace a ambas partes de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{y'' + 2y' - 3y\} = \mathcal{L}\{0\} \quad ; \quad \mathcal{L}\{y''\} + 2\mathcal{L}\{y'\} - 3\mathcal{L}\{y\} = 0$$

Ahora denominando $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ y aplicando el teorema de la transformada de la derivada a cada término tenemos:

$$[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 2[sY(s) - y(0)] - 3Y(s) = 0$$

²²Ver la Sección 5.3.5, página 158 y 160.

²³Ver la Sección 5.3.5, página 158.

donde $y(0)$ e $y'(0)$ son los valores de la función $y(t)$ y su derivada en $t = 0$. Por último, sacando factor común a $Y(s)$ y despejando obtenemos:

$$(s^2 + 2s - 3)Y(s) = y(0)(s + 2) + y'(0)$$

Despejando y teniendo en cuenta las condiciones iniciales se tiene:

$$Y(s) = \frac{y(0)(s + 2) + y'(0)}{s^2 + 2s - 3}$$

En la [Sección 5.5, página 167](#) veremos la aplicación del [Teorema 5.8, página 163](#) en la resolución de un PVI²⁴.

Transformada de la Integral de una Función

Si en el teorema de la convolución:

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)g(\tau - t) d\tau\right\} = F(s)G(s)$$

se considera el caso:

$$g(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} g(t - \tau) = 1 \\ G(s) = \mathcal{L}^{-1}\{1\} = \frac{1}{s} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Teorema 5.9. Transformada de la Integral de una Función

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

La transformada de la integral de $f(t)$, complementa a la *integral de una transformada*, vista anteriormente²⁵:

Transformada de una Integral :	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$	$\int_0^t f(\tau) d\tau = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\}$
Integral de una Transformada :	$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(r) dr$	$\frac{f(t)}{t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty F(r) dr\right\}$

Ejercicio 5.13. Calcular la transformada inversa de la función:

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4)}$$

Este ejercicio se puede resolver mediante el método de descomposición en fracciones simples (ver la [Sección 5.4, página 165](#)), sin embargo lo vamos a resolver aquí aplicando el teorema de la transformada de una integral.

$$\frac{F(s)}{s} = \frac{1}{s(s^2 + 4)} \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{s^2 + 4}$$

²⁴Ver la [Definición 1.17, página 15](#).

²⁵Ver la [Sección 5.3.5, página 160](#).

Aplicando el teorema de la transformada de la integral:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\} &= \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \int_0^t \frac{1}{2} \sin 2r \, dr = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos 2r\right]_0^t = \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{2}\right] = \boxed{\frac{1}{4}(1 - \cos 2t)}\end{aligned}$$

5.4. Método de Descomposición en Fracciones Simples

Vamos a ver un método para calcular *transformadas inversas de Laplace* de transformadas racionales de la forma:

$$F(s) = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)}$$

donde $P_m(s)$ y $Q_n(s)$ son polinomios en s de órdenes m y n respectivamente, siendo $m < n$.

En estos casos la *transformada inversa* podrá calcularse fácilmente si descomponemos el cociente en una suma de fracciones racionales simples obtenidas a partir de las raíces del polinomio denominador $Q_m(s)$.

$$\frac{P_m(s)}{Q_n(s)} = \frac{A_1}{s-r_1} + \frac{A_2}{s-r_2} + \cdots + \frac{B_1}{s-r} + \frac{B_2}{(s-r)^2} + \cdots + \frac{C_1s+D_1}{(s-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{C_2s+D_2}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2} + \cdots$$

donde r_i son las raíces reales simples, r son las raíces reales múltiples y $\alpha \pm i\beta$ son las raíces complejas de $Q_m(s)$. Las transformadas inversas de estos tipos de fracciones se pueden obtener de la siguiente forma:

- $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s-r}\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}\{e^{at}\}=1/(s-a)} Ae^{rt}$$
- $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{(s-r)^n}\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}\{e^{at}t^n\}=n!/(s-a)^{n+1}} \frac{A}{(n-1)!} e^{rt} t^{n-1}$$
- $$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Cs+D}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Cs+D-C\alpha+C\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C(s-\alpha)+\beta\frac{D+C\alpha}{\beta}}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\right\} = \\ &= C\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\right\} + \left(\frac{D+C\alpha}{\beta}\right)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\right\} \xrightarrow[\mathcal{L}\{e^{at}\sin bt\}=b/[(s-a)^2+b^2]]{\mathcal{L}\{e^{at}\cos bt\}=(s-a)/[(s-a)^2+b^2]} \\ &= Ce^{at}\cos \beta t + \left(\frac{D+C\alpha}{\beta}\right)e^{at}\sin \beta t = e^{at}\left[C\cos \beta t + \left(\frac{D+C\alpha}{\beta}\right)\sin \beta t\right]\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Cs+D}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\right\} = e^{at}\left[C\cos \beta t + \left(\frac{D+C\alpha}{\beta}\right)\sin \beta t\right]}$$
- $$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Cs+D}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Cs+D-C\alpha+C\alpha}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C(s-\alpha)+\beta^3\frac{D+C\alpha}{\beta^3}}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}\right\} = \\ &= C\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-\alpha}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}\right\} + \left(\frac{D+C\alpha}{\beta^3}\right)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\beta^3}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}\right\} \\ &\xrightarrow[\mathcal{L}\{e^{at}(\sin bt - bt\cos bt)\}=2b^3/[(s-a)^2+b^2]^2]{\mathcal{L}\{e^{at}t\sin bt\}=2b(s-a)/[(s-a)^2+b^2]^2} \frac{C}{2\beta}e^{at}t\sin \beta t + \left(\frac{D+C\alpha}{2\beta^3}\right)e^{at}(\sin \beta t - \beta t\cos \beta t) = \\ &= e^{at}\left[\frac{C}{2\beta}t\sin \beta t + \left(\frac{D+C\alpha}{2\beta^3}\right)(\sin \beta t - \beta t\cos \beta t)\right]\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Cs+D}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}\right\} = e^{at}\left[\frac{C}{2\beta}t\sin \beta t + \left(\frac{D+C\alpha}{2\beta^3}\right)(\sin \beta t - \beta t\cos \beta t)\right]}$$

Tabla Resumen

TRANSFORMADAS INVERSAS RACIONALES	
$F(s)$	$f(t)$
$\frac{A}{s-r}$	$A e^{rt}$
$\frac{A}{(s-r)^n}$	$\frac{A}{(n-1)!} t^{n-1} e^{rt}$
$\frac{As+B}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$	$e^{\alpha t} \left[A \cos \beta t + \left(\frac{A\alpha+B}{\beta} \right) \sin \beta t \right]$
$\frac{As+B}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}$	$e^{\alpha t} \left[\frac{A}{2\beta} t \sin \beta t + \left(\frac{A\alpha+B}{2\beta^3} \right) (\sin \beta t - \beta t \cos \beta t) \right]$

Ejercicio 5.14. Encontrar la transformada inversa de la siguiente función.

$$F(s) = \frac{s^2 - 5s + 6}{s^4 - 3s^3 - 3s^2 + 11s - 6}$$

Primero factorizamos los polinomios del numerador y denominador:

$$F(s) = \frac{s^2 - 5s + 6}{s^4 - 3s^3 - 3s^2 + 11s - 6} = \frac{(s-2)(s-3)}{(s-1)^2(s+2)(s-3)} = \frac{(s-2)}{(s-1)^2(s+2)}$$

Lo descomponemos en fracciones sencillas:

$$F(s) = \frac{s-2}{(s-1)^2(s+2)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

y determinamos las constantes:

$$s-2 = A(s-1)^2 + B(s-1)(s+2) + C(s+2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s=1 & \rightarrow -1=3C & \Rightarrow C=-1/3 \\ s=-2 & \rightarrow -4=9A & \Rightarrow A=-4/9 \\ s=0 & \rightarrow -2=A-2B+2C & \Rightarrow B=(-4/9-2/3+2)/2=4/9 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-4/9}{s+2} + \frac{4/9}{s-1} + \frac{-1/3}{(s-1)^2}\right\} = \\ &= -\frac{4}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \frac{4}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} = \boxed{-\frac{4}{9}e^{-2t} + \frac{4}{9}e^t - \frac{1}{3}te^t} \end{aligned}$$

5.5. Transformada de Laplace y EDO

Una de las mayores aplicaciones de la *transformada de Laplace* es la resolución de *ecuaciones diferenciales*. Aquí vamos a ver su utilización para la resolución de EDO²⁶ y de sistemas de EDO (SEDO).

5.5.1. PVI de EDOC

La transformada de Laplace es un buen método para resolver PVI²⁷ de EDO lineales de orden n con coeficientes constante²⁸ (EDOC) de la forma²⁹:

$$\begin{cases} a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x) \\ y(0) = y_0, y'(0) = y_1, y''(0) = y_2, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Procedimiento

1. Tomando transformadas de Laplace a ambas partes de la igualdad en la EDO:

$$\mathcal{L} \{ a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y \} = \mathcal{L} \{ f(x) \}$$

Ahora aplicamos el *teorema de la transformada de la derivada*³⁰ a cada término:

$$\begin{aligned} a_n \left[s^n Y(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} y^{(i-1)}(0) \right] + a_{n-1} \left[s^{n-1} Y(s) - \sum_{i=1}^{n-1} s^{n-1-i} y^{(i-1)}(0) \right] + \\ + \dots + a_1 [sY(s) - y(0)] + a_0 Y(s) = F(s) \end{aligned}$$

Donde $Y(s) = \mathcal{L}^{-1} \{ y(t) \}$ y $F(s) = \mathcal{L}^{-1} \{ f(t) \}$.

2. Reagrupando términos:

$$A(s)Y(s) - B(s) = F(s)$$

siendo:

- $A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$
- $B(s)$ es la expresión restante donde aparecen las condiciones iniciales.

Por tanto despejando:

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} + \frac{F(s)}{A(s)}$$

3. La solución del PVI será la transformada inversa de la Laplace de esta expresión:

$$\mathcal{L}^{-1} \{ Y(s) \} = y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{B(s)}{A(s)} + \frac{F(s)}{A(s)} \right\}$$

La transformada de Laplace convierte las **ecuaciones diferenciales** en **ecuaciones algebraicas**.

²⁶Ver la Sección 1.2.3, página 7.

²⁷Ver la Definición 1.17, página 15.

²⁸Ver la Definición 3.7, página 65.

²⁹Notar que el valor inicial debe ser $t = 0$. Si es otro valor es necesario hacer un cambio de variable apropiado.

³⁰Ver el Teorema 5.8, página 163.

Ejercicio 5.15. Resolver el siguiente PVI utilizando la transformada de Laplace.

$$\begin{cases} y''(t) + 3y'(t) - 4y(t) = 0 \\ y(0) = 3 \quad ; \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Empezamos tomando transformadas de Laplace a ambas partes de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{y'' + 3y' - 4y\} = \mathcal{L}\{0\} \quad ; \quad \mathcal{L}\{y''\} + 3\mathcal{L}\{y'\} - 4\mathcal{L}\{y\} = 0$$

Ahora aplicamos el teorema de la transformada de una derivada³¹ a cada término:

$$[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 3[sY(s) - y(0)] - 4Y(s) = 0 \quad ; \quad (s^2 + 3s - 4)Y(s) = y(0)(s + 3) + y'(0)$$

Despejando y teniendo en cuenta las condiciones iniciales del problema se tiene:

$$Y(s) = \frac{y(0)(s + 3) + y'(0)}{s^2 + 3s - 4} = \frac{3s + 10}{s^2 + 3s - 4} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s + 10}{s^2 + 3s - 4}\right\}$$

Aplicando ahora el método de descomposición en fracciones simples³²:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s + 10}{s^2 + 3s - 4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s + 10}{(s - 1)(s + 4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{13/5}{s - 1} + \frac{2/5}{s + 4}\right\}$$

Calculando esta transformadas inversas se obtiene la solución final del PVI:

$$y(t) = \frac{13}{5}e^t + \frac{2}{5}e^{-4t}$$

5.5.2. EDOL con Coeficientes Polinómicos

La transformada de Laplace se puede utilizar también para resolver algunos tipos de PVI de EDO lineales de orden n cuyos coeficientes son *polinomios* en t de la forma:

$$P_n(t)y^{(n)} + P_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + P_1(t)y' + P_0(t)y = f(t)$$

Estos problemas se pueden resolver teniendo en cuenta la derivada de una transformada³³:

$$\mathcal{L}\{t^n y^{(n)}\} = (-1)^n \frac{d}{ds} \mathcal{L}\{y^{(n)}\} = (-1)^n \frac{d}{ds} \left[s^n Y(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} y^{(i-1)}(0) \right]$$

De esta forma se obtiene una EDO lineal en $Y(s)$ de primer orden, siempre que los polinomios sean de grado 1 en t .

Nota 5.2. El problema más complicado puede resultar en la obtención de la transformadas inversas resultantes del procedimiento.

Ejercicio 5.16. Resolver el siguiente PVI utilizando la transformada de Laplace.

$$\begin{cases} ty'(t) + y(t) = a + t^2 \\ y(0) = a \end{cases} \quad ; \quad a \in \mathbb{R}$$

Tomamos transformadas de Laplace a ambas partes de la EDO:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{ty' + y\} &= \mathcal{L}\{a + t^2\} \quad ; \quad -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{y'\} + Y(s) = \frac{a}{s} + \frac{2}{s^3} \\ -\frac{d}{ds}[sY(s) - y(0)] + Y(s) &= \frac{a}{s} + \frac{2}{s^3} \quad ; \quad -Y(s) - sY'(s) + Y(s) = \frac{a}{s} + \frac{2}{s^3} \end{aligned}$$

³¹Ver el Teorema 5.8, página 163.

³²Ver la Sección 5.4, página 165.

³³Ver el Teorema 5.6, página 158.

$$Y'(s) = -\frac{a}{s^2} - \frac{2}{s^4} \implies Y(s) = \int \left(-\frac{a}{s^2} - \frac{2}{s^4} \right) ds = \frac{a}{s} + \frac{2}{3s^3} + c$$

La constante de integración c tiene que ser cero para que cumpla la propiedad $\lim_{s \rightarrow \infty} Y(s) = 0$. Obteniendo la transformadas inversas se obtiene la solución final.

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = a + \frac{x^2}{3} \quad ; \quad \boxed{y(t) = a + \frac{x^2}{3}}$$

5.5.3. Sistemas de EDO Lineales de Orden n

La transformada de Laplace también se puede utilizar para reducir ciertos sistemas de EDO lineales (SEDOL) con *condiciones iniciales*, a un sistema de ecuaciones algebraicas lineales, siendo las incógnitas las *transformadas* de las funciones.

Veamos un par de ejemplos del uso de esta técnica.

Ejercicio 5.17. Resolver el siguiente SEDOL utilizando transformadas de Laplace.

$$\begin{cases} x' - 2y &= 4t & ; & x(0) = 4 \\ y' + 2y - 4x &= -4t - 2 & ; & y(0) = -5 \end{cases}$$

Tomando transformadas a ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x' - 2y\} &= \mathcal{L}\{4t\} & ; & \quad sX - x(0) - 2Y = \frac{4}{s^2} \\ \mathcal{L}\{y' + 2y - 4x\} &= \mathcal{L}\{-4t - 2\} & ; & \quad sY + y(0) + 2Y - 4X = -\frac{4}{s^2} - \frac{2}{s} \end{aligned}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} sX - 2Y = \frac{4}{s^2} + 4 \\ -4X + (s+2)Y = -\frac{4}{s^2} - \frac{2}{s} + 5 \end{cases}$$

De esta forma, el SEDOL se ha transformado en un sistema de ecuaciones lineales, donde las incógnitas en este caso son X e Y . Este sistema se puede resolver por cualquier método apropiado a este tipo de sistemas. Por ejemplo, aquí lo vamos a resolver por el método de reducción, de forma que multiplicando la primera ecuación por $(s+2)$, la segunda por 2 y sumando, se tiene:

$$X = \frac{4s-2}{(s+4)(s-2)} = \frac{3}{s+4} + \frac{1}{s-2} \quad \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}\{\}} \quad \boxed{x(t) = 3e^{-4t} + e^{2t}}$$

Ahora para calcular $y(t)$ se puede despejar de la primera ecuación y sustituir en términos de $x(t)$:

$$y(t) = \frac{1}{2}x'(t) - 2t = -6e^{-4t} + e^{2t} - 2t \quad ; \quad \boxed{y(t) = -6e^{-4t} + e^{2t} - 2t}$$

De forma general, suele resultar más apropiado aplicar el método de Cramer en la resolución del sistema, como se puede ver en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 5.18. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 3\frac{dy}{dt} = -6x - 2y & ; \quad x(0) = 2 \\ \frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} = -5x - 3y & ; \quad y(0) = 4 \end{cases}$$

Reordenamos el sistema y tomamos transformadas de Laplace a ambos lados de las ecuaciones:

$$\begin{cases} x' + 6x + 3y' + 2y = 0 \\ x' + 5x + 2y' + 3y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} sX(s) - x(0) + 6X(s) + 3sY(s) - 3y(0) + 2Y(s) = 0 \\ sX(s) - x(0) + 5X(s) + 2sY(s) - 2y(0) + 3Y(s) = 0 \end{cases}$$

Simplificando:

$$\begin{cases} (s+6)X(s) + (3s+2)Y(s) = 14 \\ (s+5)X(s) + (2s+3)Y(s) = 10 \end{cases}$$

se obtiene un sistema de ecuaciones lineales donde las incógnitas son $X(s)$ e $Y(s)$. Aplicamos la regla de Cramer para resolver el sistema:

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} 14 & 3s+2 \\ 10 & 2s+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+6 & 3s+2 \\ s+5 & 2s+3 \end{vmatrix}} = \frac{-2s+22}{-s^2-2s+8} = \frac{2s-22}{(s+4)(s-2)}$$

$$Y(s) = \frac{\begin{vmatrix} s+6 & 14 \\ s+5 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+6 & 3s+2 \\ s+5 & 2s+3 \end{vmatrix}} = \frac{-4s-10}{-s^2-2s+8} = \frac{4s+10}{(s+4)(s-2)}$$

Descomponemos en fracciones simples y tomamos transformadas inversas de Laplace:

$$X(s) = \frac{5}{s+4} - \frac{3}{s-2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}\{\}} \boxed{x(t) = 5e^{-4t} + 3e^{2t}}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+4} + \frac{3}{s-2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}\{\}} \boxed{y(t) = e^{-4t} + 3e^{2t}}$$

5.5.4. Ecuaciones Integrales e Integrodiferenciales

Los teoremas de las transformadas de una derivada y de una integral se pueden utilizar para resolver ecuaciones integrales y ecuaciones integrodiferenciales como las mostradas en los siguientes ejercicios.

Ejercicio 5.19. Resolver el siguiente ecuación integral:

$$f(t) + \int_0^t f(r) dr = 2$$

Tomamos transformadas de Laplace a ambas partes de la ecuación y teniendo en cuenta el teorema de la transformada de una integral se tiene:

$$\mathcal{L}\{f\} + \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(r) dr\right\} = \mathcal{L}\{2\} \implies F(s) + \frac{F(s)}{s} = \frac{2}{s} \quad ; \quad F(s) = \frac{2}{s+1}$$

Tomando transformadas inversas:

$$\boxed{f(t) = 2e^{-t}}$$

Ejercicio 5.20. Resolver el siguiente PVI de una ecuación integrodiferencial:

$$\begin{cases} y' + 6y + 9 \int_0^t y(r) dr = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Tomamos transformadas de Laplace y aplicamos los teoremas de la transformada de una derivada y de una integral.

$$\mathcal{L}\{y'\} + 6\mathcal{L}\{y\} + 9\mathcal{L}\left\{\int_0^t y(r) dr\right\} = \mathcal{L}\{1\} \implies [sY(s) - y(0)] + 6Y(s) + 9\frac{Y(s)}{s} = \frac{1}{s}$$

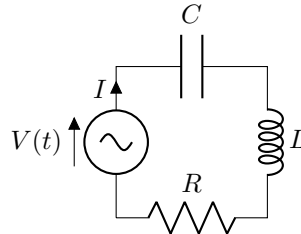
$$Y(s) \left(s + 6 + \frac{9}{s}\right) = \frac{1}{s} \quad ; \quad Y(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 9} = \frac{1}{(s+3)^2}$$

Tomando transformadas inversas:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^2}\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}\{e^{at}t^n\} = n!/(s-a)^{n+1}} te^{-3t} \quad ; \quad \boxed{y(t) = te^{-3t}}$$

Un ejemplo típico es el estudio de un circuito RLC³⁴ en serie, que puede ser descrito por la siguiente ecuación integro-diferencial:

$$L \frac{di}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = E(t)$$



donde:

- E : fuerza electromotriz de un generador, en voltios (V);
- L : inductancia de la bobina, en henrios (H);
- i : intensidad de corriente eléctrica, en amperios (A);
- C : capacidad eléctrica del condensador, en faradios (F);
- R : resistencia del circuito, en ohmios (Ω);
- t : tiempo en segundos (s)

Ejercicio 5.21. Determinar la corriente $i(t)$ en un circuito RCL en serie de un sola malla cuando $L = 0.1H$, $R = 2\Omega$, $C = 0.1F$ y el voltaje aplicado es:

$$E(t) = 4 \sin(5t)$$

teniendo en cuenta que $i(0) = 0$.

En este caso tenemos que resolver el siguiente PVI:

$$\begin{cases} 0.1 \frac{di}{dt} + 2i(t) + \frac{1}{0.1} \int_0^t i(r) dr = 4 \sin(5t) \\ i(0) = 0 \end{cases}$$

Tomando transformadas de Laplace y aplicando los teoremas de la transformada de una derivada y de una integral se tiene:

$$\mathcal{L}\left\{0.1 \frac{di}{dt}\right\} + \mathcal{L}\{2i(t)\} + \mathcal{L}\left\{\frac{1}{0.1} \int_0^t i(r) dr\right\} = \mathcal{L}\{4 \sin(5t)\}$$

³⁴Contiene una resistencia eléctrica R , una bobina (inductancia) L y un condensador (capacitancia) C .

$$[0.1sI(s) - i(0)] + 2I(s) + \frac{1}{0.1} \frac{I(s)}{s} = 4 \frac{5}{s^2 + 25} \quad ; \quad I(s) \left(0.1s + 2 + \frac{1}{0.1s} \right) = \frac{20}{s^2 + 25}$$

$$I(s) = \frac{2s}{(s^2 + 25)(0.01s^2 + 0.2s + 1)} = \frac{200s}{(s^2 + 25)(s + 10)^2} = \frac{As + B}{s^2 + 25} + \frac{C}{s + 10} + \frac{D}{(s + 10)^2}$$

Encontrando los coeficientes :

$$I(s) = \frac{8}{25} \frac{3s + 20}{s^2 + 25} - \frac{24}{25} \frac{1}{s + 10} - \frac{16}{(s + 10)^2}$$

Tomando transformadas inversas y teniendo en cuenta las fórmulas de la [Sección 5.4, página 165](#), se tiene:

$$\mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = i(t) = \frac{8}{25} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s + 20}{s^2 + 25}\right\} - \frac{24}{25} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 10}\right\} + 16 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + 10)^2}\right\}$$

$$i(t) = \frac{8}{25}(3 \cos 5t + 4 \sin 5t) - \frac{24}{25}e^{-10t} - 16te^{-10t}$$

De la solución observamos que la intensidad de salida tiene un transitorio inicial, consecuencia de las exponenciales negativas que rápidamente se estabiliza en el comportamiento estacionario dado por el término trigonométrico.

5.5.5. Transformada de un Producto: Convolución

La transformada de un producto de funciones **no** es el producto de las transformadas, ya que:

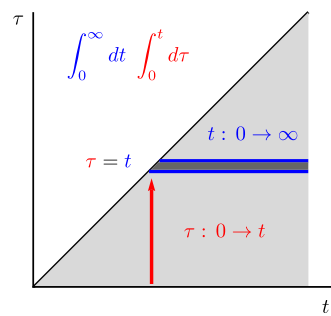
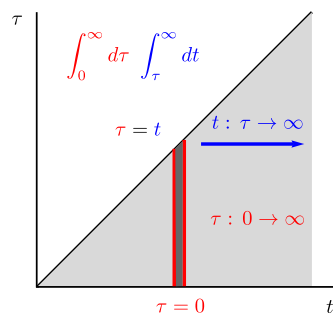
$$F(s)G(s) = \left[\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) d\tau \right] \left[\int_0^\infty e^{-s\beta} g(\beta) d\beta \right] = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(\tau+\beta)} g(\beta) d\beta f(\tau) d\tau$$

Haciendo el siguiente cambio de variable y manteniendo constante τ en la segunda integral se tiene:

$$\text{C.V.: } t = \tau + \beta \quad \Rightarrow \quad F(s)G(s) = \int_0^\infty f(\tau) d\tau \int_\tau^\infty e^{-st} g(t - \tau) dt$$

Se puede intercambiar el orden de integración de la siguiente forma:

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty f(\tau) d\tau \int_\tau^\infty e^{-st} g(t - \tau) dt = \int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (5.1)$$



Definición 5.8. Convolución

Se denomina **convolución** de las funciones $f(t)$ y $g(t)$ y se representa mediante $f * g$, a la siguiente función integral:

$$f * g = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

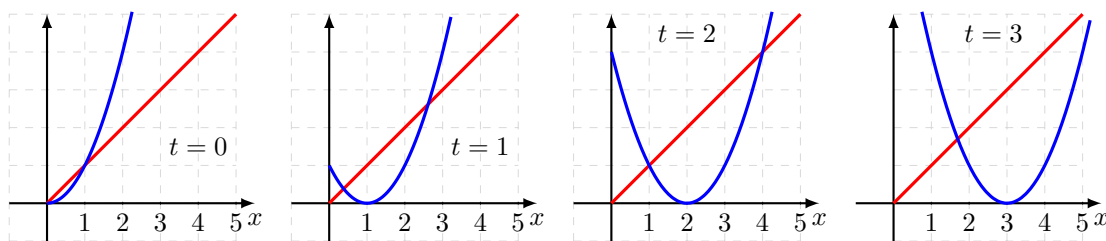
Ejercicio 5.22. Calcular la convolución $f * g$ de las funciones:

$$f(t) = t \quad ; \quad g(t) = t^2$$

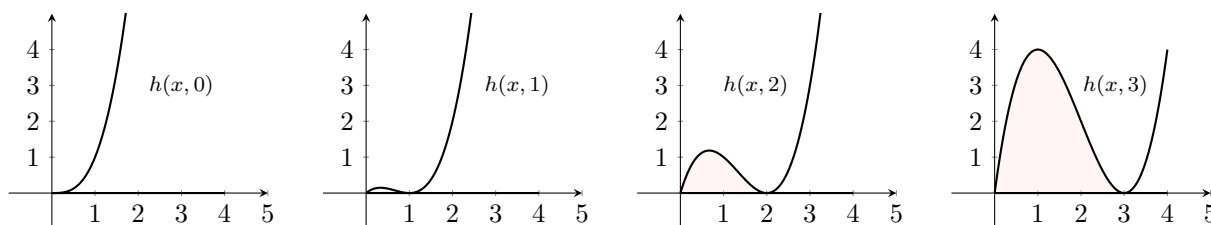
$$\begin{aligned} f * g &= \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau = \int_0^t \tau(t-\tau)^2 d\tau = \int_0^t \tau(t^2 + \tau^2 - 2t\tau) d\tau = t^2 \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^4}{4} - 2t \frac{\tau^3}{3} \Big|_0^t = \\ &= \frac{t^4}{2} + \frac{t^4}{4} - 2 \frac{t^4}{3} = \boxed{\frac{1}{12}t^4} \end{aligned}$$

Ejemplo 5.7. Interpretación geométrica de la Convolución

Vamos a interpretar geoméricamente el proceso del ejercicio anterior. Por claridad en la interpretación geométrica vamos a denominar a la variable τ anterior mediante³⁵ x . Tenemos dos funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$ donde una de ellas (en este caso g) se desplaza a la izquierda en función del tiempo t dando lugar a la función $g(t-x)$. En las siguientes figuras se ha representado las dos funciones f (fija) y g (desplazada) en función del tiempo t .

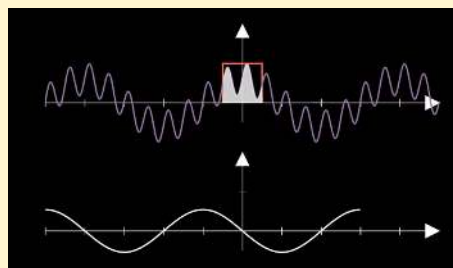


El producto de las dos funciones $h(x,t) = f(x)g(t-x)$ para los tiempos anteriores se muestra en la siguiente secuencia (en negro, donde aparece sombreada en rosa el área resultado de la integral $f * g = \int_0^t h(x,t) dx$, cuyo valor por el ejercicio anterior es $f * g = t^4/12$).



La convolución tiene muchas aplicaciones prácticas entre las que se encuentran el filtrado de señales $f(t)$ con filtros³⁶ particulares $g(t)$.

En la figura³⁷ se muestra una señal $f(t)$ (superior en color claro) formada por ondas de dos frecuencias bien diferenciadas. Se aplica un filtro de paso bajo $g(t)$ (en color rojo) y se calcula la convolución de ambos, dando lugar a la señal inferior en color blanco que contiene la frecuencia menor de la señal original.



Nota 5.3. En el Sección 12.3.7, página 437 se extiende la definición de convolución a un dominio infinito.

³⁵Notar que τ es una variable muda de la integral que define la convolución y por tanto puede denominarse de múltiples formas.

³⁷<https://www.youtube.com/watch?v=IOXzLMqcLbg>

Teorema 5.10. Transformada de Laplace de la Convolución

Sean $f(t)$ y $g(t)$ funciones continuas a trozos y de orden exponencial³⁸ en $[0, \infty)$, entonces:

$$\mathcal{L}\{f * g\} = F(s)G(s)$$

Demostración 5.10.

Teniendo en cuenta (5.1) y la definición de transformada de Laplace³⁹, se tiene:

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-st} \left\{ \underbrace{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau}_{f*g} \right\} dt = \mathcal{L}\{f * g\}$$

Conclusión del teorema de la convolución:

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{L}\{f * g\} = F(s)G(s) \\ \mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = (f * g)(t) \end{cases}$$

Ejercicio 5.23. Calcular la transformada inversa de la función:

$$F(s) = \frac{3}{(s+2)(s^2+9)}$$

Este ejercicio se puede resolver mediante el método de descomposición en fracciones simples (ver la Sección 5.4, página 165) pero aquí se resolverá aplicando el teorema de la convolución y su definición.

La función $F(s)$ se puede descomponer como producto de dos más sencillas:

$$F(s) = \frac{3}{(s+2)(s^2+9)} = \frac{3}{s^2+9} \frac{1}{s+2} = G(s)H(s)$$

Por el teorema de la convolución: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)H(s)\} = (g * h)(t)$

$$\text{Como } \begin{cases} g = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}\{\sin at\}=a/(s^2+a^2)} \sin 3t \\ h = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}\{e^{at}\}=1/(s-a)} e^{-2t} \end{cases}$$

Entonces, aplicando la definición de convolución:

$$\begin{aligned} g * h &= \int_0^t g(\tau)h(t-\tau) d\tau = \int_0^t \sin(3\tau)e^{-2(t-\tau)} d\tau \stackrel{P.Partes}{=} \\ &= -\frac{1}{13}(3\cos 3\tau - 2\sin 3\tau)e^{2(\tau-t)} \Big|_0^t = -\frac{1}{13}(3\cos 3t - 2\sin 3t) + \frac{3}{13}e^{-2t} \end{aligned}$$

³⁸Ver la Sección 5.3.4, página 151.

³⁸Ver la Sección 12.4.1, página 438

³⁹Ver la Definición 5.3, página 147.

Propiedades de la Convolución

La convolución es distinta que la multiplicación normal, por ejemplo:

- $1 * 1 = \int_0^t 1 \cdot 1 \, d\tau = \tau|_0^t = t \neq 1$
- $1 * f = \int_0^t f(t - \tau) \, d\tau = \int_0^t f(\tau) \, d\tau \neq f$ (de forma general)

Sin embargo la convolución cumple algunas propiedades de la multiplicación.

- Conmutativa: $f * g = g * f$
- Asociativa: $(f * g) * h = f * (g * h)$
- Distributiva respecto la suma: $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$
- Elemento Neutro: $f * 0 = \int_0^x f(\tau) \cdot 0 \, d\tau = 0$; $(f * g)(0) = \int_0^0 f(\tau)g(t - \tau) \, d\tau = 0$
- Linealidad: $f * (ag + bh) = a(f * g) + b(f * h)$, $a, b \in \mathbb{R}$

Derivada de la Convólución

$$(f * g)' = f' * g \quad \text{si} \quad f(0) = 0$$

Demostración 5.10.

Demostremos que $(f * g)' = f' * g$ si $f(0) = 0$. Tomando transformadas de Laplace⁴⁰:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{(f * g)'\} = s\mathcal{L}\{f * g\} - \underbrace{(f * g)(0)}_0 = s\mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\} \\ \mathcal{L}\{f' * g\} = \mathcal{L}\{f'\}\mathcal{L}\{g\} = [s\mathcal{L}\{f\} - \underbrace{f(0)}_0]\mathcal{L}\{g\} = s\mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\} \end{cases}$$

Como son iguales, las funciones originales también lo son $\implies (f * g)' = f' * g$.

Aplicaciones de la Convólución

1. Cálculo de transformadas de Laplace

Ejercicio 5.24. Calcular la transformada de Laplace de la siguiente función:

$$f(t) = \int_0^t e^r \sin(t - r) \, dr$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\int_0^t e^r \sin(t - r) \, dr\right\} &= \mathcal{L}\{e^t * \sin t\} = \mathcal{L}\{e^t\}\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s-1} \frac{1}{s^2+1} = \\ &= \boxed{\frac{1}{(s-1)(s^2+1)}} \end{aligned}$$

⁴⁰Ver el Teorema 5.8, página 163.

2. Cálculo de transformadas inversas de Laplace

Ejercicio 5.25. Calcular la transformada de inversa de Laplace de la siguiente función:

$$F(s) = \frac{1}{(s^2 + a^2)^2}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + a^2} \frac{1}{s^2 + a^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + a^2}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + a^2}\right\} = \\ &= \left(\frac{1}{a} \operatorname{sen} at\right) * \left(\frac{1}{a} \operatorname{sen} at\right) = \frac{1}{a^2} \int_0^t \operatorname{sen} ar \operatorname{sen} a(t-r) dr\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la relación trigonométrica:

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2} \int_0^t \operatorname{sen} ar \operatorname{sen} a(t-r) dr &= \frac{1}{a^2} \int_0^t \frac{1}{2} [\cos(ar - at + ar) - \cos(ar + at - ar)] dr = \\ &= \frac{1}{2a^2} \int_0^t [\cos a(2r - t) - \cos at] dr = \frac{1}{2a^2} \left[\frac{1}{2a} \operatorname{sen} a(2r - t) - r \cos at \right]_0^t = \\ &= \frac{1}{2a^2} \left[\frac{1}{2a} \operatorname{sen} at - t \cos at - \frac{1}{2a} \operatorname{sen}(-at) + 0 \right] = \frac{1}{2a^2} \left[\frac{1}{a} \operatorname{sen} at - t \cos at \right] = \boxed{\frac{\operatorname{sen} at - at \cos at}{2a^3}}\end{aligned}$$

3. Resolución de EDO⁴¹

Ejercicio 5.26. Resolver el siguiente PVI:

$$\begin{cases} y'' + a^2 y = f(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Empezamos tomando transformadas de Laplace a ambas partes de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{y'' + a^2 y\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad ; \quad \mathcal{L}\{y''\} + a^2 \mathcal{L}\{y\} = F(s)$$

donde $F(s)$ es la transformada inversa de la función $f(t)$. Ahora aplicamos el *teorema de la transformada de la derivada* (ver la **Teorema 5.8, página 163**) a cada término:

$$[s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)] + a^2 Y(s) = F(s) \quad ; \quad (s^2 + a^2)Y(s) = F(s) + y'(0) + sy(0)$$

Despejando y teniendo en cuenta las condiciones iniciales se tiene:

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 + a^2}$$

Si se conoce $F(s)$, se puede aplicar la transformada inversa de Laplace a ambas expresiones y obtener la solución. Otra forma de expresar la solución es el teorema de la convolución (ver el **Teorema 5.10, página 174**):

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 + a^2} = F(s) \frac{1}{s^2 + a^2} = F(s) \mathcal{L}\left\{\frac{\operatorname{sen} at}{a}\right\} = \mathcal{L}\left\{f(t) * \frac{\operatorname{sen} at}{a}\right\}$$

⁴¹Ver la **Sección 5.5, página 167**.

Tomando la transformada inversa de Laplace a ambos términos y teniendo en cuenta la definición de convolución (ver el **Definición 5.8**, página 172):

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = \frac{1}{a}(f(t) * \sin at) = \frac{1}{a} \int_0^t f(r) \sin a(t-r) dr$$

Finalmente:

$$y(t) = \frac{1}{a} \int_0^t f(r) \sin a(t-r) dr$$

4. Resolución de Ecuaciones Integrales de Volterra.

Definición 5.9. Ecuación Integral de Volterra

La ecuación integral de Volterra en su forma más general es:

$$f(t) = g(t) + \int_a^t f(r)K(t,r) dr$$

donde la función $K(t,r)$ se denomina *núcleo* de la ecuación. La versión de la ecuación con convolución es:

$$f(t) = g(t) + \int_a^t f(r)h(t-r) dr$$

Ejercicio 5.27. Resolver el siguiente PVI:

$$\begin{cases} y' = \cos t + \int_0^t y(r) \cos(t-r) dr \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

En esta ecuación aparece una integral de convolución por lo que se trata de una ecuación de Volterra.

$$\int_0^t y(r) \cos(t-r) dr = y(r) * \cos(t)$$

De forma análoga a los casos anteriores, tomamos transformadas de Laplace y aplicamos los teoremas de la transformada de una derivada y de una integral^a.

$$\mathcal{L}\{y'\} = \mathcal{L}\{\cos t\} + \mathcal{L}\{y(t) * \cos(t)\} = \mathcal{L}\{\cos t\} + \mathcal{L}\{y(t)\} \mathcal{L}\{\cos(t)\}$$

$$sY(s) - y(0) = \frac{s}{s^2 + 1} + Y(s) \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$Y(s) \left(s - \frac{s}{s^2 + 1} \right) = \frac{s}{s^2 + 1} + 1 \quad ; \quad Y(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^3} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3}$$

Tomando transformadas inversas:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} \right\} \xrightarrow{\mathcal{L}\{t^n\} = n!/s^{n+1}} 1 + t + \frac{t^2}{2} \quad ; \quad y(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

^aVer la **Sección 5.3.7**, página 163.

5. Resolución de Ecuaciones Integrodiferenciales.

Ejercicio 5.28. Resolver el siguiente PVI:

$$\begin{cases} y'(t) + y(t) - \int_0^t y(r) \operatorname{sen}(t-r) dr = -\operatorname{sen} t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Vemos que en esta ecuación integrodiferencial aparece una integral de convolución. Aplicamos transformadas de Laplace a ambos términos de la ecuación y aplicamos los teoremas de la transformada de una derivada y de una integral y el teorema de la convolución se tiene:

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} - \mathcal{L}\{y(t) * \operatorname{sen}(t)\} = -\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}$$

$$[sY(s) - y(0)] + Y(s) - Y(s) \frac{1}{s^2 + 1} = -\frac{1}{s^2 + 1}$$

Teniendo en cuenta la condición inicial, agrupando y despejando $Y(s)$ tenemos:

$$Y(s) \left(s + 1 - \frac{1}{s^2 + 1} \right) = -\frac{1}{s^2 + 1} + 1 \quad ; \quad Y(s) = \frac{s^2}{s(s^2 + s + 1)} = \frac{s}{s^2 + s + 1}$$

Las raíces del denominador son: $-1/2 \pm i\sqrt{3}/2$, por tanto teniendo en cuenta las fórmulas de la [Sección 5.4, página 165](#) para las transformadas inversas se tiene:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s + 1/2)^2 + 3/4} \right\} \quad \Rightarrow \quad y(t) = e^{-t/2} \left(\cos \frac{t\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \frac{t\sqrt{3}}{2} \right)$$

6. Derivada de la Convolución

Ejercicio 5.29. Resolver el siguiente PVI:

$$\begin{cases} f(x) - 1 = \int_0^x f(r) (x-r) dr \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Como:

$$\int_0^x f(r) (x-r) dr = f * x \quad \text{con} \quad x|_{x=0} = 0$$

Podemos derivar ambas partes de la ecuación:

$$\frac{d}{dx}(f - 1) = \frac{d}{dx}(f * x) \quad \Rightarrow \quad f' = (f * x') = (f * 1) = \int_0^x f(r) dr$$

Notar que de aquí se deduce que $f'(0) = 0$. Derivando una vez más se obtiene el siguiente problema equivalente al original:

$$f'' = f \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f'' - f = 0 \\ f(0) = 1, \quad f'(0) = 0 \end{cases}$$

A través de la ecuación característica obtenemos la solución general del problema:

$$\lambda^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

Imponiendo las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} f(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ f'(0) = c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

5.6. EDOS y Señales

Definición 5.10. Señal

Una **señal** es una magnitud física que se utiliza para transmitir información, como por ejemplo corriente eléctrica, ondas acústicas, etc.

En determinados casos prácticos es útil interpretar las ecuaciones diferenciales en términos de *señales* (información) de entrada y de salida.



Por ejemplo, sea la siguiente EDOL de segundo grado:

$$\begin{cases} a(t) \frac{d^2 y}{dt^2} + b(t) \frac{dy}{dt} + c(t) = f(t) \\ y(0) = x_0 ; y(0) = y'_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(t) & : \text{Señal de Entrada} \\ y(t) & : \text{Señal de Salida} \end{cases}$$

Podemos considerar la ecuación como una expresión que define una determinada transformación de una señal de entrada $f(t)$ en una señal de salida $y(t)$.

Ejemplo 5.8. Oscilaciones Forzadas

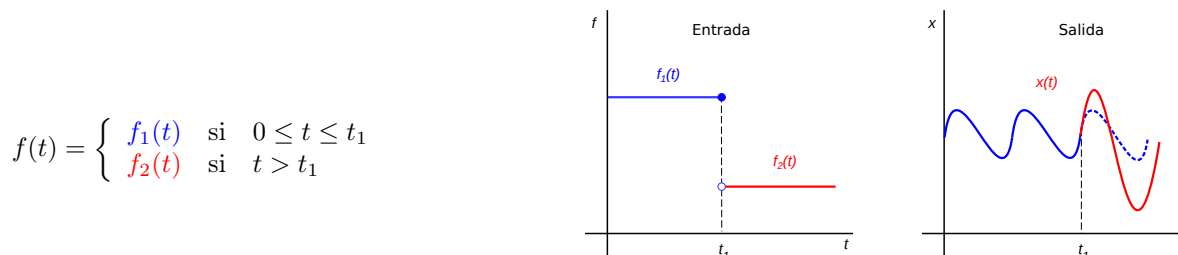
La ecuación:

$$y'' + ay' + cy = f(t)$$

representa el desplazamiento en función del tiempo $y(t)$ de una masa m sujeta con un resorte y sometida a fuerza $f(t)$. Las constantes a y b dependen de la masa suspendida, de las características del muelle y condiciones de rozamiento. En este caso la señal de entrada es la fuerza $f(t)$ ejercida y la señal de salida es el desplazamiento que sufre el objeto en estas condiciones.



En muchos casos de interés la entrada son funciones discontinuas o *impulsos*.



Para determinar la salida (solución) hay que resolver dos PVI: uno desde $t = 0$ hasta $t = t_1$ y el otro desde $t = t_1$ en adelante.

$$\begin{cases} a(t)x'' + b(t)x' + c(t) = f_1(t) \\ x(0) = x_0 ; x(0) = x'_0 \end{cases}$$

↓

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \quad 0 \leq t \leq t_1$$

$$\begin{cases} a(t)\tilde{x}'' + b(t)\tilde{x}' + c(t) = f_2(t) \\ \tilde{x}(t_1) = \alpha ; \tilde{x}'(t_1) = \beta \end{cases}$$

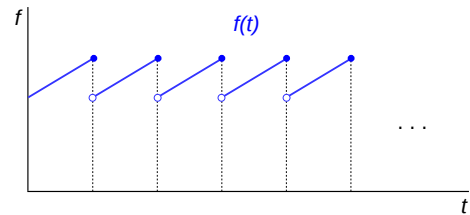
↓

$$\tilde{x}(t) = \tilde{c}_1 \tilde{x}_1(t) + \tilde{c}_2 \tilde{x}_2(t) \quad t > t_1$$

En el segundo PVI los valores α y β deben cumplir una *condición de empalme* referido al primer PVI:

$$\begin{cases} \alpha = x(t_1) \\ \beta = x'(t_1) \end{cases}$$

El problema se complica más si la señal de entrada es discontinua de forma periódica, del tipo mostrado en la esta gráfica, donde es necesario resolver n PVI con $n-1$ condiciones de empalme.



La utilización de la **transformada de Laplace** en estos y otros casos más generales simplifica enormemente su resolución.

Teorema 5.11. Transformadas de Funciones Periódicas

Si $f(t)$ es continua a trozos en $[0, \infty)$, de orden exponencial y periódica con periodo T :

$$f(t+T) = f(t) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

Demostración 5.11.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t) dt$$

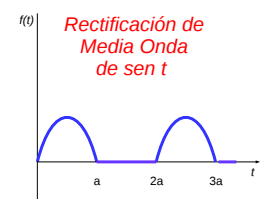
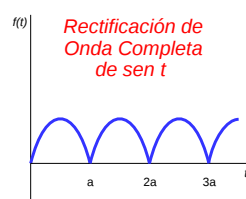
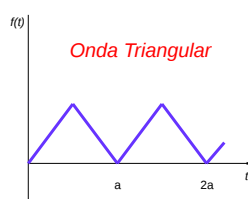
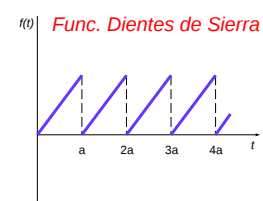
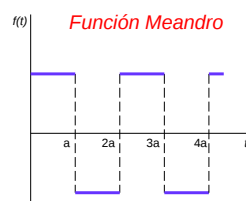
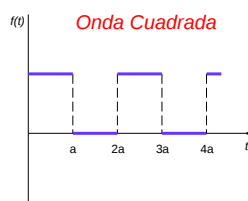
Haciendo el C.V. $t = u + T$ en la última integral:

$$\int_T^\infty e^{-st} f(t) dt = e^{-sT} \int_0^\infty e^{-su} f(u+T) du = e^{-sT} \int_0^\infty e^{-su} f(u) du = e^{-sT} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Por tanto:
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + e^{-sT} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

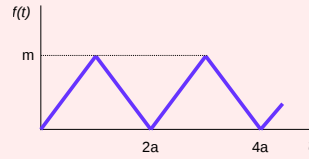
Al despejar $\mathcal{L}\{f(t)\}$ se obtiene el resultado del teorema:
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

Hay diferentes tipos de funciones periódicas que aparecen de forma habitual en los casos prácticos. Algunas de ellas se muestran en la siguiente figura.



Ejercicio 5.30. Determinar la transformada de Laplace de una onda periódica triangular de periodo $T = 2$ y valor máximo $m = 1$ que en el intervalo $[0, 2)$ se define como:

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 2 - t & \text{si } 1 \leq t < 2 \end{cases}$$



Aplicando el teorema de las transformadas de funciones periódicas tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} f(t) dt = \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left[\int_0^1 e^{-st} t dt + \int_1^2 e^{-st} (2 - t) dt \right] \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left[-\frac{1+st}{s^2} e^{-st} \Big|_0^1 + \frac{1+st}{s^2} e^{-st} - \frac{2}{s} e^{-st} \Big|_1^2 \right] = \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left[-\frac{1+s}{s^2} e^{-s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1+2s}{s^2} e^{-2s} - \frac{2}{s} e^{-2s} - \frac{1+s}{s^2} e^{-s} + \frac{2}{s} e^{-s} \right] = \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left[\frac{(1 + e^{-s})^2}{s^2} \right] = \frac{(1 + e^{-s})^2}{s^2(1 - e^{-2s})} = \frac{1 + e^{-s}}{s^2(1 - e^{-s})} \end{aligned}$$

5.6.1. Función Delta de Dirac

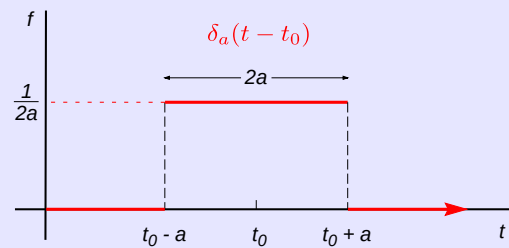
Introducción

En ingeniería suele ser práctico la utilización de fuerzas externas de una cierta magnitud que actúan durante un lapso muy breve de tiempo, por ejemplo un golpe en un sistema mecánico, un rayo en un ala de avión, etc. Estas fuerzas se denominan **impulsos** y vamos a ver como simular este comportamiento de forma matemática.

Definición 5.11. Función Impulso Unitario

Se denomina función **impulso unitario** a la siguiente función definida a trozos:

$$\delta_a(t - t_0) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < t_0 - a \\ \frac{1}{2a} & t_0 - a \leq t < t_0 + a \\ 0 & t \geq t_0 + a \end{cases}$$



La función impulso unitario tiene la propiedad:

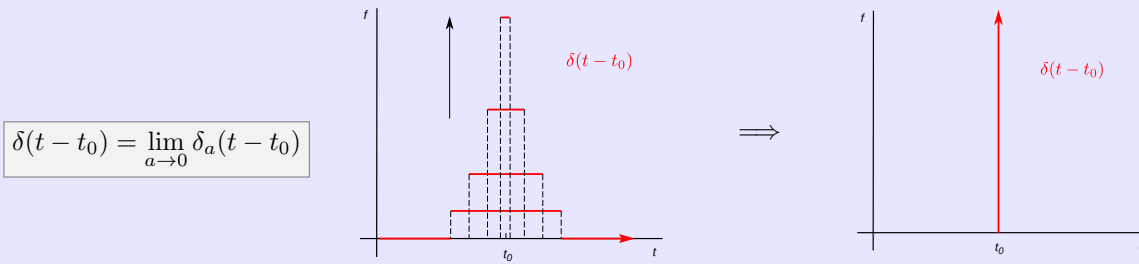
$$\int_0^\infty \delta_a(t - t_0) dt = 1$$

Para valores pequeños de a , la función $\delta_a(t - t_0)$ es esencialmente una constante de gran magnitud que se encuentra *activada* durante un breve tiempo alrededor de t_0 .

A partir de esta función se define otra de especial importancia en matemáticas e ingeniería.

Definición 5.12. Función Delta de Dirac

La función **delta de Dirac** se denota por $\delta(t - t_0)$ y se define como el siguiente límite⁴²:



La función delta de Dirac $\delta(t - t_0)$, no es una función *normal*, siendo un ejemplo de las denominadas **funciones generalizadas o distribuciones**.

Propiedades Básicas de la Función Delta de Dirac

1. $\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & t = t_0 \\ 0 & t \neq t_0 \end{cases}$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$

Relación entre Delta de Dirac y Escalón Unitario

Según la definición de $\delta(t - t_0)$:

$$\int_0^t \delta(x - a) dx = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases} = \mathcal{U}(t - a)$$

Derivando con respecto a t :

$$\delta(t - a) = \frac{d}{dt} \mathcal{U}(t - a)$$

Transformada de Laplace de Delta de Dirac

A pesar de que la función delta de Dirac no cumple las condiciones suficientes de existencia de la transformada de Laplace⁴³, sí existe su transformada.

Teorema 5.12. Transformada de Laplace de Delta de Dirac

$$\mathcal{L} \{ \delta(t - t_0) \} = e^{-st_0} \quad ; \quad t_0 > 0$$

$$\mathcal{L} \{ \delta(t) \} = 1 \quad ; \quad t_0 = 0$$

⁴²La función delta de Dirac también puede definirse como el límite de una sucesión de funciones gaussianas.

⁴³Ver la [Sección 5.3.4, página 151](#).

Demostración 5.12.

Expresando la función impulso unitario $\delta_a(t - t_0)$ a través del escalón unitario $\mathcal{U}(t - a)$ se tiene:

$$\delta_a(t - t_0) = \frac{1}{2a} \{ \mathcal{U}[t - (t_0 - a)] - \mathcal{U}[t - (t_0 + a)] \}$$

Por tanto: $\mathcal{L} \{ \delta_a(t - t_0) \} = \frac{1}{2a} \left[\frac{e^{-s(t_0-a)}}{s} - \frac{e^{-s(t_0+a)}}{s} \right] = e^{-st_0} \left[\frac{e^{sa} - e^{-sa}}{2sa} \right]$

Al calcular el límite cuando $a \rightarrow 0$ se produce una indeterminación del tipo 0/0 que se resuelve fácilmente a través de la regla de L'Hôpital, obteniéndose:

$$\mathcal{L} \{ \delta(t - t_0) \} = \lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{L} \{ \delta_a(t - t_0) \} = e^{-st_0}$$

La función delta de Dirac se suele utilizar en problemas prácticos donde aparecen impulsos, aunque es necesario tener en cuenta la definición y propiedades vistas anteriormente.

Ejercicio 5.31. Encontrar la solución del siguiente PVI:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 3y = 5\delta(t - 2) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

correspondiente a un determinado caso de un peso suspendido por un muelle y sometido a un impulso a tiempo $t = 3$. La variable y mide el desplazamiento del objeto sobre su estado de equilibrio.

Tomando transformadas de Laplace a ambas partes de la ecuación se tiene:

$$\mathcal{L} \{ y'' + 2y' + 3y \} = \mathcal{L} \{ 5\delta(t - 2) \} \quad ; \quad \mathcal{L} \{ y'' \} + 2\mathcal{L} \{ y' \} + 3\mathcal{L} \{ y \} = 5\mathcal{L} \{ \delta(t - 2) \}$$

$$[s^2 Y(s) - sy(0) - sy'(0)] + 2sY(s) + 3Y(s) = 5e^{-2s} \quad ; \quad Y(s)(s^2 + 2s + 3) = 5e^{-2s}$$

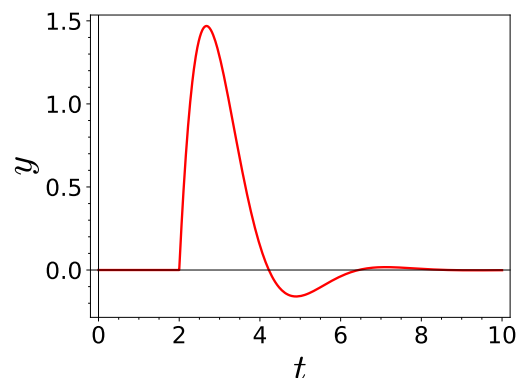
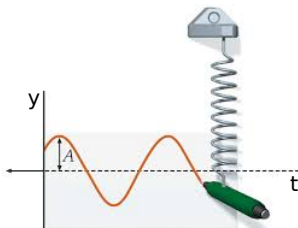
$$Y(s) = \frac{5e^{-2s}}{s^2 + 2s + 3} = \frac{5e^{-2s}}{(s + 1)^2 + 2}$$

Tomando transformada inversa de Laplace y teniendo en cuenta el *segundo teorema de traslación*⁴⁴:

$$\mathcal{L}^{-1} \{ Y(s) \} = y(t) = 5\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-2s}}{(s + 1)^2 + 2} \right\} \quad \xrightarrow[\mathcal{L}^{-1} \{ e^{-as} F(s) \} = f(t-a)\mathcal{U}(t-a)]{\mathcal{L} \{ e^{at} \sin bt \} = b / [(s-a)^2 + b^2]}$$

$$5 \left[\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \sin t\sqrt{2} \right]_{t \rightarrow t-2} \mathcal{U}(t-2) \quad ; \quad y(t) = \frac{5}{\sqrt{2}} e^{2-t} \sin[(t-2)\sqrt{2}] \mathcal{U}(t-2)$$

Vemos que desde $t = [0, 2)$ no hay desplazamiento, para $t = 2$ se produce el impulso. El resultado es un movimiento oscilatorio amortiguado.



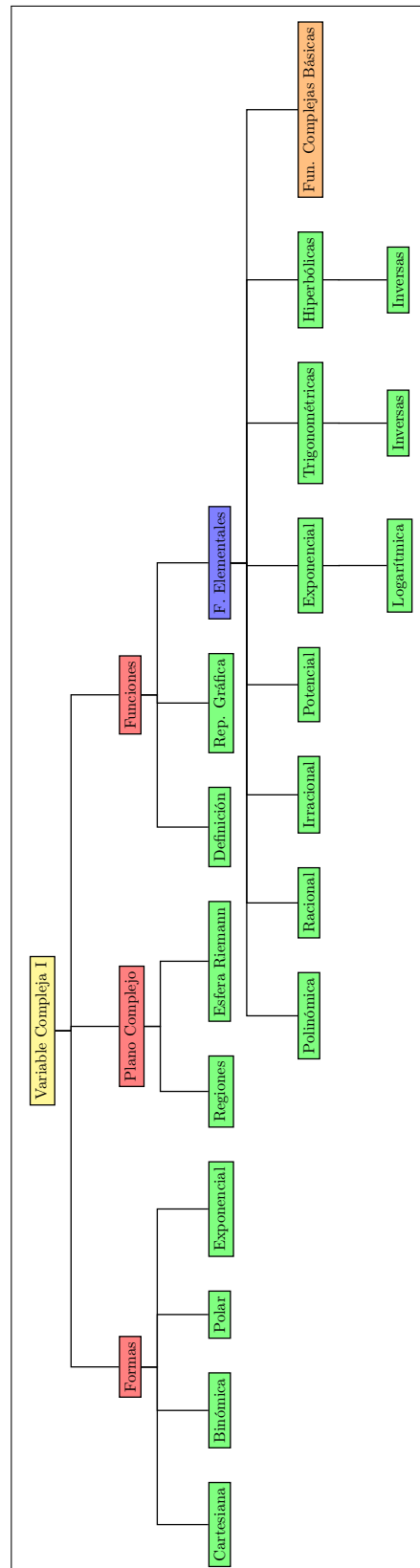
⁴⁴Ver el Teorema 5.4, página 156.



Variable Compleja I

Contenido

6.1	Introducción	187
6.2	Formas de los Números Complejos	187
6.2.1	Forma Cartesiana, $z = (a, b)$	187
6.2.2	Forma Binómica, $z = a + bi$	188
6.2.3	Representación Geométrica de $\mathbb{C}$	189
6.2.4	Forma Trigonométrica y Polar	191
6.2.5	Forma Exponencial	192
6.3	Topología en el Plano Complejo	193
6.3.1	$\mathbb{C}$ no es un Conjunto Ordenado	193
6.3.2	Distancia en $\mathbb{C}$	193
6.3.3	Regiones Básicas en $\mathbb{C}$	194
6.3.4	Conjuntos Básicos en $\mathbb{C}$	194
6.3.5	Infinito en el Plano Complejo. Esfera de Riemann	196
6.3.6	Operaciones Aritméticas con Infinito en el Plano Complejo	196
6.4	Funciones de Variable Compleja	197
6.4.1	Parte Real e Imaginaria de una Función Compleja	198
6.4.2	Método de Milne-Thomson	198
6.4.3	Representación Gráfica	199
6.5	Funciones Complejas Elementales	205
6.5.1	Función Constante Compleja	205
6.5.2	Función Polinómica Compleja	205
6.5.3	Función Racional Compleja	207
6.5.4	Función Irracional Compleja	208
6.5.5	Discontinuidad del Argumento	210
6.5.6	Función Exponencial Compleja	212
6.5.7	Función Logaritmo Complejo	214
6.5.8	Función Potencial Compleja	216
6.5.9	Funciones Trigonométricas Complejas	217
6.5.10	Funciones Trigonométricas Inversas	219
6.5.11	Funciones Hiperbólicas Complejas	220
6.5.12	Funciones Complejas Básicas	221



6.1. Introducción

En los siguientes tres temas vamos a ver una introducción al análisis complejo. Entre los hechos que destacan la importancia de la variable compleja podemos destacar los siguientes:

- El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ no es algebraicamente cerrado, ya que determinados problemas reales (incluso sencillos) dan soluciones complejas.
- El conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ es una extensión de $\mathbb{R}$ y forma el mínimo cuerpo algebraicamente cerrado. Esto hace que algunos fenómenos reales no puedan ser explicados en $\mathbb{R}$ o bien se puedan explicar mejor desde $\mathbb{C}$.
- En algunos problemas basta con una idea básica de los números complejos (resolución de ecuaciones algebraicas, autovalores y autovectores, etc.), sin embargo en otros casos de gran importancia en diversas ciencias¹ es necesario un conocimiento avanzado de la teoría de la variable compleja.
- El análisis complejo está relacionado con otras áreas matemáticas como el álgebra, la trigonometría, el cálculo integral y las ecuaciones diferenciales, entre otras.
- Hace algunos años las técnicas de variable compleja eran esenciales en el estudio y resolución de muchos problemas ingenieriles. Con la aparición de los ordenadores se avanzaron en los métodos numéricos de forma que en las últimas décadas el interés por la variable compleja ha disminuido. Sin embargo, en muchas ocasiones la utilidad de una solución analítica en problemas complicados, en la que interviene la variable compleja, ayuda enormemente en la práctica (generación de modelos, soluciones óptimas, etc.)

6.2. Formas de los Números Complejos

A los números complejos se les puede tratar como puntos, como vectores, como pares ordenados o como números, ya que comparten propiedades con varias áreas.

Vamos a recordar de forma resumida las distintas formas de expresar los números complejos y sus propiedades.

6.2.1. Forma Cartesiana, $z = (a, b)$

Definición 6.1. Forma Cartesiana

Un *número complejo* z se define como un *par ordenado*² de *números reales* (a, b) , donde:

- La primera componente a se denomina **parte real** y se representa por $\text{Re}(z) = a$.
- La segunda componente b se denomina **parte imaginaria** y se representa por $\text{Im}(z) = b$.

Definición de suma y producto de números complejos en la forma cartesiana:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad ; \quad (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc) \quad (6.1)$$

Definición 6.2. Cuerpo de los Números Complejos

El conjunto de todos los pares ordenados junto con las propiedades de suma y producto tiene estructura de *cuerpo*³.

¹Entre las que se encuentran por ejemplo: electricidad, magnetismo, mecánica de fluidos, conducción de calor, elasticidad y teoría de la señal.

²Se llama *par ordenado* a un conjunto formado por dos elementos y un criterio de ordenación que establece cuál es primer elemento y cuál el segundo.

³En matemáticas un *cuerpo* o *campo* es una estructura algebraica en la cual las operaciones de adición y producto cumplen las propiedades: asociativa, conmutativa y distributiva del producto respecto de la adición, además de la existencia de inverso aditivo, de inverso multiplicativo y de un elemento neutro para la adición y otro para la multiplicación, los cuales permiten efectuar además las operaciones de sustracción y división.

En el cuerpo de los números complejos se definen:

- **Elemento neutro** de la suma: $(0, 0)$
- **Elemento unitario** del producto: $(1, 0)$
- **Elemento opuesto** de (a, b) : $(-a, -b)$
- **Elemento inverso** de $(a, b) \neq (0, 0)$: $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$

Definición 6.3. Unidad Imaginaria

Se define la **unidad imaginaria** y se representa por i al número complejo:

$$i = (0, 1)$$

Teniendo en cuenta la definición de la unidad imaginaria i y el producto de números complejos en forma cartesiana (6.1), se tiene:

$$i^2 = ii = (0, 1)(0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0)$$

La forma cartesiana tiene un interés teórico, siendo más interesantes desde el punto de vista práctico otras formas de los número complejos.

6.2.2. Forma Binómica, $z = a + bi$

Definición 6.4. Forma Binómica

Se denomina **forma binómica** de un número complejo $z = (a, b)$ al siguiente modo de expresar sus partes real y compleja:

$$z = a + bi \quad \text{donde} \quad \begin{cases} a \in \mathbb{R} & \text{Parte Real : } \operatorname{Re}(z) = a \\ b \in \mathbb{R} & \text{Parte Imaginaria : } \operatorname{Im}(z) = b \end{cases}$$

La *forma binómica* es muy utilizada sobre todo en operaciones sencillas. Sin embargo en cálculos más avanzados esta forma no resulta práctica, utilizándose las formas **polar**, **trigonométrica** y/o **exponencial**.

Definición 6.5. Conjunto de los Números Complejos, $\mathbb{C}$

El conjunto de todos los *números complejos* se representa por $\mathbb{C}$ y se define como:

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

Definición 6.6. Imaginario Puro

Se denominan **imaginarios puros** a los números complejos $z = bi$ con parte real $a = 0$ y parte imaginaria $b \neq 0$.

En la forma binómica se definen:

- Elemento **neutro** de la suma: $0 + 0i = 0$
- Elemento **unitario** del producto: $1 + 0i = 1$
- Elemento **opuesto** de $a + bi$: $-a - bi$
- Elemento **inverso** de $a + bi \neq 0$: $\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$

Dados los números complejos:

$$z_1 = a_1 + ib_1 \quad ; \quad z_2 = a_2 + ib_2$$

se definen las siguientes operaciones básicas en forma binómica:

- **Suma:** $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
- **Resta o diferencia:** $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$
- **Producto:** $z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$
- **División:** $\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = (a_1 + b_1 i) \left(\frac{a_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{-b_2}{a_2^2 + b_2^2} i \right) = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{-a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_2^2 + b_2^2} i$

Definición 6.7. Complejo Conjugado

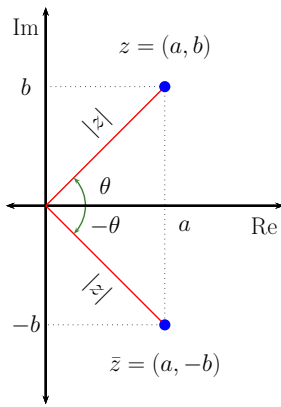
Dado $z = a + bi$, se define el **conjugado** de z , y se escribe $\bar{z}$, al número complejo $\bar{z} = a - bi$.

- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$
- $\overline{zw} = \bar{z} \bar{w}, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$
- $\overline{\bar{z}} = z, \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- Si $\bar{z} = z \implies z \in \mathbb{R}$
- Si $\bar{z} = -z \implies z$ es *imaginario puro*
- $\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}$

6.2.3. Representación Geométrica de $\mathbb{C}$

Definición 6.8. El Plano Complejo

- Un número complejo $z = a + bi$ se puede representar gráficamente a través de un punto en un sistema de ejes coordenados, donde en el eje X (**eje real**) (Re), se coloca la parte real $Re(z) = a$ y en el eje Y (**eje imaginario**) (Im), se coloca la parte imaginaria $Im(z) = b$.
- El plano formado por este sistema de ejes cartesianos se denomina **plano complejo**.
- Cada punto del *plano complejo* se denomina **afijo** y corresponde con las coordenadas de un determinado número complejo.
- Se denomina **módulo** de un número complejo z , y se representa por $|z|$, a la *distancia* del segmento que une el origen del *plano complejo* con su *afijo*.
- Se denomina **argumento** de un número complejo al *ángulo* que forma el segmento que define su módulo y el *semieje real* positivo.



- Re : Eje real
- Im : Eje imaginario
- Afijo: punto del plano complejo con coordenadas (a, b)
- Módulo $|z|$: distancia del origen al afijo.
- Argumento θ : ángulo del segmento del módulo (radianes).

Nota 6.1. El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ se representa a través de la **recta real** y corresponde en el plano complejo con el eje real Re .

Definición 6.9. Módulo, $|z|$

El **módulo** de un número complejo $z = a + bi$ es el número real no negativo tal que:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

;

$$z = a + bi \quad \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = a = |z| \cos \theta \\ \operatorname{Im}(z) = b = |z| \sin \theta \end{cases}$$

Sean $z, w \in \mathbb{C}$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- $|z| > 0 \quad \forall z \neq 0 \quad ; \quad |0| = 0$
- $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2 \implies |z| = \sqrt{z\bar{z}}$
- $|-z| = |z|$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $|zw| = |z| |w|$
- $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad ; \quad |z^{-1}| = \frac{1}{|z|} \quad , \quad (z \neq 0)$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Desigualdad Triangular)
- El número complejo $\frac{z}{|z|}$ tiene módulo unidad, $(z \neq 0)$.
- $\frac{z}{w} = zw^{-1} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}$

Definición 6.10. Argumento

Si θ es el argumento de un número complejo z , entonces $\theta + 2k\pi$ para cualquier entero k también lo será⁴, por tanto existen infinitos argumentos asociados a todo número complejo z y el conjunto de todos ellos se denota por $\arg(z)$.

$$\arg(z) = \theta + 2k\pi \quad ; \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

⁴Tener en cuenta que $2k\pi$ radianes corresponde con k vueltas completas de 360° , en el sentido positivo (contrario a las agujas del reloj) si $k > 0$ y en el sentido negativo (a favor de las agujas del reloj) si $k < 0$.

⁵Es común, por abuso del lenguaje, denominar simplemente *argumento* al *argumento principal*.

Definición 6.11. Argumento Principal

Se denomina **argumento principal**⁵ de un número complejo z al único $\theta \in \arg(z)$ tal que⁶ $\theta \in (-\pi, \pi]$. Se representa por $\text{Arg}(z)$ y puede definirse matemáticamente de la siguiente forma⁷:

$$\text{Arg}(z) = \text{Arg}(x + iy) = \begin{cases} \text{si } x > 0 & \arctan \frac{y}{x} \\ \text{si } x = 0, y \neq 0 & \text{sign}(y) \frac{\pi}{2} \\ \text{si } x < 0 & \text{sign}(y)\pi - \arctan \frac{y}{|x|} \end{cases} = \text{atan2}(y, x)$$

donde $\text{atan2}(y, x)$ corresponde con la función *arcotangente* definida para los cuatro cuadrantes⁸.

6.2.4. Forma Trigonométrica y Polar**Definición 6.12. Forma Trigonométrica y Polar**

Teniendo en cuenta la geometría de un número complejo en el *plano complejo*⁹ se definen su *forma trigonométrica/polar* como sigue:

$$z = a + bi = |z| \cos \arg(z) + i |z| \sin \arg(z) = |z| (\cos \theta + i \sin \theta) = |z|_{\theta}$$

Teorema 6.1. Fórmula de De Moivre

Dados dos números reales θ y n , se cumple:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Demostración 6.1.

Teniendo en cuenta la *fórmula de Euler* (ver el **Teorema 6.2, página 192**) se tiene:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Dados dos números complejos z_1 y z_2 en su forma trigonométrica/polar, se cumplen las siguientes propiedades:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \quad \theta_1 = \arg(z_1) \\ z_2 = |z_2|(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2), \quad \theta_2 = \arg(z_2) \end{array} \right\} \begin{cases} z_1 z_2 = |z_1| |z_2| [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin((\theta_1 + \theta_2))] \\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin((\theta_1 - \theta_2))] \\ z_1^n = |z_1|^n (\cos n\theta_1 + i \sin n\theta_1) \end{cases}$$

⁵En algunas ocasiones el argumento principal se considera $\theta \in [0, 2\pi)$.

⁷La función $\text{sign}(y)$ corresponde con la función *signo*, ver el **Ejercicio 7.9, página 240**. Ver más detalles de la función argumento principal en la **Sección 6.5.5, página 210** y en la **Sección 6.5.12, página 221**.

⁸Notar que la función $\arctan(x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ solo devuelve valores (ángulos) comprendidos en el primer y cuarto cuadrante de los ejes de coordenadas cartesianas (correspondientes al plano complejo). La función $\text{atan2}(y, x)$ suele estar definida en todos los lenguajes de programación y en la mayoría de las calculadoras científicas.

⁹Ver la **Sección 6.2.3, página 189**.

Ejercicio 6.1. Utilizando la fórmula de De Moivre determinar el valor de la siguiente operación:

$$(1 + i)^{200}$$

Expresando el número en forma trigonométrica y usando la fórmula de De Moivre se tiene:

$$\begin{aligned}(1 + i)^{200} &= \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) \right]^{200} = 2^{\frac{200}{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right)^{200} = 2^{100} \left(\cos \frac{200\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{200\pi}{4} \right) = \\ &= 2^{100} (\cos 50\pi + i \operatorname{sen} 50\pi) = 2^{100} (\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi) = \boxed{2^{100}}\end{aligned}$$

6.2.5. Forma Exponencial

Teorema 6.2. Fórmula de Euler o Exponencial Compleja

Para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple¹⁰:

$$e^{xi} = \cos x + i \operatorname{sen} x \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

denominada **exponencial compleja** o **fórmula de Euler**¹¹.

Demostración 6.2.

La función exponencial puede definirse a través de su desarrollo de McLaurin de la siguiente forma:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}e^{xi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} x^n = 1 + \frac{i}{1!} x - \frac{1}{2!} x^2 - \frac{i}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{i}{5!} x^5 - \frac{1}{6!} x^6 - \frac{i}{7!} x^7 + \dots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right)\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta los desarrollos de McLaurin de las funciones seno y coseno:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

se obtiene la fórmula de Euler: $e^{xi} = \cos x + i \operatorname{sen} x$

Definición 6.13. Exponencial de un Complejo

Si $z \in \mathbb{C}$, teniendo en cuenta la *fórmula de Euler* y las propiedades de una potencia, se define la **exponencial de un número complejo** como:

$$e^z = e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a (\cos b + i \operatorname{sen} b)$$

¹⁰La expresión $\cos x + i \operatorname{sen} x$ a veces se denota por $\operatorname{cis}(x)$.

¹¹Con este nombre también se conoce la ecuación $e^{i\pi} + 1 = 0$, correspondiente al caso particular $x = \pi$ y que es considerada *la ecuación más bella del mundo*.

Definición 6.14. Forma Exponencial

Un número $z \in \mathbb{C}$ se puede expresar en la *forma exponencial* como sigue:

$$z = a + bi = \rho_\theta = |z| (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = |z| e^{i\theta}$$

Dados dos números complejos z_1 y z_2 en su forma exponencial, se cumplen las siguientes propiedades:

$$\begin{cases} z_1 = |z_1| e^{i\theta_1}, & \theta_1 = \operatorname{Arg}(z_1) \\ z_2 = |z_2| e^{i\theta_2}, & \theta_2 = \operatorname{Arg}(z_2) \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{(\theta_1 + \theta_2)i} \\ \frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{|z_1|}{|z_2|} \right) e^{(\theta_1 - \theta_2)i} \\ z_1^n = |z_1|^n e^{n\theta_1 i} \end{cases}$$

6.3. Topología en el Plano Complejo

En esta sección vamos a ver diferentes conceptos sobre la organización geométrica de $\mathbb{C}$ en diferentes regiones del plano complejo.

6.3.1. $\mathbb{C}$ no es un Conjunto Ordenado

El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ se puede organizar geoméricamente en la denominada *recta real* (unidimensional), de forma que se trata de un *conjunto ordenado* donde puede establecerse una *relación de orden* entre sus elementos¹².

Sin embargo, como la disposición geométrica del conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ se tiene que realizar a través del *plano complejo* (bidimensional), se pierde la propiedad de orden en este conjunto.

En $\mathbb{C}$ no se puede establecer ninguna **relación de orden**¹³, de forma que la siguiente expresión no tiene sentido.

$$1 + 2i \leq 3i \quad \Longleftarrow \quad \text{Incorrecto}$$

6.3.2. Distancia en $\mathbb{C}$

En $\mathbb{R}$ la distancia entre dos número a y b se define a través del *valor absoluto* de su diferencia:

$$d(a, b) = |a - b| = |b - a|$$

este valor hace referencia a la separación de ambos números en la recta real.

En $\mathbb{C}$ también se puede definir la distancia entre dos números refiriéndonos a la separación entre ambos en el plano complejo. Para ello se utiliza el concepto de *módulo*¹⁴ de un número complejo que es una generalización del concepto de *valor absoluto*.

Definición 6.15. Distancia en $\mathbb{C}$

La **distancia** euclídea entre dos números complejos z y w se define a través del *módulo* de la diferencia de ambos

$$d(z, w) = |z - w| = |w - z|$$

¹²El que está más a la izquierda es más pequeño que el que está a la derecha.

¹³Expresiones que involucran símbolos como: $>$, $\geq$, $<$, $\leq$.

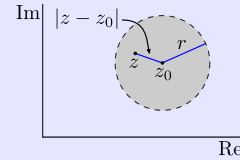
¹⁴Ver la [Sección 6.2.3, página 189](#).

6.3.3. Regiones Básicas en $\mathbb{C}$

Definición 6.16. Entornos o Disco Abierto

Se denomina **entorno** o **disco abierto** de centro $z_0 \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$ al conjunto de los infinitos puntos z interiores al círculo de centro z_0 y radio r .

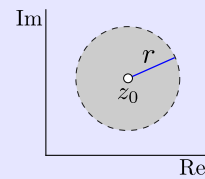
$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$



Definición 6.17. Entorno o Disco Perforado

Se denomina **entorno perforado** o **disco perforado** de centro $z_0 \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$ al entorno de centro z_0 y radio r excepto el propio z_0 .

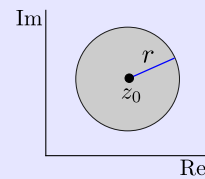
$$0 < |z - z_0| < r$$



Definición 6.18. Entorno o Disco Cerrado

Se denomina **entorno** o **disco cerrado** de centro $z_0 \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$ al conjunto de los infinitos puntos z dados por:

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$$



6.3.4. Conjuntos Básicos en $\mathbb{C}$

Definición 6.19. Tipos de Puntos

Dado un conjunto S de números complejos se denomina:

- **Punto interior** de S : cualquier z_0 que tiene algún entorno contenido en S .
- **Punto exterior** de S : cualquier z_0 que tiene algún entorno que no contiene ningún punto de S .
- **Punto frontera** de S : cualquier z_0 que no es ni punto interior ni punto exterior de S .
- **Punto de acumulación**¹⁵ de S : cualquier $z_0 \in \mathbb{C}$ si todos sus entornos perforados contienen al menos un punto de S .

Ejemplo 6.1. Puntos frontera.

La circunferencia $|z| = 1$ está formada por los puntos frontera del disco abierto $|z| < 1$ y del disco cerrado $|z| \leq 1$.

¹⁵Un punto de acumulación de un conjunto es aquel que está arbitrariamente próximo al conjunto sin pertenecer necesariamente a él. Puede estar en el interior o en la frontera.

Definición 6.20. Conjunto Abierto, Cerrado y Cierre

- **Conjunto abierto:** aquel que no contiene ninguno de sus puntos frontera (todos sus puntos son interiores).
- **Conjunto cerrado:** aquel que contiene todos sus puntos frontera (su complementario es abierto).
- **Cierre, adherencia o clausura** de un conjunto es el menor conjunto cerrado que lo contiene.

Ejemplo 6.2. Conjunto abierto, cerrado y cierre.

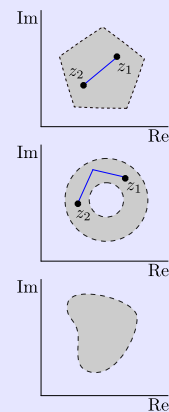
- El conjunto $|z| < 1$ es *abierto* y $|z| \leq 1$ es *cerrado*, siendo el segundo el *cierre* del primero.
- Por otra parte el disco perforado $0 < |z| \leq 1$ no es ni abierto ni cerrado.
- El conjunto $\mathbb{C}$ es abierto y cerrado a la vez ya que no tiene puntos frontera.

Definición 6.21. Conjunto Convexo y Conexo

Un conjunto es **convexo** si el segmento que une a cualquier pareja de puntos en el conjunto, está totalmente contenido en él. Un pentágono regular es convexo.

Un conjunto es **conexo** si todo par de puntos z_1 y z_2 de S se pueden unir por una línea poligonal formada por un número finito de segmentos rectos, contenida por completo en S .

Un conjunto *conexo* se dice que es **simplemente conexo**¹⁶ si todo camino cerrado simple contenido en él encierra solo puntos de él.

**Definición 6.22. Conjunto Acotado y No Acotado**

Se dice que un conjunto es **acotado** si está contenido por completo dentro de alguna circunferencia $|z| < R$. De otra forma se dice que es **no acotado**.

Ejemplo 6.3. Conjunto acotado y no acotado.

- El conjunto $|z| < 1$ es *acotado*.
- La recta real, contenida en $\mathbb{C}$, es un conjunto *no acotado*.

Definición 6.23. Tipos de Conjuntos

- Un conjunto **compacto** es un conjunto *cerrado y acotado*.
- Un **dominio** o **región**¹⁷ es un conjunto *abierto y conexo*.

¹⁶Los conjuntos *simplemente conexos* no contienen agujeros. Ver más detalles en la **Definición 7.25**, página 265.

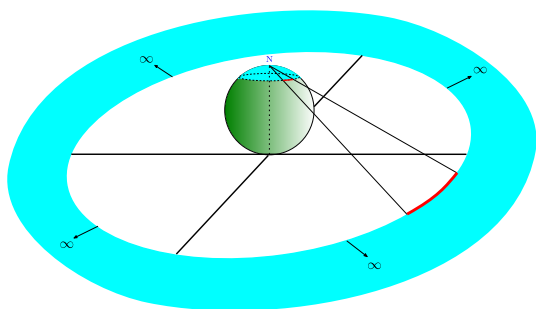
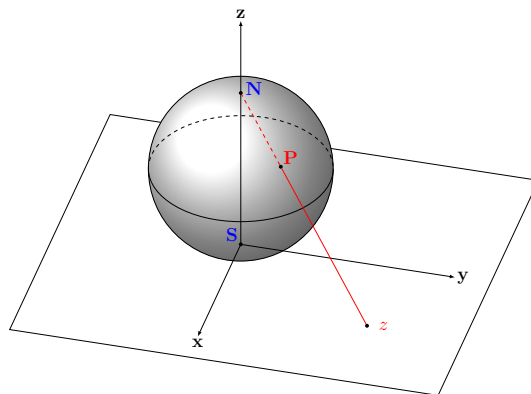
¹⁷También denominada *región abierta*. El *cierre* de una *región abierta* es una *región cerrada*.

6.3.5. Infinito en el Plano Complejo. Esfera de Riemann

La *recta real ampliada* $\overline{\mathbb{R}}$ es el conjunto $\mathbb{R}$ al que se le añaden los elementos ∞ y $-\infty$ de forma que todo real x cumple $-\infty < x < \infty$. En muchas ocasiones es necesario extender el conjunto $\mathbb{C}$ incluyendo el valor ∞ . En este caso no es tan sencillo ya que el plano complejo se extiende en infinitas direcciones.

En el siglo XIX Riemann encontró la solución representado el plano complejo como una proyección estereográfica de una esfera.

La **esfera de Riemann** es una superficie esférica de radio¹⁸ 1 y tangente al plano complejo, de modo que $z = 0$ coincide con el *polo sur* **S** de la esfera¹⁹. El punto diametralmente opuesto a **S** corresponde con el *polo norte* **N** de la esfera. Para cualquier punto z del plano complejo se puede considerar la recta que une z con **N**. Dicha recta cortará a la esfera en otro punto **P**. Por tanto todo número complejo z tiene asociado un punto de la esfera y de igual forma todo punto de la esfera excepto **N** tiene asociado un número complejo z .



A medida que el módulo de z crece, en cualquier dirección del plano complejo, la recta **N**- z se va haciendo paralela al plano complejo, estando **P** más cerca de **N**. De esta forma se asocia a **N** el valor $z = \infty$ llamado **punto del infinito**. Por tanto, *tender a infinito* significa alejarse infinitamente del origen del plano complejo, **en cualquier dirección**²⁰.

- El conjunto $\mathbb{C}$ junto con ∞ se denomina **plano complejo ampliado**, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
- La correspondencia entre el plano complejo ampliado y la esfera de Riemann es una biyección, denominada **proyección estereográfica**.

Un determinado conjunto de puntos en la esfera corresponde con un determinado conjunto de números complejos del plano complejo. Además, cualquier entorno del punto **N** en la esfera corresponde con un entorno del infinito en el plano complejo.

Nota 6.2. La proyección estereográfica de la esfera de Riemann es una *variedad compacta*, es decir un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^3$ y eso hace que tenga unas mejores propiedades matemáticas que el plano complejo que se corresponde con $\mathbb{R}^2$.

6.3.6. Operaciones Aritméticas con Infinito en el Plano Complejo

Las reglas aritméticas del infinito complejo son similares al infinito real, de forma que se cumple:

- $\forall z \in \mathbb{C} : z \pm \infty = \infty$, $\frac{z}{\infty} = 0$, $\infty \cdot \infty = \infty$
- si $z \neq 0 : z \cdot \infty = \infty$, $\frac{\infty}{z} = \infty$, $\frac{z}{0} = \infty$
- si $|z| < 1 : z^\infty = 0$; si $|z| > 1 : z^\infty = \infty$; $\infty^\infty = \infty$.

¹⁸En realidad puede ser de radio arbitrario.

¹⁹Hay otra versión equivalente en la cual la esfera corta al plano.

²⁰Notar que en la recta real hay dos direcciones y a cada una de ellas se asocia un infinito distinto: $+\infty$ y $-\infty$. En el plano complejo solo se considera un infinito independientemente de la dirección que se tome.

En $\mathbb{C}$ existen las mismas **indeterminaciones**²¹ que en el caso real:

$$0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty$$

6.4. Funciones de Variable Compleja

Definición 6.24. Función Compleja de Variable Compleja

Una función compleja de variable compleja $f(z)$ es una *aplicación* del tipo:

$$\begin{array}{ccc} f & : & D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow I \subseteq \mathbb{C} \\ & & \textcolor{blue}{z} \quad \quad \rightarrow \textcolor{red}{w} = f(z) \end{array}$$

donde a cada elemento $z \in D$ le corresponde un único elemento $w \in I$.

- Al conjunto D se le denomina **dominio** de la función y al conjunto I alcanzado por $f(z)$ se denomina **imagen**.
- La variable z se denomina **variable independiente** y la variable $w = f(z)$ se denomina **variable dependiente**.

Las funciones complejas de variable compleja $f(z)$ contienen una gran riqueza de propiedades entre las que destacan:

- Son funciones de una única variable, pero como $\mathbb{C}$ es *isomorfo*²² a $\mathbb{R}^2$, poseen características comunes tanto a las funciones reales de una como de dos variables independientes.
- Las funciones complejas elementales tienen algunas características comunes con sus equivalentes funciones reales, pero con particularidades propias del campo complejo, (ver la [Sección 6.5, página 205](#)).
- El concepto de derivada de una función compleja²³ es similar al caso real, pero las características de los números complejos exigen unas condiciones de derivabilidad muy exigentes.
- La integración en el campo complejo²⁴ posee elementos de la integral de línea para funciones reales de dos variables, pero con unas características muy particulares consecuencia de la naturaleza de $\mathbb{C}$.

Históricamente las funciones complejas han sido estudiadas en tres aspectos distintos:

- Condiciones sobre la derivabilidad de las funciones, (estudiadas por *Augustin-Louis Cauchy*).
- Aplicaciones geométricas de las funciones complejas tratadas como *transformaciones* o *mapeos* geométricos (estudiados por *Georg F. Bernhard Riemann*).
- Desarrollo de funciones en series de potencias con la introducción del concepto de *función analítica* (estudiado por *Karl T. Wilhelm Weierstrass*).

²¹Operaciones matemáticas cuyo resultado no puede ser establecido. Las expresiones matemáticas que producen indeterminaciones deben ser transformadas en expresiones equivalentes que no generen indeterminaciones, de forma que su resultado pueda ser determinado, (ver la [Sección 7.1.2, página 226](#)).

²²Hay una equivalencia uno a uno entre los números del plano real y los números del plano complejo.

²³Ver la [Sección 7.2, página 231](#).

²⁴Ver la [Sección 7.5, página 250](#).

6.4.1. Parte Real e Imaginaria de una Función Compleja

Definición 6.25. Parte Real e Imaginaria de una Función Compleja

Toda función compleja,

$$w = f(z) \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} z = x + iy \\ w = u + vi \end{array} \right\} \implies f(x + iy) = u + vi$$

se puede expresar por medio de un par de *funciones reales*²⁵ $u(x, y)$ y $v(x, y)$ de la forma:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \implies \left\{ \begin{array}{ll} u(x, y) & : \text{Parte Real de la Función Compleja} \\ v(x, y) & : \text{Parte Imaginaria de la Función Compleja} \end{array} \right.$$

A veces es más conveniente utilizar las coordenadas polares r y θ para obtener las partes real e imaginaria de una función compleja:

$$f(z) = f(re^{i\theta}) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$$

Ejercicio 6.2. Obtener la parte real e imaginaria de la siguiente función compleja:

$$f(z) = \frac{1}{z} \quad ; \quad z \neq 0$$

- Forma binómica

$$f(z) = f(x + iy) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{(x^2 + y^2)} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

- Coordenadas polares

$$f(z) = f(re^{i\theta}) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{1}{r}(\cos \theta + i \sin \theta) = \frac{\cos(-\theta)}{r} + i \frac{\sin(-\theta)}{r} = \frac{\cos \theta}{r} - i \frac{\sin \theta}{r}$$

6.4.2. Método de Milne-Thomson

En algunos casos es posible recuperar la forma $f(z)$ de una función compleja definida a través de sus partes real e imaginaria $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ mediante un método simple denominado de *Milne-Thomson*²⁶, el cual se basa en determinar el valor de la función $f(x + iy)$ en los puntos $y = 0$ de la forma:

$$f(x + iy) \xrightarrow{y=0} f(x + i0) = u(x, 0) + iv(x, 0) = f(x)$$

obteniéndose una función *compleja* que depende únicamente de una variable x . Sustituyendo la variable real x por la variable compleja z se obtiene la forma de la función $f(z)$.

El proceso del *método de Milne-Thomson* se puede resumir haciendo el cambio de variables $x = z$ e $y = 0$, de la forma $f(x + iy) = f(z + 0i) = f(z)$.

Nota 6.3. El método Milne-Thomson solo es válido en los puntos donde la función $f(z) = f(x + iy)$ es *holomorfa*²⁷.

²⁵Se trata de funciones escalares de dos variables: $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

²⁶Louis Melville Milne-Thomson (1891-1974), matemático inglés.

²⁷Ver la [Sección 7.3, página 243](#).

Ejercicio 6.3. Encontrar la forma $f(z)$ de la siguiente función compleja:

$$f(x + iy) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Aplicando el método de Milne-Thomson se tiene:

$$f(z + 0i) = \frac{z}{z^2 + 0^2} - i \frac{0}{z^2 + 0^2} = \frac{z}{z^2} = \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(z) = \frac{1}{z}}$$

Podemos obtener las partes real y compleja de esta función para comprobar la validez del resultado obtenido:

$$f(z) = f(x + iy) = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

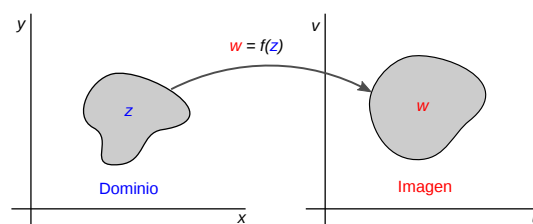
Como se verá en la [Sección 7.4, página 245](#) el *método de Milne-Thomson* también es útil en la determinación de funciones *holomorfas* conociendo únicamente la parte real o compleja de la función o alguna de sus primeras derivadas parciales.

6.4.3. Representación Gráfica

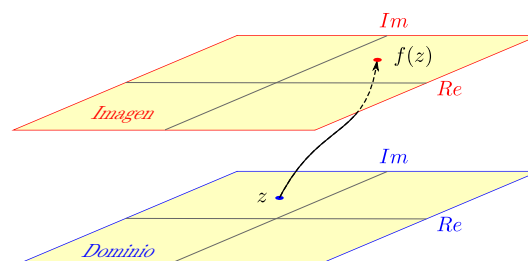
Las funciones de variable compleja,

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

asocian a cada número complejo $z = x + iy$ otro número complejo $w = u + iv$.



Las funciones complejas son análogas a las funciones reales $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lo que significa que necesitaríamos un espacio de 4 dimensiones para su representación. Naturalmente esto no es posible realizarlo de una forma directa, y aunque existen diferentes formas para representar gráficamente información importante de una función compleja, ninguna de ellas es capaz de aportar la información completa de la función.



Vamos a ver aquí algunos de los tipos de representaciones gráficas de funciones de variable compleja más característicos, sus aplicaciones y limitaciones.

Representación de las Partes Reales e Imaginarias

Como hemos visto, toda función compleja se puede expresar mediante dos funciones reales $u(x, y)$ y $v(x, y)$ correspondientes respectivamente a la parte real e imaginaria de la función.

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Cada una de estas funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ corresponden a superficies del tipo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que pueden ser fácilmente representadas gráficamente.

Por tanto, para cualquier función compleja se puede obtener información de su comportamiento representando sus partes real y compleja.

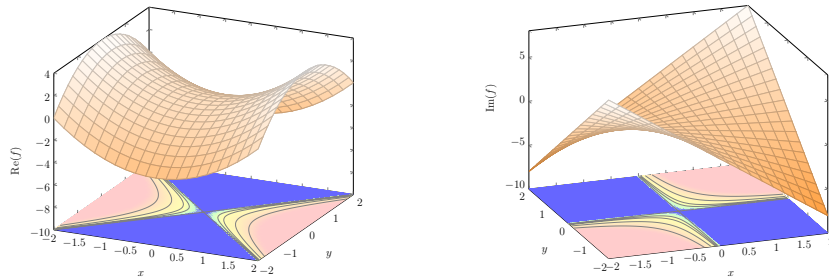
Ejercicio 6.4. Representar gráficamente la parte real e imaginaria de la siguiente función compleja:

$$f(z) = z^2$$

Lo primero es obtener las partes real e imaginaria de la función.

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{Re}(f) = x^2 - y^2 \\ \operatorname{Im}(f) = 2xy \end{cases}$$

Cada una de estas funciones se pueden representarse gráficamente mediante una superficie en 3D²⁸.



Generalmente este tipo de gráficas no da una información determinante, ya que muestran las características de cada parte, real y compleja, por separado, sin poder inferir cuál es el comportamiento de $f(z)$.

Representación del Módulo y Argumento

Toda función compleja se puede expresar como²⁹:

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |f| = \sqrt{u(x, y)^2 + v(x, y)^2} \\ \arg(f) = \operatorname{atan2}(v(x, y), u(x, y)) \end{cases} = |f|e^{i\arg(f)}$$

De igual forma que antes, cada una de estas funciones $|f|$ y $\arg(f)$ corresponden a superficies del tipo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que pueden ser fácilmente representadas gráficamente.

Debido a la complejidad de las expresiones, en estos casos es más cómodo trabajar en la forma exponencial, como se verá en el próximo ejercicio.

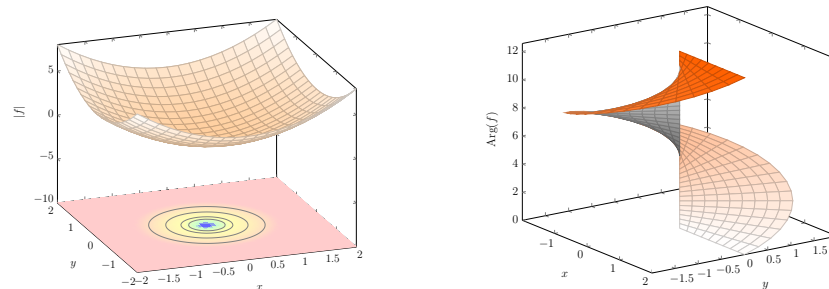
Ejercicio 6.5. Representar gráficamente el módulo y argumento de la siguiente función compleja:

$$f(z) = z^2$$

Trabajando en la forma exponencial se tiene:

$$f(z) = z^2 = (re^{i\theta})^2 = r^2 e^{2i\theta} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |f| = r^2 = x^2 + y^2 \\ \arg(f) = 2\theta = 2\operatorname{atan2}(y, x) \end{cases}$$

Estas funciones pueden representarse gráficamente mediante una superficie en 3D de la siguiente forma:



²⁸En la base de cada gráfica aparece un mapa de contorno con las curvas de nivel de cada superficie.

²⁹Ver la definición de la función $\operatorname{atan2}(y, x)$ en la [Definición 6.11, página 191](#).

La información que da el módulo de la función suele ser un elemento importante en el estudio de la función y suele utilizarse en representaciones gráficas sola o combinada con alguna otra información. La información del argumento no suele utilizarse debido a la complejidad de su comportamiento (ver la [Sección 6.5.5, página 210](#)).

Representación del Campo de Direcciones

Como hemos comentado una función compleja $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ es análoga a una función real vectorial de la forma $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Esta función se puede interpretar como que a cada punto del plano $x - y$ se le asocia un vector de coordenadas u, v .

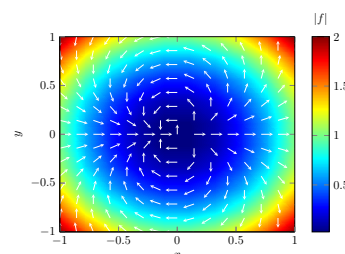
Ejercicio 6.6. Representar gráficamente el campo vectorial de direcciones asociado a la siguiente función:

$$f(z) = z^2 \quad \implies \quad z \in \mathbb{C}$$

Como hemos visto en el [Ejercicio 6.4, página 200](#):

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \quad \implies \quad \begin{cases} \operatorname{Re}(f) = u(x, y) = x^2 - y^2 \\ \operatorname{Im}(f) = v(x, y) = 2xy \end{cases}$$

Con estos datos se puede representar la siguiente gráfica. Por claridad, el módulo de las flechas está normalizado para que todas midan lo mismo. La longitud de los módulos, correspondiente a $|f|$, está dada en forma de escala de color mostrada a la izquierda.



Esta representación resulta útil en aplicaciones en campos como electricidad y mecánica de fluidos y suelen estar relacionadas con soluciones de ecuaciones diferenciales, donde la representación vectorial y la interpretación física del fenómeno encajan muy bien con las funciones de variable compleja.

Representación de la Transformación o Mapeo

Una función compleja $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ se puede considerar como la *transformación* de una información en el plano $x - y$ en otra distinta en el plano $u - v$.

Esta **transformación** o **mapeo** se puede representar gráficamente, siendo una forma común de hacerlo comparando la transformación que sufren los valores iniciales $x = cte$ e $y = cte$.

Ejercicio 6.7. Representar gráficamente la transformación o mapeo que realiza la siguiente función compleja sobre rectas horizontales y verticales.

$$f(z) = z^2$$

Como hemos visto en el [Ejercicio 6.4, página 200](#):

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \quad \implies \quad \begin{cases} \operatorname{Re}(f) = u(x, y) = x^2 - y^2 \\ \operatorname{Im}(f) = v(x, y) = 2xy \end{cases}$$

Entonces:

- Rectas horizontales: $y = k$ ($k = cte$)

Determinamos los valores de las nuevas variables u y v para estos valores:
$$\begin{cases} u(x, y) = x^2 - k^2 \\ v(x, y) = 2xk \end{cases}$$

Ahora eliminamos la variable x de ambas expresiones:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 = u + k^2 \\ x^2 = \frac{v^2}{4k^2} \end{array} \right\} \quad u + k^2 = \frac{v^2}{4k^2} \quad \implies \quad \boxed{u = \frac{v^2}{4k^2} - k^2} \quad (\text{parábolas giradas})$$

- Rectas verticales: $x = k$ ($k = cte$)

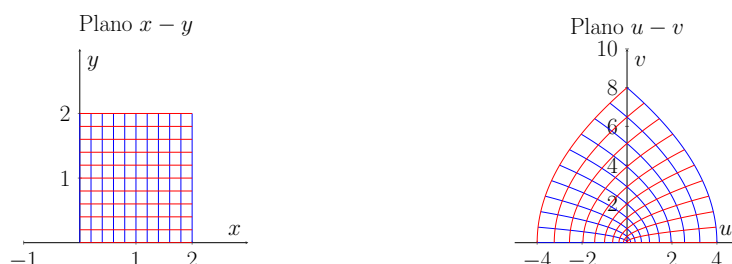
Determinamos los valores de las nuevas variables u y v para estos valores:
$$\begin{cases} u(x, y) = k^2 - y^2 \\ v(x, y) = 2ky \end{cases}$$

Ahora eliminamos la variable y de ambas expresiones:

$$\begin{cases} y^2 = k^2 - u \\ y^2 = \frac{v^2}{4k^2} \end{cases} \quad k^2 - u = \frac{v^2}{4k^2} \quad \Rightarrow \quad u = k^2 - \frac{v^2}{4k^2}$$

Que son simétricas a las anteriores con respecto al eje v .

Con estos datos se puede representar la transformación dada por la función.



En la gráfica izquierda se han dibujado rectas horizontales (en rojo) y verticales (en azul) en el plano $x - y$, correspondientes con la información original. En la gráfica derecha se ha dibujado la transformación que sufren dichas rectas en el plano $u - v$ por efecto de la función $f(z)$.

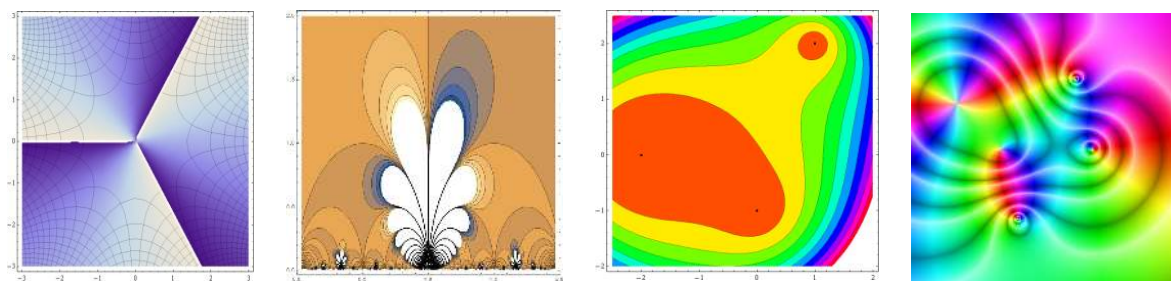
Este tipo de representación tiene aplicaciones geométricas, como por ejemplo en el diseño de elementos aeronáuticos como alas, ya que permiten la transformación de geometrías complicadas en otras más simples, bajo determinados mapeos, que posibilitan el estudio teórico de complicados fenómenos.

Representación mediante Coloración del Dominio

En estas representaciones se colorea, siguiendo diferentes patrones, el dominio de la función de acuerdo al valor del argumento de $f(z)$ y se combina con gráficos basados en el valor del módulo de $f(z)$.

De esta manera en un mismo gráfico se puede apreciar la variación de las dos componentes de la función en el plano $\mathbb{C}$, lo que permite en determinados casos, la localización de puntos notables de la función.

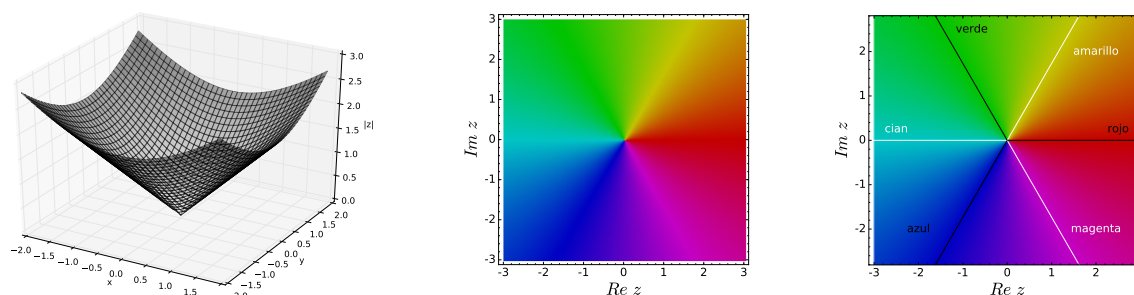
En las siguientes gráficas se muestran algunos de estos tipos de representaciones.



Vamos a ver uno de estos métodos que es bastante utilizado, basado en la codificación de color HLS³⁰, donde se asocia a cada número complejo $z = x + iy = |z|e^{i\theta}$ unas únicas características cromáticas: el color representa el argumento θ y el brillo e intensidad representan su módulo $|z|$.

³⁰Siglas en inglés de *Hue* (matiz), *Saturation* (saturación) y *Lightness* (luminosidad), donde el matiz indica la variedad de color, la saturación es su intensidad y la luminosidad es el brillo. También se puede utilizar el esquema HSV que es similar

Como ejemplo vamos a representar gráficamente la función compleja $f(z) = z$ que asocia a cada punto del plano complejo $z = x + iy$ el mismo valor z , de esta forma se puede identificar fácilmente el color asociado a cada número complejo, como muestran las siguientes gráficas.

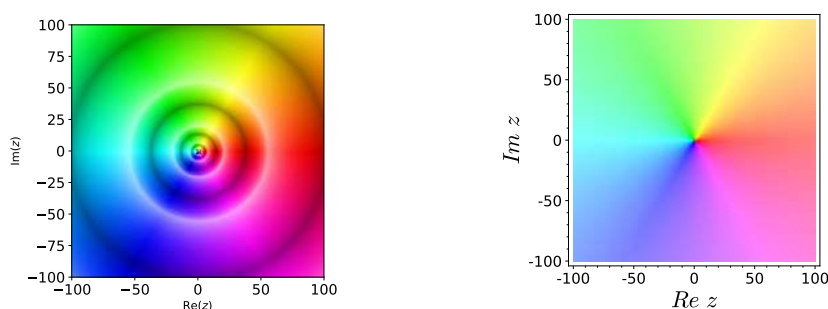


En la figura de la izquierda se representa $|f(z)| = |z|$ donde vale cero en el origen y aumenta de forma lineal en todas las direcciones a medida que nos alejamos de él. En la gráfica central se ha representado en forma de *coloración del dominio* esta misma función³¹. Con este código de color los números reales positivos son rojos y los reales negativos son cian, mientras que los números imaginarios puros positivos son verdesos y los imaginarios negativos son azulados (ver gráfica derecha). El número complejo $z = 0$ es negro y a medida que aumenta el módulo aumenta el brillo en todos los colores de forma que tienden al blanco que representa el infinito³².

Coloración del Dominio en Escala Logarítmica

Dos de los puntos más característicos de una función³³ vienen dados por sus *ceros* (puntos donde se anula la función) y por sus *infinitos* (puntos donde la función se hace infinito). Como el rango de variación entre ambos es infinito, esto hace que resulte complicado buscar una escala apropiada³⁴ para su representación, ya que necesitamos valores bajos para destacar los *ceros* y valores altos para los *infinitos*. Esto puede mejorarse en algunos casos realizando una representación en **escala logarítmica** que permita percibir las variaciones en tramos³⁵ b^n donde b es la base del logaritmo usado.

Para diferenciar cada tramo se utilizan distintas estrategias de las cuales vamos a ver una de ellas.



En la figura de la izquierda se muestra la función $f(z) = z$ representada mediante coloración del dominio con escala logarítmica natural (en base e), en un dominio grande de $(-100, 100)$. Para diferenciar cada uno de los tramos se simula una especie de *hinchamiento* 3D de la zona, variando de forma apropiada la *saturación* y *luminosidad* en función del módulo de la función en ese tramo. Cada uno de los tramos está comprendido entre dos halos oscuros y en su valor medio aparece un halo blanco brillante. Notar que la variación de color correspondiente al argumento del valor de la función se realiza de la misma forma que en la representación mediante coloración del dominio sin escala logarítmica. En el centro de la figura aparece un punto que corresponde con el cero de la función y cada anillo representa la variación de la función en un tramo de su logaritmo neperiano del módulo. De esta forma podemos ver claramente las variaciones de la función en cada tramo.

³¹Los colores primarios (rojo, verde y azul) y secundarios (amarillo, cian (azul celeste) y magenta (fucsia)) aparecen separados por $2\pi/3$ radianes, los primeros empezando por 0 y los segundos por $\pi/3$.

³²Como se verá posteriormente esto permitirá detectar en negro los ceros de la función y en blanco sus valores infinitos.

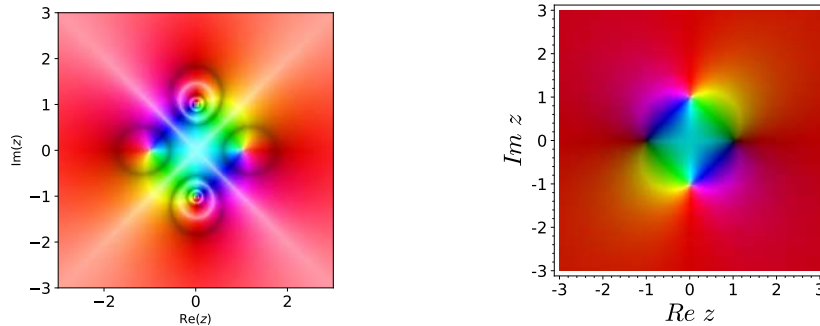
³³Aquellos que definen el comportamiento general de la función.

³⁴Donde se puedan apreciar las propiedades de la función.

³⁵El primer tramo es de 0 a b , el segundo de b a b^2 , el tercero de b^2 a b^3 , y así sucesivamente.

En la figura de la derecha se ha representado la misma función en el mismo dominio mediante el mismo esquema de color pero sin escala logarítmica. En este caso vemos que a medida que nos alejamos del origen el módulo crece y por tanto el color se va haciendo más blanquecino sin percibir claramente las variaciones de la función (que en este caso no son muchas al ser un crecimiento lineal).

En las siguientes figuras se muestra una representación gráfica en escala de colores de la función $f(z) = (z^2 - 1)/(z^2 + 1)$, en escala logarítmica natural a la izquierda y en escala lineal a la derecha.

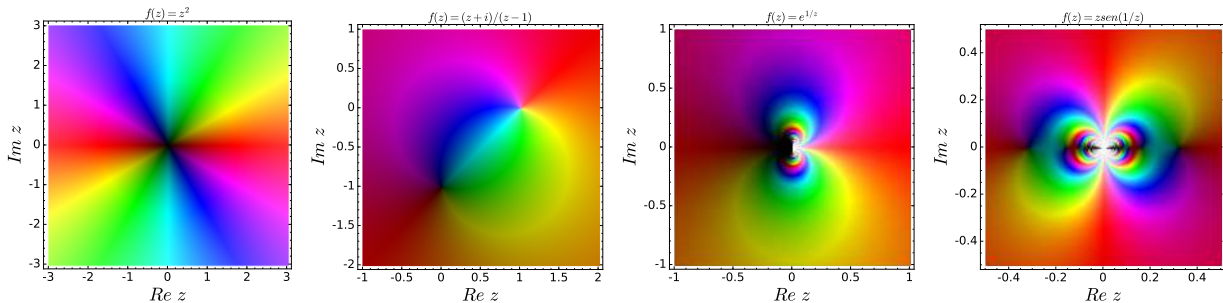


Esta función es cero en $z = \pm 1$ e infinito en $z = \pm i$. Se observa como en escala logarítmica los puntos característicos ceros e infinitos quedan bien diferenciados, aunque en otros casos no queda tan claro.

Ejercicio 6.8. Utilizando algún software matemático³⁶ representar gráficamente mediante una *coloración del dominio* de las siguientes funciones complejas.

a) $f(z) = z^2$ b) $f(z) = \frac{z+i}{z-1}$ c) $f(z) = e^{1/z}$ d) $f(z) = z \operatorname{sen} \frac{1}{z}$

En las siguientes gráficas se muestran los resultados (en escala lineal) obtenidos para las cuatro gráficas del problema y comentándose brevemente algunas particularidades de ellas.

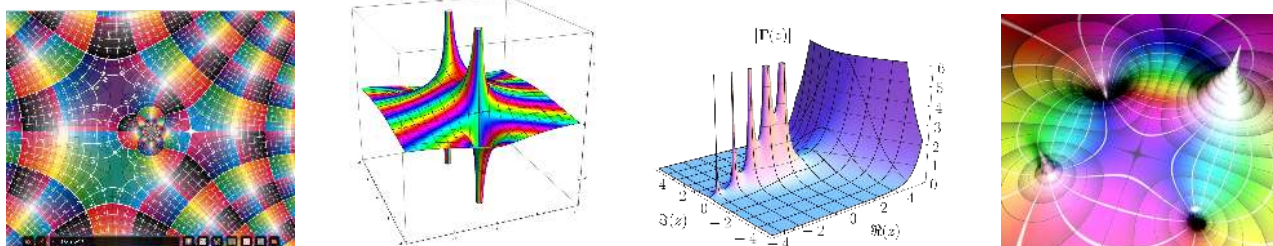


- a) $f(z) = z^2$ (primera figura). La función se anula en el origen (zona oscura), creciendo el módulo rápidamente a medida que nos alejamos del origen y tomando por tanto colores más brillantes.
- b) $f(z) = (z+i)/(z-1)$ (segunda figura). En este caso la función se anula en $z = -i$ (punto negro) y se hace infinito en $z = 1$ (punto blanco).
- c) $f(z) = \exp(1/z)$ (tercera figura). La función se hace infinito en $z = 0$. Cuando nos acercamos a cero por la derecha, $1/z$ es muy grande y positivo, por lo que la gráfica tiene un color blanco en esa zona. Sin embargo, cuando nos acercamos a cero por la izquierda, $1/z$ es grande pero negativo y por tanto la gráfica en esa zona tiene un color oscuro.
- d) $f(z) = z \operatorname{sen}(1/z)$ (cuarta figura). La función seno real está acotada entre los valores $[-1, 1]$. Sin embargo esto no ocurre con la función seno compleja, que tiende a infinito cuando $|z| \rightarrow \infty$ (ver la Sección 6.5.9, página 217) de ahí que la gráfica sea blanca cerca del origen. También tiene infinitos ceros en el eje real para los valores $\frac{1}{n\pi}$ con $n \in \mathbb{Z}$ (puntos negros).

³⁶Por ejemplo: <https://samuelj.li/complex-function-plotter>.

Representación mediante Combinación de Técnicas

Suele ser habitual la combinación de las distintas técnicas vistas en esta sección, en función del aspecto de la función y del objetivo de su estudio. En la siguientes gráficas se muestran algunos ejemplos en los que no entraremos en detalles.



6.5. Funciones Complejas Elementales

Vamos a estudiar las características más importantes de las funciones de variable compleja elementales.

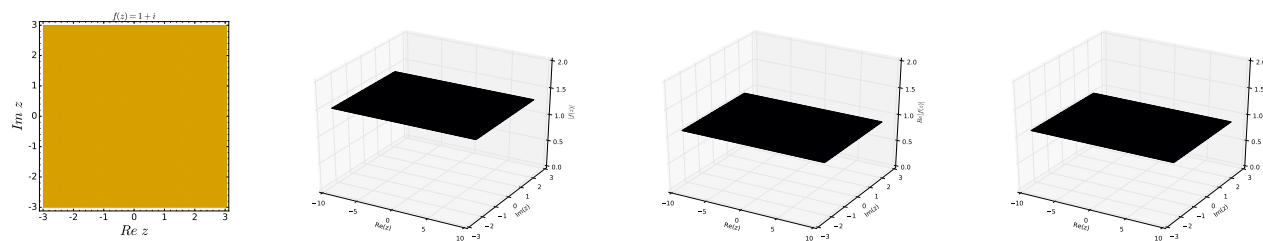
6.5.1. Función Constante Compleja

La función constante no varía su valor en todo el plano complejo, estando por tanto definida para todo $\mathbb{C}$.

$$f(z) = z_0 = x_0 + iy_0 = r_0 e^{i\theta_0}$$

Su representación gráfica muestra un color constante en todo el dominio.

En la siguiente figura se muestran las gráficas HLS (izquierda), módulo (centro izquierda), parte real (centro derecha) y parte imaginaria (derecha) de la función compleja constante $f(z) = 1 + i$.



6.5.2. Función Polinómica Compleja

Definición 6.26. Polinomio Complejo

Una función polinómica compleja de grado n es aquella que se puede expresar como una combinación lineal de potencias de exponente *natural* de z .

$$P(z) = z_0 + z_1 z + z_2 z^2 + z_3 z^3 + \dots + z_n z^n \quad ; \quad z_i \in \mathbb{C} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

Las funciones polinómicas complejas están definidas en todo el plano complejo y se suelen representar mediante letras mayúsculas como también se hace con los polinomios reales.

Al igual que todas las funciones complejas, se pueden expresar como suma de dos funciones reales para sus partes real y compleja³⁷, así como mostrarse en forma polar.

$$P(z) = Q(x, y) + iR(x, y) = r(x, y)e^{i\theta(x, y)}$$

donde $Q(x, y)$ y $R(x, y)$ son funciones polinómicas reales de $\mathbb{R}^2$.

Hay que tener cuidado con la definición de polinomio complejo, ya que no toda combinación de polinomios $R(x, y)$ y $Q(x, y)$ dan lugar a polinomios complejos.

Ejemplo 6.4. Función no polinómica compleja.

La función compleja³⁸:

$$f(z) = (1 + x) + (1 + x^2)i$$

no es un polinomio complejo ya que no puede expresarse de la forma $az^2 + bz + c$. Notar que un polinomio complejo de segundo grado tiene que tener la forma:

$$a(x + yi)^2 + b(x + yi) + c = a(x^2 - y^2 + 2xyi) + b(x + yi) + c = [a(x^2 - y^2) + bx + c] + iy(2x + b)$$

por tanto los términos cuadráticos x^2 no aparecen en la parte imaginaria.

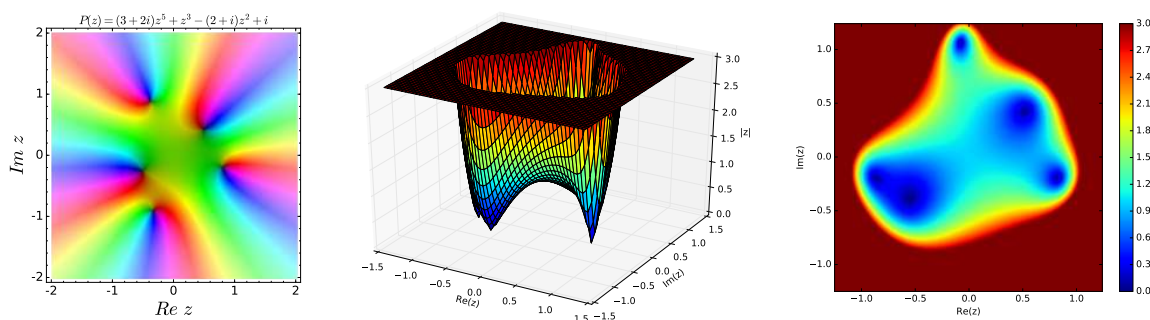
Como consecuencia del *teorema fundamental del álgebra*, todo polinomio complejo de grado n , tiene exactamente n raíces complejas, teniendo en cuenta sus multiplicidades.

Ejercicio 6.9. Encontrar gráficamente los ceros del siguiente polinomio complejo.

$$P(z) = (3 + 2i)z^5 + z^3 - (2 + i)z^2 + i$$

En la siguiente figura se muestra en la gráfica de la izquierda la *coloración del dominio* de la función con los cinco ceros del polinomio complejo correspondiente a los pequeños puntos negros de la imagen. En el centro se muestra una sección de la gráfica 3D del módulo de la función, donde los mínimos corresponden con los ceros del polinomio (la escala de color en este caso corresponde a los valores bajos en azul y altos en rojo). Este tipo de gráficas en muchos casos no resultan suficientemente claras para explicar el comportamiento de una función compleja. En la gráfica de la derecha se muestra el mapa de contorno correspondiente al módulo de la función, donde de una forma más clara se pueden observar las raíces del polinomio (puntos negros).

Las gráficas de las partes real e imaginaria de la función en este caso no producen información relevante.



³⁷Ver la Sección 6.4.1, página 198.

³⁸En esta función no puede aplicarse el método de *Milne-Thomson* (Sección 6.4.2, página 198) para recuperar la función $f(z)$ en la variable z , ya que esta función no es *holomorfa* (Sección 7.3, página 243).

6.5.3. Función Racional Compleja

Definición 6.27. Función Racional Compleja

Una función racional compleja viene dada por el cociente de dos polinomios complejos.

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad ; \quad Q(z) \neq 0$$

Al igual que en el caso real, las funciones racionales complejas están definidas en todo punto del plano complejo excepto en los ceros del polinomio $Q(z)$.

Ejercicio 6.10. Encontrar el dominio de la siguiente función racional compleja y representarla gráficamente.

$$R(z) = \frac{z^3 - z^2 + z - 2}{(z - 1 + i) [iz^2 + (1 - i)z - \frac{1}{4}]}$$

Primeramente encontramos los ceros del denominador:

$$(z - 1 + i) \left[iz^2 + (1 - i)z - \frac{1}{4} \right] = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} z - 1 + i = 0 \implies z_1 = 1 - i \\ iz^2 + (1 - i)z - \frac{1}{4} = 0 \end{array} \right.$$

Resolvemos la ecuación cuadrática de la forma tradicional:

$$z = \frac{-(1 - i) \pm \sqrt{(1 - i)^2 + 4i\frac{1}{4}}}{2i} = \frac{-(1 - i) \pm \sqrt{-i}}{2i} \quad ; \quad -i = \left\{ \begin{array}{l} |z| = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \\ \theta = -\pi/2 \end{array} \right\} = e^{-i\pi/2}$$

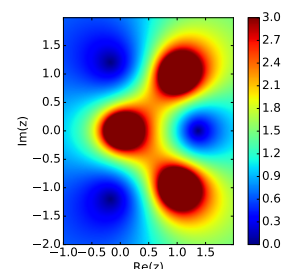
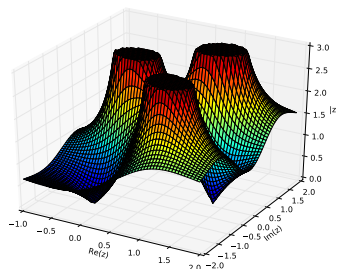
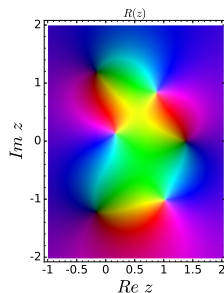
$$\sqrt{-i} = \sqrt{e^{-i\pi/2}} = \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{1} = 1 \\ \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \left\{ \begin{array}{l} k = 0 : \phi_1 = \frac{\theta}{2} = \frac{-\pi}{4} \\ k = 1 : \phi_2 = \frac{-\pi/2 + 2\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} \end{array} \right\} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \{e^{-i\pi/4}, e^{i3\pi/4}\} = \\ \{\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_2 = \frac{-1 - i + \frac{\pi}{4} - i\frac{\pi}{4}}{2i} = \frac{\pi - 4 - i(\pi + 4)}{8i} = -\frac{i(\pi - 4) + \pi + 4}{8} = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} + i\frac{4 - \pi}{8} \\ z_3 = \frac{-1 - i - \frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{4}}{2i} = \frac{-\pi - 4 + i(\pi - 4)}{8i} = \frac{i(\pi + 4) + \pi - 4}{8} = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} + i\frac{4 + \pi}{8} \end{array} \right.$$

Por tanto el dominio de la función es:

$$\mathbb{C} - \{z_1, z_2, z_3\}$$

En la siguiente figura se muestra a la izquierda la gráfica con la *coloración del dominio* donde podemos observar sus tres ceros (pequeños puntos negros) y sus tres puntos donde la función tiende a infinito (puntos blancos), correspondientes a los ceros del polinomio cúbico del denominador. En la gráfica del medio se muestra la representación 3D del módulo de la función y a la derecha el mapa de contorno de esta gráfica. En ambas en azul oscuro aparecen los ceros y en rojo oscuro los valores tendiendo a infinito.



6.5.4. Función Irracional Compleja

Definición 6.28. Raíz n -ésima de un Número Complejo

Un número complejo $z \neq 0$ tiene n raíces n -ésimas dadas por la siguiente fórmula:

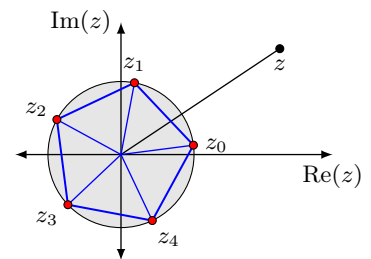
$$z^{1/n} = \sqrt[n]{z} = r e^{i\phi} \implies \begin{cases} r = \sqrt[n]{|z|} > 0 & (\text{siempre existe y es único}) \\ \phi = \frac{\arg(z) + 2k\pi}{n} & ; k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{cases} ; n \in \mathbb{N} \quad (6.2)$$

Fórmula en forma exponencial: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}i} ; k = 0, 1, \dots, n-1$

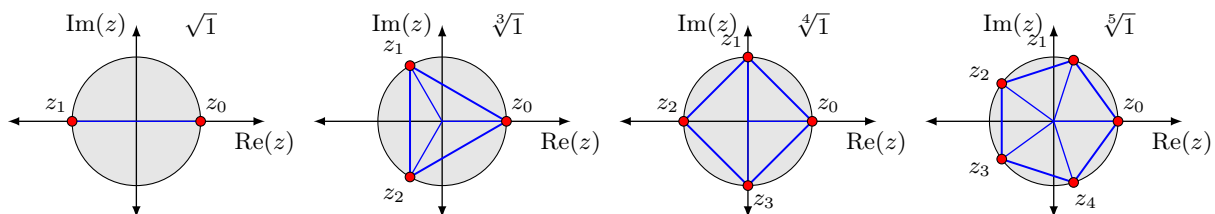
Si $n > 2$, las n raíces n -ésimas de un complejo z forman al representarlas en el plano complejo un *polígono regular*³⁹ de n lados inscrito en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{|z|}$.

En la siguiente figura se muestra gráficamente las cinco raíces z_k con $k = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ de $\sqrt[5]{z}$, siendo $z = 4 + 3i$. Vemos que las raíces forman en el plano complejo un pentágono inscrito en una circunferencia de radio $\sqrt[5]{|z|}$ y centro el origen.

Notar que el argumento de z_0 es $\theta/5$, siendo θ el argumento de z , y el argumento del resto z_k es $(\theta + 2k\pi)/5$.



Ejemplo 6.5. Representación gráfica de las raíces segunda, tercera, cuarta y quinta de la unidad.



Antes de analizar en detalle las funciones irracionales, vamos a ver la definición de ramas de una raíz n -ésima compleja.

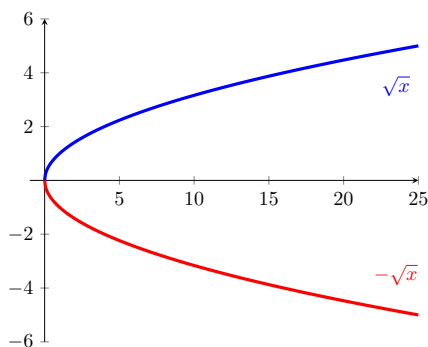
Definición 6.29. Ramas y Raíz Principal

- Cada una de las n raíces n -ésimas z_k se denominan **ramas** de la función multivaluada $f(z) = \sqrt[n]{z}$.
- La rama para $k = 0$ se denomina **raíz n -ésima principal**.

En los casos prácticos donde se necesita una función univaluada, de forma general las funciones irracionales se definen a través del valor de la rama principal de dicha raíz.

Para entender las ramas de una raíz n -ésima compleja vamos a ver su equivalente en el caso real de la raíz cuadrada $\sqrt{x}$, donde $x \in \mathbb{R}$.

³⁹Si $n = 2$ se obtiene una recta.



El valor de $\sqrt{x}$ solo está definido para $x \geq 0$, siendo su resultado bivaluado, ya que si $x = r^2$ con $r > 0$ entonces $\sqrt{x} = \pm r$.

Por tanto hay dos funciones asociadas al valor de $\sqrt{x}$, la función $f(x) = +\sqrt{x}$ (en azul en la gráfica) y la función $f(x) = -\sqrt{x}$ (en rojo en la gráfica).

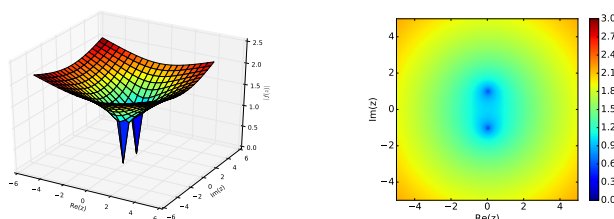
Cada una de ellas corresponde con una *rama* de $\sqrt{x}$, tomándose por defecto de forma general la *rama* con valores positivos, correspondiendo este valor a la *rama principal* de la raíz.

En las raíces n -ésimas complejas $\sqrt[n]{z}$ con $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, hay asociadas n funciones complejas (ramas), correspondientes a los valores dados por la [Ecuación 6.2, página 208](#) para $k = 0, 1, \dots, (n-1)$. De ellas se toma por defecto de forma general la *rama principal* correspondiente a $k = 0$.

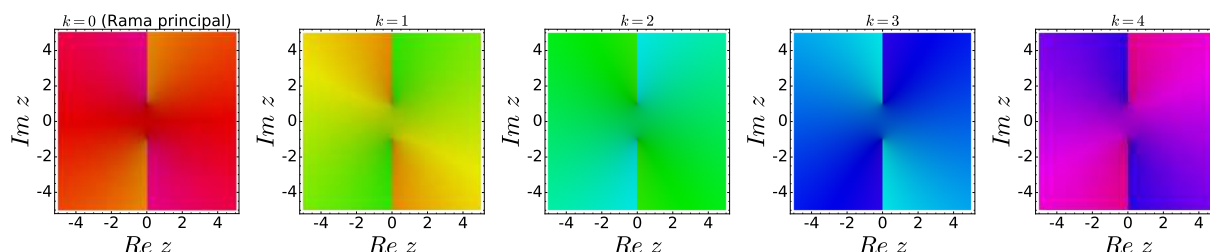
Ejercicio 6.11. Representar gráficamente todas las ramas de la siguiente función:

$$f(z) = \sqrt[5]{z^2 + 1}$$

Para cada valor de z se obtienen cinco valores de la función, en base a la cinco ramas que tiene la raíz quinta. Como hemos visto, cada una de las raíces de una raíz n -ésima son números complejos distintos pero todos ellos con el mismo módulo (ver en el ejemplo anterior como los puntos están sobre una misma circunferencia). Por tanto las cinco ramas poseen una misma gráfica que representa al módulo de la función $|f(z)|$, la cual se muestra en estas gráficas (los dos mínimos que aparecen corresponden a los dos ceros del argumento de la raíz $\pm i$).



Sin embargo, los valores de cada una de las ramas son distintos, como muestran las siguientes gráficas de la *coloración del dominio* de cada una de ellas⁴⁰.



Definición 6.30. Función Irracional

Las funciones irracionales son aquellas cuya expresión matemática presenta un radical de la forma:

$$f(z) = \sqrt[n]{g(z)} = [g(z)]^{\frac{1}{n}}$$

donde $g(z)$ es una función *polinómica* o *racional* y $n > 1$ es un entero.

⁴⁰La línea vertical que se aprecia en cada una de las gráficas será explicada en la [Sección 6.5.5, página 210](#).

- El dominio de una función irracional compleja es⁴¹ $\mathbb{C}$.
- Para que la función irracional sea univaluada es necesario especificar una rama de la raíz.

En las siguientes figuras se muestran la representación gráfica de las *ramas principales* de algunas funciones complejas irracionales sencillas.

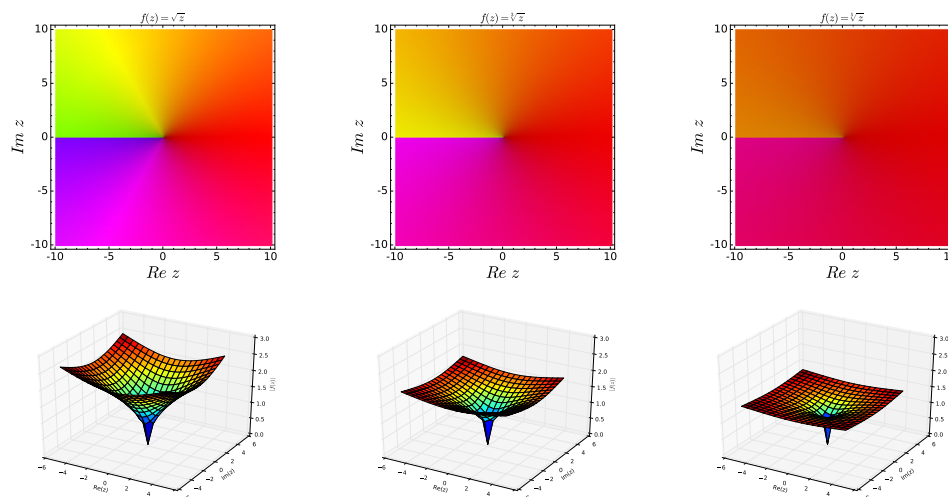


Figura 6.1: Representación gráfica (*coloración del dominio* en la fila superior y gráfica 3D del módulo de la función en la fila inferior) de las funciones complejas irracionales: $\sqrt{z}$ (izquierda), $\sqrt[3]{z}$ (centro) y $\sqrt[5]{z}$ (derecha).

6.5.5. Discontinuidad del Argumento

En todas las gráficas HLS de la anterior **Figura 6.1** se observa una línea horizontal en la parte negativa del eje real que separa dos colores⁴² bien diferenciados. Esto corresponde a una **discontinuidad** de la función en los puntos z de esa línea, debida a que el *argumento principal*⁴³ utilizado en la **Ecuación 6.2, página 208** para calcular la raíz, es una función discontinua, al tomar valores únicamente entre $(-\pi, \pi]$, como muestran las gráficas de la siguiente figura:

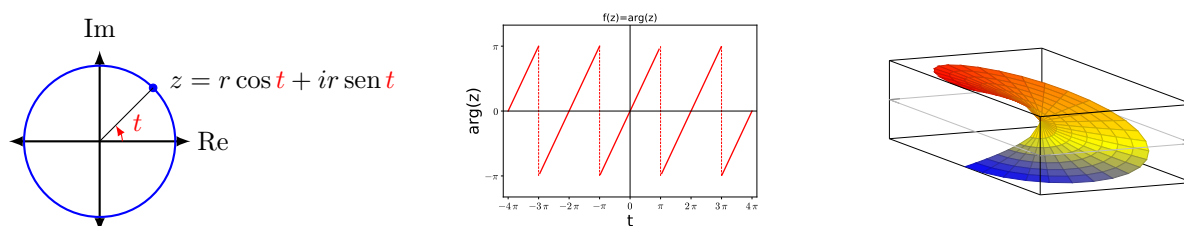


Figura 6.2: Representación gráfica de la función argumento. Se muestran los argumentos de una serie de números complejos dispuestos en una circunferencia de centro origen y radio r (figura izquierda), de forma que $z = r \cos t + i r \sen t$ con $t \in [0, 2\pi]$. Para valores $t \in [0, \pi]$ se cumple que $\arg(z) = t$ pero para valores $t > \pi$ el argumento salta de π a $-\pi$ cumpliéndose $\arg(z) = t - 2\pi$. Esto hace que la función argumento no sea una función continua (figura central). A la derecha se esquematiza la gráfica $f(z) = \arg(z)$ para una porción del plano complejo, donde se observa el salto de discontinuidad en la parte correspondiente al eje real negativo.

Vamos a estudiar con detenimiento la función compleja $f(z) = \sqrt{z}$ para entender esta discontinuidad.

⁴¹Notar que $\sqrt[n]{0} = 0$, siendo $z = 0$ el único número complejo que tiene un único valor para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

⁴²Asociados a valores $f(z)$.

⁴³Ver la **Definición 6.11, página 191**.

Función Compleja $f(z) = \sqrt{z}$

Si $z = a + bi = re^{i\theta}$ con $-\pi < \theta \leq 0$ entonces si $\theta > 0$ entonces $b > 0$ (el número complejo z se encuentra por encima del eje real), y si $\theta < 0$ entonces $b < 0$ (el número complejo z se encuentra por debajo del eje real). Por tanto:

$$f(z) = \sqrt{z} = c + di = \sqrt{re^{i\theta}} = \sqrt{r}e^{i\theta/2} = \begin{cases} \theta > 0 & \implies d > 0 \\ \theta < 0 & \implies d < 0 \end{cases}$$

Esto hace que para $\theta = \pi$ la parte imaginaria del resultado de $\sqrt{z}$ es positiva y para $\theta = -\pi$ la parte imaginaria del resultado de $\sqrt{z}$ es negativa, siendo en ambos casos su parte real cero. Sin embargo ambos valores deberían coincidir, ya que el ángulo π es el mismo que el ángulo $-\pi$. Esto hace que haya una discontinuidad de la función $\sqrt{z}$ en todos los puntos del eje real negativo, donde el valor de la función en esos puntos tiene una parte imaginaria positiva, pero si nos acercamos a esos puntos por la parte inferior del eje real, el valor al que tienden tiene su parte imaginaria negativa, lo que produce la discontinuidad comentada.

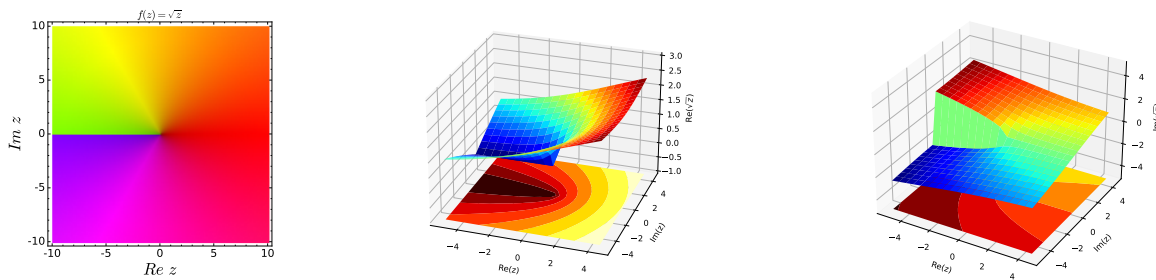


Figura 6.3: Representación gráfica de la función $f(z) = \sqrt{z}$ en forma HSL a la izquierda, la parte real en el centro y la parte imaginaria a la derecha. Se observa como la parte real es continua en todo $\mathbb{C}$ mientras que la parte imaginaria presenta un salto en la parte negativa del eje $\text{Re}(z)$.

Este comportamiento es similar para toda función irracional $f(z) = \sqrt[n]{z}$.

Ejercicio 6.12. Encontrar el dominio de la siguiente función irracional compleja y representarla gráficamente (tomar solo el valor principal de la raíz).

$$f(z) = \sqrt[5]{\frac{z^2 - 1}{z^2 + 2}}$$

Los ceros de la función vienen dados por los ceros del numerador, $z = \pm 1$. La función no estará definida en los ceros del denominador, $z = \pm i\sqrt{2}$. Por tanto,

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{C} - \{\pm i\sqrt{2}\}$$

Como la función es de tipo irracional tendrá una zona de discontinuidad, pero al ser el radicando una función racional la discontinuidad que originalmente (cuando el radicando es z) está situado en la parte negativa del eje real, puede estar desplazada a otra zona del plano complejo. Para determinar esta nueva zona de discontinuidad es necesario encontrar los valores $z = x + iy$ del radicando que dan lugar a números reales negativos⁴⁴ ($x < 0, y = 0$). Para ello:

$$\frac{z^2 - 1}{z^2 + 2} = \frac{(x + iy)^2 - 1}{(x + iy)^2 + 2} = \frac{x^2 - y^2 - 1 + 2xyi}{x^2 - y^2 + 2 + 2xyi} = \frac{(x^2 - y^2 - 1 + 2xyi)(x^2 - y^2 + 2 - 2xyi)}{(x^2 - y^2 + 2)^2 + 4x^2y^2}$$

Multiplicando y separando parte real e imaginaria se tiene:

$$\underbrace{\frac{x^4 + y^4 - 2x^2y^2 + x^2 - y^2 - 2}{(x^2 - y^2 + 2)^2 + 4x^2y^2}}_{\text{Parte Real}} + \underbrace{\frac{6xy}{(x^2 - y^2 + 2)^2 + 4x^2y^2}}_{\text{Parte Imaginaria}} i$$

Buscamos ahora los x e y que hacen cero la parte imaginaria y menor que cero la parte real⁴⁵:

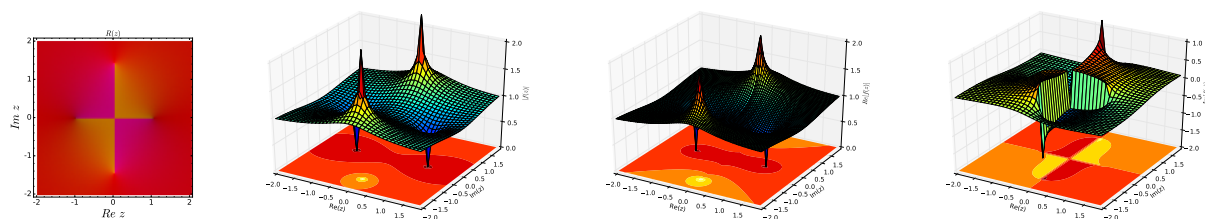
$$6xy = 0 \implies \begin{cases} x = 0 & : y^4 - y^2 - 2 < 0 \implies y \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \\ y = 0 & : x^4 + x^2 - 2 < 0 \implies x \in (-1, 1) \end{cases}$$

Que corresponde a dos segmentos (sin extremos) perpendiculares que se cruzan en el origen. Por tanto la función $f(z)$ será discontinua en todos los puntos que están en cada uno de estos dos segmentos.

En la siguiente figura se muestran las gráficas HLS (izquierda), módulo (centro izquierda), parte real (centro derecha) y parte imaginaria (derecha) de la función $f(z)$ del ejercicio.

En la gráfica HLS (izquierda) podemos observar los dos ceros del numerador (puntos negros) y los dos ceros del denominador (puntos blancos), así como las discontinuidades en los dos segmentos horizontal y vertical calculados anteriormente, debidas a los saltos en el argumento. En la gráfica del módulo y de la parte real de la función se pueden observar sus ceros e infinitos, pero no su discontinuidad que sí se puede apreciar en la gráfica de la parte imaginaria de la función.

Por otra parte cuando $z \rightarrow \infty$, la función $f(z) \rightarrow 1$, de ahí que la gráfica HLS tienda a tomar un color homogéneo a medida que nos alejamos del origen (de color rojo en este caso al ser 1 un número real y positivo⁴⁶).



6.5.6. Función Exponencial Compleja

Definición 6.31. Función Exponencial Compleja

$$f(z) = e^z = e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a (\cos b + i \operatorname{sen} b)$$

Nota 6.4. Las propiedades de la función exponencial real son:

- Su dominio es $\mathbb{R}$ y su conjunto imagen es $[0, \infty)$
- Es inyectiva, ya que para todos $x \neq y$ se tiene $e^x \neq e^y$.
- Es invertible, siendo su inversa la función logaritmo neperiano o natural, $\ln(x)$.

Las propiedades básicas de la función **exponencial compleja** son:

- Su dominio es $\mathbb{C}$ y su imagen $\mathbb{C} - \{0\}$
- Es una función **periódica**, de periodo $2\pi i$ ya que:

$$e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z [\cos(2k\pi) + i \operatorname{sen}(2k\pi)] = e^z$$

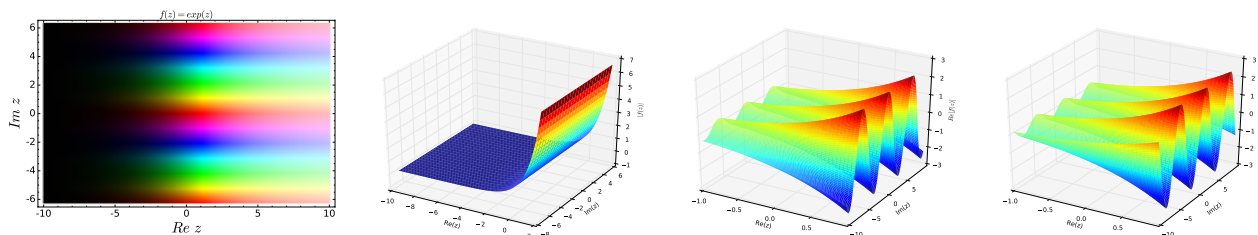
- No es inyectiva al ser periódica.
- No existe su función inversa **única** en todo $\mathbb{C}$.

En la siguiente figura se muestran las gráficas HLS (izquierda), módulo (centro izquierda), parte real (centro derecha) y parte imaginaria (derecha) de la función exponencial compleja.

⁴⁴Ver la Sección 6.5.5, página 210.

⁴⁵Para encontrar los puntos hay que resolver las dos ecuaciones bicuadráticas dadas y encontrar los intervalos que verifican la inecuación correspondiente.

⁴⁶Ver la Sección 6.4.3, página 202.



- En la gráfica HLS se muestra un resumen del comportamiento general de la función. Vemos que para valores negativos en la parte real la función tiende rápidamente a cero⁴⁷ (color oscuro), mientras que para valores reales positivos la función crece rápidamente (zona blanquecina de la derecha). Por otra parte la función oscila en el eje imaginario (alternancia de colores) lo que muestra el carácter oscilatorio de la función.
- La gráfica del módulo es poco representativa, ya que solo muestra el rápido crecimiento de la función (típico de la función exponencial real), pero no da muestra de su carácter oscilatorio.
- En las gráficas de las partes real y compleja sí se puede observar tanto el crecimiento exponencial como su comportamiento oscilatorio.

Ejercicio 6.13. Encontrar el dominio de la siguiente función compleja y representarla gráficamente.

$$f(z) = \exp\left(\frac{z^2 - 1}{z^2 + 2}\right)$$

La función racional es la misma que aparece en el Ejercicio 6.12, siendo:

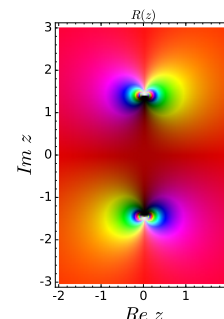
- Ceros del numerador $z = \pm 1$. En estos valores la función vale $e^0 = 1$.
- Ceros del denominador $z = \pm i\sqrt{2}$. En estos valores la función exponencial no está definida y tenderá a 0 ó ∞ en función de que la parte real de la función racional tienda a $-\infty$ ó ∞ respectivamente.

Por tanto:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{C} - \{\pm i\sqrt{2}\}$$

En la siguiente gráfica HLS se muestra el comportamiento global de la función, donde se aprecian los dos puntos en los que no está definida (en blanco). La variación de colores indica un carácter oscilatorio característico de la periodicidad de la función exponencial compleja. Por otra parte, el color periférico uniforme (anaranjado) muestra el hecho:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = e^1 = e$$



De forma general una **función exponencial**⁴⁸ compleja es del tipo:

$$f(z) = a^z \quad , \quad a \in \mathbb{C} \quad , \quad a \neq 0$$

que puede expresarse siempre como:

$$f(z) = a^z = e^{z \ln(a)}$$

De forma que las propiedades generales de toda exponencial compleja a^z corresponden a las vistas para la exponencial compleja e^z .

⁴⁷Las zonas oscuras indican valores en módulo muy pequeños, pero no se alcanza el cero para ningún valor finito de z .

⁴⁸Cuando se particulariza de forma "la función exponencial" siempre se refiere a una potencia con base e .

6.5.7. Función Logaritmo Complejo

La función logaritmo corresponde a la inversa de la función exponencial:

$$f = e^z \quad \implies \quad \log f = z$$

Como la función exponencial compleja no es inyectiva al ser periódica⁴⁹, la función logaritmo complejo es multivaluada, existiendo infinitos valores del logaritmo para un complejo⁵⁰ z , definiéndose como:

$$\text{Log}(z) = \log|z| + i(\text{Arg } z + 2k\pi) \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

Para poder definir una función univaluada es necesario⁵¹ establecer un dominio donde la función exponencial sea inyectiva. Esto lleva a la definición de *ramificaciones*⁵² del $\log z$, las cuales son ciertas funciones que dan un solo valor del logaritmo a cada punto de sus dominios. Una de esas *ramas*, denominada **rama principal**, es la que generalmente se suele utilizar.

Definición 6.32. Logaritmo Principal

El **logaritmo principal**⁵³ de un número complejo z se define como:

$$\log z = \log|z| + i \text{Arg}(z) \quad ; \quad z \neq 0$$

donde $\text{Arg}(z)$ es el *argumento principal*⁵⁴ de z .

El dominio de la función logaritmo principal complejo es $\mathbb{C} - \{0\}$ y su conjunto imagen es $\mathbb{C}$, de forma inversa a la función exponencial.

Algunas propiedades del *logaritmo principal* coinciden con las del logaritmo real⁵⁵, sin embargo existen diferencias importantes, como por ejemplo:

- $\log e^z = \log e^z + 0 = \log e^z + \log 1 = \log e^z + \log e^{\pm 2ki\pi} = \log e^{z \pm 2ki\pi} = z \pm 2ki\pi$
- $\log(zw) = \log z + \log w + 0 = \log z + \log w + \log e^{\pm 2ki\pi} = \log z + \log w \pm 2ki\pi$

Es decir aparecen infinitos valores de estas operaciones y no necesariamente el correspondiente al logaritmo principal.

Las características de la función logaritmo principal son:

- El dominio⁵⁶ es $\mathbb{C} - \{0\}$.
- Es discontinua en el eje real negativo, como consecuencia del salto en la definición del argumento principal⁵⁷.

En la siguiente figura se muestran las gráficas HLS (izquierda), módulo (centro izquierda), parte real (centro derecha) y parte imaginaria (derecha) de la función logaritmo principal.

⁴⁹La función logaritmo real no tiene ese problema al ser la exponencial real inyectiva.

⁵⁰Al igual que pasa por ejemplo con las inversas de las funciones seno y coseno reales.

⁵¹Hay otra forma de solucionar este problema suponiendo que su dominio no es una región del plano complejo, sino de una superficie de Riemann que recubre el plano complejo sin el cero. Este planteamiento no se estudiara aquí.

⁵²Al igual que ocurre con las funciones irracionales complejas (ver la [Sección 6.5.4, página 208](#)).

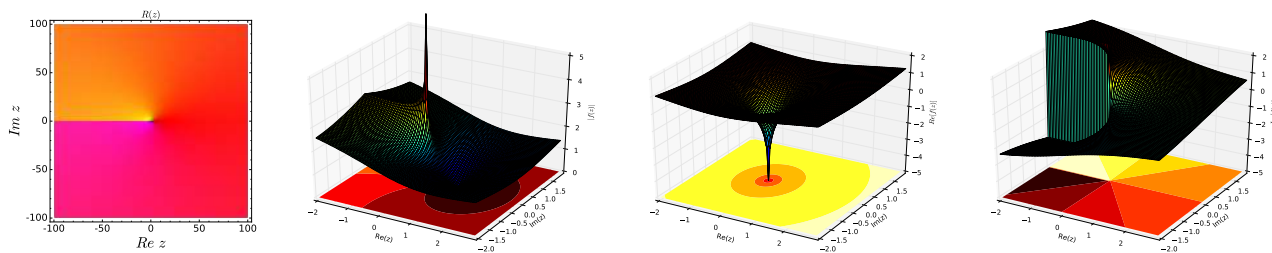
⁵³En algunos textos la nomenclatura utilizada es al contrario, donde $\log(z)$ se refiere al conjunto de todos los logaritmos y $\text{Log}(z)$ al logaritmo principal. Como generalmente se utiliza siempre el valor principal, se ha preferido en este texto utilizar $\log(z)$ como logaritmo principal. De todas formas siempre es aconsejable indicar a que logaritmo nos referimos con una determinada nomenclatura.

⁵⁴Ver la [Definición 6.11, página 191](#).

⁵⁵En concreto si $z \in \mathbb{R}^+$ ambos coinciden.

⁵⁶Ya que no existe ningún número complejo z tal que $e^z = 0$.

⁵⁷Ver la [Definición 6.11, página 191](#) y la [Sección 6.5.4, página 208](#).



En la gráfica de la izquierda se observa claramente una discontinuidad en el eje real negativo, consecuencia de la discontinuidad de la función argumento principal⁵⁸ que aparece en la definición del logaritmo complejo⁵⁹, la cual se puede observar también en la gráfica de la parte imaginaria (derecha). En la gráfica del módulo (segunda por la izquierda) se observa que la función tiende a infinito cuando $z \rightarrow 0$ y el valor $\log(1) = 0$. En la gráfica de la parte real (tercera por la izquierda) se observa como $\lim_{z \rightarrow 0} = -\infty$.

Ejercicio 6.14. Encontrar el dominio de la siguiente función compleja y representarla gráficamente, donde se toma el logaritmo principal.

$$f(z) = \log\left(\frac{z^2 - 1}{z^2 + 2}\right)$$

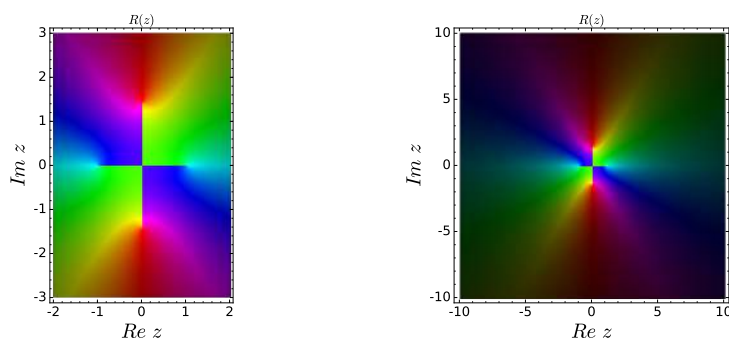
La función racional es la misma que aparece en los dos problemas anteriores, cumpliéndose:

- Ceros del numerador $z = \pm 1$. En estos valores la función no está definida.
- Ceros del denominador $z = \pm i\sqrt{2}$. En estos valores la función exponencial tampoco está definida.
- Dos segmentos $\{x = 0, y \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$ y $\{y = 0, x \in (-1, 1)\}$ correspondientes a los puntos de discontinuidad (ver su cálculo en el [Ejercicio 6.12](#)).

Por tanto:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{C} - \{\pm 1, \pm i\sqrt{2}\}$$

En las siguientes gráficas se muestra la función en distintos dominios.



En la gráfica izquierda se muestra el comportamiento de la función cerca del origen pudiéndose observar los cuatro puntos blancos donde no está definida la función y cuatro regiones de discontinuidad (segmentos horizontal y vertical), consecuencia de la definición del logaritmo a través del argumento principal y del comportamiento de la función racional de la función.

En la gráfica de la derecha se muestra la función en un dominio mayor, donde se puede observar que a media que crece el módulo de z la función tiende a cero. Esto se debe a que para dichos valores el cociente de la función racional tiende a 1 y $\log 1 = 0$.

⁵⁸Ver la [Sección 6.5.5](#), página 210.

⁵⁹Ver la [Definición 6.32](#), página 214.

6.5.8. Función Potencial Compleja

Toda potencia de base no nula puede expresarse a través de una exponencial de la siguiente forma⁶⁰:

$$a^b = e^{b \log a} \quad ; \quad a \neq 0$$

Si a y b son número complejos esta expresión está **multivaluada** como consecuencia del logaritmo complejo, pudiéndose transformar en univaluada tomando el *logaritmo principal*.

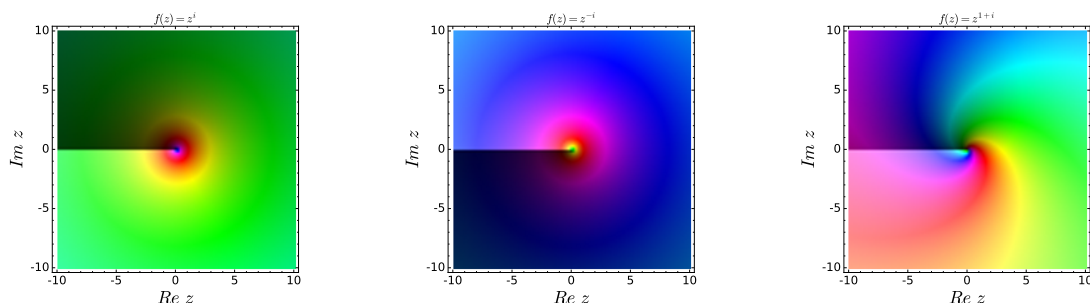
Definición 6.33. Función Potencial Compleja

Dado un número⁶¹ $c \in \mathbb{C}$ se define la *rama principal* de la función potencial compleja como:

$$f(z) = z^c = e^{c \log z} \quad ; \quad z \neq 0$$

donde $\log z$ hace referencia al logaritmo principal.

En las siguientes gráficas se muestra la representación HLS de las potencias z^i , $z^{-i} = 1/z^i$ y z^{1+i} .



Como está definida a través del logaritmo principal, hereda sus mismas propiedades⁶², estando definida de forma general⁶³ en $\mathbb{C} - \{0\}$.

Ejercicio 6.15. Encontrar el dominio de la siguiente función compleja y representarla gráficamente.

$$f(z) = z^{\left(\frac{z^2-1}{z^2+2}\right)}$$

La función racional es la misma que aparece en los problemas anteriores:

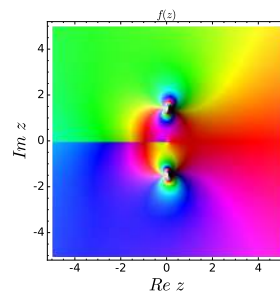
- Ceros del numerador $z = \pm 1$. En estos valores la función vale 1.
- Ceros del denominador $z = \pm i\sqrt{2}$. En estos valores la función no está definida.

Como además la función potencial compleja no está definida para $z = 0$, se tiene:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{C} - \{0, \pm i\sqrt{2}\}$$

En la siguiente gráfica HLS se muestra el comportamiento de esta función. En ella se pueden observar tres pequeños puntos blancos correspondientes a los puntos en los que no está definida la función.

Además, presenta una discontinuidad en todo el eje real negativo, consecuencia del comportamiento del logaritmo principal (línea horizontal). Por otra parte, para valores altos de $|z|$ la función racional tiende a la unidad, pero debido a la discontinuidad, la función no tiende a un valor constante.



⁶⁰La potencia compleja a^b no está definida para $a = 0$, sin embargo sí existe $\lim_{a \rightarrow 0} a^b$ siendo su valor cero.

⁶¹Los casos más sencillos para $c \in \mathbb{Z}$ y $c \in \mathbb{Q}$ ya han sido estudiados en las funciones polinómicas, racionales e irracionales.

⁶²Ver la Sección 6.5.7, página 214.

⁶³Notar que si $\text{Re}(c) > 0$, $\lim_{z \rightarrow 0} z^c = \lim_{z \rightarrow 0} e^{(a+bi) \log z} = \lim_{z \rightarrow 0} e^{a \log z} e^{bi \log z} = \lim_{z \rightarrow 0} e^{a \log |z|} e^{a\theta i} e^{bi \log z} = 0$ ya que $\lim_{z \rightarrow 0} e^{a \log |z|} = e^{-\infty} = 0$. Por tanto en este caso sí está definida en $z = 0$.

6.5.9. Funciones Trigonométricas Complejas

La definición de seno y coseno complejos se obtienen fácilmente a través de la fórmula de Euler⁶⁴.

Definición 6.34. Funciones Trigonométricas Complejas

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

;

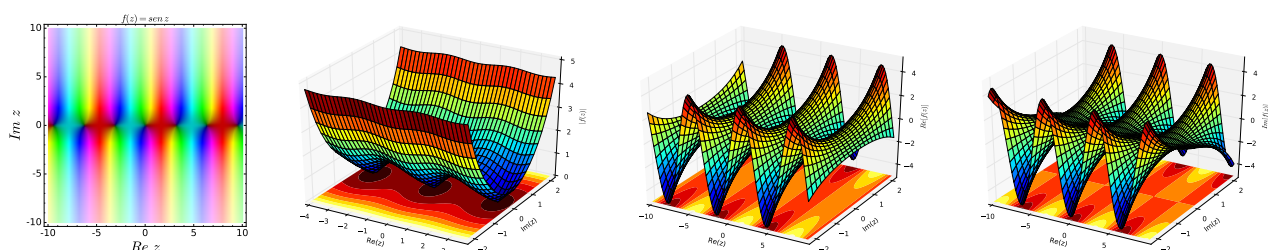
$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

;

$$\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}$$

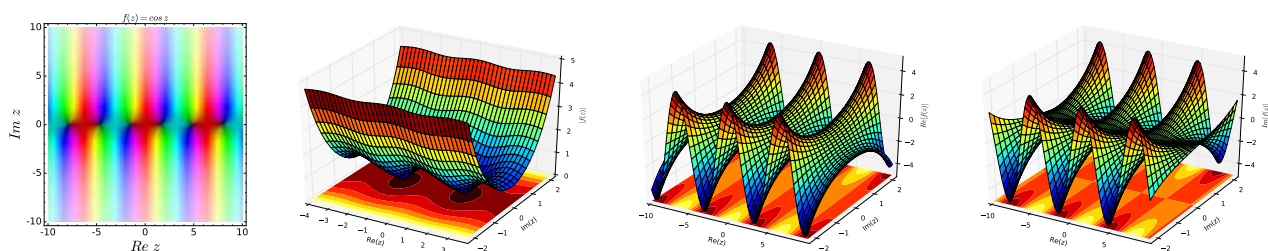
Aunque las funciones seno y coseno complejos conservan las propiedades básicas de existencia, continuidad y derivabilidad de sus correspondientes funciones reales, presentan una diferencia importante: mientras que los valores de seno y coseno reales están comprendidos entre $[-1, 1]$, los valores de sus homologas complejas no están acotados por ningún valor.

En la siguiente figura se muestran las gráficas HLS (izquierda), módulo (centro izquierda), parte real (centro derecha) y parte imaginaria (derecha) de la función **seno** complejo.



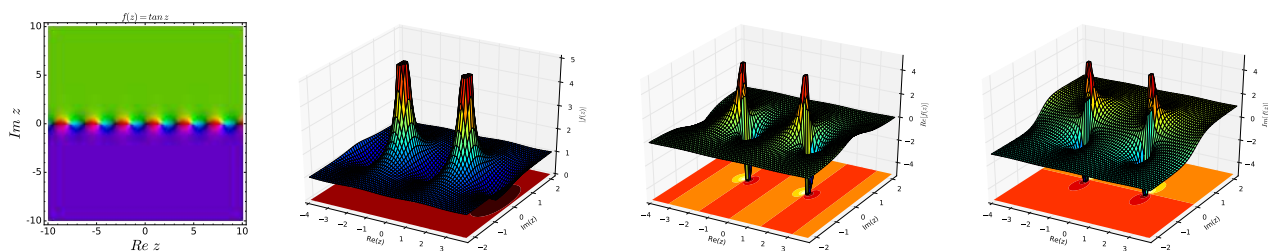
Se observa que la función tiene un comportamiento oscilatorio en la dirección horizontal, ampliando su módulo a lo largo de los dos sentidos del eje imaginario. Las partes real y compleja de la función oscilan (desfasadas) con periodo 2π con amplitudes crecientes a medida que se alejan del eje real. Los únicos ceros de la función son los ceros reales conocidos.

En la siguiente figura se muestran las gráficas correspondientes a la función **coseno** complejo (con la misma distribución anterior).



Vemos que el comportamiento de la función coseno complejo es similar al del seno complejo desplazada $\pi/2$ en la dirección del eje real, al igual que ocurre en la función real de variable real.

En la última figura se muestran las gráficas correspondientes a la función **tangente** compleja.



⁶⁴Para el caso del coseno, basta con sumar $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$ y $e^{-iz} = \cos z - i \operatorname{sen} z$ y despejar $\cos x$. Para el caso del seno se puede obtener restando ambas expresiones.

La tangente compleja también presenta una periodicidad en la dirección de eje real, pero la función no tiende a infinito en el eje imaginario, ya que el cociente entre seno y coseno anula sus efectos. Los ceros de la función tangente coinciden con los ceros del seno, mientras que tiende a $\pm\infty$ en sus partes reales y complejas en los ceros del coseno (eje real).

Las inversas de las funciones trigonométricas complejas: secante, cosecante y cotangente, se definen a partir de las definiciones anteriores, de la misma forma que en el caso real.

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}$$

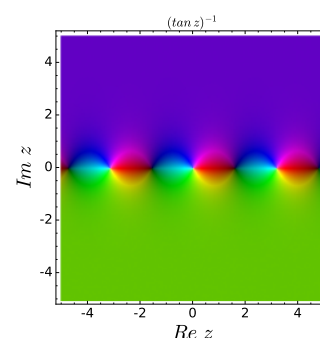
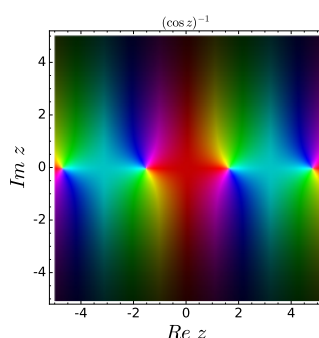
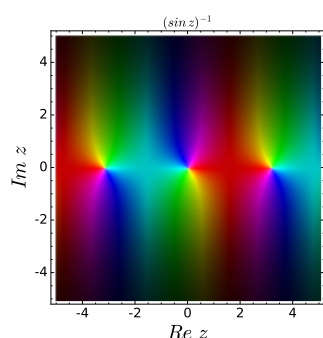
;

$$\operatorname{cosec} z = \frac{1}{\operatorname{sen} z}$$

;

$$\cotg z = \frac{1}{\operatorname{tg} z}$$

En la siguiente figura se muestran las gráficas HLS de las inversas de las funciones seno, coseno y tangente compleja, siendo todas periódicas de periodo 2π . Las funciones $(\sin z)^{-1}$ y $(\cos z)^{-1}$ tienden a $\pm\infty$ en los ceros de sus funciones directas y tienden a cero en los dos sentidos del eje imaginario, a medida que nos alejamos del eje real. El comportamiento de la función $(\tan z)^{-1}$ es similar al de su función directa con sus valores inversos.



Ejercicio 6.16. Encontrar el dominio de la siguiente función compleja y representarla gráficamente.

$$f(z) = \operatorname{sen} \left(\frac{z^2 - 1}{z^2 + 2} \right)$$

La función racional es la misma que aparece en los problemas anteriores:

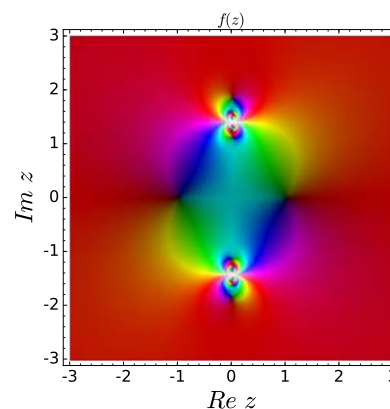
- Ceros del numerador $z = \pm 1$. En estos valores la función vale 0.
- Ceros del denominador $z = \pm i\sqrt{2}$. En estos valores la función no está definida

Por tanto:

$$\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{C} - \{\pm i\sqrt{2}\}$$

En la siguiente gráfica HLS se muestra el comportamiento de esta función, destacando:

- Los infinitos ceros de la función aparecen en negro y los dos puntos en el infinito en blanco.
- El comportamiento periódico de la función seno genera bandas de colores en las cercanías de los puntos de discontinuidad.
- Para valores altos de $|z|$ la función se hace constante al valor $\operatorname{sen}(1)$.



6.5.10. Funciones Trigonométricas Inversas

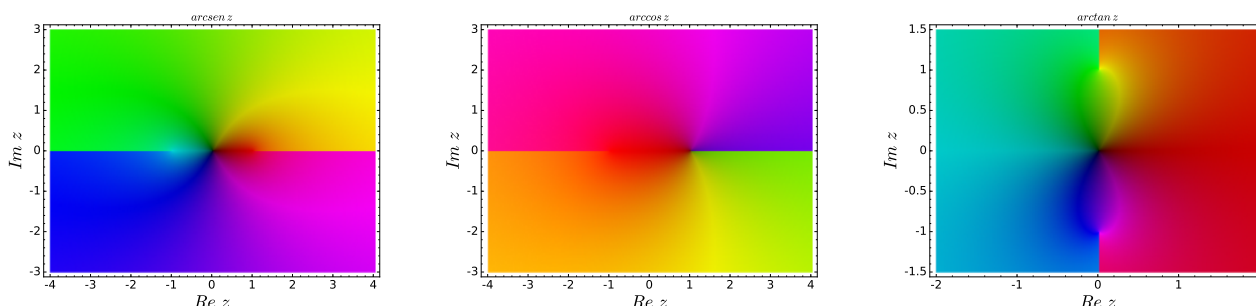
A través de las definiciones de las funciones trigonométricas complejas se pueden obtener las siguientes definiciones inversas:

$$\operatorname{arcsen} z = -i \log \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right) \quad ; \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{arccos} z = -i \log \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} z \quad ; \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{arctan} z = \frac{i}{2} \log \left(\frac{1 - iz}{1 + iz} \right) \quad ; \quad z \neq \pm i$$

Al estar definidas mediante el logaritmo son funciones **multivaluadas**. En las siguientes gráficas HLS se muestran las representaciones de las funciones inversa complejas del seno, coseno y tangente respectivamente.



El comportamiento de las tres funciones está influenciado por el logaritmo de su definición.

- El dominio de las funciones $\operatorname{arcsen}(z)$ y $\operatorname{arccos}(z)$ es $\mathbb{C}$, siendo ambas discontinuas en el eje real de $(-\infty, -1]$ y de $[1, \infty)$, y continuas en el resto de puntos del plano complejo.
- El dominio de la función $\operatorname{arctan}(z)$ es $\mathbb{C} - \{\pm i\}$. Además es discontinua en el eje imaginario de $(-\infty, -i]$ y de $[i, \infty)$, y continua en el resto de puntos del plano complejo.

Ejercicio 6.17. Demostrar la siguiente fórmula:

$$\operatorname{arccos} z = -i \log \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right) = -i \log \left(z + i\sqrt{1 - z^2} \right)$$

Vamos a llamar w al valor del $\operatorname{arccos} z$ y vamos a determinar su expresión utilizando la definición de coseno complejo.

$$\operatorname{arccos} z = w \quad ; \quad z = \cos w \quad ; \quad z = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} \quad ; \quad e^{iw} + e^{-iw} - 2z = 0$$

Multiplicando la igualdad por e^{iw} se tiene:

$$e^{2iw} + 2ze^{iw} + 1 = 0 \quad \xrightarrow{C.V: u=e^{iw}} \quad u^2 - 2zu + 1 = 0 \quad ; \quad u = \frac{2z + \sqrt{4z^2 - 4}}{2} = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$u = e^{iw} \quad ; \quad \log u = iw \quad ; \quad w = -i \log u \quad \implies \quad \operatorname{arccos} z = -i \log \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\sqrt{z^2 - 1} = \sqrt{-(iz)^2 + i^2} = \sqrt{i^2(-z^2 + 1)} = i\sqrt{1 - z^2}$$

Se tiene finalmente:

$$\operatorname{arccos} z = -i \log \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right) = -i \log \left(z + i\sqrt{1 - z^2} \right)$$

Ejercicio 6.18. Encontrar el dominio de la siguiente función compleja y representarla gráficamente.

$$f(z) = \operatorname{arcsen} \left(\frac{z^2 - 1}{z^2 + 2} \right)$$

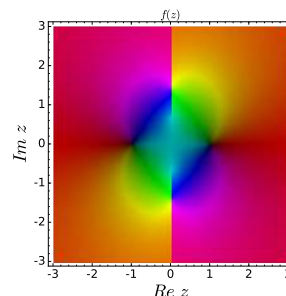
La función racional es la misma que aparece en los problemas anteriores:

- Ceros del numerador $z = \pm 1$. En estos valores la función vale 0.
- Ceros del denominador $z = \pm i\sqrt{2}$. En estos valores la función no está definida.

Por tanto:

$$\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{C} - \{\pm i\sqrt{2}\}$$

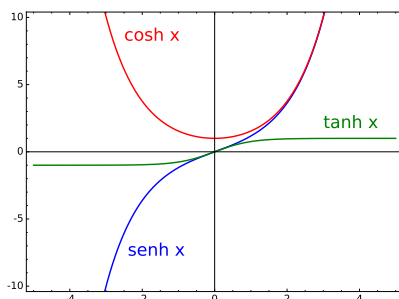
En la siguiente gráfica HLS se muestra el comportamiento de la función. Se pueden observar los dos ceros (negro) y los dos puntos en el infinito (blanco). Además cuando $z \rightarrow \infty$ entonces $f(z) \rightarrow \operatorname{arcsen}(1) = \pi/2$. Se observa también una discontinuidad en el eje imaginario.



6.5.11. Funciones Hiperbólicas Complejas

Las funciones hiperbólicas reales se definen como:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

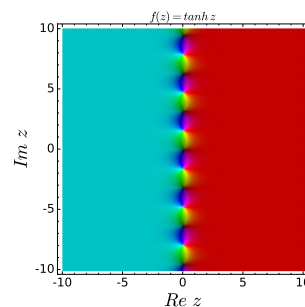
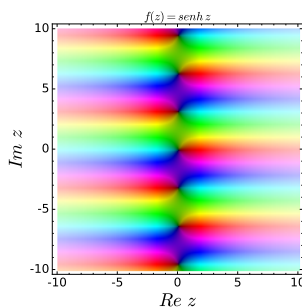
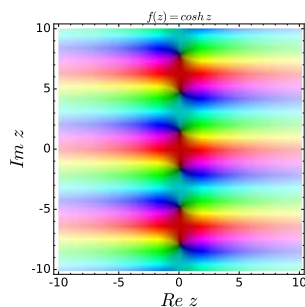


En base a ellas se definen las siguientes funciones hiperbólicas complejas:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \quad ; \quad z \in \mathbb{C}$$



Propiedades básicas de las funciones hiperbólicas complejas:

- $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

- Relación entre las funciones trigonométricas e hiperbólicas complejas:

$$\cos(z) = \cosh(iz) \quad ; \quad \cosh(z) = \cos(iz) \quad ; \quad i \operatorname{sen}(z) = \sinh(iz) \quad ; \quad i \sinh(z) = \operatorname{sen}(iz)$$

- Derivadas de las funciones hiperbólicas:

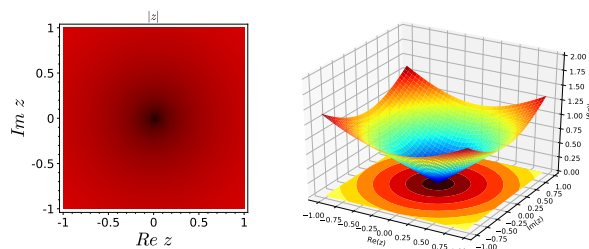
$$(\cosh z)' = \sinh z \quad ; \quad (\sinh z)' = \cosh z$$

6.5.12. Funciones Complejas Básicas

En esta sección vamos a estudiar las funciones complejas básicas siguientes⁶⁵:

- Función **módulo**⁶⁶: $f(z) = |z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$

En la siguiente figura se muestran las gráficas HLS (izquierda) y el módulo (izquierda). Notar que en este caso el módulo coincide con la parte real de la función, siendo cero la parte imaginaria.



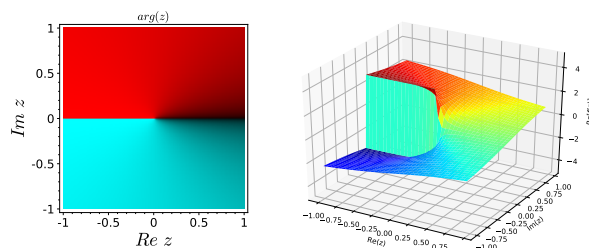
El dominio de esta función es $\mathbb{C}$, siendo continua en todo su dominio⁶⁷.

- Función **argumento principal**⁶⁸:

$$f(z) = \arg(z) = \arg(x + iy) = \begin{cases} \text{si } x > 0 & \arctan \frac{y}{x} \\ \text{si } x = 0, y \neq 0 & \operatorname{sign}(y) \frac{\pi}{2} \\ \text{si } x < 0 & \operatorname{sign}(y)\pi - \arctan \frac{y}{|x|} \end{cases} = \operatorname{atan2}(y, x)$$

Notar que el argumento del número $z = 0$ no está definido al ser el único número complejo con módulo 0.

En la siguiente figura se muestran las gráficas HLS (izquierda) y la parte real (derecha) que también corresponde con el módulo de la función. Notar que la parte imaginaria es siempre nula.



El dominio de esta función es $\mathbb{C} - \{0\}$, siendo continua en todo su dominio excepto en los puntos correspondientes al eje real negativo⁶⁹.

⁶⁵Notar que las cuatro primeras funciones son del tipo $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, mientras que la última (conjugado) es del tipo $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

⁶⁶Ver la Definición 6.9, página 190.

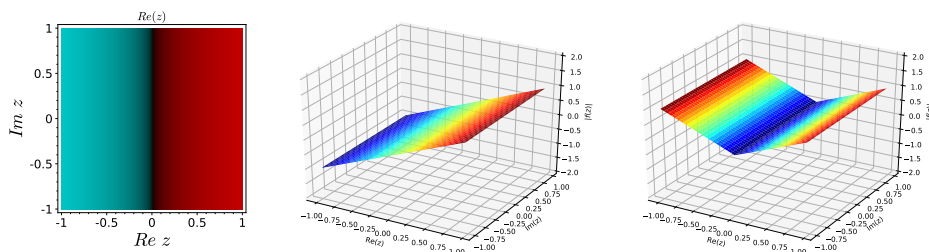
⁶⁷Ver en el Ejemplo 7.3, página 232 un estudio más detallado de la función módulo.

⁶⁸Ver la Definición 6.11, página 191.

⁶⁹Ver la Sección 6.5.5, página 210.

- Función **parte real**⁷⁰: $f(z) = \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(x + iy) = x$

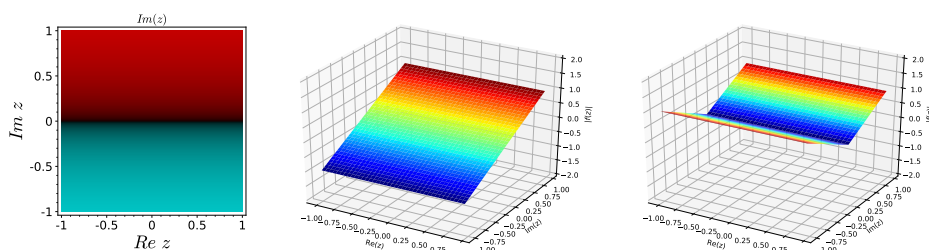
En la siguiente figura se muestran las gráficas HLS (izquierda), la parte real (centro) y el módulo (derecha), siendo cero la parte imaginaria.



El dominio de esta función es $\mathbb{C}$, siendo continua en todo su dominio.

- Función **parte imaginaria**⁷⁰: $f(z) = \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(x + iy) = y$

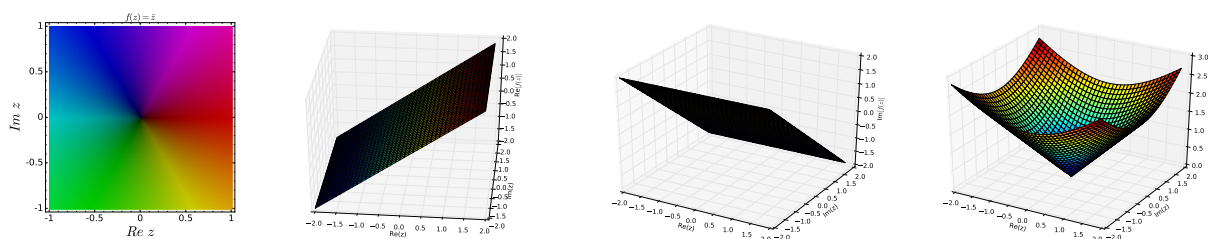
En la siguiente figura se muestran las gráficas HLS⁷¹ (izquierda), la parte real (centro) y el módulo (derecha), siendo cero la parte imaginaria.



El dominio de esta función es $\mathbb{C}$, siendo continua en todo su dominio.

- Función **conjugado**⁷²: $f(z) = \bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$

En la siguiente figura se se muestran las gráficas HLS (izquierda), la parte real (centro izquierda), parte imaginaria (centro derecha) y módulo (derecha) de esta función $f(z) = \bar{z} = x - yi$.



El dominio de esta función es $\mathbb{C}$, siendo continua en todo su dominio⁷³.

⁷⁰Ver la Definición 6.4, página 188.

⁷¹Notar que esta gráfica es similar a la HLS correspondiente a la función argumento principal vista anteriormente, salvo que la función $\operatorname{Im}(z)$ es nula y continua en todo el eje real, mientras que $\arg(z)$ es nula y continua en los puntos del eje real positivo y con valor π y discontinua en todos los puntos del eje real negativo. Las funciones $\operatorname{Re}(x)$ y $\operatorname{Im}(z)$ son idénticas, salvo un giro de 90°.

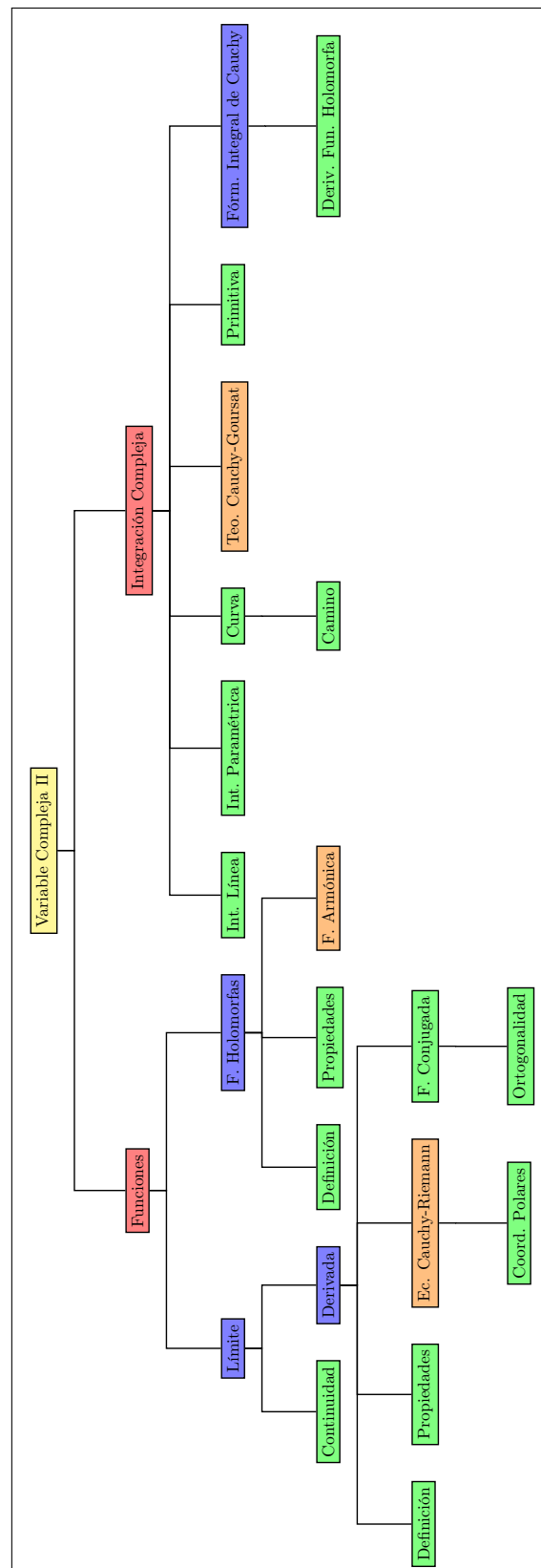
⁷²Ver la Definición 6.7, página 189.

⁷³Ver en el Ejemplo 7.3, página 232 un estudio más detallado de la función complejo conjugado.

Variable Compleja II

Contenido

7.1	Límite y Continuidad de las Funciones Complejas	225
7.1.1	Límite de Funciones Complejas	225
7.1.2	Cálculo de Límites de Funciones Complejas	226
7.1.3	Continuidad de Funciones Complejas	229
7.2	Derivada de las Funciones Complejas	231
7.2.1	Propiedades de la Derivada Compleja	234
7.2.2	Ecuaciones de Cauchy-Riemann	236
7.2.3	Condiciones de Cauchy-Riemann en Coordenadas Polares	241
7.3	Funciones Holomorfas	243
7.4	Propiedades de las Funciones Holomorfas	245
7.4.1	Función Constante	245
7.4.2	Funciones Conjugadas y Ortogonalidad	245
7.4.3	Funciones Armónicas	246
7.5	Integración Compleja	250
7.5.1	Integración Paramétrica	252
7.5.2	Curvas en $\mathbb{C}$	253
7.6	Integral Compleja Indefinida: Primitivas	258
7.7	Teorema de Cauchy-Goursat	262
7.7.1	Dominios Simplemente y Múltiplemente Conexos	265
7.7.2	Principio de Deformación de Contornos	266
7.8	Fórmula Integral de Cauchy	268
7.8.1	Derivadas de las Funciones Holomorfas	270



7.1. Límite y Continuidad de las Funciones Complejas

En este apartado vamos a ver las definiciones y teoremas relativos a los límites y continuidad de las funciones complejas, las cuales tienen una gran semejanza con sus análogas reales.

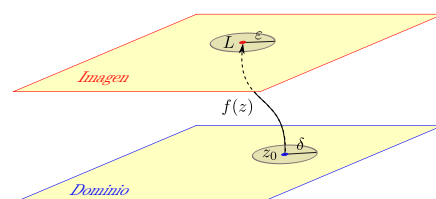
7.1.1. Límite de Funciones Complejas

Definición 7.1. Límite de una Función Compleja

Se dice que una función compleja $f(z)$ tiene por **límite** $L \in \mathbb{C}$ cuando z tiende a $z_0 \in \mathbb{C}$ si¹,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - L| < \varepsilon ; \quad \varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$$

A pesar de que la definición de límite de una función compleja es análoga a la definición de límite de una función real de una única variable real, debido a que el plano complejo es bidimensional, desde un punto de vista práctico el cálculo de límites de funciones complejas es en algunos casos más similar a la determinación de límites de funciones reales de dos variables reales², y consecuencia de ello es el siguiente teorema.



Teorema 7.1.

Sea una función compleja $f(z)$ definida en un puntos $z_0 = x_0 + y_0i$ de su dominio.

$$f(z) = f(x + yi) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \begin{cases} u(x, y) = \operatorname{Re}(f) \\ v(x, y) = \operatorname{Im}(f) \end{cases}$$

Si existe el límite de $f(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$ y su valor es $L = a + bi$, entonces:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L = a + bi \iff \begin{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = a \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = b \end{cases}$$

Definición 7.2. Límite en el Infinito

Se dice que una función compleja $f(z)$ tiene por **límite** L cuando z tiende a ∞ si,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 : |z| > M \implies |f(z) - L| < \varepsilon$$

Definición 7.3. Límite Infinito

Se dice que una función compleja $f(z)$ tiene por **límite** ∞ cuando z tiende a $z_0 \in \mathbb{C}$ si,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \iff \forall M > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z)| > M$$

¹Esta definición es equivalente a la definición $\varepsilon - \delta$ de límite de una función real de una única variable real.

²Ver por ejemplo el [Ejercicio 7.1, página 226](#), apartado b).

³Ver la [Sección 6.3.5, página 196](#).

Nota 7.1. Recordamos que en el campo complejo no existe el valor de $-\infty$.

Ejemplo 7.1. Límite Infinito y en el Infinito

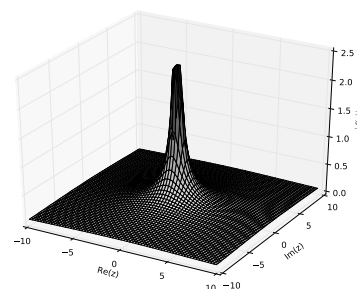
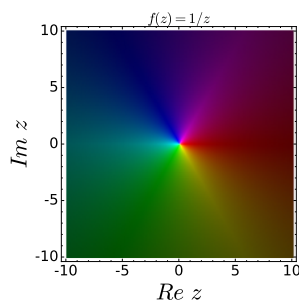
La función compleja:

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

tiene el siguiente límite infinito y en el infinito:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} = \infty$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} = 0$$



En las gráficas se muestra a la izquierda la representación HLS de la función y a la derecha el módulo de la misma. Notar que la función tiende a cero a medida que nos alejamos del origen en todas las direcciones y que el módulo de la función crece a medida que nos acercamos al origen, en todas las direcciones.

7.1.2. Cálculo de Límites de Funciones Complejas

Las reglas de cálculo de límites de funciones complejas siguen reglas similares a las funciones reales.

- Si no hay *indeterminación*, el valor del límite es el valor de la función en ese punto.
- Las *indeterminaciones*⁴ son las mismas que el caso real, pero teniendo en cuenta que solo hay ∞ (sin signo):

$$0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty$$

- La resolución de las *indeterminaciones* son similares a las funciones reales, teniendo en cuenta que en algunos casos se pueden resolver en la variable z , con reglas similares a las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, (L'Hôpital, etc.) y en otros es preferible resolverlos en las variables reales x e y haciendo el cambio de variable $z = x + iy$, y en este caso, siguiendo las reglas de las funciones $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, (límites direccionales, cambio a polares, etc.).

Ejercicio 7.1. Calcular, en caso de que existan, los siguientes límites de funciones complejas.

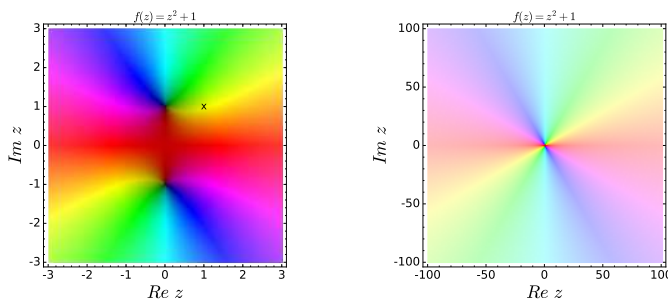
$$a) \lim_{z \rightarrow 1+i} z^2 + 1 \quad b) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|}{z} \quad c) \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} \quad d) \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} z}{z}$$

- a) En los casos de funciones sencillas como esta, basta con sustituir el valor al que se tiende en el límite, en la variable z de la función y operar.

$$\lim_{z \rightarrow 1+i} z^2 + 1 = (1+i)^2 + 1 = 1 - 1 + 2i + 1 = 1 + 2i$$

En las siguientes gráficas HLS se muestra una representación de esta función en distintos dominios.

⁴Ver la Sección 6.3.6, página 196.



En la gráfica izquierda se puede observar los ceros de la función ($\pm i$). También se encuentra marcado con una x negra el punto $1 + i$ donde se está calculando el límite. Se puede apreciar gráficamente que no existe ningún valor infinito y una cierta suavidad en la función.

En la gráfica derecha se muestra la misma función pero para un dominio más grande. Podemos observar como en todas las direcciones la función toma colores blanquecinos cuando aumenta el módulo, lo cual indica que crece indefinidamente en módulo, es decir:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^2 + 1 = \infty^2 + 1 = \infty + 1 = \infty$$

b) Teniendo en cuenta la definición de módulo de un complejo se tiene:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|}{z} = \frac{0}{0} = ?$$

produciéndose una *indeterminación* (Sección 6.3.6, página 196) del tipo $0/0$ que hay que resolver, por ejemplo expresándolo en forma binómica:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|}{z} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x + iy} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - iy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

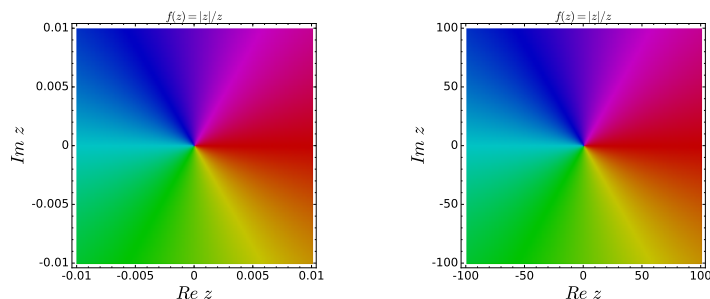
y pasándolo a coordenadas polares: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - iy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r(\cos \theta - i \sin \theta)}{r\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} = \lim_{r \rightarrow 0} (\cos \theta - i \sin \theta)$$

Claramente el valor de este límite depende del valor de θ y por tanto:

No existe el límite

En las siguientes gráficas se muestra una representación de la función en distintos dominios.



Se observa que el comportamiento de la función es igual independientemente de la escala. En las cercanías del origen se tiende a valores (colores) distintos en función de la dirección y por tanto no existe el límite tendiendo a cero. Además, la función no está definida en $z = 0$ aunque esto no se puede apreciar en el gráfico al ser un único punto.

Para cualquier otro valor $z \in \mathbb{C}$ no nulo, el límite de la función existe sin problemas.

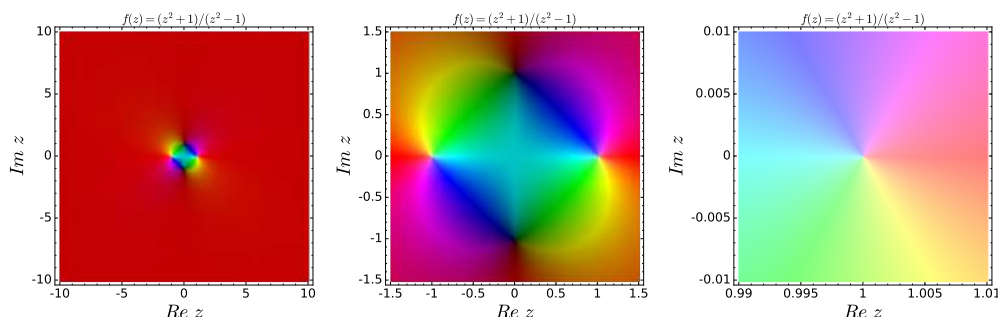
Por otra parte, también se puede observar como para valores grandes de z la función tiende a valores distintos en función de la dirección, por tanto en este caso no existe el límite cuando z tiende a ∞ . Matemáticamente se puede demostrar utilizando la técnica anterior:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{|z|}{z} = \lim_{r \rightarrow \infty} (\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta) = \nexists$$

c) En este caso es fácil determinarlo.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2}{z^2} = \lim_{z \rightarrow \infty} 1 = 1$$

En las siguientes gráficas se muestra una representación de la función en distintos dominios.

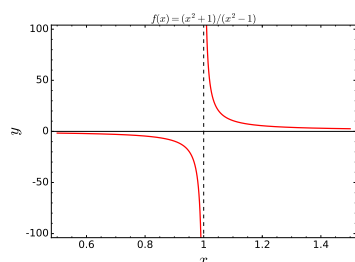


En la gráfica izquierda se observa claramente como la función tiende a un único valor en todas las direcciones cuando z crece (color rojo), por lo que el límite tendiendo a infinito existe y es un número complejo finito.

En la gráfica central se ha hecho un *zoom* de la función en torno al origen y podemos observar los dos ceros $\pm i$ (puntos negros) y los dos puntos ± 1 (puntos blancos) donde la función no está definida. Aquí no podemos determinar claramente si los límites tendiendo a esos puntos existen o no.

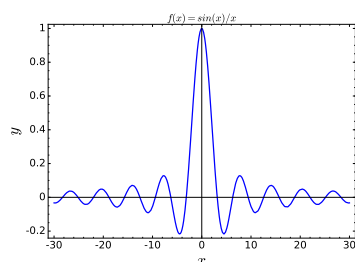
Por último en la gráfica de la derecha se ha hecho un gran *zoom* en el entorno del punto $z = 1$ y aquí sí podemos observar como a pesar de que los valores (colores) dependen de la dirección, las tonalidades blanquecinas en todos los colores indican que aumentan en módulo y por tanto el límite cuando nos acercamos a $z = 1$ existe y vale infinito. Vamos a calcularlo matemáticamente (ver la [Sección 6.3.6, página 196](#)).

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} = \frac{2}{0} = \infty$$



Notar que a pesar de que esta función en el caso real no tiene límite, ya que tiende a $-\infty$ cuando $x \rightarrow 1^-$ y a ∞ si $x \rightarrow 1^+$, en el caso complejo no hay posibilidad de tender a $-\infty$ y por tanto el límite sí existe y es ∞ .

d)



Recordamos que esta función en el caso real es continua en todo el intervalo, con valores:

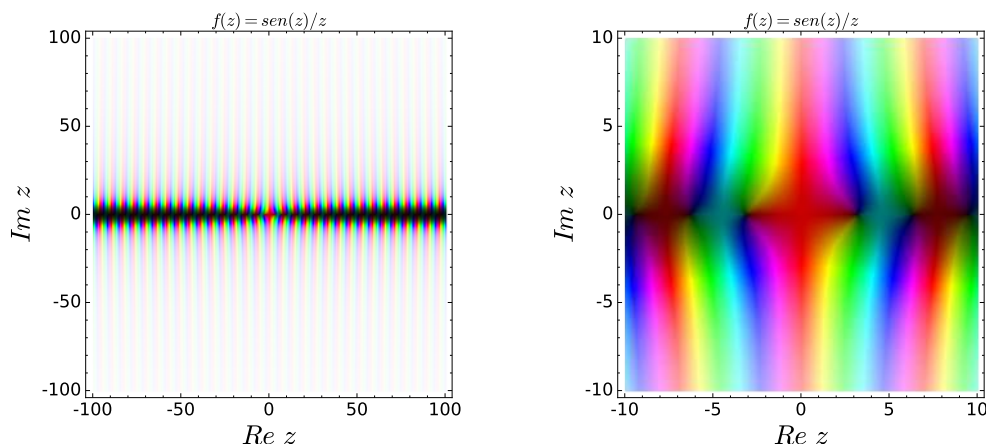
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$$

Esto se debe a que la función seno real está acotada entre $[-1, 1]$, lo que no ocurre en el caso complejo.

Para determinar el límite en el caso complejo, tenemos que tener en cuenta el comportamiento del seno complejo (ver la [Sección 6.5.9, página 217](#)), donde no existe el límite del $\operatorname{sen}(z)$ cuando $z \rightarrow \infty$, ya que tiende a valores distintos en la dirección del eje imaginario (tiende a ∞) y en la dirección del eje real (no existe el límite). Por tanto:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = \boxed{\nexists}$$

En las siguientes gráficas se muestra una representación de la función en distintos dominios.



En la gráfica izquierda podemos comprobar el resultado del límite cuando z tiende a infinito en la dirección del eje imaginario (ambos sentidos), que claramente tiende a infinito (color blanco) lo que indica que la función $\operatorname{sen}(z)$ crece más rápidamente que la función z . Sin embargo en la dirección del eje real, al alejarnos del origen la función tiende a cero, ya que la función $\operatorname{sen}(z)$ está acotada entre $[-1, 1]$ y la función z crece indefinidamente. Como el valor de la función cuando $z \rightarrow \infty$ (nos alejamos del origen) depende de la dirección elegida, el valor de su límite no existe. En la gráfica de la derecha se observa el carácter oscilatorio de la función en la dirección del eje real.

Por otra parte, también en la gráfica derecha vemos que el límite de la función cuando $z \rightarrow 0$ existe y es finito (real al ser de color rojo). De forma matemática se puede calcular fácilmente aplicando la regla de L'Hôpital obteniéndose el valor de 1, como se puede ver en la siguiente sección, (ver el [Teorema 7.2, página 235](#) y el [Ejemplo 7.4, página 235](#)).

7.1.3. Continuidad de Funciones Complejas

Definición 7.4. Continuidad de una Función Compleja

Se dice que una función compleja $f(z)$ es **continua** en un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ si,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

En caso contrario se dice que la función **no es continua** o que es **discontinua** en $z = z_0$.

Para que una función compleja sea continua en un punto z_0 debe cumplir tres condiciones:

- La función debe estar definida en $z = z_0$, es decir, debe existir $f(z_0)$.
- Debe existir $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$
- El límite anterior debe coincidir con el valor de la función, es decir, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Se dice que una función es continua en un conjunto $G \subseteq \mathbb{C}$ si es continua en todo punto del conjunto.

Continuidad de Funciones Complejas Elementales

- Las funciones complejas: **polinómicas**, la **exponencial**, el **seno**, el **coseno**, el **seno hiperbólico** y el **coseno hiperbólico** son continuas en todo $\mathbb{C}$ (ver la [Sección 6.5, página 205](#)).
- La función **racional** compleja solo es discontinua en los ceros del polinomio del denominador (ver la [Sección 6.5.3, página 207](#)).
- El valor principal de la función **logaritmo** complejo es discontinua en $z = 0$ al no estar definida y en todos los puntos del semieje real negativo (ver la [Sección 6.5.7, página 214](#)).
- El valor principal de la función **potencial** compleja z^c en general no está definida⁵ en $z = 0$ y es discontinua en todos los puntos del semieje real negativo (ver la [Sección 6.5.8, página 216](#)).
- La función **tangente** compleja es discontinua en los ceros de la función coseno, $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, al no estar definida (ver la [Sección 6.5.9, página 217](#)).
- Los valores principales de las funciones **arcoseno** y **arcocoseno** complejas son discontinuas en los puntos del eje real $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ (ver la [Sección 6.5.10, página 219](#)).
- El valor principal de la función **arcotangente** compleja es discontinua en los puntos del eje imaginario $(-\infty, -i] \cup [i, \infty)$ (ver la [Sección 6.5.10, página 219](#)).
- Las funciones complejas básicas: **módulo** $|z|$, **parte real** $\operatorname{Re}(z)$, **parte imaginaria** $\operatorname{Im}(z)$ y **conjugado** $\bar{z}$, son continuas en todo $\mathbb{C}$ (ver la [Sección 6.5.12, página 221](#)).
- La función **argumento principal** $\arg(z)$ es continua en $\mathbb{C} - \{0 \cup \mathbb{R}^-\}$, (ver la [Sección 6.5.12, página 221](#)).

Ejercicio 7.2. Estudiar la continuidad de la siguiente función compleja definida a trozos.

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^2 + 1}{z - i} & z \neq i \\ 3i & z = i \end{cases}$$

Primero analizamos las dos funciones por separado.

- La primera, al ser racional compleja es continua en todos los puntos menos los ceros del denominador, en este caso $z = i$, que es el valor de corte de la función y en el cual no está definida. Por tanto es continua en todos los puntos de su dominio.
- La segunda función al ser un polinomio complejo (constante en este caso) es siempre continua.

Por tanto las funciones por separado no generan problemas. Ahora hay que estudiar el punto de corte. Para ello estudiamos los límites de ambas en el punto de corte.

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{z - i} &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 - i^2}{z - i} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z - i)(z + i)}{z - i} = \lim_{z \rightarrow i} (z + i) = 2i \\ \lim_{z \rightarrow i} 3i &= 3i \end{aligned}$$

Como son distintos los límites, la función es continua $\forall z \in \mathbb{C} - \{i\}$

⁵Sin embargo, si $\operatorname{Re}(c) > 0$ se cumple $0^c = \lim_{z \rightarrow 0} z^c = 0$ y sí es continua en $z = 0$. Ver la [Sección 6.5.8, página 216](#).

7.2. Derivada de las Funciones Complejas

Las funciones complejas muestran propiedades tanto de las funciones de $\mathbb{R}$ como de las funciones de $\mathbb{R}^2$. Esto hace que dichas funciones presenten peculiaridades que se ponen de manifiesto fundamentalmente en la derivada. Empecemos con la definición de derivada de una función compleja que es similar a la de las funciones de $\mathbb{R}$.

Definición 7.5. Derivada de una Función Compleja

Sea $f(z)$ una función compleja cuyo dominio de definición contiene un entorno del punto z_0 . Se dice que f es **derivable** en z_0 si existe el siguiente límite:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \quad ; \quad h \in \mathbb{C}$$

En tal caso se denomina **derivada** de f en z_0 y se representa por $f'(z_0)$ a dicho valor.

Notar que a pesar de la semejanza con la definición de la derivada de funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, en el caso real solo hay dos direcciones⁶ para estudiar el límite, sin embargo en el caso complejo hay infinitas correspondientes al plano complejo bidimensional, siendo en este aspecto similar a la derivada de las funciones de $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Definición 7.6. Función Derivada

Si $w = f(z)$ es derivable en todos los puntos de una región D del plano complejo, entonces se define la función derivada en ese dominio como:

$$f'(z) = \frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad ; \quad \forall z \in D$$

El procedimiento de cálculo de las derivadas complejas a través de su definición es similar al caso real, pero teniendo en cuenta que el límite que aparece sigue unas reglas parecidas al de las funciones reales de varias variables.

Algunas funciones complejas elementales que son derivables son:

- Funciones **constantes** $f(z) = z_0$ son derivables en $\mathbb{C}$ con derivada $f'(z) = 0$.
- Los **monomios** $f(z) = z^n$, con $n \in \mathbb{N}$, son derivables en $\mathbb{C}$ con derivada $f'(z) = nz^{n-1}$.
- Función **exponencial** $f(z) = e^z$ es derivable en $\mathbb{C}$ con derivada $f'(z) = e^z$.
- El valor principal de la función **logaritmo** $f(z) = \log z$ no es derivable en $z = 0$ (donde no está definida), ni en los puntos de eje real negativo. En el resto de valores es derivable con derivada $f'(z) = 1/z$.
- El valor principal de la función **potencial** $f(z) = z^c$ no es derivable en $z = 0$ (donde no está definida de forma general), ni en los puntos de eje real negativo. En el resto de valores es derivable con derivada $f'(z) = cz^{c-1}$.
- Función **seno** $f(z) = \sin z$ es derivable en $\mathbb{C}$ con derivada $f'(z) = \cos z$.
- Función **coseno** $f(z) = \cos z$ es derivable en $\mathbb{C}$ con derivada $f'(z) = -\sin z$.
- Función **tangente** $f(z) = \tan z$ es derivable en $\mathbb{C} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ con derivada $f'(z) = 1 + \tan^2 z$.
- Las funciones **hiperbólicas** $\sinh z$ y $\cosh z$ son derivables en todo $\mathbb{C}$ con derivadas $\cosh z$ y $\sinh z$ respectivamente.
- Las funciones complejas básicas: **módulo** $|z|$, **parte real** $\operatorname{Re}(z)$, **parte imaginaria** $\operatorname{Im}(z)$, **conjugado** $\bar{z}$ y **argumento principal** $\arg(z)$ no son derivables en ningún punto del plano complejo $\mathbb{C}$.

⁶Correspondientes a la recta real.

Ejemplo 7.2. Funciones derivables.

- $f(z) = z^n$

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h}$$

Teniendo en cuenta que:

$$(z+h)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z^{n-k} h^k = z^n + nhz^{n-1} + \frac{1}{2}n(n-1)h^2z^{n-2} + \dots$$

se tiene:

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nhz^{n-1} + \frac{1}{2}n(n-1)h^2z^{n-2} + \dots}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(nz^{n-1} + \frac{1}{2}n(n-1)hz^{n-2} + \dots \right) = \boxed{nz^{n-1}}$$

- $f(z) = e^z$

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = e^z \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

Teniendo en cuenta que:

$$e^h = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \dots$$

se tiene:

$$f'(z) = e^z \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h + \frac{h^2}{2} + \dots}{h} = e^z \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3!} + \dots \right) = \boxed{e^z}$$

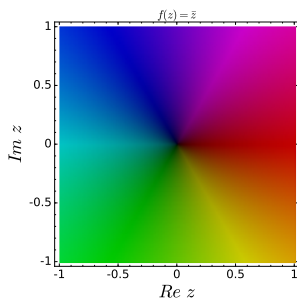
En las funciones complejas con un *buen comportamiento*⁷ en una determinada región del plano complejo, se pueden aplicar las reglas de derivación conocidas para las funciones reales de variable real. Esto es lo que ocurre por ejemplo a las dos funciones anteriores del **Ejemplo 7.2**, donde $(z^n)' = nz^{n-1}$ y $(e^z)' = e^z$.

Ejemplo 7.3. Ejemplos de funciones complejas no derivables en ningún punto.

- $f(z) = \bar{z}$

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{z} + \bar{h} - \bar{z}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}$$

Este límite no existe (ver el **Ejercicio 7.1**, página 226 apartado b) y por tanto esta función no es derivable para ningún valor de $\mathbb{C}$.



Si observamos la representación gráfica HLS de la función $f(z) = \bar{z}$ vemos que es continua en $\mathbb{C}$ y en principio no presenta nada especial que explique porqué no es derivable en ningún punto.

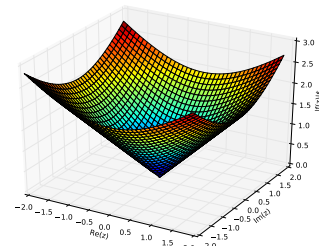
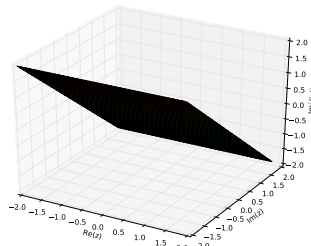
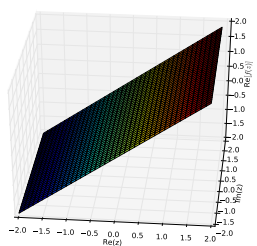
Recordamos que este tipo de representaciones muestra las variaciones del módulo y del argumento, y como se verá más adelante (**Sección 7.2.2**, página 236) la derivada depende de forma complicada de las relaciones entre la parte real e imaginaria de la función compleja.

Por tanto este tipo de representaciones gráficas no serán útiles en el estudio de la derivada de una función.

En la figura de abajo se ha representado la parte real (izquierda), parte imaginaria (centro) y módulo (derecha) de esta función $f(z) = \bar{z} = x - yi$, comprobándose que no presentan ningún problema

⁷Es decir *holomorfas* (ver la **Sección 7.3**, página 243).

apreciable por separado y por tanto, como hemos comentado antes, el problema de su no derivabilidad se encuentra en la **relación** que hay entre la parte real e imaginaria de la función.



- $f(z) = |z|$

Vamos primero a analizar el valor de la derivada de esta función en $z = 0$ a través de la definición de derivada:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \rightarrow \nexists$$

Por tanto no es derivable en $z = 0$. Analicemos ahora el valor de la derivada para $z \neq 0$ realizando algunas operaciones para resolver las indeterminaciones:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|z+h| - |z|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(|z+h| - |z|)(|z+h| + |z|)}{h(|z+h| + |z|)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|z+h|^2 - |z|^2}{h(|z+h| + |z|)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)\overline{(z+h)} - z\bar{z}}{h(|z+h| + |z|)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)(\bar{z} + \bar{h}) - z\bar{z}}{h(|z+h| + |z|)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(\bar{z} + \bar{h}) - z\bar{h}}{h(|z+h| + |z|)} = \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{z} + \bar{h}}{|z+h| + |z|}}_{\frac{\bar{z}}{2|z|}} - \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{z\bar{h}}{h(|z+h| + |z|)}}_{\frac{z}{2|z|} \frac{\bar{h}}{h} \rightarrow \nexists} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $z \neq 0$, el primer límite es un valor finito mientras que el segundo no existe, por lo que el límite global no existe y la función no es derivable para ningún valor de $\mathbb{C}$. Al igual que el caso anterior, ninguna representación gráfica de esta función nos permite inferir su derivabilidad.

- $f(z) = \operatorname{Re}(z)$

Aplicando la definición de derivada compleja se tiene:

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(z+h) - \operatorname{Re}(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(h) - \operatorname{Re}(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(h)}{h}$$

Para determinar este límite tenemos que tener en cuenta todas las curvas y direcciones posibles en el plano complejo de acercamiento al origen, para ello utilizamos *coordenadas polares* de la forma $h = x + iy = r \cos t + ir \sin t$:

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(h)}{h} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos t}{r(\cos t + i \sin t)} = \frac{\cos t}{\cos t + i \sin t} = \nexists$$

Como el valor de este límite depende del valor del ángulo t (es decir del camino elegido para acercarnos al origen), el límite no existe para ningún valor de z y por tanto la función $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ no es derivable en ningún punto $z \in \mathbb{C}$. Notar que de forma muy parecida a como hemos hecho aquí se puede comprobar que la función $f(z) = \operatorname{Im}(z)$ tampoco es derivable en ningún punto del plano complejo.

Ejemplo 7.4. Ejemplo de función compleja derivable solo en algún punto: $f(z) = |z|^2$

Aplicando la definición de derivada compleja se tiene:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|z+h|^2 - |z|^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)(\overline{z+h}) - z\bar{z}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)(\bar{z} + \bar{h}) - z\bar{z}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z\bar{h} + h(\bar{z} + \bar{h})}{h} = \bar{z} + \lim_{h \rightarrow 0} \left(z \frac{\bar{h}}{h} + \bar{h} \right) \end{aligned}$$

Este límite solo existe si $z = 0$, ya que anula el término problemático $\bar{h}/h$, y por tanto esta función solo es derivable en el punto $z = 0$.

De forma general, y al igual que ocurre en funciones reales de variable real, el estudio de la derivabilidad de una función compleja suele ser un tema complicado de determinar a través de la definición de derivada (como se ha hecho en los ejemplos anteriores) de forma que dicho estudio no suele realizarse de dicha forma. Para hacerlo se utilizan las propiedades de las derivadas que veremos a continuación y sobre todo las ecuaciones de Cauchy-Riemann que se verán en la [Sección 7.2.2, página 236](#).

7.2.1. Propiedades de la Derivada Compleja

La derivada compleja conserva todas las propiedades de la derivada de funciones reales de variable real.

Dadas dos funciones complejas f y g derivables en un punto z_0 , se cumple:

- f y g son continuas en z_0
- $[cf(z_0)]' = cf'(z_0) \quad \forall c \in \mathbb{C}$
- $[f(z_0) + g(z_0)]' = f'(z_0) + g'(z_0)$
- $\left[\frac{f(z_0)}{g(z_0)} \right]' = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{[g(z_0)]^2} \quad \text{si } g(z_0) \neq 0$
- *Regla de la cadena:* Si g es derivable en $f(z_0)$ entonces: $\{g[f(z_0)]\}' = g'[f(z_0)]f'(z_0)$

Ejercicio 7.3. Encontrar la función derivada de la siguiente función compleja en su dominio.

$$f(z) = e^{-z} \operatorname{sen} \left(\frac{z^2 + 1}{1 + z} \right)$$

Esta función está definida por funciones derivables e^z , $\operatorname{sen} z$, $z^2 + 1$ y $1 + z$, siendo el único punto para el que no está definida $z = -1$, y por tanto es derivable en $\mathbb{C} - \{-1\}$. El valor de la función derivada en esos puntos se puede obtener aplicando las propiedades de las derivadas:

$$\begin{aligned} f'(z) &= [e^{-z}]' \operatorname{sen} \left(\frac{z^2 + 1}{1 + z} \right) + e^{-z} \left[\operatorname{sen} \left(\frac{z^2 + 1}{1 + z} \right) \right]' = \\ &= -e^{-z} \operatorname{sen} \left(\frac{z^2 + 1}{1 + z} \right) + e^{-z} \cos \left(\frac{z^2 + 1}{1 + z} \right) \frac{2z(1 + z) - z^2 - 1}{(1 + z)^2} \\ &= -e^{-z} \operatorname{sen} \left(\frac{z^2 + 1}{1 + z} \right) + e^{-z} \cos \left(\frac{z^2 + 1}{1 + z} \right) \frac{z^2 + 2z - 1}{(1 + z)^2} \quad ; \quad z \neq -1 \end{aligned}$$

Una propiedad importante de las funciones reales de variable real que también se cumple en las funciones complejas es la famosa *regla de L'Hôpital*.

Teorema 7.2. Regla de L'Hôpital

Sean dos funciones complejas $f(z)$ y $g(z)$ derivables en un entorno abierto⁸ de un punto $z_0 \in \mathbb{C}$, entonces si $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y existe el segundo límite se tiene:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Ejercicio 7.4. Encontrar el límite de la siguiente función que aparece en el [Ejercicio 7.1, página 226](#).

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z}$$

Como ambas funciones son derivables en $z = 0$, podemos aplicar L'Hôpital.

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z}{1} = \cos 0 = \boxed{1}$$

La regla de L'Hôpital también es válida para el cálculo de indeterminaciones del tipo⁹ ∞/∞ en un punto z_0 del dominio de f y g , siempre que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \infty$ y z_0 sea un *punto singular aislado*¹⁰ de f y g .

Ejercicio 7.5. Encontrar el límite de la siguiente función que aparece en el [Ejercicio 7.1, página 226](#).

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z}$$

Como ambas funciones son derivables en $z = 0$, podemos aplicar L'Hôpital.

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z}{1} = \cos 0 = \boxed{1}$$

- En variable real, el valor de la derivada de una función en un punto tiene diferentes interpretaciones geométricas (pendiente, crecimiento/decrecimiento, etc.), físicas (velocidad), etc. Sin embargo en variable compleja el valor de la derivada de una función no tiene ninguno de estos significados.

La importancia de la derivada de una función compleja está simplemente en el hecho de existir: si es derivable y donde es derivable. La derivabilidad de una función compleja le confiere una propiedades características a la función que la clasifican en un grupo especial de funciones muy importantes desde el punto de vista aplicado, como son las funciones *holomorfas*¹¹.

- Las reglas de derivación¹² en variable compleja, a pesar de poder usarse en determinados casos, no son tan importantes como en variable real, ya que hay funciones complejas derivables cuyo valor de la derivada no se puede obtener a través de estas reglas.
- En variable compleja también se definen las derivadas de orden superior¹³, pero a diferencia del caso real donde su existencia no depende de la existencia de derivadas de orden inferior¹⁴, en variable compleja y en determinadas condiciones, la existencia de la primera derivada implica la existencia de la derivada de cualquier orden¹¹.

⁸Es decir, que f y g sean *holomorfas* (ver la [Sección 7.3, página 243](#)) o *analíticas* (ver la [Sección 8.1.4, página 275](#)) en dicho punto.

⁹Esto es así, ya que $1/f$ y $1/g$, en las condiciones dadas, se anulan ambas en z_0 .

¹⁰Ver la [Definición 7.10, página 244](#).

¹¹Ver la [Sección 7.3, página 243](#).

¹²Derivada un producto, de un cociente, regla de la cadena, etc.

¹³Ver la [Sección 8.1.4, página 275](#).

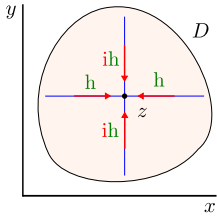
¹⁴Una función real puede ser derivable de orden n en uno o varios puntos y no ser derivable para órdenes mayores que n .

En la siguiente sección vamos a estudiar las particulares condiciones que tienen que cumplir una función compleja para que sea derivable.

7.2.2. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Sea una función derivable en un dominio D del plano complejo.

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \quad ; \quad f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad \forall z \in D$$



Para que el límite que define la derivada exista en un punto z , debe existir para todas las direcciones en las que nos acercamos a z .

Por tanto podemos acercarnos¹⁵ a z siguiendo una dirección paralela al eje real x y en otra dirección paralela al eje imaginario y . En el primer caso los incrementos h serán números reales y en el segundo caso los incrementos ih serán imaginarios puros (considerando $h \in \mathbb{R}$).

Por tanto, con respecto a la dirección horizontal¹⁶ x :

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[u(x+h, y) + iv(x+h, y)] - [u(x, y) + iv(x, y)]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} \right] = \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) + i \frac{\partial}{\partial x} v(x, y) = \boxed{u_x(x, y) + iv_x(x, y)} \end{aligned}$$

y con respecto a la dirección vertical y :

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[u(x, y+h) + iv(x, y+h)] - [u(x, y) + iv(x, y)]}{ih} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{i} \frac{u(x, y+h) - u(x, y)}{h} + \frac{v(x, y+h) - v(x, y)}{h} \right] = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} v(x, y) = \\ &= \frac{1}{i} u_y(x, y) + v_y(x, y) = \boxed{-iu_y(x, y) + v_y(x, y)} \end{aligned}$$

Si la derivada existe, estos dos límites particulares deben de existir y ser iguales:

$$\boxed{u_x + iv_x = v_y - iu_y} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad (7.1)$$

Estas relaciones son conocidas como **ecuaciones de Cauchy-Riemann** y se puede demostrar que son independientes de las direcciones elegidas¹⁷.

Una forma alternativa de mostrar las ecuaciones de Cauchy-Riemann es la siguiente:

$$f = u(x, y) + iv(x, y) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f_x = u_x + iv_x \\ f_y = u_y + iv_y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f_y = u_y + iv_y = -v_x + iu_x = if_x \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_y = if_x}$$

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann constituyen una condición necesaria para que una función compleja sea derivable, como muestra el siguiente teorema.

¹⁵Estos son los conocidos como *límites reiterados*.

¹⁶Aquí la h (negra) representa un número complejo, según la definición de derivada, mientras que la h (verde) representa un caso particular siendo un número real.

¹⁷Tomando direcciones distintas a las de los ejes x e y tomadas aquí, se generan siempre las mismas condiciones de Cauchy-Riemann o expresiones derivadas de ellas.

Teorema 7.3. Condición Necesaria de Derivabilidad

Sea una función compleja:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

derivable en un punto $z_0 = (x_0, y_0)$. Entonces las derivadas parciales de primer orden de u y v existen en (x_0, y_0) y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en ese punto,

$$u_x = v_y \quad ; \quad u_y = -v_x$$

pudiéndose además expresar el valor de la derivada de la siguiente forma,

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$$

La función derivada compleja también se puede expresar solo en términos de la parte real $u(x, y)$ o solo en términos de la parte imaginaria $v(x, y)$ de la siguiente forma:

$$f'(z) = u_x(x, y) - iu_y(x, y) = v_y(x, y) + iv_x(x, y)$$

De forma alternativa las ecuaciones de Cauchy-Riemann se pueden expresar de la siguiente forma:

$$f(x + iy) = u + iv \implies f_x = u_x + iv_x = v_y - iu_y = -i(u_y + iv_y) = -if_y \implies f_x + if_y = 0$$

Ejercicio 7.6. Comprobar si las siguientes funciones complejas cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

a) $f(z) = z$

b) $f(z) = \bar{z}$

c) $f(z) = |z|$

d) $f(z) = |z|^2$

a)

$$f(z) = z = x + iy \quad \left\{ \begin{array}{l} u = x : \begin{array}{|c|} \hline u_x = 1 \\ \hline v_x = 0 \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline u_y = 0 \\ \hline v_y = 1 \end{array} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{|c|} \hline u_x = v_y = 1 \\ \hline u_y = -v_x = 0 \end{array} \right.$$

Por tanto $f(z)$ cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann para todo $z \in \mathbb{C}$

b)

$$f(z) = \bar{z} = x - yi \quad \left\{ \begin{array}{l} u = x : \begin{array}{|c|} \hline u_x = 1 \\ \hline v_x = 0 \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline u_y = 0 \\ \hline v_y = -1 \end{array} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{|c|} \hline u_x = 1 \neq v_y = -1 \\ \hline u_y = -v_x = 0 \end{array} \right.$$

En este caso $f(z)$ solo cumple una de las dos ecuaciones, por tanto **no** se cumplen

c)

$$f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} + 0i \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{x^2 + y^2} : \begin{array}{|c|} \hline u_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \hline v_x = 0 \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline u_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \hline v_y = 0 \end{array} \end{array} \right\}$$

$$\implies \left\{ \begin{array}{|c|} \hline u_x = v_y \\ \hline u_y = -v_x \end{array} \right. \implies \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}$$

El único punto en el cual inicialmente podrían cumplir las ecuaciones es en el $x = y = 0$, pero aquí no están definidos los valores de u_x y u_y , al quedar una indeterminación del tipo $0/0$.

Por tanto, $f(z)$ no cumple las ec. C-R en ningún punto del plano complejo

d)

$$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 + 0i \quad \left\{ \begin{array}{ll} u = x^2 + y^2 & : \quad \boxed{u_x = 2x} \quad \boxed{u_y = 2y} \\ v = 0 & : \quad \boxed{v_x = 0} \quad \boxed{v_y = 0} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \boxed{u_x = v_y} & \Rightarrow x = 0 \\ \boxed{u_y = -v_x} & \Rightarrow y = 0 \end{array} \right.$$

En este caso $f(z)$ solo cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el punto $z = 0$

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann (C-R) son solo una condición **necesaria** para la derivabilidad, pero no suficiente, y por tanto:

- Toda función derivable en un punto cumple las ecuaciones C-R en ese punto.
- Algunas funciones no derivables en un punto pueden cumplir las C-R en dicho punto.

Ejercicio 7.7. Demostrar que la siguiente función no es derivable en $z = 0$ a pesar de cumplir las ecuaciones de Cauchy-Riemann en ese punto.

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^2}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Aplicando la definición de derivada en $z = 0$ se tiene:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(\overline{0+h})^2}{0+h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\bar{h}}{h} \right)^2 \rightarrow \nexists$$

Por tanto la función no es derivable en $z = 0$. Vamos a verificar las ec. C-R en este punto, para ello primero obtenemos la parte real y compleja de la función:

$$f(z) = \frac{\bar{z}^2}{z} = \frac{\bar{z}^3}{z\bar{z}} = \frac{(x-iy)^3}{x^2+y^2} = \frac{x^3 - 3x^2yi - 3xy^2 + y^3i}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{x^3 - 3x^2y^2}{x^2+y^2}}_{u(x,y)} + \underbrace{\frac{y^3 - 3x^2y}{x^2+y^2}}_{v(x,y)}i$$

Obtenemos ahora las correspondientes derivadas parciales de cada parte $u(x, y)$ y $v(x, y)$ en $z = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} \boxed{u_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(0+h,0) - u(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1} \\ \boxed{u_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(0,0+h) - u(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0} \\ \boxed{v_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(0+h,0) - v(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0} \\ \boxed{v_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(0,0+h) - v(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{u_x(0,0) = v_y(0,0) = 1} \\ \boxed{u_y(0,0) = -v_x(0,0) = 0} \end{array} \right.$$

por lo que sí cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann en ese punto a pesar de no ser derivable en él.

Las condiciones de C-R son muy útiles en el estudio de la derivabilidad de una función compleja, pero por sí solas no son suficientes para verificar la derivabilidad de una función en un punto, por tanto es necesario una condición más fuerte como la que veremos a continuación.

Teorema 7.4. Condición Necesaria y Suficiente de Derivabilidad

Sea la función compleja:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

definida en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$. La función $f(z)$ es derivable en $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ si y solo si las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ cumplen estas dos condiciones:

- Verifican las **ecuaciones de Cauchy-Riemann**¹⁸ en (x_0, y_0) .
- Son **diferenciables** en (x_0, y_0) .

Nota 7.2. Una función $f(x, y)$ es **diferenciable** en el punto (x_0, y_0) si existen las derivadas parciales $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ y se verifica:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

La condición del **Teorema 7.4** no es útil desde un punto de vista práctico para determinar la derivabilidad de una función, ya que el estudio de la *diferenciabilidad* de las funciones u y v puede llegar a ser complicado. En su lugar se utiliza la siguiente condición solo suficiente, pero mucho más fácil de aplicar en la práctica.

Teorema 7.5. Condición Suficiente de Derivabilidad

Sea la función compleja:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

definida en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$. La función $f(z)$ es derivable en $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ si las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ cumplen estas dos condiciones:

- Las funciones $u(x, y), v(x, y) \in \mathcal{C}^1$ en un entorno del punto (x_0, y_0) , es decir, **existen y son continuas** las derivadas parciales u_x, u_y, v_x y v_y en todos los puntos de dicho entorno.
- Verifican las **ecuaciones de Cauchy-Riemann** en (x_0, y_0) .

- Esta condición requiere más de lo necesario para que una función sea derivable, sin embargo sus requerimientos son generalmente fáciles de determinar.
- Si las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ no existen o no son derivables *en sentido real*, la función: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, **no** puede ser derivable *en sentido complejo*.

Ejercicio 7.8. Comprobar el teorema de la suficiencia de la derivabilidad en la siguiente función compleja:

$$f(z) = z^2$$

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x, y)} + \underbrace{2xy}_{v(x, y)} i \implies \begin{cases} u = x^2 - y^2 \implies u_x = 2x, & u_y = -2y \\ v = 2xy \implies v_x = 2y, & v_y = 2x \end{cases}$$

¹⁸Ver el **Teorema 7.3**, página 237.

En este caso es claro que las derivadas parciales de u y v con respecto a x e y existen y son siempre continuas. Además como:

$$\begin{cases} u_x = v_y = 2x \\ u_y = -v_x = -2y \end{cases}$$

se cumplen las ecuaciones de C-R, por tanto esta función es derivable en todo $\mathbb{C}$ siendo su derivada:

$$f'(z) = u_x + i v_x = 2x + i 2y = 2(x + iy) = 2z$$

Notar que este valor coincide con el obtenido con la definición de derivada compleja:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z^2 + h^2 + 2zh - z^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+2z)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (h+2z) = 2z \end{aligned}$$

y con el obtenido con las reglas de derivación tradicionales:

$$f'(z) = (z^2)' = 2z^{2-1} = 2z$$

Ejercicio 7.9. Estudiar la derivabilidad de la siguiente función:

$$f(z) = \sqrt{|xy|}$$

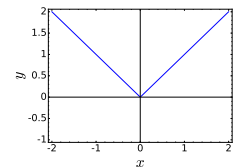
En este caso las partes real e imaginaria de la función son:

$$f(z) = f(x+yi) = u(x,y) + i v(x,y) = \begin{cases} u(x,y) = \sqrt{|xy|} \\ v(x,y) = 0 \end{cases} = \sqrt{|xy|}$$

Para estudiar la derivabilidad de $f(z)$ primeramente analizamos la derivabilidad de las funciones reales $u(x,y)$ y $v(x,y)$, ya que en los puntos en los que no sean de clase $\mathcal{C}^1$ en sentido real, tampoco lo será en sentido complejo.

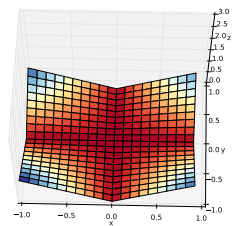
En este caso la función constante $v(x,y) = 0$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ no presentando ningún problema en todo $\mathbb{R}^2$. Con respecto a la función $u(x,y) = \sqrt{|xy|}$, recordamos primeramente que la función real¹⁹:

$$f(x) = |x| \quad ; \quad f'(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x} = \text{sign}(x) \quad , \quad x \neq 0$$



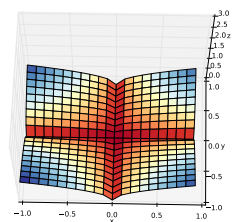
es continua en todo $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$. De igual forma la función real:

$$f(x,y) = |xy| \quad ; \quad f_x = \frac{|xy|}{xy} y = |y| \text{sign}(x) \quad ; \quad f_y = \frac{|xy|}{xy} x = |x| \text{sign}(y)$$



es continua en todo $\mathbb{R}^2$ y derivable en $\mathbb{R}^2 - \{x=0, y=0\}$. De forma similar la función real:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sqrt{|xy|} \\ f_x &= \frac{1}{2\sqrt{|xy|}} \frac{|xy|}{xy} y = \frac{|y| \text{sign}(x)}{2\sqrt{|xy|}} \quad ; \quad f_y = \frac{1}{2\sqrt{|xy|}} \frac{|xy|}{xy} x = \frac{|x| \text{sign}(y)}{2\sqrt{|xy|}} \end{aligned}$$



es continua en todo $\mathbb{R}^2$ y derivable en $\mathbb{R}^2 - \{x = 0, y = 0\}$. Por tanto la función compleja:

$$f(x + iy) = \sqrt{|xy|} \implies \begin{cases} u_x = \frac{1}{2\sqrt{|xy|}} \frac{|xy|}{xy} y = \frac{|y|\text{sign}(x)}{2\sqrt{|xy|}} & ; & u_y = \frac{1}{2\sqrt{|xy|}} \frac{|xy|}{xy} x = \frac{|x|\text{sign}(y)}{2\sqrt{|xy|}} \\ v_x = v_y = 0 \end{cases}$$

según el **Teorema 7.5, página 239** no puede ser derivable en ningún punto de los ejes real e imaginario del plano complejo (al no serlo en sentido real ambas funciones u y v). Como en el resto de puntos las funciones u y v son de clase $\mathcal{C}^1$, y no dan ningún problema, vamos a analizar la derivabilidad compleja en ellos mediante las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

$$f(z) = f(x + iy) = \underbrace{\sqrt{|xy|}}_{u(x,y)} + \underbrace{0}_{v(x,y)} i \implies \begin{cases} u = \sqrt{|xy|} \Rightarrow & \boxed{u_x = \frac{|y|\text{sign}(x)}{2\sqrt{|xy|}}} & , & \boxed{u_y = \frac{|x|\text{sign}(y)}{2\sqrt{|xy|}}} \\ v = 0 \Rightarrow & \boxed{v_x = 0} & , & \boxed{v_y = 0} \end{cases}$$

Como solo se verifican en el origen $x = 0, y = 0$, y en este punto ya hemos visto que no es derivable:

La función $f(z)$ no es derivable en ningún punto del plano complejo.

7.2.3. Condiciones de Cauchy-Riemann en Coordenadas Polares

En determinadas ocasiones es apropiado trabajar en *coordenadas polares*²⁰ (r, θ) , teniendo en cuenta:

$$\boxed{z = x + iy} \implies \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \implies \boxed{z = re^{i\theta} = r \cos \theta + ir \sin \theta}$$

$$\boxed{f(z) = u(x, y) + iv(x, y)} \implies \boxed{f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)}$$

Suponiendo que las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ existen y son continuas en un entorno de un punto $z_0 = x_0 + iy_0 = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ entonces las funciones $u(r, \theta)$ y $v(r, \theta)$ también lo serán, cumpliéndose la siguiente relación a través de la regla de la cadena:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \implies u_r = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \implies u_\theta = -u_x r \sin \theta + u_y r \cos \theta \end{cases} \quad (7.2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \implies v_r = v_x \cos \theta + v_y \sin \theta \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \implies v_\theta = -v_x r \sin \theta + v_y r \cos \theta \end{cases} \quad (7.3)$$

Si las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en un punto $z_0 = (x_0, y_0)$, entonces las funciones $u(r, \theta)$ y $v(r, \theta)$ también las cumplirán en ese mismo punto $z_0 = (r_0, \theta_0)$, cumpliéndose:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \xrightarrow{(7.3)} \begin{cases} v_r = -u_y \cos \theta + u_x \sin \theta \\ v_\theta = u_y r \sin \theta + u_x r \cos \theta \end{cases} \quad (7.4)$$

¹⁹La función *signo* se define como:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

²⁰Ver la **Sección 6.2.4, página 191**.

y comparando la Ecuación (7.2) con la Ecuación (7.4) se tiene finalmente la expresión de las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares:

$$\begin{cases} ru_r = v_\theta \\ u_\theta = -rv_r \end{cases} \quad (7.5)$$

En estos casos, la derivada de la función se puede expresar como:

$$f'(z) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r)$$

El teorema sobre la suficiencia de la derivabilidad, Teorema 7.5, página 239, se puede expresar en coordenadas polares de la siguiente forma:

Teorema 7.6. Condición Suficiente de Derivabilidad (II)

Sea la función compleja en coordenadas polares (r, θ) :

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$$

definida en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$. La función $f(z)$ es derivable en $z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \in D$ si las funciones $u(r, \theta)$ y $v(r, \theta)$ cumplen estas dos condiciones:

- Verifican las **condiciones de Cauchy-Riemann** en coordenadas polares.
- **Existen** las derivadas parciales u_r , u_θ , v_r y v_θ y son **continuas** en D .

Ejercicio 7.10. Estudiar la derivabilidad de la siguiente función compleja:

$$f(z) = z^i$$

Esta es una función de tipo potencial compleja²¹ y por tanto no está definida en $z = 0$, siendo además discontinua en todos los puntos del eje real negativo. Por tanto en todos estos valores claramente la función no puede ser derivable.

Analicemos su derivabilidad matemáticamente, para ello, y por simplicidad en este tipo de funciones, primeramente la vamos a expresar en coordenadas polares para aplicar posteriormente el Teorema 7.6:

$$f(z) = z^i = (re^{i\theta})^i = r^i e^{-\theta} = e^{-\theta} e^{i \log r} = e^{-\theta} (\cos \log r + i \sin \log r) \implies \begin{cases} u(r, \theta) = e^{-\theta} \cos \log r \\ v(r, \theta) = e^{-\theta} \sin \log r \end{cases}$$

donde r y θ son valores reales con $r \geq 0$ y $\theta \in (-\pi, \pi]$. Calculamos sus correspondientes derivadas parciales:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r = -\frac{1}{r} e^{-\theta} \sin \log r \\ v_r = \frac{1}{r} e^{-\theta} \cos \log r \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} u_\theta = -e^{-\theta} \cos \log r \\ v_\theta = -e^{-\theta} \sin \log r \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} ru_r = -e^{-\theta} \sin \log r = v_\theta \\ -rv_r = -e^{-\theta} \cos \log r = u_\theta \end{array} \right.$$

Claramente $\log r$ no está definido en $r = 0$ correspondiente a $z = 0$. Para el resto de valores complejos siempre se cumplen las condiciones de C-R. Sin embargo las cuatro funciones derivadas u_r , u_θ , v_r y v_θ no son continuas en los puntos del eje real negativo ya que el valor de la exponencial salta de θ a $-\theta$ al atravesar estos puntos. Por tanto las condiciones del Teorema 7.6 solo se cumplen para los números complejos distintos del origen y que no están en el eje real negativo.

$$f(z) = f(r, \theta) \text{ es derivable } \forall r \in \mathbb{C} - \{0\} \text{ , } \forall \theta \in (-\pi, \pi]$$

La función derivada en estos puntos se puede expresar como:

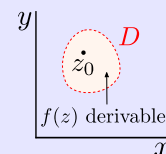
$$f'(z) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r) = e^{-\theta(i+1)} \frac{1}{r} (-\sin \log r + i \cos \log r)$$

En la Sección 6.5.8, página 216 se puede ver una representación gráfica de esta función.

7.3. Funciones Holomorfas

Definición 7.7. Función Holomorfa

Una función compleja $f(z)$ es **holomorfa**²² en un punto z_0 si es derivable en todos los puntos de algún conjunto **abierto**²³ D que contiene a z_0 .



- Si una función es *holomorfa* en un punto z_0 de un abierto D entonces es *holomorfa* en todo D .
- Una función es *holomorfa* en un conjunto cerrado $S \subset D$ si es *holomorfa* en el abierto D .

Definición 7.8. Función Entera

Se dice que una función compleja $f(z)$ es una función **entera** si es *holomorfa* en todo $\mathbb{C}$.

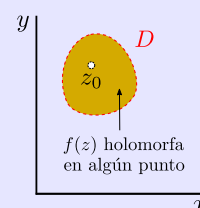
Las funciones *holomorfas*²⁴ son fundamentales en el Análisis Complejo debido a sus *buenas* propiedades.

Ejemplo 7.5. Funciones Holomorfas y Enteras

- Las funciones complejas del tipo: polinómico, e^z , $\sen z$, $\cos z$, $\sinh z$ y $\cosh z$ son *holomorfas* en todo $\mathbb{C}$ y por tanto son *enteras*.
- Las funciones racionales complejas $f(z) = P(z)/Q(z)$ son *holomorfas* excepto en los ceros de $Q(z)$.
- La función logaritmo complejo $f(z) = \log |z| + i \arg z$ es *holomorfa* excepto en los puntos del eje real $(-\infty, 0]$. En $z = 0$ la función no está definida.
- La función $f(z) = |z|^2$ no es *holomorfa* en ningún punto, ya que solo es derivable en $z = 0$.

Definición 7.9. Punto Singular

Se dice que una función compleja $f(z)$ tiene una **singularidad** o un **punto singular**²⁵ en $z = z_0$ si no es *holomorfa* en z_0 , pero en **todo** entorno de z_0 existe **algún** punto donde la función sí es *holomorfa*.



²¹Ver la Sección 6.5.8, página 216.

²²La palabra *holomorfa* proviene del griego y significa *forma entera*.

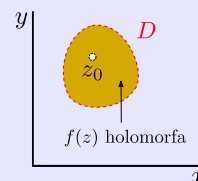
²³Ver la Definición 6.20, página 195.

²⁴También son conocidas con el nombre de **funciones regulares**.

²⁵No confundir con los *puntos singulares* de una EDO (ver la Definición 4.10, página 110).

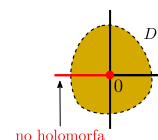
Definición 7.10. Punto Singular Aislado

Se dice que una función compleja $f(z)$ tiene una **singularidad aislada** o un **punto singular aislado**²⁶ en $z = z_0$ si no es *holomorfa* en z_0 , pero existe *algún* entorno de z_0 donde *todos* los demás puntos lo son.

**Ejemplo 7.6. Puntos Singulares**

- El punto $z = 0$ es un *punto singular aislado* de la función $f(z) = 1/z$, ya que aunque la función no está definida en ese punto, y por tanto no es holomorfa ahí, sí es derivable y holomorfa en el resto de los puntos.

- El punto $z = 0$ y todos los puntos del eje real negativo son *puntos singulares* (no aislados) de la función $f(z) = \log z$, ya que la función logaritmo no es derivable en ninguno de ellos, pero sí en todos los demás.



Ejercicio 7.11. Estudiar la holomorfía y determinar los puntos singulares de la siguiente función compleja.

$$f(z) = \frac{z^{\log(1-z)}}{1+z^2}$$

Esta función está constituida por:

- Una potencia z^a que no está definida en $z = 0$ y no es continua para todos los puntos negativos del eje real.

$$z = x + iy \implies \begin{cases} x = y = 0 \\ x < 0 \end{cases}; \quad \forall y$$

- Un logaritmo $\log(1-z)$ que no está definido cuando el argumento es cero y no es continua en los puntos donde el argumento es un número real negativo, por tanto:

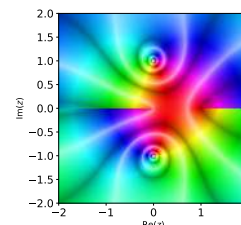
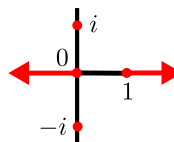
$$1 - z = 0 \implies z = 1$$

$$z = x + iy \begin{cases} \operatorname{Re}(1-z) < 0 & \implies \operatorname{Re}(1-x-iy) = 1-x < 0 & \implies x > 1 \\ \operatorname{Im}(1-z) = 0 & \implies \operatorname{Im}(1-x-iy) = -y = 0 & \implies y = 0 \end{cases}$$

- Un cociente cuyo denominador es un polinomio (continuo y derivable en $\mathbb{C}$) que se anula en $z = \pm i$, donde la función tampoco está definida.

Por tanto esta función es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ excepto en los puntos $z = \pm i$ y en los puntos del eje real $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$.

Todos estos puntos (valores en rojo en el gráfico de los ejes), son **puntos singulares** de la función, pero solo los puntos $z = \pm i$ son **puntos singulares aislados** de la misma.



Nota 7.3. Es habitual utilizar la denominación *punto singular* para referirse a los *puntos singulares aislados*.

²⁶En la Sección 8.2.2, página 301 se analizarán en detalle este tipo de singularidad.

7.4. Propiedades de las Funciones Holomorfas

7.4.1. Función Constante

Teorema 7.7.

Si $f(z)$ es holomorfa en un abierto D y $f'(z) = 0 \forall z \in D$ entonces $f(z)$ es constante en D .

Como consecuencia del teorema anterior, si tenemos una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ holomorfa en un abierto D entonces:

- Si $u(x, y)$ es constante en D , entonces $f(z)$ es constante en D .
- Si $v(x, y)$ es constante en D , entonces $f(z)$ es constante en D .
- Si $|f(z)|$ es constante en D , entonces $f(z)$ es constante en D .

Todos estos resultados son consecuencia de las restricciones que imponen las condiciones de Cauchy-Riemann para la derivabilidad de una función compleja.

7.4.2. Funciones Conjugadas y Ortogonalidad

Definición 7.11. Funciones Conjugadas

Un par de funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann se denominan **funciones conjugadas**²⁷.

Las funciones conjugadas $u(x, y)$ y $v(x, y)$ satisfacen propiedades de *ortogonalidad*²⁸, ya que las familias de *curvas de nivel*²⁹ $u(x, y) = c_1$ y $v(x, y) = c_2$, con c_1 y c_2 constantes reales, son curvas ortogonales. Esto tiene importancia en diferentes áreas aplicadas en física e ingeniería.

Ejercicio 7.12. Comprobar que las partes real y compleja de la siguiente función corresponden a familias de curvas ortogonales.

$$f(z) = 1 + z^2$$

Esta función es un polinomio complejo por lo que es *entera* (Definición 7.8, página 243) con parte real e imaginaria:

$$f(z) = f(x + iy) = 1 + (x + iy)^2 = \underbrace{1 + x^2 - y^2}_{u(x, y)} + \underbrace{2xy}_{v(x, y)} i$$

Formamos las correspondientes familias de curvas y encontramos su EDO asociada (Sección 2.11.1, página 48):

$$\begin{cases} 1 + x^2 - y^2 = c_1 & \implies 2x - 2y_1 y' = 0 & \implies y'_1 = \frac{x}{y} \\ 2xy = c_2 & \implies 2y + 2xy' = 0 & \implies y'_2 = -\frac{y}{x} \end{cases}$$

Ambas familias cumplen la condición de *trayectorias ortogonales* (Definición 2.11, página 50), ya que:

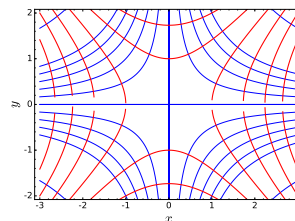
²⁷No confundir con los complejos conjugados: $z = a + iy$ y $\bar{z} = x - iy$.

²⁸Ver la Sección ??, página ??.

²⁹Curva obtenida al cortar una superficie $z = f(x, y)$ a una altura determinada z_0 .

$$y'_1 = -\frac{1}{y'_2}$$

En la figura se muestran las dos familias de curvas, en color rojo y_1 , parte real $u(x, y)$, y en color azul y_2 , parte imaginaria $v(x, y)$.



7.4.3. Funciones Armónicas

Definición 7.12. Función Armónica

Una función $f(x, y) \in \mathcal{C}^2$ definida en un abierto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ se dice que es **armónica** si verifica la **ecuación de Laplace**³⁰ en D .

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Las funciones armónicas, como soluciones de la ecuación de Laplace, aparecen en múltiples aplicaciones dentro de diversos campos, como por ejemplo el potencial electrostático, el flujo de fluidos o problemas relacionados con la transmisión del calor.

Las funciones armónicas están estrechamente relacionadas con las funciones holomorfas, consecuencia de los siguientes teoremas.

Teorema 7.8. Funciones Armónicas

- Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es **holomorfa** en un abierto $D \subseteq \mathbb{C}$, entonces las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son *armónicas* en $D \subseteq \mathbb{R}$.
- Si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son *funciones armónicas* en un abierto $D \subseteq \mathbb{R}$ y cumplen las *ecuaciones de Cauchy-Riemann*, entonces la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es **holomorfa** en un abierto $D \subseteq \mathbb{C}$.

Definición 7.13. Funciones Armónicas Conjugadas

Si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son funciones *armónicas* en un abierto $D \subseteq \mathbb{R}$ y $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es *holomorfa* en $D \subseteq \mathbb{C}$ entonces se dice que $v(x, y)$ es la **armónica conjugada**³¹ de $u(x, y)$.

- Si v es la armónica conjugada de u en D entonces $-u$ es la armónica conjugada de v en D .
- Si u es armónica en D , entonces u_x es la parte real de una función holomorfa.
- Si u es armónica en D simplemente conexa³², entonces u es la parte real de una función holomorfa.

Debido a la fuerte relación³³ que existen entre las partes real $u(x, y)$ y compleja $v(x, y)$ de una **función holomorfa** en algún dominio, basta conocer una pista sobre alguna de ellas (bien $u(x, y)$ o $v(x, y)$ o alguna de sus derivadas parciales), para poder determinar la función completa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

³⁰Ver la Sección 11.6.1, página 402.

³¹En algunos textos se dice que ambas son *armónicas conjugadas*.

³²Ver la Definición 7.25, página 265.

³³Consecuencia del cumplimiento por una parte de las *ecuaciones de Cauchy-Riemann* (ver la Sección 7.2.2, página 236), y por otra la necesidad de que sean ambas *armónicas conjugadas* (ver la Sección 7.4.3, página 246).

Ejercicio 7.13. Hallar una función holomorfa cuya parte real sea:

$$u(x, y) = ax + by \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Vamos a hacerlo de dos formas:

- **Forma 1:** Obtención de $f(x + iy)$ en las variables x e y .

Al ser la función holomorfa debe cumplir las ecuaciones de C-R, por tanto:

$$u = ax + by \implies \begin{cases} u_x = a \\ u_y = b \end{cases} \implies \begin{cases} v_y = \frac{\partial u}{\partial y} = u_x \implies v = \int u_x dy = \int a dy = ay + c(x) \\ v_x = \frac{\partial v}{\partial x} = -u_y \implies v = -\int u_y dx = -\int b dx = -bx + c(y) \end{cases}$$

Comparando términos se puede determinar el valor de las funciones $c(x)$ y $c(y)$, por tanto:

$$v(x, y) = -bx + ay + c \quad \xrightarrow{c=0} \quad \boxed{v(x, y) = -bx + ay}$$

La constante $c \in \mathbb{C}$ puede tomar cualquier valor, como el enunciado del problema nos pide "una función holomorfa" podemos tomar el caso más sencillo $c = 0$. La función holomorfa pedida puede ser por tanto:

$$\boxed{f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) = ax + by + i(-bx + ay)}$$

- **Forma 2:** Obtención de $f(z)$ en la variable z .

Recordamos que la derivada de una función holomorfa puede obtenerse como³⁴:

$$f'(x + yi) = u_x + iv_x \quad \stackrel{C-R}{=} \quad u_x - iu_y$$

Notar que hay varias formas de expresar la derivada, en función solo de las derivadas parciales de u , en función solo de las derivadas parciales de v o como mezcla de las derivadas parciales de ambas. En este caso, como solo conocemos $u(x, y)$, tomamos la definición de la derivada de f en función de las dos derivadas parciales de u .

Ahora teniendo en cuenta el *método de Milne-Thomson*³⁵:

$$f'(z) = f'(z + 0i) = u_x(z, 0) - iu_y(z, 0)$$

Por tanto en nuestro caso:

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = u_x(z, 0) - iu_y(z, 0) = a - ib \implies f(z) = \int (a - ib) dz = (a - ib)z + c \quad \stackrel{c=0}{=} \quad \boxed{(a - ib)z}$$

Podemos comprobar cómo este resultado coincide con el anterior expresándolo en la variables x e y :

$$f(z) = f(x + iy) = (a - ib)(x + iy) = ax + iay - ibx + by = (ax + by) + i(ay - bx)$$

Ejercicio 7.14. Dada la función armónica:

$$v(x, y) = e^x [x \cos y - y \sin y]$$

hallar la función holomorfa $f(z) = u + iv$ que verifica $f(0) = 0$.

Notar que en el enunciado del problema nos indican que la función v dada es *armónica*, condición necesaria (ver el [Teorema 7.8, página 246](#)) para que la función $f = u + iv$ pedida sea holomorfa.

³⁴Ver el [Teorema 7.3, página 237](#).

³⁵Ver la [Sección 6.4.2, página 198](#).

Este problema se puede resolver, en principio, de las dos formas mostradas en el [Ejercicio 7.13, página 247](#), aunque en este caso resulta más sencillo de la forma 2.

Como conocemos $v(x, y)$ expresamos la derivada de f en función de v y aplicamos el *método de Milne-Thomson* para expresarla en función de la variable z :

$$v(x, y) = e^x [x \cos y - y \sin y] \implies \begin{cases} v_x = e^x (x \cos y - y \sin y + \cos y) \\ v_y = e^x (-x \sin y - \sin y - y \cos y) \end{cases}$$

$$f'(x + iy) = v_y + iv_x \implies f'(z) = f'(z + 0i) = e^z (0 - 0 + 0) + ie^z (z - 0 + 1) = ie^z (z + 1)$$

Por tanto:

$$f(z) = \int f'(z) dz = i \int (ze^z + e^z) dz = i[e^z(z - 1) + e^z] + c = ize^z + c$$

En este caso nos piden una función determinada que cumple $f(0) = 0$, por lo que tenemos que calcular el valor de la constante c que de lugar a ese valor.

$$f(0) = 0 + c = 0 \implies c = 0$$

Finalmente se tiene:

$$f(z) = ize^z$$

También se puede obtener la parte real y compleja de esta función:

$$f(x + iy) = i(x + iy)e^x e^{iy} = (-y + iz)e^x (\cos y + i \sin y) = \underbrace{-e^x (y \cos y + x \sin y)}_{u(x, y)} + i \underbrace{e^x (x \cos y - y \sin y)}_{v(x, y)}$$

Comprobándose que la parte imaginaria de la función es la dada en el enunciado del ejercicio.

Ejercicio 7.15.

- a) Determinar una función $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ armónica sabiendo que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6xy + 4x$$

- b) Determinar una función armónica conjugada $v(x, y)$ de la función $u(x, y)$ anterior de forma que la siguiente función compleja $f(z)$ sea holomorfa:

$$\begin{cases} f(x + yi) = u(x, y) + iv(x, y) \\ f(1 + i) = -4 + 10i \end{cases}$$

- c) Expresar la función $f(x + iy)$ obtenida en el apartado b) como $f(z)$, comprobando que al sustituir $z = x + iy$ se obtienen las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ calculadas anteriormente.

- a) Como la función $u(x, y)$ debe ser armónica, se tiene que cumplir:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

por tanto:

$$u_{xx} = 6y + 4 \implies u_{yy} = -u_{xx} = -6y - 4$$

Integrando u_{yy} una primera vez con respecto a la variable y se tiene:

$$u_y = \int (-6y - 4) dy = -3y^2 - 4y + c_1(x)$$

donde $c_1(x)$ es una función que puede depender de la variable x . Integrando una segunda vez con respecto a y :

$$u = \int [-3y^2 - 4y + c_1(x)] dy = -y^3 - 2y^2 + c_1(x)y + c_2(x) \quad (7.6)$$

donde $c_2(x)$ es otra función que también puede depender de la variable x . Por otra parte, integrando la función u_x dada en el enunciado con respecto a la variable x se tiene:

$$u = \int (6xy + 4x)dx = 3x^2y + 2x^2 + c_3(y) \quad (7.7)$$

Comparando las funciones $u(x, y)$ obtenidas en (7.6) y (7.7) :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = -y^3 - 2y^2 + c_1(x)y + c_2(x) \\ u = 3x^2y + 2x^2 + c_3(y) \end{array} \right\} \implies u(x, y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2 + c_1$$

donde c_1 es una constante real cualquiera. Comprobamos la validez del resultado, verificando que $u(x, y)$ sea una función armónica y la condición del enunciado sobre u_x :

$$u_x = 6xy + 4x \quad ; \quad u_{xx} = 6y + 4 \quad ; \quad u_y = 3x^2 - 3y^2 - 4y \quad ; \quad u_{yy} = -6y - 4$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 6y + 4 - 6y - 4 = 0$$

- b) Para que la función $f(z)$ sea holomorfa, las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ deben cumplir las ecuaciones de Cauchy-Riemann, por tanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_y = u_x = 6xy + 4x \\ v_x = -u_y = -(3x^2 - 3y^2 - 4y) \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} v = \int (6xy + 4x)dy = 3xy^2 + 4xy + c_1(x) \\ v = \int (-3x^2 + 3y^2 + 4y)dx = -x^3 + 3y^2x + 4yx + \underbrace{c_2(y)}_0 \end{array}$$

Comparando ambas funciones se tiene:

$$v(x, y) = 3xy^2 + 4xy - x^3 + c_2$$

donde c_2 es una constante real cualquiera. Como $f(x + iy) = u(x + y) + iv(x, y)$ y $f(1 + i) = -4 + 10i$ se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(1, 1) = 3 + 2 - 1 - 2 + c_1 = -4 \\ v(1, 1) = 3 + 4 - 1 + c_2 = 6 \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} c_1 = -4 - 2 = -6 \\ c_2 = 10 - 6 = 4 \end{array}$$

Por tanto:

$$f(x + iy) = \underbrace{3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2 - 6}_{u(x, y)} + i \left(\underbrace{3xy^2 + 4xy - x^3 + 4}_{v(x, y)} \right)$$

Comprobamos la validez del resultado verificando que $v(x, y)$ es armónica y que se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$v_x = 3y^2 + 4y - 3x^2 \quad ; \quad v_{xx} = -6x \quad ; \quad v_y = 6xy + 4x \quad ; \quad v_{yy} = 6x$$

$$v_{xx} + v_{yy} = -6x + 6x = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = v_y = 6xy + 4x \\ u_y = -v_x = 3x^2 - 3y^2 - 4y \end{array} \right.$$

- c) Seguimos el método de Milne-Thomson para transformar la función $f(x + iy)$ en $f(z)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = 0 \end{array} \right\} \implies f(z + i0) = 2z^2 - 6 + i(4 - z^3) = f(z)$$

Comprobamos el resultado sustituyendo $z = x + iy$ en esta expresión:

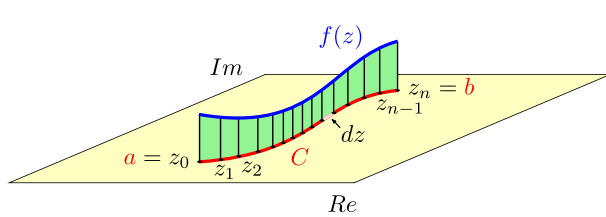
$$\begin{aligned} f(z) = f(x + iy) &= 2(x + iy)^2 - 6 + i[4 - (x + iy)^3] = 2(x^2 - y^2 + 2xyi) - 6 + i[4 - x^3 - 3x^2yi + 3xy^2 + iy^3] = \\ &= \underbrace{2x^2 - 2y^2 - 6 + 3x^2y - y^3}_{u(x, y)} + i \underbrace{(3xy^2 + 4xy - x^3 + 4)}_{v(x, y)} \end{aligned}$$

7.5. Integración Compleja

El concepto de integral compleja contiene elementos de dos tipos distintos de integrales:

- Integral de Riemann de funciones reales de variable real, ya que se integra sobre una única variable z .
- Integral de línea de funciones reales $f(x, y)$ en el plano $\mathbb{R}^2$, ya que para ir de un punto z_1 del plano complejo a otro punto z_2 es necesario realizarlo a través de un determinado camino.

En la siguiente figura se esquematiza los diferentes elementos de la integral de una función compleja en el plano complejo.



$$\int_a^b f(z) dz \quad a, b \in \mathbb{C}$$

Para ir de a a b en el plano complejo necesitamos un determinado camino o curva suave³⁶ C , la cual subdividimos en n partes formando los puntos $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$. Llamaremos a los extremos $z_0 = a$ y $z_n = b$. Sea entonces la siguiente suma:

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} f(z_i) \Delta z \quad ; \quad \Delta z = z_{i+1} - z_i$$

La integral compleja corresponde al valor de S en el límite cuando el número de particiones n tiende a infinito.

Definición 7.14. Integral de Línea Compleja

Sea una función compleja $f(z)$ continua a trozos³⁷ en los puntos de una curva suave³⁸ C del plano complejo. Se define la **integral de línea o de contorno**³⁹ de $f(z)$ a lo largo de la curva C , desde el extremo a al extremo b , al número complejo dado por:

$$\int_a^b f(z) dz = \int_C f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(z_i) \Delta z$$

Proceso de Cálculo en Coordenadas Cartesianas

Vamos a ver como determinar el número complejo correspondiente al valor de una integral de línea compleja en coordenadas cartesianas x e y . Teniendo en cuenta que:

$$\begin{cases} f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \\ dz = dx + i dy \end{cases}$$

se tiene:

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C [u(x, y) + iv(x, y)](dx + i dy) = \int_C u(x, y) dx + iv(x, y) dx + iu(x, y) dy - v(x, y) dy = \\ &= \int_C [u(x, y) dx - v(x, y) dy] + i \int_C [u(x, y) dy + v(x, y) dx] = \\ &= \underbrace{\int_C u(x, y) dx - \int_C v(x, y) dy}_{\text{Parte Real}} + i \underbrace{\left[\int_C v(x, y) dx + \int_C u(x, y) dy \right]}_{\text{Parte Imaginaria}} \end{aligned}$$

³⁶En la Sección 7.5.2, página 253 se detallarán estos conceptos. Notar que esto no es necesario en $\mathbb{R}$ ya que solo hay un camino dado por la dirección del eje x , aunque sí es necesario en $\mathbb{R}^2$.

³⁷Ver la Definición 5.4, página 151.

³⁸Ver la Definición 7.20, página 255.

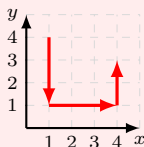
³⁹Ver la Definición 7.21, página 255.

Por tanto, la integral de línea compleja se convierte en cuatro integrales de línea reales. Esto permite extender las propiedades de las integrales de línea reales a las integrales de línea complejas.

Algunas de estas propiedades se muestran a continuación:

1. $\int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz = \int_{C_1+C_2} f(z) dz$
2. $\int_C \alpha f(z) dz = \alpha \int_C f(z) dz \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{C}$
3. $\int_C [f_1(z) + f_2(z)] dz = \int_C f_1(z) dz + \int_C f_2(z) dz$
4. $\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz|$
5. $\int_C f(z) dz = - \int_{-C} f(z) dz \quad (\text{ver la Definición 7.23, página 256})$

Ejercicio 7.16. Evaluar la integral de línea de la función $f(z) = 1 + z$, siguiendo la trayectoria en el plano complejo mostrada en gráfica.



Primeramente separamos la parte real e imaginaria de la función en coordenadas cartesianas:

$$f(z) = 1 + z = 1 + x + iy$$

Entonces teniendo en cuenta el proceso de cálculo de la integral compleja, partimos la integral en cuatro integrales:

$$\int_C f(z) dz = \int_C (1 + x + iy)(dx + idy) = \int_C (1 + x) dx + i \int_C (1 + x) dy + i \int_C y dx - \int_C y dy$$

La evaluación de estos resultados debe realizarse siguiendo la trayectoria dada en el ejercicio. Ésta se puede dividir en tres tramos rectos de la siguiente forma:

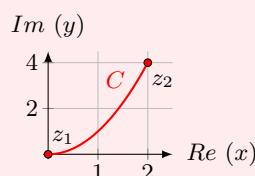
1. $(1, 4) \rightarrow (1, 1) \quad \boxed{x = 1 \implies dx = 0} : I_1 = 0 + i[(1+1)y]_4^1 + i0 - \left[\frac{y^2}{2}\right]_4^1 = \frac{15}{2} - 6i$
2. $(1, 1) \rightarrow (4, 1) \quad \boxed{y = 1 \implies dy = 0} : I_2 = \left[x + \frac{x^2}{2}\right]_1^4 + i0 + i[1x]_1^4 - 0 = \frac{21}{2} + 3i$
3. $(4, 1) \rightarrow (4, 3) \quad \boxed{x = 4 \implies dx = 0} : I_3 = 0 + i[(1+4)y]_1^3 + i0 - \left[\frac{y^2}{2}\right]_1^3 = -4 + 10i$

Por tanto:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \boxed{14 + 7i}$$

Ejercicio 7.17. Determinar la siguiente integral de línea sobre la curva en el plano complejo $C : y = x^2$ desde el punto $z_1 = 0$ hasta $z_2 = 2 + 4i$.

$$\int_C (1 + z) dz$$



Partimos la integral en cuatro partes:

$$I = \int_C (1+z)dz = \int_C (1+x+iy)(dx+idy) = \int_C (1+x)dx + i \int_C ydx + i \int_C (1+x)dy - \int_C ydy$$

Teniendo en cuenta la trayectoria⁴⁰ C se tiene que $y = x^2$ y por tanto $dy = 2xdx$. Sustituyendo:

$$I = \int_C (1+x)dx + i \int_C x^2dx + i \int_C (1+x)2xdx - \int_C x^2 2xdx$$

Integrando y teniendo en cuenta que los límites de integración en x son 0 y 2 se tiene:

$$I = \left[x + \frac{x^2}{2} \right]_0^2 + i \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 + 2i \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^2 - 2 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 4 + \frac{8}{3}i + \frac{28}{3}i - 8 = \boxed{-4 + 12i}$$

Notar que también se podría haber resuelto sustituyendo $x = \sqrt{y}$ y $dx = \frac{1}{2\sqrt{y}}dy$ aunque en este caso las integrales hubieran quedado algo más complicadas, pero dando el mismo resultado.

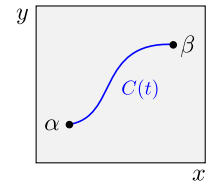
7.5.1. Integración Paramétrica

En la mayoría de los casos, para especificar una curva C suave⁴¹ es preferible, por simplicidad en los cálculos, dar su expresión en *forma paramétrica* donde las coordenadas de cada uno de sus puntos (x, y) en el plano complejo vienen dadas por medio de ecuaciones del tipo⁴²:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \implies C(t) = x(t) + iy(t) \quad ; \quad a \leq t \leq b \quad , \quad a, b, t \in \mathbb{R}$$

donde el parámetro t es una **variable real** que varía entre los límites a y b , de forma que los extremos de la curva α (inicio) y β (fin) vienen para $t = a$ y $t = b$ respectivamente.

$$\begin{cases} \alpha = x(a) + iy(a) \\ \beta = x(b) + iy(b) \end{cases}$$



A través de la parametrización de la curva, la función $f(z)$ pasa a depender del parámetro t de la forma:

$$z(t) = C(t) = x(t) + iy(t)$$

con lo que se transforma en una función compleja que depende de una única variable real t . Entonces:

$$\begin{cases} f(z) = f[z(t)] = f[C(t)] \\ z'(t) = \frac{dz}{dt} \implies dz = z'(t) dt = C'(t) dt \end{cases} \implies \boxed{\int_C f(z) dz = \int_a^b f[C(t)] C'(t) dt}$$

Ejercicio 7.18. Calcular la integral del anterior **Ejercicio 7.17** utilizando integración paramétrica.

Lo primero es parametrizar la curva C , por ejemplo de la siguiente forma (ver la **Sección 7.5.2, página 253**):

$$y = x^2 \implies C(t) : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases} ; \quad t \in [0, 2] \implies \begin{cases} dx = dt \\ dy = 2t dt \end{cases}$$

Entonces:

$$I = \int_C (1+z)dz = \int_C (1+x+iy)(dx+idy) = \int_0^2 (1+t+t^2i)(dt+i2tdt) = \int_0^2 \underbrace{(1+t+t^2i)}_{f[C(t)]} \underbrace{(1+i2t)}_{C'(t)} dt =$$

⁴⁰También se podría haber puesto todo en función de la variable y , teniendo en cuenta que $x = \sqrt{y}$ y $dx = 1/(2\sqrt{y})dy$.

⁴¹Ver la **Definición 7.20, página 255**.

⁴²Notar que esta curva tiene que tener longitud no nula y por tanto se debe cumplir que $x(t)^2 + y(t)^2 \neq 0$.

$$= \int_0^2 [1+t-2t^3+(2t+3t^2)i]dt = t + \frac{t^2}{2} - 2\frac{t^4}{4} + i\left(2\frac{t^2}{2} + 3\frac{t^3}{3}\right) \Big|_0^2 = \boxed{-4+12i}$$

Ejercicio 7.19. Calcular la siguiente integral,

$$\int_C (z + \bar{z} + 1 - 3i) dz$$

siendo C una curva parametrizada por: $C(t) = t(1+i)$; $0 \leq t \leq 1$.

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f[C(t)] C'(t) dt \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C(t) = t(1+i) \\ C'(t) = 1+i \end{cases}$$

entonces:

$$\begin{aligned} \int_C (z + \bar{z} + 1 - 3i) dz &= \int_0^1 [t(1+i) + t(1-i) + 1 - 3i] (1+i) dt = \int_0^1 (2t + 1 - 3i)(1+i) dt = \\ &= \int_0^1 [2t(1+i) + (1-3i)(1+i)] dt = \int_0^1 [2t(1+i) + 4 - 2i] dt = 2(1+i) \frac{t^2}{2} + (4-2i)t \Big|_0^1 = \boxed{5-i} \end{aligned}$$

Ejercicio 7.20. Calcular la integral del anterior **Ejercicio 7.19** utilizando coordenadas cartesianas.

La curva C se puede expresar en este caso de la siguiente forma:

$$C(t) = (1+i)t = \underbrace{t}_{x(t)} + \underbrace{t}_{y(t)} i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = x \\ dy = dx \end{cases} ; \quad x \in [0, 1]$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \int_C (z + \bar{z} + 1 - 3i) dz &= \int_C (x+iy+x-yi+1-3i) (dx+idy) = \int_C (1+2x-3i) (dx+idy) = \int_0^1 (1+2x-3i)(1+i)dx = \\ &= \int_0^1 [4+2x+(2x-1)i]dx = 4x + x^2 + 2\left(\frac{x^2}{2} - x\right)i \Big|_0^1 = \boxed{5-i} \end{aligned}$$

7.5.2. Curvas en $\mathbb{C}$

Como hemos visto, las integrales complejas se definen sobre curvas del plano complejo⁴³. En esta sección se analizan en más detalle los tipos de curvas adecuados para el estudio de estas integrales.

Definición 7.15. Curva en $\mathbb{C}$

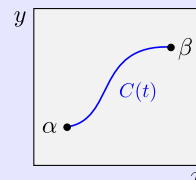
Una **curva** o **arco de curva** en el plano complejo es una aplicación continua,

$$C : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

tal que a cada número real t le corresponde el número complejo:

$$C(t) = x(t) + iy(t) ; \quad a \leq t \leq b$$

donde $x(t)$ e $y(t)$ son funciones reales y continuas en $[a, b]$, y siendo $\alpha = x(a) + iy(a)$ y $\beta = x(b) + iy(b)$ los **extremos** de la curva.



⁴³En lugar de sobre intervalos de la recta real como se hace en $\mathbb{R}$.

Definición 7.16. Trayectoria, Traza o Soporte

Se denomina **trayectoria**, **traza** o **soporte** de una curva en $\mathbb{C}$ a la *imagen* de la función $C(t)$, es decir, al conjunto de puntos $(x(t), y(t))$ de la curva $C(t)$.

No hay que confundir la *curva* con su *trayectoria*:

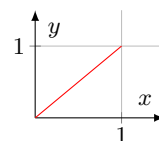
- La *trayectoria* es un conjunto de puntos del plano complejo.
- La *curva* es además de la trayectoria, la forma de obtenerla.

Ejemplo 7.7. Curvas y trayectorias

- Las siguientes son curvas distintas que tienen la misma trayectoria.

$$\begin{cases} C_1(t) = t(1+i) & 0 \leq t \leq 1 \\ C_2(t) = 2t(1+i) & 0 \leq t \leq 1/2 \end{cases}$$

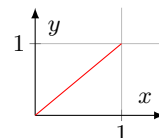
La curva $C_2(t)$ recorre la trayectoria al doble de velocidad que lo hace $C_1(t)$.



- Las siguientes dos curvas también son distintas con la misma trayectoria.

$$\begin{cases} C_1(t) = t(1+i) & 0 \leq t \leq 1 \\ C_2(t) = 1+i-t(1+i) & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

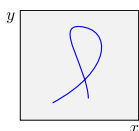
En este caso, la curva $C_2(t)$ la recorre en sentido contrario al que lo hace $C_1(t)$.



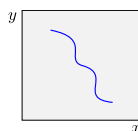
Los puntos de una trayectoria se ordenan atendiendo a los valores crecientes de t y por tanto $C(t)$ es siempre una **curva orientada** (ver la [Definición 7.18, página 255](#) y la [Definición 7.23, página 256](#)).

Tipos de Curvas**Definición 7.17. Curva Simple y de Jordan**

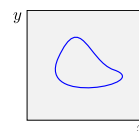
- **Curva simple** o **arco simple de Jordan**: aquella que no tiene intersecciones consigo misma y por tanto corresponde con una aplicación *inyectiva*⁴⁴.
- **Curva cerrada simple** o **de Jordan**: curva simple excepto por el hecho de que $C(a) = C(b)$.

Ejemplo 7.8. Curva, Curva Simple y Curva de Jordan

Curva



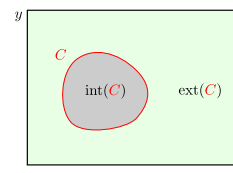
Curva Simple



Curva de Jordan

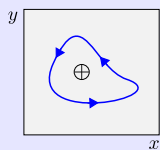
Una curva de Jordan divide al plano complejo en dos subconjuntos *abiertos* y *conexos*⁴⁵:

- **Interior de la trayectoria**, $\text{int}(C)$, que es un conjunto acotado.
- **Exterior de la trayectoria**, $\text{ext}(C)$, que es un conjunto no acotado.



⁴⁴Una función es *inyectiva* si elementos distintos del dominio $t_1 \neq t_2$ tienen imágenes distintas $C(t_1) \neq C(t_2)$.

⁴⁵Ver la [Definición 6.20](#) y la [Definición 6.21, página 195](#).

Definición 7.18. Sentido Positivo

Una curva simple cerrada se dice que se recorre en **sentido positivo** si lo hace en sentido *contrario a las agujas del reloj*, de modo que su interior esté localmente a la *izquierda* de la curva (para un observador que recorra la curva).

Definición 7.19. Curva de Clase $\mathcal{C}^n$

Una curva $C : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que es de **clase**⁴⁶ $\mathcal{C}^n$ y se expresa como $C \in \mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{C})$ si:

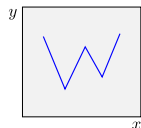
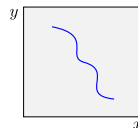
$$C(t) = x(t) + iy(t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(t) \in \mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R}) \\ y(t) \in \mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R}) \end{cases}$$

Definición 7.20. Curva Suave

Una **curva suave** es una curva de clase $\mathcal{C}^1$.

Las curvas suaves son **rectificables**, es decir que se puede calcular su *longitud*, dada por:

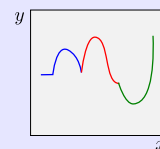
$$L = \int_a^b |C'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

Ejemplo 7.9. Curva Continua y SuaveCurva Continua $\mathcal{C}^0$ Curva Suave $\mathcal{C}^1$ **Teorema 7.9. Continuidad e Integrabilidad**

Si $f(z)$ es *continua a trozos*⁴⁷ sobre una curva suave C entonces $f(z)$ es integrable en C .

Definición 7.21. Camino o Contorno

Un **camino** o **contorno** es un conjunto finito de *curvas suaves* unidos uno tras otro, formando una curva continua y con derivada continua a trozos.

**Cambio de Parámetro en una Curva**

La representación paramétrica de una curva C no es única y es posible hacer un **cambio de parámetro** o **reparametrización**, sustituyendo el intervalo de variación del parámetro de forma arbitraria.

$$C(t) : [a, b] \quad \Rightarrow \quad C(\tau) : [\alpha, \beta]$$

⁴⁶Una función de *clase* $\mathcal{C}^n$ es aquella que es *continua* y *derivable* n veces, con sus n derivadas continuas en un dominio.

⁴⁷Ver la **Definición 5.4**, página 151.

Definición 7.22. Caminos Equivalentes

Dos caminos $C_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ y $C_2 : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ son **equivalentes**, y se denota por $C_1 \sim C_2$ si existe un *cambio de parámetro* $\tau : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$, con $\tau(\alpha) = a$ y $\tau(\beta) = b$, tal que $C_2 \circ \tau = C_1$.

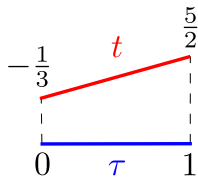
Dos caminos equivalentes tienen la misma longitud.

$$C_1 \sim C_2 \iff \text{long}(C_1) = \text{long}(C_2)$$

Ejercicio 7.21. Dado la siguiente curva suave:

$$C_1(t) = 1 + t + it^2 \quad ; \quad -\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{5}{2}$$

encontrar una reparametrización equivalente en un rango $\tau \in [0, 1]$.



Primeramente encontramos el escalamiento lineal apropiado⁴⁸ entre τ y t .

$$\frac{t + 1/3}{\tau - 0} = \frac{5/2 + 1/3}{1 - 0} \implies t = -\frac{1}{3} + \frac{17}{6}\tau = \frac{1}{6}(17\tau - 2)$$

$$C_2(\tau) = 1 + \frac{1}{6}(17\tau - 2) + \frac{i}{36}(17\tau - 2)^2 \quad ; \quad 0 \leq \tau \leq 1$$

Definición 7.23. Camino Inverso u Opuesto

Dado un camino $C : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, se define su **camino inverso u opuesto** y se denota por $-C$ al camino equivalente:

$$-C : [-b, -a] \rightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad -C(t) = C(-t) \quad -b \leq t \leq -a$$

El camino $-C$ recorre la misma trayectoria que C pero en sentido inverso.

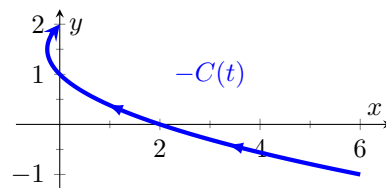
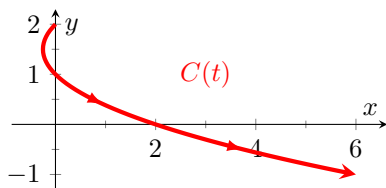
Ejercicio 7.22. Determinar el camino opuesto del siguiente camino:

$$C(t) = t + t^2 + i(1 - t) \quad ; \quad -1 \leq t \leq 2$$

Según la definición anterior, el camino inverso del dado se podrá obtener sustituyendo el parámetro t por $-t$ en la definición de la curva $C(t)$.

$$-C(t) = C(-t) = -t + (-t)^2 + i[1 - (-t)] = -t + t^2 + i(1 + t) \quad ; \quad -2 \leq t \leq 1$$

En las siguientes gráficas se muestra el camino original (a la izquierda en rojo) y el camino inverso (a la derecha en azul). Podemos observar como son caminos equivalentes recorridos en sentido inverso.

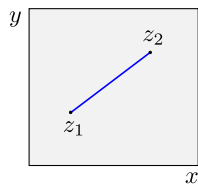


⁴⁸Para ello aplicamos la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, buscando una función lineal de la forma: $t = f(\tau)$.

Parametrizaciones Básicas

Vamos a ver diferentes ejemplos de parametrizaciones básicas.

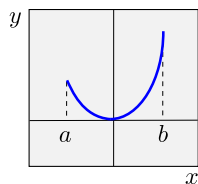
- Segmento



$$\begin{cases} \text{Origen: } z_1 = x_1 + iy_1 \\ \text{Fin: } z_2 = x_2 + iy_2 \end{cases}$$

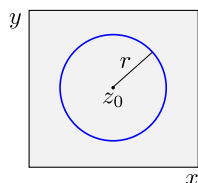
$$C(t) = z_1(1-t) + tz_2 = (x_1 + iy_1)(1-t) + t(x_2 + iy_2) \quad ; \quad 0 \leq t \leq 1$$

- Parábola



$$C(t) = t + it^2 \quad ; \quad a \leq t \leq b$$

- Circunferencia

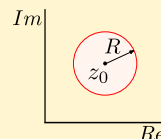


$$\begin{cases} \text{Centro: } z_0 = x_0 + iy_0 \\ \text{Radio: } r \end{cases}$$

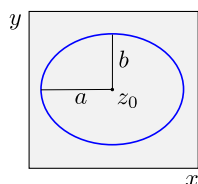
$$C(t) = z_0 + re^{it} = x_0 + iy_0 + r(\cos t + i \operatorname{sen} t) \quad ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

La circunferencia de centro z_0 y radio R se suele representar como $C(z_0, R)$ y corresponde a los puntos:

$$C(z_0, R) \iff |z - z_0| = R$$



- Elipse



$$\begin{cases} \text{Centro: } z_0 = x_0 + iy_0 \\ \text{Semiejes: } a, b \end{cases}$$

$$C(t) = x_0 + a \cos t + i(y_0 + b \operatorname{sen} t) \quad ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Ejercicio 7.23. Calcular la siguiente integral compleja:

$$\int_C \frac{1}{z} dz \quad ; \quad C(t) = t + it^2 \quad ; \quad 1 \leq t \leq e$$

$$\begin{aligned} C'(t) = 1 + 2it &\implies \int_C \frac{1}{z} dz = \int_1^e \frac{1}{t(1+it)} (1+2it) dt = \int_1^e \frac{(1+2it)(1-it)}{t(1+t^2)} dt = \int_1^e \frac{1+2t^2+it}{t(1+t^2)} dt = \\ &= \int_1^e \left[\frac{1}{t} + \frac{t}{1+t^2} + \frac{i}{1+t^2} \right] dt = \log t + \frac{1}{2} \log(1+t^2) + i \arctan t \Big|_1^e = \boxed{1 + \frac{1}{2} \log(1+e^2) + \left(\arctan e - \frac{\pi}{4} \right) i} \end{aligned}$$

Notar que la curva $C(t)$ corresponde en este caso con una parábola con extremos $(1, 1)$ y (e, e^2) .

Ejercicio 7.24. Calcular la siguiente integral:

$$\int_C \frac{1}{z} dz \quad ; \quad C(t) = 2e^{it} \quad ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

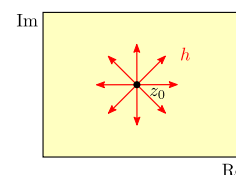
$$C'(t) = 2ie^{it} \quad \Rightarrow \quad \int_C \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2e^{it}} 2ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = it \Big|_0^{2\pi} = \boxed{2\pi i}$$

Notar que la curva $C(t)$ corresponde en este caso con la circunferencia $C(0, 2)$ (centro origen y radio 2).

7.6. Integral Compleja Indefinida: Primitivas

De forma general, el valor de la integral de una función compleja $f(z)$ entre dos puntos del plano complejo depende del camino recorrido.

Sin embargo hay funciones cuya integral es independiente del camino seguido.



Definición 7.24. Primitiva Compleja

Dada una función $f(z)$ definida en un dominio D , se denomina **primitiva** de $f(z)$ en D a toda función $F(z)$ tal que:

$$F'(z) = \frac{dF}{dz} = f(z)$$

Ejemplo 7.10. Primitiva Compleja

La función primitiva de la función compleja: $f(z) = 1 + z^2$

es: $F(z) = z + \frac{1}{3}z^3$

ya que: $F'(z) = \frac{dF}{dz} = 1 + z^2 = f(z)$

Teorema 7.10. Primitiva Compleja

Si una función $f(z)$ tiene *primitiva* $F(z)$ en un dominio D del plano complejo, entonces el valor de la integral de $f(z)$ sobre dos puntos cualesquiera del dominio D no depende del camino elegido, ya que:

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b \frac{dF}{dz} dz = \int_a^b d[F(z)] = F(z) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Notar que si el camino es cerrado, de forma que $a = b$ el valor de la integral es cero.

Teorema 7.11. Primitiva Compleja y Holomorfía

Toda función **holomorfa** en un dominio D *simplemente conexo*⁴⁹ tiene una primitiva en D .

⁴⁹Ver la Definición 7.25, página 265.

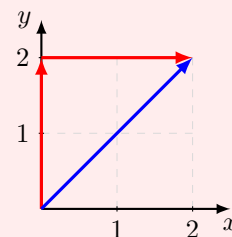
Al igual que en el caso real, una función $f(z)$ **holomorfa** en un dominio tiene infinitas primitivas, ya que si $F(z)$ es una primitiva de $f(z)$, $F(z) + c$, siendo c cualquier constante compleja, también lo será.

Ejercicio 7.25. Determinar la integral de la siguiente función compleja:

$$f(z) = x + i0 = x$$

siguiendo dos caminos C_1 y C_2 dados por:

- $C_1(t) = C_A(t) + C_B(t) \quad \begin{cases} C_A(t) = 0 + it & 0 \leq t \leq 2 \\ C_B(t) = t + 2i & 0 \leq t \leq 2 \end{cases}, \quad \begin{matrix} C'_A = i \\ C'_B = 1 \end{matrix}$
- $C_2(t) = t + it \quad 0 \leq t \leq 2, \quad C'_2 = 1 + i$



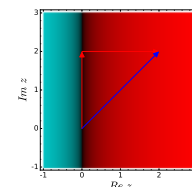
$$\bullet \int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_A} f(z) dz + \int_{C_B} f(z) dz = \int_0^2 0 i dt + \int_0^2 t dt = 0 + \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^2 = \boxed{2}$$

$$\bullet \int_{C_2} f(z) dz = \int_0^2 t(1+i) dt = (1+i) \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^2 = \boxed{2+2i}$$

A pesar de que coinciden el punto inicial y final de las dos curvas, la integral de la función $f(z) = x$ depende del camino seguido. Esto es debido a que esta función no es holomorfa, al no cumplir las condiciones de Cauchy-Riemann, pues: $u_x = 1 \neq v_y = 0$.

En la gráfica de la derecha se muestran los dos caminos sobre la gráfica HLS de la función $f(z)$. Por tanto:

La función $f(z) = \operatorname{Re}(z) = x$ no tiene primitiva



Notar que el valor de la integral sobre la curva cerrada $C = C_2 - C_1$ (recorrida en sentido positivo) es:

$$I_C = I_2 - I_1 = 2 + 2i - 2 = \boxed{2i} \neq 0$$

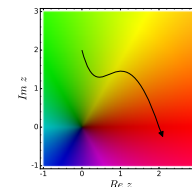
debido a que esta función **no** es holomorfa al no cumplir las condiciones de Cauchy-Riemann, pues: $u_x = 1 \neq v_y = 0$.

Ejercicio 7.26. Determinar la integral de la función,

$$f(z) = z$$

desde el punto $z_1 \in \mathbb{C}$ al punto $z_2 \in \mathbb{C}$ siguiendo un camino dado por la función $C(t)$ donde $t \in [a, b]$ y siendo $C(a) = z_1$ y $C(b) = z_2$.

Como la función $f(z) = z$ es un polinomio, por tanto holomorfa en todo $\mathbb{C}$ (entera) por tanto el valor de la integral no depende del camino recorrido y se puede calcular la integral compleja de la misma forma que determina en variable real, encontrando una primitiva $F(z)$ de la función $f(z)$.



$$F(z) = \frac{z^2}{2} \implies F'(z) = z = f(z) \implies \int_C z dz = \left. \frac{z^2}{2} \right|_{z_1}^{z_2} = \boxed{\frac{z_2^2 - z_1^2}{2}}$$

Podemos comprobar este resultado usando integración paramétrica.

$$\int_C z dz = \left\{ \begin{matrix} z = C(t) \\ dz = C'(t) dt \end{matrix} \right\} = \int_a^b C(t) C'(t) dt$$

Como:

$$\frac{d}{dt} \frac{[C(t)^2]}{2} = C(t)C'(t) \implies \int_a^b C(t)C'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} \frac{[C(t)^2]}{2} dt = \left. \frac{[C(t)^2]}{2} \right|_a^b = \frac{[C(b)]^2 - [C(a)]^2}{2} = \boxed{\frac{b^2 - a^2}{2}}$$

Notar que el valor de la integral de esta función sobre cualquier curva cerrada será siempre 0, al ser holomorfa.

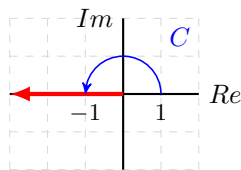
Ejercicio 7.27. Calcular la siguiente integral:

$$\int_C \log(z) dz$$

En los siguientes casos:

- | | | | | | | | |
|----|-----------------|---|-------------------------|----|-----------------|---|-------------------------|
| a) | $C(t) = e^{it}$ | , | $t \in [0, \pi]$ | b) | $C(t) = e^{it}$ | , | $t \in [-\pi, 0]$ |
| c) | $C(t) = e^{it}$ | , | $t \in [0, 2\pi]$ | d) | $C(t) = e^{it}$ | , | $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$ |
| e) | $C(t) = e^{it}$ | , | $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ | | | | |

- a) Como sabemos la función $\log(z)$ no está definida en $z = 0$ y no es holomorfa en todos los puntos del eje real negativo, ya que en esos puntos la función es discontinua (ver la [Sección 6.5.7, página 214](#)). En el resto de puntos la función es holomorfa.



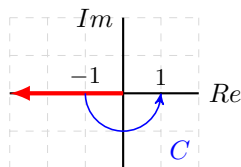
En este caso la curva es la semicircunferencia superior de centro origen y radio 1, recorrida en sentido positivo. Como los puntos recorridos por $C(t)$ son puntos holomorfos de la función (excepto el último, pero la integral de un punto es nula), se puede integrar con técnicas de integración real, usando integración por partes.

$$\int \log x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \log x, \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right\} = x \log x - \int x \frac{dx}{x} = x \log x - x + c$$

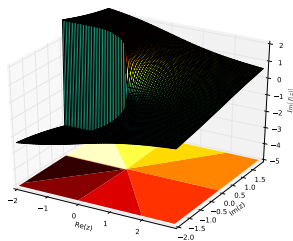
Por tanto:

$$\int_C \log z dz = z \log z - z \Big|_1^{-1} = -\log(-1) - (-1) - \log(1) + 1 = -\log(e^{\pi i}) + 2 = \boxed{2 - \pi i}$$

b)



En este caso la curva es la semicircunferencia inferior de centro origen y radio 1, recorrida en sentido positivo.



La función logaritmo complejo es discontinua en el punto $z = -1$ al estar en la parte del eje real negativo. Esto significa que el valor de $\log(-1)$ es distinto si nos acercamos a $z = -1$ por encima o por debajo del eje real. En la figura se muestra la parte imaginaria de la función $\log(z)$, que es la causante de la discontinuidad.

Calculamos el valor de este salto:

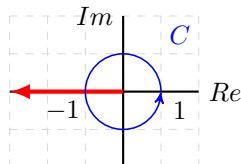
$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{z \rightarrow -1^+} \log z = \log(e^{\pi i}) = \pi i \log e = \pi i \\ \lim_{z \rightarrow -1^-} \log z = \log(e^{-\pi i}) = -\pi i \log e = -\pi i \end{array} \right.$$

Donde se ha denotado en este caso -1^+ el acercarse al valor de $\log(-1)$ por encima del eje real en el plano complejo y mediante -1^- el acercarse al valor de $\log(-1)$ por debajo del eje real en el plano complejo.

Notar que el valor de $\log(-1)$ coincide con el valor del límite $z \rightarrow -1^+$, como se ha utilizado en el apartado a). Calculamos el valor de esta integral teniendo en cuenta esto:

$$\int_C \log z \, dz = z \log z - z \Big|_{-1}^1 = \log(1) - 1 - (-1) \log(-1) + (-1) = -2 \log(e^{-\pi i}) = \boxed{-2 - \pi i}$$

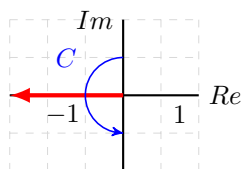
c)



En este caso la curva es la circunferencia de centro origen y de radio 1 recorrida en sentido positivo, pudiéndose calcular el valor de la integral sumando los resultados obtenidos en los apartados a) y b).

$$\int_C \log z \, dz = (2 - \pi i) + (-2 - \pi i) = \boxed{-2\pi i}$$

d)



En este caso la curva es la semicircunferencia izquierda de centro origen y de radio 1 recorrida en sentido positivo. Como la curva atraviesa la zona discontinua del eje real negativo, podemos calcular el valor de esta integral en dos partes (curvas): primero C_+ con $t \in [\pi/2, \pi]$ y después C_- con $t \in [\pi, 3\pi/2]$.

$$\int_C \log z \, dz = \int_{C_+} \log z \, dz + \int_{C_-} \log z \, dz$$

$$\int_{C_+} \log z \, dz = z \log z - z \Big|_i^{-1} = (-1) \log(-1) - (-1) - i \log(i) + i = -\log(e^{i\pi}) + 1 - i \log(e^{\pi i/2}) + i =$$

$$= -i\pi + 1 + \frac{\pi}{2} + i = \boxed{\frac{2+\pi}{2} + (1-\pi)i}$$

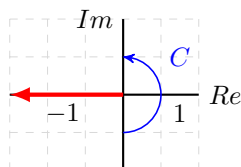
$$\int_{C_-} \log z \, dz = z \log z - z \Big|_{-1}^{-i} = (-i) \log(-i) - (-i) - (-1) \log(-1) + (-1) =$$

$$= -i \log(e^{-i\pi/2}) + i + \log(e^{\pi i}) - 1 = -\frac{\pi}{2} + i + \pi i - 1 = \boxed{-\frac{2+\pi}{2} + (1-\pi)i}$$

Por tanto:

$$\int_C \log z \, dz = \int_{C_+} \log z \, dz + \int_{C_-} \log z \, dz = \frac{2+\pi}{2} + (1+\pi)i - \frac{2+\pi}{2} + (1-\pi)i = \boxed{(2-2\pi)i}$$

e)



En este caso la curva es la semicircunferencia derecha de centro origen y de radio 1 recorrida en sentido positivo. Como la curva no atraviesa ninguna zona discontinua, podemos calcular el valor de esta integral directamente.

$$\int_C \log z \, dz = z \log z - z \Big|_{-i}^i = i \log(i) - i - (-i) \log(-i) + (-i) = i \log(e^{i\pi/2}) - i + i \log(e^{-\pi i/2}) - i =$$

$$= -\frac{\pi}{2} - i + \frac{\pi}{2} - i = \boxed{-2i}$$

Notar que si sumamos los resultados obtenidos en los apartados d) y e) se obtiene el valor $-2\pi i$, que corresponde con el resultado del apartado c) para la circunferencia completa.

7.7. Teorema de Cauchy-Goursat

Vamos a ver un teorema muy importante relativo a las integrales complejas de funciones holomorfas, conocido como Cauchy-Goursat⁵⁰. Existen diferentes versiones de este teorema, que varían en las condiciones impuestas sobre la trayectoria, la función y el dominio. Empecemos por el más sencillo que es debido a Cauchy y en determinados casos es fácil de demostrar.

Teorema 7.12. Cauchy-Goursat (versión débil)

Sea C un camino⁵¹ cerrado simple. Si una función $f(z)$ es holomorfa⁵² en el interior y en los puntos de C , entonces⁵³:

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

Demostración 7.12.

Suponiendo que las derivadas parciales de una función holomorfa son continuas en todo su dominio, se puede utilizar el teorema de Green en el plano:

$$\oint_C (P dx + Q dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

donde D es el dominio formado por el interior de la curva C más los puntos de C . En nuestro caso⁵⁴:

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C (u + iv)(dx + i dy) = \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (v dx + u dy)$$

aplicando el **teorema de Green**⁵⁵ a esta expresión tenemos:

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (v dx + u dy) = \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$$

y al ser f holomorfa en D cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann⁵⁶:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = u_y \\ v_x = -u_y \end{array} \right\} \implies \oint_C f(z) dz = \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0 + i0 = \boxed{0}$$

Teorema 7.13. Cauchy-Goursat (versión fuerte)

Si $f(z)$ es una función holomorfa en el interior de un camino simple cerrado y continua en los puntos de la curva, entonces:

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

En esta segunda versión (fuerte) del Teorema de Cauchy-Goursat no se requiere que $f(z)$ sea holomorfa sobre la curva sino solo continua. Sin embargo su demostración es bastante más complicada y no se verá aquí.

⁵⁰También conocido simplemente con el nombre de *teorema de Cauchy*.

⁵¹Ver la **Definición 7.21**, página 255.

⁵²Ver la **Definición 7.7**, página 243.

⁵³El símbolo $\oint_C$ denota la integración alrededor de una curva cerrada recorriendo la curva C en el sentido *positivo* (contrario a la agujas del reloj).

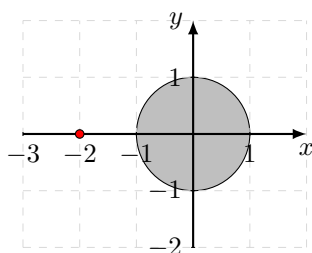
⁵⁴Ver la **Sección 7.5**, página 250.

⁵⁵Ver por ejemplo "Clases de Cálculo II para Ingeniería" en la bibliografía, pag. 517.

⁵⁶Ver la **Sección 7.2.2**, página 236.

Ejercicio 7.28. Calcular la siguiente integral:

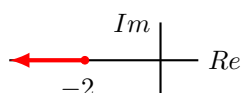
$$\oint_C \frac{1}{2+z} dz \quad ; \quad C(t) = e^{it} \quad ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$



La función $f(z) = 1/(2+z)$ es holomorfa en $\mathbb{C} - \{-2\}$.

En este caso la curva es una circunferencia de centro origen y radio 1. Así, ni la circunferencia ni su interior incluyen al punto singular $z = -2$. Por tanto, por el teorema de Cauchy-Goursat la integral de esta función sobre esta curva es cero.

$$\oint_C \frac{1}{2+z} dz = 0$$



Podemos comprobar este resultado realizando la integral de forma paramétrica. Notar que la función $\log(2+z)$ solo es discontinua para los puntos de eje real tal que $\text{Im}(z) < 2$, por tanto:

$$\begin{aligned} \int_C \frac{1}{2+z} dz &= \left\{ \begin{array}{l} C(t) = e^{it} \\ C'(t) = ie^{it} \end{array} \right\} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+e^{it}} ie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{2+e^{it}} dt = \frac{i}{i} \log(2+e^{it}) \Big|_0^{2\pi} = \log(2+e^{it}) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \log(2+e^{2\pi i}) - \log(2+e^0) = \log(2+1) - \log(2+1) = \boxed{0} \end{aligned}$$

Ejercicio 7.29. Calcular la siguiente integral:

$$\oint_C \frac{1}{2+z} dz \quad ; \quad C(t) = re^{it} \quad ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad ; \quad r \in (0, 2)$$

Todas estas integrales son similares al del ejercicio anterior pero sobre curvas centradas en el origen y de radio $r < 2$. El teorema de Cauchy-Goursat nos asegura que el valor de todas ellas es cero.

Ejercicio 7.30. Comprobar el teorema de Cauchy-Goursat en la siguiente integral.

$$\int_C z^n dz \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \quad , \quad n \neq -1$$

donde $C(t)$ es un camino con origen en $t = a$ y fin en $t = b$ que no pasa por $z = 0$.

Notar que si $n \geq 0$ la función a integrar es un polinomio y por tanto holomorfa en todo $\mathbb{C}$, mientras que si $n < 1$ la función tiene un único punto singular en el origen, siendo holomorfa en el resto.

Calculamos la integral de forma paramétrica:

$$\begin{aligned} \int_C z^n dz &= \left\{ \begin{array}{l} z = C(t) \\ dz = C'(t)dt \end{array} \right\} = \int_a^b C^n(t) C'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{n+1} C^{n+1}(t) \right] dt = \frac{1}{n+1} C^{n+1}(t) \Big|_a^b = \\ &= \frac{1}{n+1} [C^{n+1}(b) - C^{n+1}(a)] \quad , \quad (n \neq -1) \end{aligned}$$

Claramente el resultado no depende del camino recorrido sino únicamente del punto inicial y final. Si $C(t)$ fuera una curva cerrada $C(a) = C(b)$ el resultado sería cero, como establece el teorema de Cauchy-Goursat. Notar que este teorema solo es válido en este caso y para cualquier curva, para los valores $n \geq 0$, donde la función es siempre holomorfa. Para valores de n negativos, el teorema de Cauchy-Goursat solo tendría validez si la curva no incluye en su interior al origen. El resultado obtenido, demuestra además que para estos casos y en estas funciones también la integral es cero aunque la curva incluya al punto singular en su interior.

Ejercicio 7.31. Encontrar, en caso de existir, el valor de la siguiente integral en los siguientes casos:

$$\int_C \frac{1}{z} dz$$

- C es un camino abierto regular a trozos que no cruza el semieje real negativo ni el origen.
- C es un camino abierto regular a trozos que cruza el semieje real negativo.
- C es un camino que pasa por el origen.
- C es una circunferencia de centro origen y radio r .

- a) La función $f(z) = 1/z$ es la derivada de $\log(z)$ en $\mathbb{C} - \mathbb{R}^-$ (semieje real negativo), por tanto para todo camino regular que una el punto z_1 con el punto z_2 y que no atraviese $\mathbb{R}^-$ se tiene:

$$\int_C z^{-1} dz = \log(z_2) - \log(z_1)$$

Si C es cerrado esta integral es nula, cumpliéndose el teorema de Cauchy-Goursat.

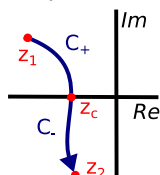
- b) En este caso hay que partir la trayectoria en dos trozos, uno que se encuentre por encima del eje real y otro por debajo⁵⁷, de la siguiente forma:

$$\int_C \frac{1}{z} dz = \int_{C^+} \frac{1}{z} dz + \int_{C^-} \frac{1}{z} dz$$

donde C^+ es la trayectoria por encima del eje real y C^- la que está por debajo. El valor de cada una de ellas se puede determinar de la misma forma que el apartado a), pero en el caso de la integral sobre C^- hay que tomar el valor del logaritmo en el límite inferior de la integral ...

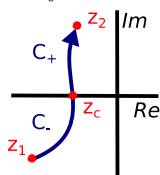
Si el punto inicial y final de C son z_1 y z_2 y el punto de corte con el eje real es $z_c = ai = |a|e^{i\pi}$ con $a < 0$, entonces el valor de la integral dependerá si la trayectoria es descendente o ascendente.

- Trayectoria descendente (z_1 está por encima del eje real y z_2 por debajo)



$$\begin{aligned} \int_C \frac{1}{z} dz &= \int_{C^+} \frac{1}{z} dz + \int_{C^-} \frac{1}{z} dz = \log(z)|_{z_1}^{z_c} + \log(z)|_{z_c}^{z_2} = \\ &= [\log(|a|e^{i\pi}) - \log(z_1)] + [\log(z_2) - \log(|a|e^{-i\pi})] \end{aligned}$$

- Trayectoria ascendente (z_1 está por debajo del eje real y z_2 por encima)



$$\begin{aligned} \int_C \frac{1}{z} dz &= \int_{C^-} \frac{1}{z} dz + \int_{C^+} \frac{1}{z} dz = \log(z)|_{z_1}^{z_c} + \log(z)|_{z_c}^{z_2} = \\ &= [\log(|a|e^{-i\pi}) - \log(z_1)] + [\log(z_2) - \log(|a|e^{i\pi})] \end{aligned}$$

- Si C pasa por el origen, se trataría de una integral impropia compleja, que no se tratará en este curso.
- Si C atraviesa $\mathbb{R}^- - \{0\}$, la integral tiene sentido aunque no puede aplicarse el resultado del apartado a) por no ser derivable en todo el recorrido. De igual forma que se hizo en el [Ejercicio 7.24, página 258](#) se tiene para $C(t) = re^{it}$; $0 \leq t \leq 2\pi$.

$$C'(t) = rie^{it} \quad \Rightarrow \quad \int_C \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} rie^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = it|_0^{2\pi} = \boxed{2\pi i}$$

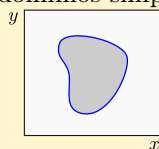
Como se verá en la [Sección 7.7.2, página 266](#), este mismo valor también se obtiene si la curva cerrada que incluye al origen tiene cualquier forma, no necesariamente una circunferencia.

7.7.1. Dominios Simplemente y Múltiplemente Conexos

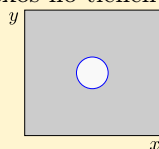
Definición 7.25. Dominios Simplemente y Múltiplemente Conexo

- Se dice que un dominio D es **simplemente conexo** si todo camino cerrado simple contenido en él encierra solo puntos de D .
- Un dominio que no es simplemente conexo se denomina **múltiplemente conexo**.

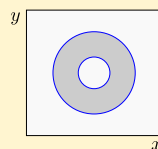
Los dominios simplemente conexos no tienen agujeros.



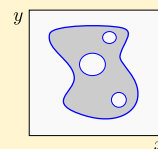
Simplemente C.



Múltiplemente C.



Múltiplemente C.



Múltiplemente C.

El teorema de Cauchy-Goursat se puede extender gracias a la definición de dominio simplemente conexo.

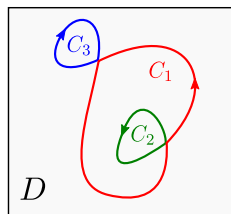
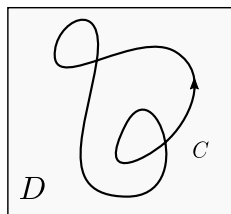
Teorema 7.14. Extensión del Teorema de Cauchy-Goursat

Si $f(z)$ es una función holomorfa en un dominio D simplemente conexo, entonces para todo camino cerrado C contenido en D se tiene:

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

Este teorema extiende su aplicación a curvas que no son simples, descomponiendo el dominio en curvas cerradas que sí lo sean.

Ejemplo 7.11. Descomposición del Dominio

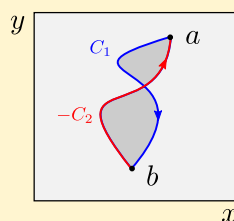
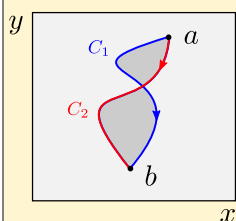


Descomposición de una curva C en curvas simples C_1 , C_2 y C_3 . A efectos de integración:

$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$$

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{i=1}^3 \oint_{C_i} f(z) dz = 0 \quad (f(z) \text{ holomorfa en } D)$$

Consecuencia de este teorema es el siguiente importante resultado.



En un dominio donde $f(z)$ es holomorfa, todas las integrales de f sobre diferentes caminos que tienen el mismo punto inicial y final son iguales

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$

Se puede comprobar creando una curva cerrada $C_1 \cup C_2^-$ y aplicando el teorema de Cauchy-Goursat se obtiene:

$$\int_{C_1 \cup C_2^-} f dz = \int_{C_1} f dz + \int_{C_2^-} f dz = 0 \implies \int_{C_1} f dz = - \int_{C_2^-} f dz = \int_{C_2} f dz$$

⁵⁷Ver el Ejercicio 7.27, página 260.

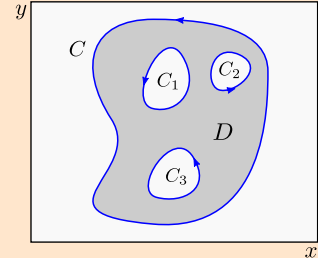
7.7.2. Principio de Deformación de Contornos

El teorema de Cauchy-Goursat también puede extenderse a dominios múltiplemente conexos.

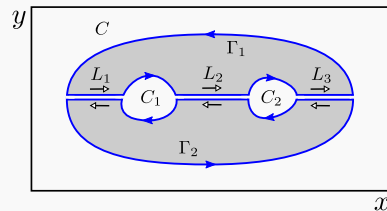
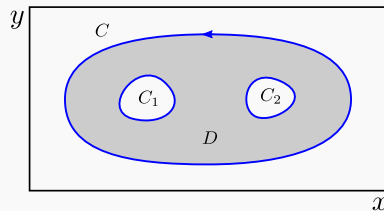
Teorema 7.15. Principio de Deformación de Contornos

Sean $C, C_1, \dots$ y C_n , curvas suaves a trozos, simples, cerradas y con la misma orientación⁵⁸, tales que cada curva C_k está en el interior de C y en el exterior de las demás. Sea D el dominio múltiplemente conexo formado por los puntos que son a la vez del interior de C y del exterior de C_k , y sea $f(z)$ holomorfa en D y continua sobre su frontera $C \cup C_1 \cup \dots \cup C_n$. Entonces:

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{i=1}^n \oint_{C_i} f(z) dz$$

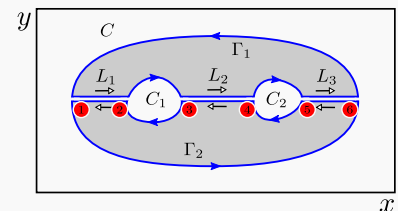


Demostración 7.15.



Se considera un dominio D múltiplemente conexo formado por curvas suaves C (exterior) y C_1 y C_2 (internas) como muestra la figura izquierda. Para calcular la integral de $f(z)$ en el dominio D , conectamos C_1 y C_2 entre sí y con C a través de caminos L_1, L_2 y L_3 como muestra la figura derecha (en la gráfica los caminos L_i aparecen partidos como si fueran dos, aunque en realidad solo es un camino y se muestra de esta forma para observar bien los dos sentidos). Esto genera dos caminos exteriores Γ_1 y Γ_2 .

Denotamos con números los puntos que conectan caminos distintos (1 L_1 con C , 2 L_1 con C_1 , etc.) como muestra la figura. Entonces la integral de la función sobre el dominio D se puede descomponer en dos integrales sobre la curva simple cerrada superior (Sup) y sobre la inferior (Inf), y cada una de ellas se pueden descomponer en la suma de integrales sobre curvas suaves, de la siguiente forma:



$$\begin{aligned} \int_D f(z) dz &= \oint_{Sup} f(z) dz + \oint_{Inf} f(z) dz = \\ &= \left[\int_{61} f + \int_{12} f + \int_{23} f + \int_{34} f + \int_{45} f + \int_{56} f \right] + \left[\int_{16} f + \int_{65} f + \int_{54} f + \int_{43} f + \int_{32} f + \int_{21} f \right] \end{aligned}$$

Ahora teniendo en cuenta que sobre los tramos L_i :

$$\int_{12} f + \int_{21} f = \int_{12} f - \int_{12} f = 0 \quad ; \quad \int_{34} f + \int_{43} f = \int_{34} f - \int_{34} f = 0 \quad ; \quad \int_{56} f + \int_{65} f = \int_{56} f - \int_{56} f = 0$$

y sobre los demás:

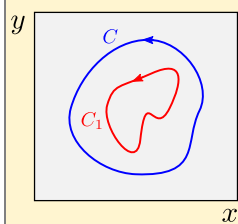
$$\int_{61} f + \int_{16} f = \oint_C f \quad ; \quad \int_{23} f + \int_{32} f = \oint_{C_1} f \quad ; \quad \int_{45} f + \int_{54} f = \oint_{C_2} f$$

Finalmente teniendo en cuenta el teorema de Cauchy-Goursat:

$$\int_D f(z) dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_C f + \oint_{C_1} f + \oint_{C_2} f = 0$$

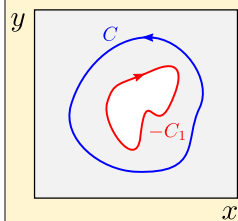
⁵⁸Recordamos que se considera sentido positivo cuando el interior del dominio se encuentra a la izquierda del sentido del recorrido.

El *principio de deformación de contornos*⁵⁹ tiene consecuencias muy importantes, entre las que se encuentran las siguientes:



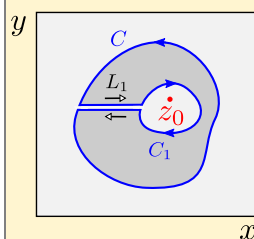
En un dominio donde $f(z)$ es holomorfa, la integral de f sobre un camino cerrado C es igual a la integral de f sobre cualquier camino cerrado C_1 contenida en C y con la misma orientación que ella.

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz$$



La ecuación anterior es fácil de comprobar si pensamos en C_1 como un hueco y aplicando el teorema de la deformación de contornos se tiene:

$$\oint_C f dz + \oint_{-C_1} f dz = 0 \implies \oint_C f dz = - \oint_{-C_1} f dz = \oint_{C_1} f dz$$

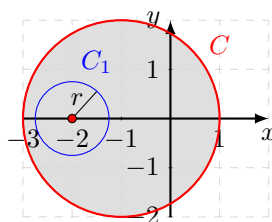


En un dominio donde $f(z)$ es holomorfa menos en un punto $z = z_0$, la integral de f sobre un camino cerrado C que contiene en su interior a la *singularidad*⁶⁰ z_0 es igual a la integral de f sobre cualquier camino cerrado C_1 que contenga a z_0 .

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz$$

Ejercicio 7.32. Calcular la siguiente integral compleja.

$$\int_C \frac{1}{2+z} dz \quad ; \quad C(t) = -1 + 2e^{it} \quad ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$



La función $f(z) = 1/(2+z)$ es holomorfa en $\mathbb{C} - \{-2\}$.

En lugar de calcular la integral sobre la curva $C(t)$ que nos dan, podemos hacerlo de forma mucho más sencilla sobre una circunferencia $C_1(t)$ centrada en el punto singular $(-2, 0)$ de radio r interior a $C(t)$.

$$C_1(t) = -2 + re^{it} \quad ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad ; \quad r \in (0, 1)$$

Entonces, teniendo en cuenta las implicaciones del teorema de la deformación de contornos se tiene:

$$\oint_C \frac{1}{2+z} dz = \oint_{C_1} \frac{1}{2+z} dz$$

de forma que:

$$C_1'(t) = ire^{it} \implies \oint_{C_1} \frac{1}{2+z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{2 + -2 + re^{it}} dz = \int_0^{2\pi} i dt = it|_0^{2\pi} = \boxed{2\pi i}$$

Este resultado se puede generalizar mediante el teorema de la siguiente sección.

⁵⁹Ver el Teorema 7.15, página 266.

⁶⁰Ver la Definición 7.9, página 243.

7.8. Fórmula Integral de Cauchy

Teorema 7.16. Fórmula Integral de Cauchy

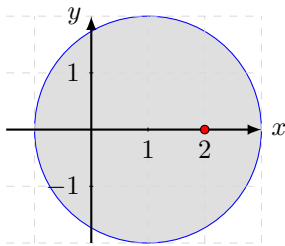
Sea $f(z)$ una función holomorfa dentro y sobre un camino cerrado simple C orientado positivamente. Si z_0 es un punto del interior de C , se tiene:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} \quad \Rightarrow \quad \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

Vamos a ver algunos ejercicios en los que se utiliza este importante teorema.

Ejercicio 7.33. Evaluar la siguiente integral,

$$\oint_C \frac{3}{z-2} dz \quad ; \quad C(t) = 1 + 2e^{it} \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$



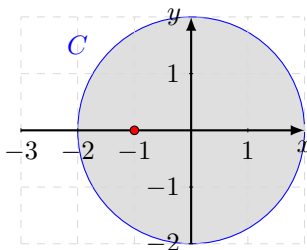
Esta función racional tiene un único punto singular en $z = 2$ que se encuentra en el interior de la curva C que es una circunferencia de centro $z = 1$ y radio 2. En este caso la función del numerador $f(z) = 3$ es una función constante (polinomio de grado cero) que es holomorfa en todo $\mathbb{C}$.

Por tanto se cumplen las condiciones de la fórmula integral de Cauchy y podemos calcular la integral de la siguiente forma:

$$\oint_C \frac{3}{z-2} dz = 2\pi i(3) = \boxed{6\pi i}$$

Ejercicio 7.34. Evaluar la siguiente integral,

$$\oint_C \frac{3z^2 - 2z - 1}{z+1} dz \quad ; \quad C(t) = 2e^{it} \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$



Esta función racional tiene un único punto singular en $z = -1$ que se encuentra en el interior de la curva C que es una circunferencia de centro origen y radio 2. Esta integral la podemos expresar como:

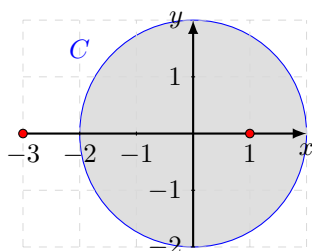
$$\oint_C \frac{3z^2 - 2z - 1}{z - (-1)} dz$$

por tanto se cumplen las condiciones de la *fórmula integral de Cauchy* donde en este caso $f(z) = 3z^2 - 2z - 1$, y por tanto:

$$\oint_C \frac{3z^2 - 2z - 1}{z - (-1)} dz = 2\pi i(3z_0^2 - 2z_0 - 1) \stackrel{z_0 = -1}{=} 2\pi i(4) = \boxed{8\pi i}$$

Ejercicio 7.35. Evaluar la siguiente integral,

$$\oint_C \frac{z}{(z-1)(z+3)} dz \quad ; \quad C(t) = 2e^{it} \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$



Esta función tiene dos puntos singulares en $z = 1$ y $z = -3$, siendo la curva C una circunferencia de centro origen y radio 2, por tanto en el interior de C solo está la singularidad $z = 1$. Esta integral la podemos expresar como:

$$\oint_C \frac{z}{(z-1)(z+3)} dz = \oint_C \frac{\frac{z}{z+3}}{z-1} dz$$

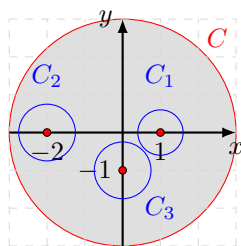
donde ahora la función $f(z) = z/(z+3)$ es holomorfa sobre la curva C y dentro de ella, por tanto, se cumplen las condiciones de la *fórmula integral de Cauchy* y se tiene:

$$\oint_C \frac{z}{(z-1)(z+3)} dz = \oint_C \frac{\frac{z}{z+3}}{z-1} dz = 2\pi i \left(\frac{z_0}{z_0+3} \right)_{z_0=1} = \boxed{\frac{\pi i}{2}}$$

Ejercicio 7.36. Evaluar la siguiente integral,

$$\oint_C \frac{2z}{(z-1)(z+2)(z+i)} dz$$

donde C es un camino cerrado simple que incluye en su interior a los tres puntos del plano complejo $\{1, -2, -i\}$.



En este caso la función dada tiene tres singularidades dentro de la curva C . Por el principio de deformación de contornos podemos hacer,

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz + \oint_{C_3} f(z) dz$$

donde C_1 , C_2 y C_3 son circunferencias centradas respectivamente en las singularidades $z = 1$, $z = -2$ y $z = -i$, y estando todas en el interior de C . Por tanto:

$$\oint f(z) dz = \oint_{C_1} \frac{2z}{(z+2)(z+i)} dz + \oint_{C_2} \frac{2z}{(z-1)(z+i)} dz + \oint_{C_3} \frac{2z}{(z-1)(z+2)} dz = \oint_{C_1} \frac{f_1(z)}{z-1} + \oint_{C_2} \frac{f_2(z)}{z+2} + \oint_{C_3} \frac{f_3(z)}{z+i}$$

Como las funciones $f_1(z)$, $f_2(z)$ y $f_3(z)$ son holomorfas en sus respectivas curvas y en el interior de las mismas, podemos aplicar la *fórmula integral de Cauchy* a cada una de ellas.

$$\oint f(z) dz = 2\pi i [f_1(1) + f_2(-2) + f_3(-i)] = 2\pi i \left[\frac{2}{3(1+i)} + \frac{4}{3(-2+i)} + \frac{2i}{(i+1)(-i+2)} \right] = \boxed{0}$$

7.8.1. Derivadas de las Funciones Holomorfas

El siguiente teorema se obtiene derivando de forma reiterada la *fórmula integral de Cauchy*.

Teorema 7.17. Extensión de la Fórmula Integral de Cauchy

Sea $f(z)$ una función holomorfa dentro y sobre un camino cerrado simple C orientado positivamente. Si z es un punto del interior de C , se tiene:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \quad (7.8)$$

- Toda función $f(z)$ holomorfa en un dominio D simplemente conexo⁶¹ es de clase $\mathcal{C}^n$ en ese dominio. Por tanto,

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \implies \quad u(x, y), v(x, y) \in \mathcal{C}^n$$

siendo todas sus funciones derivadas, holomorfas en D .

- Particularizando para la función holomorfa constante $f(z) = 1$ se tiene⁶²:

$$\oint_C \frac{1}{(z - z_0)} dz = 2\pi i \quad ; \quad \oint_C \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} dz = 0 \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

para todo camino cerrado C del plano complejo.

- Si $f(z)$ es continua en un dominio D y cumple,

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

para todo camino cerrado C contenido en D , entonces f es holomorfa⁶³ en D .

La **Ecuación (7.8)** se puede utilizar para calcular ciertas integrales, siempre que se cumplan las condiciones del mismo, expresándola de la forma:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Ejercicio 7.37. Evaluar la siguiente integral,

$$\oint_C \frac{z^4}{(z - 1)^3} dz$$

donde el contorno de C encierra al punto $z = 1$.

Podemos expresar la integral dada como:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - 1)^{2+1}} \quad ; \quad f(z) = z^4$$

como $f(z)$ es analítica dentro y sobre la curva C se tiene:

$$\oint_C \frac{z^4}{(z - 1)^3} dz = 2\pi i \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{dz^2} z^4 \right]_{z=1} = \pi i [12z^2]_{z=1} = \boxed{12\pi i}$$

⁶¹Ver la **Definición 7.25**, página 265.

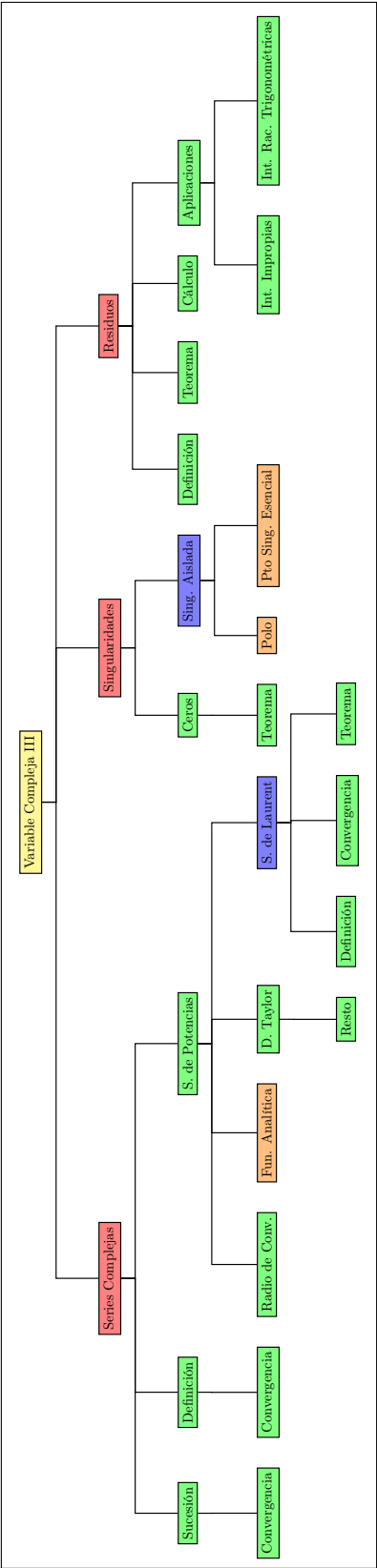
⁶²Tener en cuenta que en este caso todas las derivadas son nulas.

⁶³Esta afirmación es la recíproca del **Teorema 7.14**, página 265.

Variable Compleja III

Contenido

8.1	Series Complejas	273
8.1.1	Introducción	273
8.1.2	Sucesiones y Series Complejas	273
8.1.3	Serie de Potencias Compleja	274
8.1.4	Funciones Analíticas	275
8.1.5	Serie de Taylor	276
8.1.6	Serie de Laurent	281
8.2	Singularidades. Ceros y Polos	300
8.2.1	Ceros de una Función	300
8.2.2	Singularidades Aisladas	301
8.3	Residuos	305
8.3.1	Cálculo de Residuos	306
8.3.2	Aplicaciones de los Residuos	311
8.3.3	Cálculo de Integrales Reales Definidas	311



8.1. Series Complejas

8.1.1. Introducción

En el tema anterior se han estudiado una serie de herramientas matemáticas dadas a través de teoremas que permiten la integración de diferentes funciones complejas. Sin embargo, hay un gran número de integrales sencillas, como por ejemplo:

$$\int_C \frac{e^z}{\operatorname{sen} z} dz$$

que no son posibles integrar con estos teoremas. Los problemas vienen de las singularidades generadas por los ceros de la función seno del denominador.

Se podría partir el dominio y por el *teorema de la deformación de contornos*¹, reemplazar la integral por otras en círculos pequeños en torno a las singularidades. Con esto tenemos la suma de unas integrales que aun no podemos resolver.

Esto motiva el desarrollo de técnicas para aproximar las funciones complejas a nivel local, de igual forma que se hace con los desarrollos de Taylor en $\mathbb{R}$. En este caso hay que ir más lejos, ya que hay que hacer los desarrollos cerca de las singularidades.

Para hacer esto es necesario hablar de sucesiones y series de números en funciones complejas.

8.1.2. Sucesiones y Series Complejas

Definición 8.1. Sucesión Compleja

Una sucesión de números complejos es una aplicación del conjunto de los números naturales en los complejos:

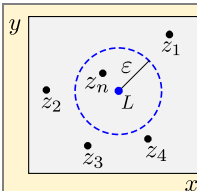
$$\left. \begin{array}{l} z : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \\ n \rightarrow z(n) \end{array} \right\} \Rightarrow \{z_n\} = z_1, z_2, \dots$$

Definición 8.2. Sucesión Convergente

Se dice que una sucesión $\{z_n\}$ tiene por límite $L \in \mathbb{C}$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero $n_0 > 0$ tal que:

$$|z_n - L| < \varepsilon, \quad \forall n > n_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = L$$

- Si una sucesión tiene límite, se dice que es **convergente** y que **converge** a L .
- En caso de que no tenga límite se dice que la sucesión es **divergente**.



Representación gráfica del límite de una sucesión. En el caso complejo los términos de la sucesión se disponen en el espacio bidimensional del plano complejo.

Teorema 8.1. Sucesión Compleja

Toda sucesión compleja,

$$z_n = a_n + ib_n$$

convergente con límite $L = a + bi$, verifica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + ib_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a + ib$$

¹Ver el Teorema 7.15, página 266.

Definición 8.3. Serie Compleja

Una **serie compleja** es una *sucesión* infinita $\{S_n\}$ formada por las sumas parciales de una sucesión compleja $\{z_n\}$, cuyos miembros son de la forma,

$$S_n = \sum_{i=1}^n z_i = z_1 + \cdots + z_n \quad \left\{ \begin{array}{l} \{S_n\} \text{ es la sucesión de los términos de la serie} \\ S_n = \sum_{i=1}^n z_i \text{ son las sumas parciales de la serie} \end{array} \right.$$

Definición 8.4. Serie Convergente

Una serie compleja se dice que es **convergente** con suma S si *converge* al número complejo S .

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$$

8.1.3. Serie de Potencias Compleja**Definición 8.5. Serie de Potencia Compleja**

Se denomina **serie de potencias compleja** alrededor del punto z_0 (**centro**²) a una serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \cdots \quad ; \quad a_n \in \mathbb{C}$$

Teorema 8.2. Radio de Convergencia

Toda *serie de potencias* tiene un número real $R \geq 0$ ó $R = \infty$, llamado **radio de convergencia** donde:

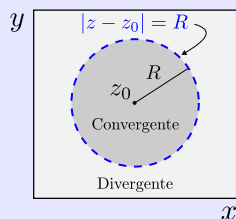
- La serie *converge absolutamente*³ para $|z - z_0| < R$.
- La serie *diverge* para $|z - z_0| > R$.

Cuando $z_0 = 0$ la serie de potencias compleja queda de la forma⁴:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad ; \quad a_n \in \mathbb{C}$$

Definición 8.6. Criterio del Cociente

El *radio de convergencia* R de una serie compleja $\sum a_n z^n$ puede ser determinado de la siguiente forma:



$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

El radio de convergencia R en un punto z_0 establece una región de convergencia en el plano complejo dado por un *disco abierto*⁵ $D(z_0, R)$. Si este límite no existe, es necesario que buscar métodos alternativos.

²Un serie de potencias siempre converge en su *centro* z_0 .

³Ver la **Definición 4.5**, página 101.

⁴Haciendo el cambio de variable $w = z - z_0$ toda serie de potencias se puede expresar de la forma: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$.

8.1.4. Funciones Analíticas

Toda *serie de potencias compleja* define una función compleja $f(z)$ continua en la región de convergencia $D(z_0, R)$.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad ; \quad z \in D(z_0, R)$$

Sin embargo, **no toda función compleja puede expresarse como una serie de potencias.**

Definición 8.7. Función Analítica

Una función compleja $f(z)$ se dice que es **analítica** en $z_0 \in \mathbb{C}$ si puede expresarse como una serie de potencias de $z - z_0$ convergente en algún disco $D(z_0, R)$ con $R > 0$.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Una función es *analítica* en un dominio D si es *analítica* en todos los puntos de ese dominio.

Teorema 8.3. Funciones Analíticas

Toda función *analítica* $f(z)$ en $D(z_0, R)$ con $R > 0$ verifica:

- La función $f(z)$ es *holomorfa*⁶ en $D(z_0, R)$, siendo su derivada con radio de convergencia R :

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z - z_0)^n$$

- Una *primitiva*⁷ de $f(z)$ con radio de convergencia R es:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} (z - z_0)^n$$

- Las funciones analíticas son infinitamente derivables en su dominio de definición.

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1) \cdots (n+1) a_{n+k} (z - z_0)^n$$

- A través de la expresión anterior, los coeficientes de la serie de potencias que define la función se pueden obtener de la siguiente forma:

$$f^{(k)}(z_0) = k! a_k \quad \implies \quad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

- *Principio de prolongación analítica*: dos funciones analíticas son iguales si coinciden todos los coeficientes de sus desarrollos.

El concepto de *serie de Taylor* de una función compleja generaliza estos resultados.

⁵Ver la Definición 6.16, página 194.

⁶Ver la Definición 7.7, página 243.

⁷Ver la Definición 7.24, página 258.

8.1.5. Serie de Taylor

Teorema 8.4. Serie de Taylor

Una función *holomorfa* en un dominio D puede desarrollarse en serie de potencias en torno a un punto $z_0 \in D$ de la siguiente forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad ; \quad \forall z \in D$$

conocida con el nombre de **desarrollo en serie de Taylor** de $f(z)$ en $z = z_0$. Si $z_0 = 0$ se denomina **serie o desarrollo en serie de McLaurin**.

- Toda función *holomorfa* es *analítica* y viceversa, de forma que en la mayoría de los casos ambos términos pueden considerarse sinónimos.
- La serie de Taylor se puede expresar como:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad ; \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Teniendo en cuenta el **Teorema 7.17, página 270**, para todo camino cerrado C se tiene:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dsz \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Teorema 8.5. Resto de la Serie de Taylor

Una función *holomorfa* en un dominio D con $z_0 \in D$ puede expresarse como:

$$f(z) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k + R_{n+1}(z)(z - z_0)^{n+1} \quad ; \quad \forall z \in D$$

donde el **resto**⁸ $R_{n+1}(z)$ viene dado por,

$$R_{n+1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\alpha)}{(\alpha - z)(\alpha - z_0)^{n+1}} d\alpha$$

siendo $C \subset D$ un camino cerrado que rodea a los puntos z y z_0 , y α un punto cualquiera de C .

Ejemplo 8.1. Ejemplos de series de McLaurin de algunas funciones complejas elementales.

- $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad ; \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \quad ; \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \quad ; \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots \quad ; \quad \forall |z| < 1$

⁸No confundir el *resto* $R_{n+1}(z)$ con el radio de convergencia R .

Ejercicio 8.1. Encontrar los tres primeros términos del desarrollo de Taylor de la siguiente función compleja en torno al punto $z_0 = 1 + i$.

$$f(z) = z \log z$$

El desarrollo de Taylor pedido es:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + R_3(z)$$

Calculamos los valores de la función y sus derivadas en el punto de desarrollo.

$$f(z) = z \log z \quad ; \quad f(z_0) = f(1 + i) = (1 + i) \log(1 + i)$$

$$f'(z) = \log(z) + 1 \quad ; \quad f'(z_0) = 1 + \log(1 + i)$$

$$f''(z) = \frac{1}{z} \quad ; \quad f''(z_0) = \frac{1}{1 + i} = \frac{1 - i}{2}$$

$$f(z) = (1 + i) \log(1 + i) + [1 + \log(1 + i)](z - 1 - i) + \frac{1 - i}{2}(z - 1 - i)^2 + R_3(z)$$

Teorema 8.6. Radio de Convergencia de una Serie de Taylor

El *radio de convergencia*⁹ R de la serie de Taylor de una función en un punto z_0 viene dado por la distancia del punto de desarrollo z_0 al *punto singular*¹⁰ de la función más cercano a z_0 .

Nota 8.1. Si la función no tiene puntos singulares, el radio de convergencia de todo desarrollo de Taylor de la función es infinito.

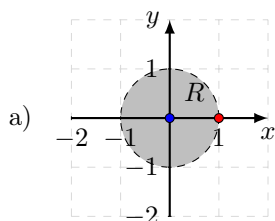
Ejercicio 8.2. Determinar y representar la región de convergencia de los desarrollos de Taylor de las siguientes funciones complejas:

a) $f(z) = \frac{1}{1 - z}$ en $z = 0$

b) $f(z) = \frac{1}{1 - z}$ en $z = -1 + i$

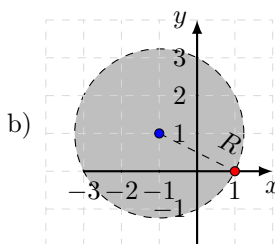
c) $f(z) = \frac{1}{(z + 1 - i)(z - 2i)}$ en $z = 0$

d) $f(z) = \frac{1}{(z + 1 - i)(z - 2i)}$ en $z = 1 + i$



El desarrollo de Taylor de esta función en torno al origen corresponde con la *serie geométrica*¹¹. Tiene una singularidad en $z = 1$ (en rojo) y estamos desarrollando en torno a $z = 0$ (en azul), por tanto el radio de convergencia viene dado por la distancia de $(0,0)$ a $(1,0)$:

$$R = \sqrt{(0 - 1)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{1} = 1$$

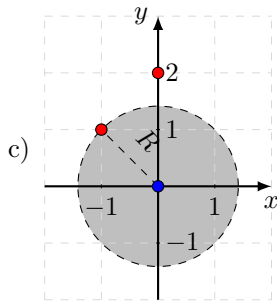


Esta función es la misma que el caso anterior pero desarrollada en punto distinto del origen. Tiene una singularidad en $z = 1$ (en rojo) y estamos desarrollando en este caso en torno a $z = -1 + i$ (en azul), por tanto el radio de convergencia viene dado por la distancia de $(-1,1)$ a $(1,0)$:

$$R = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{5}$$

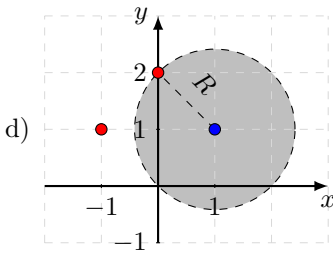
⁹Ver el Teorema 8.2, página 274.

¹⁰Ver la Definición 7.9, página 243 y la Sección 8.2.2, página 301.



La función tiene en este caso dos singularidades (en rojo) en $z_1 = -1 + i$ y $z_2 = 2i$. Se desarrolla en torno al punto $z = 0$ (en azul). Como la discontinuidad más cercana al punto de desarrollo es $z_1 = -1 + i$, el radio de convergencia viene dado por la distancia de $(0,0)$ a $(-1,1)$ y por tanto:

$$R = \sqrt{(0+1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$$



En este caso la función también tiene dos singularidades (en rojo) en $z_1 = -1 + i$ y $z_2 = 2i$, pero se desarrolla en torno al punto $z = 1 + i$ (en azul). Como la discontinuidad más cercana al punto de desarrollo es en este caso $z_2 = 2i$, el radio de convergencia viene dado por la distancia de $(1,1)$ a $(0,2)$ y por tanto:

$$R = \sqrt{(1-0)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2}$$

Ejercicio 8.3. Sabiendo que el desarrollo de McLaurin de una función está dado por la serie geométrica,

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots \quad ; \quad \forall |z| < 1$$

determinar, en caso de ser posible, los desarrollos de McLaurin de las siguientes funciones, haciendo un cambio de variable apropiado.

a) $\frac{1}{1+z}$ b) $\frac{1}{a-z}$ c) $\frac{1}{a+z}$ d) $\frac{az^k}{b-cz}$ e) $\frac{1+2z}{1+z^2}$ f) $\frac{1}{z}$

a) Teniendo en cuenta que:

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)}$$

y haciendo el cambio de variable $w = -z$ en el desarrollo dado se tiene:

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{1-w} = 1 + w + w^2 + w^3 + \dots = 1 + (-z) + (-z)^2 + (-z)^3 + \dots =$$

$$= 1 - z + z^2 - z^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad ; \quad \forall |z| < 1$$

b) Teniendo en cuenta que:

$$\frac{1}{a-z} = \frac{1/a}{1-(z/a)} = \frac{1}{a} \frac{1}{1-\frac{z}{a}}$$

y haciendo el cambio de variable $w = z/a = za^{-1}$ en el desarrollo dado se tiene:

$$\frac{1}{a-z} = \frac{1}{a} \frac{1}{1-\frac{z}{a}} = \frac{1}{a} \frac{1}{1-w} = \frac{1}{a} (1 + w + w^2 + w^3 + \dots) = \frac{1}{a} [1 + (a^{-1}z) + (a^{-1}z)^2 + (a^{-1}z)^3 + \dots] =$$

$$= \frac{1}{a} [1 + a^{-1}z + a^{-2}z^2 + a^{-3}z^3 + \dots] = a^{-1} + a^{-2}z + a^{-3}z^2 + a^{-4}z^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n-1} z^n \quad ; \quad \forall |z| < |a|$$

¹¹Ver el Ejemplo 4.3, página 98 y la Sección 8.1.6, página 281.

Notar que la región de convergencia en este caso se puede obtener a través del radio de convergencia de la serie geométrica y el cambio de variable realizado, de la siguiente forma:

$$|w| < 1 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{z}{a} \right| < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{|z|}{|a|} < 1 \quad \Rightarrow \quad |z| < |a|$$

c) De igual forma que en los apartados anteriores:

$$\frac{1}{a+z} = \frac{1/a}{1 - (-z/a)}$$

y haciendo el cambio de variable $w = -z/a = -za^{-1}$ en el desarrollo dado se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+z} &= \frac{1}{a} \frac{1}{1 - \frac{-z}{a}} = \frac{1}{a} \frac{1}{1-w} = \frac{1}{a} (1+w+w^2+w^3+\dots) = \frac{1}{a} [1+(-a^{-1}z)+(-a^{-1}z)^2+(-a^{-1}z)^3+\dots] = \\ &= \frac{1}{a} [1-a^{-1}z+a^{-2}z^2-a^{-3}z^3+\dots] = a^{-1}-a^{-2}z+a^{-3}z^2-\dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^{-n-1} z^n \quad ; \quad \forall |z| < |a| \end{aligned}$$

donde la región de convergencia se obtiene:

$$|w| < 1 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{-z}{a} \right| < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{|z|}{|a|} < 1 \quad \Rightarrow \quad |z| < |a|$$

d) Siguiendo el mismo procedimiento anterior:

$$\frac{az^k}{b-cz} = \frac{az^k/b}{1-(cz/b)} = \frac{az^k}{b} \frac{1}{1-\frac{cz}{b}}$$

y con el cambio de variable $w = cz/b = czb^{-1}$ en el desarrollo dado se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{az^k}{b-cz} &= \frac{az^k}{b} \frac{1}{1-\frac{cz}{b}} = \frac{az^k}{b} \frac{1}{1-w} = \frac{az^k}{b} (1+w+w^2+\dots) = \frac{az^k}{b} [1+(cb^{-1}z)+(cb^{-1}z)^2+(cb^{-1}z)^3+\dots] = \\ &= \frac{az^k}{b} [1+cb^{-1}z+c^2b^{-2}z^2+c^3b^{-3}z^3+\dots] = a(b^{-1}z^k+cb^{-2}z^{k+1}+c^2b^{-3}z^{k+2}+c^3b^{-4}z^{k+3}+\dots) = \\ &= a \sum_{n=0}^{\infty} c^n b^{-n-1} z^{k+n} \quad ; \quad \forall |z| < \frac{|b|}{|c|} \end{aligned}$$

donde la región de convergencia se obtiene:

$$|w| < 1 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{-cz}{b} \right| < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{|c||z|}{|b|} < 1 \quad \Rightarrow \quad |z| < \frac{|b|}{|c|}$$

e) Primero vamos a encontrar el desarrollo de McLaurin de la función:

$$\frac{1}{1+z^2} \xrightarrow{z^2=-w} \frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad , \quad |z| < 1$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \frac{1+2z}{1+z^2} &= (1+2z) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = (1+2z)(1-z^2+z^4-z^6+\dots) = \\ &= 1+2z-z^2-2z^3+z^4+2z^5-\dots \quad , \quad |z| < 1 \end{aligned}$$

- f) En este caso no se puede calcular el desarrollo de McLaurin de esta función, ya que $z = 0$ es un *punto singular* de la función $f(z) = 1/z$.

Sin embargo podemos utilizar la técnica anterior para obtener un desarrollo de Taylor de esta función en torno a cualquier punto $z_0 \neq 0$.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z + z_0 - z_0} = \frac{1}{z_0 - (z_0 - z)} = \frac{1/z_0}{1 - \frac{z_0 - z}{z_0}} \xrightarrow{w = (z_0 - z)/z_0} \frac{1}{z_0} \frac{1}{1 - w}$$

$$\frac{1}{z_0} \frac{1}{1 - w} = \frac{1}{z_0} \sum_{n=0}^{\infty} w^n = \frac{1}{z_0} (1 + w + w^2 + w^3 + \dots) \quad , \quad |w| < 1$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_0 - z}{z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_0 - z)^n}{z_0^{n+1}}$$

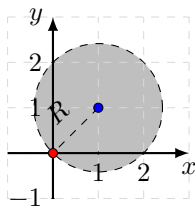
donde la región de convergencia es:

$$|w| < 1 \quad ; \quad \left| \frac{z_0 - z}{z_0} \right| < 1 \quad ; \quad |z_0 - z| < |z_0|$$

Ejercicio 8.4. Determinar el punto de desarrollo, la región de convergencia y el radio de convergencia del siguiente desarrollo de Taylor (**Ejercicio 8.3** apartado f).

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (1 + i - z)^n \quad ; \quad |1 + i - z| < \sqrt{2}$$

Dibujar la región de convergencia del desarrollo en el plano complejo.



La función $1/z$ tiene un único punto singular en $z = 0$ (en rojo) y en este caso nos dan su desarrollo de Taylor en torno al punto $z = 1 + i$ (en azul). La región de convergencia $|1 + i - z| < \sqrt{2}$ corresponde a un disco abierto de centro $z = 1 + i$ y radio $R = |1 + i| = \sqrt{2}$, siendo éste el radio de convergencia de la serie.

Ejercicio 8.5. Determinar el desarrollo de Taylor de la siguiente función en torno a $z_0 \neq 1$.

$$f(z) = \frac{1}{1 - z}$$

Esta función tiene un punto singular en $z = 1$, de forma que para cualquier valor $z_0 \neq 1$ tenemos:

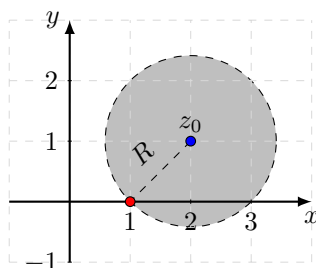
$$\frac{1}{1 - z} = \frac{1}{(1 - z_0) - (z - z_0)} = \frac{\frac{1}{1 - z_0}}{1 - \frac{z - z_0}{1 - z_0}} = \frac{1}{1 - z_0} \frac{1}{1 - \frac{(z - z_0)}{1 - z_0}} \xrightarrow{w = (z - z_0)/(1 - z_0)} \frac{1}{1 - z_0} \frac{1}{1 - w}$$

entonces, teniendo en cuenta la serie geométrica:

$$\frac{1}{1 - z_0} \frac{1}{1 - w} = \frac{1}{1 - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} w^n \quad , \quad |w| < 1$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$\frac{1}{1 - z} = \frac{1}{1 - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{1 - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(1 - z_0)^{n+1}} \quad , \quad |z - z_0| < |1 - z_0|$$



La región de convergencia

$$|z - z_0| < |1 - z_0|$$

viene dada por un disco abierto de centro z_0 y radio $|1 - z_0|$.

En la siguiente gráfica se muestra un ejemplo para $z_0 = 2 + i$ (en azul), mostrando el punto singular $z = 1$ (en rojo).

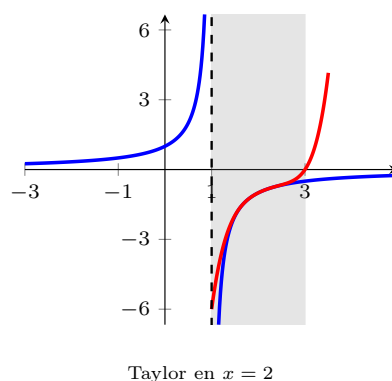
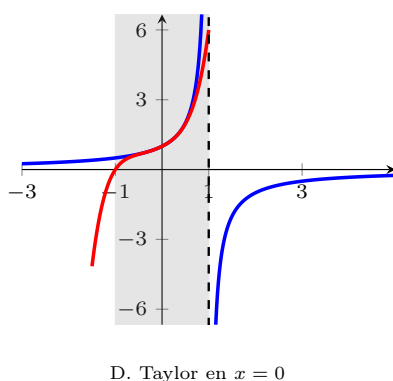
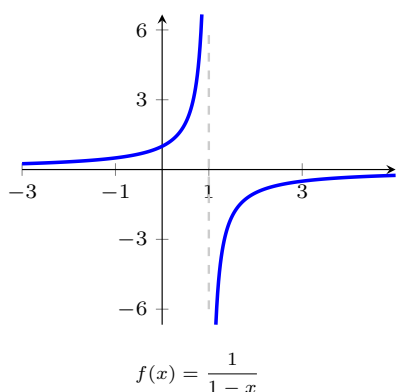
Cuanto mayor esté separado el punto del desarrollo z_0 del punto $z = 1$ (punto singular), mayor será el radio de convergencia de la serie.

8.1.6. Serie de Laurent

Introducción: Serie Geométrica

Vamos a ver un ejemplo con una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como introducción a los conceptos fundamentales de este tema.

La función $f(x) = 1/(1-x)$ (en color azul en las gráficas) tiene una discontinuidad en $x = 1$. Por tanto se pueden obtener su desarrollo de Taylor (en color rojo) en torno a cualquier punto $x \neq 1$, de forma que los desarrollos en torno a puntos $x < 1$ solo aproximan a la parte izquierda de la función y aquellos desarrollos en torno a puntos $x > 1$ solo aproximan a la parte derecha de la misma, sin poder atravesar en ambos casos el punto de discontinuidad de la función, (en color gris se muestra las zonas de convergencia en cada caso).



El desarrollo en torno a $x = 0$ se puede determinar directamente de la división polinómica, de la siguiente forma, dando lugar a la conocida con el nombre de **serie geométrica**:

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1-x \\ -1+x & 1+x+x^2+\dots \\ \hline 0+x & \\ -x+x^2 & \\ \hline 0+x^2 & \\ \vdots & \end{array}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (8.1)$$

Alternativamente la división puede realizarse de una forma ligeramente distinta (anteponiendo la variable x en el cociente), obteniéndose un resultado distinto:

$$\begin{array}{r|l} 1 & -x+1 \\ -1+x^{-1} & -x^{-1}-x^{-2}-x^{-3}-\dots \\ \hline 0+x^{-1} & \\ -x^{-1}+x^{-2} & \\ \hline 0+x^{-2} & \\ \vdots & \end{array}$$

$$\frac{1}{1-x} = -x^{-1} - x^{-2} - x^{-3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} -x^{-n} \quad (8.2)$$

La primera fórmula, [Ecuación \(8.1\)](#), corresponde con el desarrollo de Taylor de la función en torno a $x = 0$. La segunda, [Ecuación \(8.2\)](#), no es ningún desarrollo de Taylor ya que posee potencias negativas, lo que no corresponde con una serie de potencias.

Además de con la división polinómica particular anterior, esta nueva serie con potencias negativas se puede obtener por otros caminos, por ejemplo haciendo un cambio de variable en la primera serie y reorganizando términos:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad \xrightarrow{x=w^{-1}} \quad \frac{1}{1-w^{-1}} = 1 + w^{-1} + w^{-2} + w^{-3} + \dots$$

$$\frac{w}{w-1} - 1 = w^{-1} + w^{-2} + w^{-3} + \dots ; \quad \boxed{\frac{1}{1-w} = -w^{-1} - w^{-2} - w^{-3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} -w^{-n} = -\sum_{n=0}^{\infty} w^{-n-1}}$$

Otra forma alternativa de obtener este desarrollo con potencias negativas es el siguiente, transformando la función original de la siguiente forma:

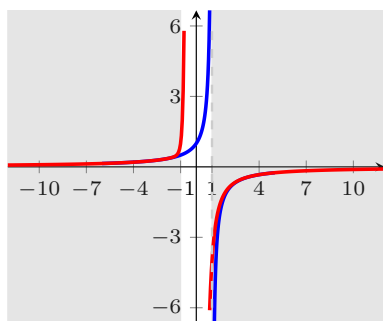
$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{x} \frac{1}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{-1}{x} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}$$

Ahora haciendo el cambio de variable $w = x^{-1}$ y teniendo en cuenta la serie geométrica (potencias positivas) se tiene:

$$\frac{1}{1-x} = \frac{-1}{x} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{-1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} x^{-n-1}$$

que corresponde con el mismo resultado obtenido anteriormente.

Si analizamos esta nueva serie de potencias negativas vemos que no está definida en $x = 0$. Por otra parte, tiende a cero cuando $x \rightarrow \pm\infty$, al igual que la función. Podemos pensar entonces que esta serie es algo similar al desarrollo de Taylor de la función en torno al punto $x = \pm\infty$, donde coincide exactamente con el valor de la misma. A medida que nos acercamos al punto $x = 0$, es decir nos alejamos del infinito que es el punto donde se hace el desarrollo, la aproximación empeora.



En la siguiente gráfica se muestra la función $1/(1-x)$ en azul y en rojo la representación gráfica de su serie correspondiente en forma de potencias negativas.

Vemos que ambas coinciden exactamente al valor de 0 cuando $x \rightarrow \pm\infty$ y con una zona de convergencia mostrada en color gris. Existe un entorno del punto $x = 0$, de radio 1, donde la serie no converge con la función¹².

Por tanto, además de la serie de Taylor de la función en un punto (diferenciable) formada por potencias positivas, también se puede obtener una serie de la función en forma de potencias negativas, que se puede entender como el desarrollo de Taylor de la función en un punto del infinito¹³.

Como se verá a continuación, este mismo comportamiento se puede generalizar a otras funciones, tanto reales como complejas, dando lugar a la conocida con el nombre de *serie de Laurent* de una función.

¹²Esta zona de convergencia será estudiada posteriormente en la siguiente sección.

¹³De ahí el cambio de variable $w = x^{-1}$ de forma que cuando $x \rightarrow \pm\infty$ se tiene que $w \rightarrow 0$.

Serie de Laurent

Definición 8.8. Serie de Laurent

Se denomina **serie de Laurent**¹⁴ centrada en $z_0 \in \mathbb{C}$ a la expresión:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

- La serie con potencias negativas (en rojo) se denomina **parte principal** de la serie de Laurent.
- La serie de potencias positivas (en azul) se denomina **parte regular** de la serie de Laurent.

- La **serie de Taylor** de una función solo puede ser obtenida en torno a puntos z_0 en los que la función es *holomorfa*¹⁵ obteniéndose un desarrollo en forma de *serie de potencias*¹⁶ (positivas). Su zona de convergencia es siempre el interior de un disco centrado en el punto de desarrollo z_0 y cuyo radio es la distancia desde z_0 hasta el punto singular más cercano, pudiendo ser infinito si no existen puntos singulares¹⁷.
- La **serie de Laurent** de una función se puede realizar tanto en torno a puntos *holomorfos* como a *puntos singulares aislados*¹⁸, utilizando para ello desarrollos en serie con potencias positivas y/o negativas. Esto permite extender el dominio de validez (convergencia) de los desarrollos a regiones que atraviesan los puntos singulares.

La *serie de Laurent* es por tanto una generalización de la *serie de Taylor*, de forma que todo desarrollo de Taylor puede ser considerado una serie de Laurent, pero no al contrario. Además, en torno a un punto (holomorfo) existe un único desarrollo de Taylor, mientras que en torno a un punto (holomorfo o singular aislado) puede existir más de un desarrollo de Laurent, en función del número de discontinuidades finitas que tenga la función¹⁹.

Convergencia de la Serie de Laurent

Se dice que una *serie de Laurent* converge en un punto $z \in \mathbb{C}$ si convergen sus dos series: la **parte principal** (potencias negativas) y la **parte regular** (potencias positivas).

Para determinar la *región de convergencia* de la *serie de Laurent* hay que analizar las dos partes:

- La serie de la **parte regular** con potencias positivas se puede analizar de la forma estándar²⁰ obteniéndose un radio de convergencia R .

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \implies R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

- En la serie de la **parte principal** con potencias negativas se puede hacer el cambio de variable $w = (z-z_0)^{-1}$ reduciéndose a una serie de potencias centrada en el origen con radio de convergencia r^* . Llamando $r = 1/r^*$, la serie inversa (**parte principal**) converge para $|z-z_0| > r$ y diverge para $|z-z_0| < r$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n \implies r^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{-n}}{a_{-n-1}} \right| \implies r = \frac{1}{r^*} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{-n-1}}{a_{-n}} \right|$$

¹⁴La *serie de Laurent* fue descubierta por Karl Weierstrass en el año de 1841, aunque no lo publicó en ese entonces. Paralelamente el matemático francés Pierre Alphonse Laurent desarrolló las series, y fue quien la publicó por primera vez en el año 1843.

¹⁵Ver la Sección 7.3, página 243.

¹⁶Ver la Definición 8.5, página 274.

¹⁷Ver el Teorema 8.6, página 277.

¹⁸Ver la Sección 8.2.2, página 301.

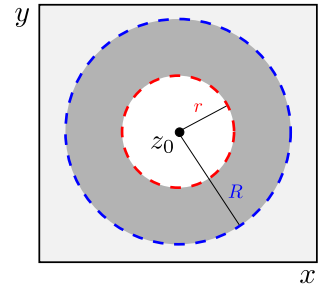
¹⁹Ver ejemplos del Ejercicio 8.7, página 287 al Ejercicio 8.13, página 298.

²⁰Por ejemplo con el criterio del cociente (ver la Definición 8.6, página 274).

Por tanto, la serie de Laurent converge siempre que $r < R$, con $r < \infty$ y $R > 0$, siendo al menos su región de convergencia la corona circular de radios que suele expresarse de la forma:

$$r < R \quad \implies \quad C(z_0; r, R)$$

El valor de r puede ser 0 pero no ∞ mientras que R puede ser ∞ pero no cero. Si $r = 0$ y en el punto de desarrollo $z = z_0$ la función es holomorfa la *serie de Laurent* coincide con la *serie de Taylor* en ese mismo punto.



Ejercicio 8.6. Determinar la región de convergencia de la siguiente serie de Laurent,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \frac{1}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (z - z_0)^n$$

Aplicando el criterio de cociente a la parte principal y regular tenemos:

$$\begin{cases} r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{-n-1}|}{|a_{-n}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/5^{n+1}}{1/5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{5^{n+1}} = \frac{1}{5} \\ R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/2^n}{1/2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \end{cases}$$

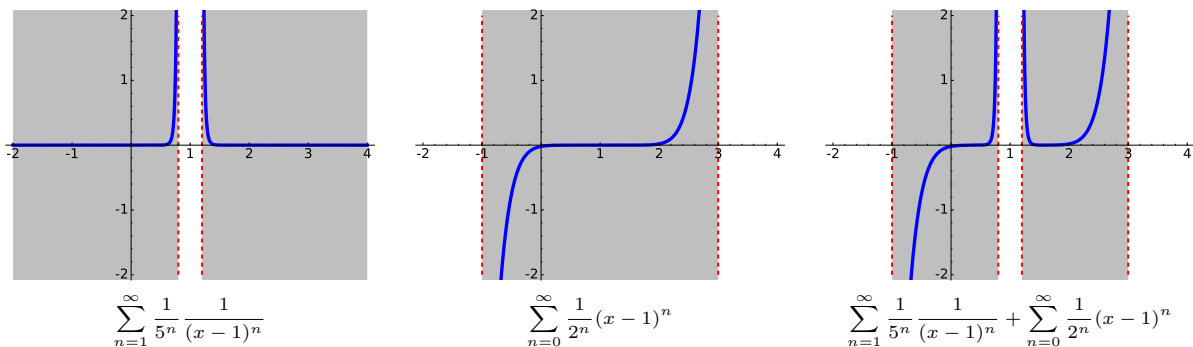
Por tanto, la región de convergencia de esta serie de Laurent es la corona circular de centro z_0 y radios r y R , que se suele expresar como:

$$C(z_0; 1/5, 2)$$

Este resultado puede entenderse más fácilmente de forma gráfica si consideramos su equivalente serie real:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \frac{1}{(x - x_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (x - x_0)^n$$

y representamos cada una de las partes por separado. Por ejemplo tomando $x_0 = 1$ y sombreando las regiones de convergencia en gris se tiene:



La **parte principal** de una *serie de Laurent* converge en el **exterior** de un círculo de centro z_0 y radio r mientras que la **parte regular** lo hace en el **interior** de un círculo con el mismo centro z_0 y radio R .

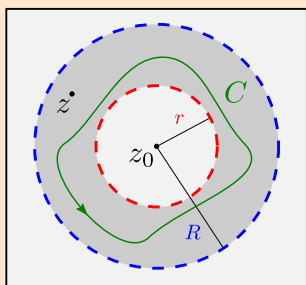
- Si $0 < r < R < \infty$ la serie es absolutamente convergente en la corona circular $C(z_0; r, R)$.
- Si $r = 0$ la serie converge en un entorno *abierto* o *perforado*²¹ de centro z_0 y radio $R \leq \infty$.
- Si $R \leq r$ la serie es divergente.

²¹Si z_0 es un punto holomorfo el entorno es *abierto* y de otra forma será *perforado*. Ver las definiciones en la [Sección 6.3](#), página 193.

Teorema 8.7. Serie de Laurent

Sea una función compleja $f(z)$ holomorfa en el anillo $r < |z - z_0| < R$ centrado en z_0 . Entonces, en todo punto z de este dominio, $f(z)$ se puede expresar de forma única mediante la siguiente **serie de Laurent** en torno a $z = z_0$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad ; \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad ; \quad n \in \mathbb{Z}$$



Donde C es cualquier camino cerrado simple orientado positivamente que rodea a z_0 y está contenido por completo en el dominio anular.

En la zona $|z - z_0| \leq r$ puede haber uno o más puntos singulares, incluyendo el propio z_0 .

En base a este teorema la serie de Laurent de $f(z)$ en torno a $z = z_0$ se puede expresar como²²:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) (z - z_0)^{n-1} dz \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad ; \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad , \quad n \in \mathbb{Z}_0^+$$

Notar que si $f(z)$ es holomorfa en todo el disco $|z - z_0| < R$ se obtienen los siguientes valores de los coeficientes:

- $a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) (z - z_0)^{n-1} dz = 0$

Ya que $f(z)(z - z_0)^{n-1}$ también es holomorfa en el dominio.

- $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Esto es consecuencia de la *extensión de la fórmula integral de Cauchy*²³. Estos coeficientes corresponden a los coeficientes del *desarrollo de Taylor*.

Por tanto en este caso la serie de Laurent no tiene **parte principal**²⁴ y corresponde con la *serie de Taylor* en torno a z_0 .

Estudio de Casos Simples de la Serie de Laurent

En función de las singularidades, una misma función en un mismo punto de desarrollo puede tener series de Laurent distintas, convergentes cada una en diferentes regiones del plano complejo.

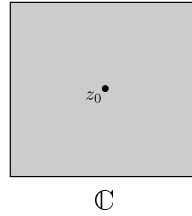
²²El símbolo $\mathbb{Z}_0^+$ hace referencia al conjunto de los números naturales (enteros positivos) más el cero, $\mathbb{Z}_0^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

²³Ver el **Teorema 7.17**, página 270.

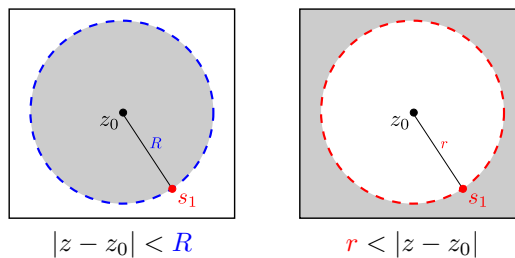
²⁴Ver la **Definición 8.8**, página 283.

Veamos a analizar algunos casos sencillos.

1. Si $f(z)$ es *entera*²⁵, sin puntos singulares, existe una única serie de Laurent en torno a cada punto, que coincide con la *serie de Taylor* en esos puntos, con región de convergencia igual a todo el plano complejo $\mathbb{C}$. Esta serie de Laurent solo tiene parte *regular* o *analítica* y donde $r = 0$ y $R = \infty$.

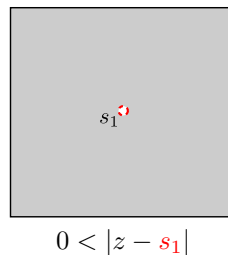


2. Si $f(z)$ tiene un único punto singular aislado s_1 , en torno a cualquier punto **holomorfo** z_0 existirán siempre dos *series de Laurent* en torno a ese punto:

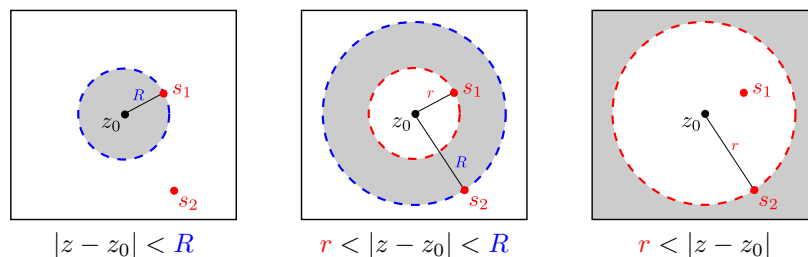


- Una primera serie convergente en el *interior* de un disco de centro z_0 y radio R igual a la distancia entre z_0 y s_1 y siendo $r = 0$, es decir converge en $|z - z_0| < R$. En este caso la *serie de Laurent* coincide con la *serie de Taylor* en ese punto. Esta *serie de Laurent* solo tiene parte *regular* o *analítica*.
- Una segunda serie convergente en el *exterior* de un disco de centro z_0 y radio r igual a la distancia entre z_0 y s_1 y siendo en este caso $R = \infty$, es decir converge en $r < |z - z_0|$.

Además existe una serie de Laurent en torno al **punto singular aislado** s_1 . En este caso $r = 0$ y $R = \infty$ siendo por tanto su zona de convergencia $0 < |z - s_1|$.



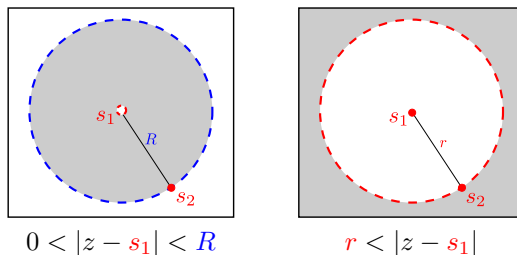
3. Si $f(z)$ tiene dos puntos singulares aislados s_1 y s_2 , en torno a cualquier punto **holomorfo** z_0 existirán siempre tres tipos de *series de Laurent*:



²⁵Ver la Definición 7.8, página 243.

- Una primera serie convergente en el *interior* de un disco de centro z_0 y radio R igual a la distancia entre z_0 y el punto singular más cercano a él s_1 y siendo $r = 0$, es decir $|z - z_0| < R$. En este caso la *serie de Laurent* coincide con la serie de Taylor en ese punto. Esta *serie de Laurent* solo tiene parte regular o analítica.
- Una segunda serie convergente en el exterior de un disco de centro z_0 y radio r igual a la distancia entre z_0 y el punto singular más cercano s_1 , y en el interior de un disco de centro z_0 y radio R igual a la distancia entre z_0 y el punto singular más lejano s_2 , es decir $r < |z - z_0| < R$.
- Una tercera serie convergente en el exterior de un disco de centro z_0 y radio r igual a la distancia entre z_0 y el punto singular más lejano s_2 y siendo en este caso $R = \infty$, es decir $r < |z - z_0|$.

Además existen dos series más de Laurent en torno a cada **punto singular aislado** s_1 y s_2 . Por ejemplo, en torno a s_1 hay:



- Una primera serie convergente en el *interior* de un disco perforado de centro s_1 y radio R igual a la distancia entre s_1 y s_2 y siendo $r = 0$, es decir convergente en $0 < |z - s_1| < R$.
- Una segunda serie convergente en el exterior de un disco de centro s_1 y radio r igual a la distancia entre los puntos singulares s_1 y s_2 , es decir convergente en $r < |z - s_1|$.

De forma análoga existen dos series más en torno al punto singular s_2 .

- De forma general, una función que tiene n **puntos singulares aislados** tendrá $(n + 1)$ *series de Laurent* en torno a cualquier punto **holomorfo** z_0 y n *series de Laurent* más en torno a cada uno de los puntos singulares s_i .

Cálculo de Series de Laurent

Generalmente la determinación de la *serie de Laurent* de una función no se realiza utilizando las fórmulas integrales que aparecen en el **Teorema 8.7**, sino mediante técnicas matemáticas más sencillas, como por ejemplo:

- Cambio de variable en series conocidas.
- Multiplicación y división de series.
- Derivación e integración de series, (ver **Ejercicio 8.13**, página 298).

Veamos algunos ejemplos de cálculo de *eries de Laurent* donde se aplicarán estas técnicas.

Ejercicio 8.7. Determinar, en caso de existir, la serie de Laurent de la siguiente función compleja en torno a $z = 0$.

$$f(z) = e^z$$

Como esta función es *holomorfa* en todo $\mathbb{C}$ (ver el **Ejemplo 7.5**, página 243) tiene asociada una única serie de Laurent (que coincide con la serie de Taylor) en cada punto del plano complejo con un radio de convergencia infinito. Su serie (de Laurent o de McLaurin) en torno a $z = 0$ viene dada por:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad ; \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Esta serie es exacta en $z = 0$ para cualquier número de términos que se tomen de la serie finita y para valores $z \rightarrow \infty$ la aproximación de la serie finita mejora a medida que aumenta el número de términos.

Ejercicio 8.8. Determinar todas las series de Laurent de la siguiente función en torno a $z_0 \in \mathbb{C}$.

$$f(z) = e^{1/z}$$

Esta función tiene una única singularidad aislada en $z = 0$, por tanto se puede obtener su desarrollo de Laurent (o de Taylor) en torno a cualquier punto holomorfo $z_0 \neq 0$, pero siendo únicamente su región de convergencia el disco de centro z_0 y radio $|z_0|$, correspondiente a la distancia en el plano complejo del punto z_0 a la singularidad $z = 0$.

$$\begin{cases} f(z) = e^{1/z} & : f(z_0) = e^{1/z_0} \\ f'(z) = -z^{-2}e^{1/z} = -\frac{e^{1/z}}{z^2} & : f'(z_0) = -\frac{e^{1/z_0}}{z_0^2} \\ f''(z) = 2z^{-3}e^{1/z} + z^{-4}e^{1/z} = e^{1/z} \left(\frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^4} \right) & : f''(z_0) = e^{1/z_0} \left(\frac{2}{z_0^3} + \frac{1}{z_0^4} \right) \end{cases}$$

$$e^{1/z} = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots =$$

$$= e^{1/z_0} - \frac{e^{1/z_0}}{z_0^2}(z - z_0) + \frac{e^{1/z_0}}{2!} \left(\frac{1}{z_0^3} + \frac{1}{z_0^4} \right) (z - z_0)^2 + \dots, \quad |z - z_0| < |z_0|$$

Esta serie es exacta en $z = z_0$ para cualquier número de términos de la serie (truncada) y empeora la aproximación para otro z a medida que nos alejamos del punto de desarrollo z_0 .

Se puede extender el dominio de convergencia a $|z - z_0| > |z_0|$, (exterior de la circunferencia de centro z_0 y radio $|z_0|$), utilizando la serie del Laurent de la función en torno a z_0 válida para ese dominio, la cual se puede obtener del desarrollo anterior pero con las potencias negativas, de la siguiente forma:

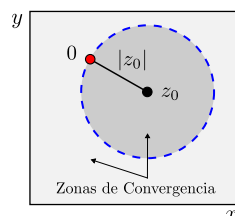
$$e^{1/z} = e^{1/z_0} - \frac{e^{1/z_0}}{z_0^2}(z - z_0)^{-1} + \frac{e^{1/z_0}}{2!} \left(\frac{1}{z_0^3} + \frac{1}{z_0^4} \right) (z - z_0)^{-2} + \dots, \quad |z - z_0| > |z_0|$$

También podemos obtener la serie de Laurent en torno al punto singular aislado $z = 0$. Para obtenerla basta hacer un cambio de variable en el desarrollo de McLaurin de la función exponencial, sustituyendo z por $1/z$ de la siguiente forma:

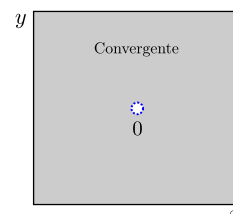
$$f(w) = e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \xrightarrow{w=1/z} f(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}, \quad |z| > 0$$

Notar que esta serie:

- No está definida en $z = 0$.
- Es exacta para $z \rightarrow \infty$, independientemente del número de términos que se tomen.
- Para valores $z \rightarrow 0$ la aproximación de la serie finita mejora a medida que aumenta el número de términos.



Convergencia de la serie de Taylor ($z_0 \neq 0$)

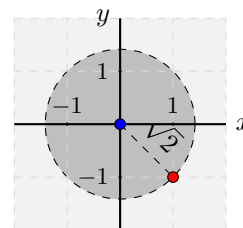


Convergencia de la serie de Laurent ($z_0 = 0$)

Ejercicio 8.9. Determinar las series de Laurent de la siguiente función en torno al punto $z = 0$.

$$f(z) = \frac{2+2i}{z-1+i}$$

Esta función tiene una única singularidad aislada en el punto $z = 1 - i$ (rojo). Se quiere obtener las series de Laurent en torno al origen (azul). Esto hace que existan dos series de Laurent en torno al $z_0 = 0$, cada una de ellas con una determinada zona de convergencia. Como la función es de tipo polinómico vamos a utilizar los dos desarrollos conocidos de la serie geométrica, (ver la [Sección 8.1.6, página 281](#), en la [Ecuación \(8.1\)](#) y la [Ecuación \(8.2\)](#)). Para ello se realizarán transformaciones algebraicas apropiadas para dar una forma a la función útil para realizar un cambio de variable.



- Como el punto de desarrollo $z = 0$ es un punto holomorfo de la función, la primera serie de Laurent coincide con el desarrollo de McLaurin válido en $|z| < |1 - i| = \sqrt{2}$, (zona gris oscura en la gráfica), haciendo previamente un cambio de variable apropiado en el desarrollo de McLaurin conocido de la *serie geométrica*:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad ; \quad |z| < 1$$

Para ello, transformamos la función para que se parezca a la *serie geométrica*:

$$\frac{2+2i}{z-1+i} = (2+2i) \frac{1}{z-1+i} = -2(1+i) \frac{1}{(1-i)-z} = (-2) \frac{1+i}{1-i} \frac{1}{1-\frac{z}{1-i}} = (-2i) \frac{1}{1-\frac{z}{1-i}}$$

Haciendo ahora el cambio de variable $w = z/(1-i)$ en el desarrollo conocido de la *serie geométrica* se tiene:

$$\begin{aligned} (-2i) \frac{1}{1-\frac{z}{1-i}} &\xrightarrow{c.v.} (-2i) \frac{1}{1-w} = (-2i) \sum_{n=0}^{\infty} w^n \stackrel{c.v.}{=} (-2i) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1-i} \right)^n = \\ &= \boxed{(-2i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(1-i)^n}} \quad ; \quad |z| < \sqrt{2} \end{aligned}$$

Como vemos corresponde con una serie de potencias²⁶ particular.

- Por otra parte, podemos obtener también una segunda serie de Laurent de la función en torno al mismo punto $z = 0$, pero válida en el exterior del círculo anterior $\sqrt{2} < |z| < \infty$, (zona gris clara en la gráfica). Para ello podemos utilizar el desarrollo conocido de la serie geométrica centrada en el infinito (ver la [Sección 8.1.6, página 281](#)):

$$\frac{1}{1-z} = -z^{-1} - z^{-2} - z^{-3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} -z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{z^{n+1}} \quad ; \quad |z| > 1$$

entonces, haciendo las mismas operaciones anteriores pero utilizando en este caso el desarrollo de potencias negativas de la serie geométrica, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{2+2i}{z-1+i} &= \frac{-2i}{1-\frac{z}{1-i}} \xrightarrow{w=z/(1-i)} (-2i) \frac{1}{1-w} = (-2i) \sum_{n=1}^{\infty} -w^{-n} = (2i) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{1-i} \right)^{-n} = \\ &= 2i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-i)^n}{z^n} = \boxed{2i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^{n+1}}{z^{n+1}}} \quad ; \quad |z| > \sqrt{2} \end{aligned}$$

Un método alternativo para obtener este mismo resultado es expresar la función con una forma similar a la de la serie geométrica pero con potencias negativas en la variable z , y entonces utilizar un cambio de variable usando el desarrollo de la *serie geométrica* original con potencias positivas:

$$\frac{2+2i}{z-1+i} = (2+2i) \frac{1}{z-1+i} = \frac{2(1+i)}{z} \frac{1}{1-\frac{1-i}{z}} = \frac{2(1+i)}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-i}{z} \right)^n = \frac{2(1+i)}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^{n+1}}{z^{n+1}} =$$

$$= 2i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^{n+1}}{z^{n+1}}$$

que corresponde con el mismo resultado anterior. Para determinar la zona de convergencia, teniendo en cuenta que la zona de convergencia de la serie geométrica es $|z| < 1$ y hemos realizado el cambio de variable $w = (1-i)/z$ se tiene:

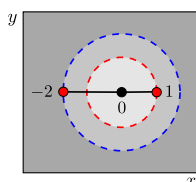
$$|z| < 1 \implies \left| \frac{1-i}{z} \right| < 1 \implies |z| > |1-i| = \sqrt{2}$$

En base a lo realizado en el ejercicio anterior, hay dos formas básicas de obtener la serie de Laurent de una función, fuera de la zona de convergencia correspondiente a la serie de Taylor, a través de desarrollos conocidos de otras funciones mediante un apropiado cambio de variable:

- Utilizar una transformación algebraica de la función donde aparecen potencias positivas de z y usar el desarrollo conocido que tenga potencias negativas. Esto tiene la ventaja de que una misma transformación algebraica sirve para obtener los desarrollos en distintas zonas de convergencia, en función de que el cambio de variable se haga con los desarrollos conocidos de potencias positivas o negativas. Por desventaja tiene el usar diferentes desarrollos conocidos con potencias positivas y negativas.
- Utilizar una transformación algebraica de la función donde aparecen potencias negativas de z y usar el desarrollo conocido que tenga potencias positivas. Esta forma tiene la ventaja de que siempre se utiliza un solo desarrollo de la función conocida, aquel que tiene potencias positivas, aunque tiene por desventaja que hay que calcular diferentes transformaciones algebraicas con potencias positivas y negativas.

Ejercicio 8.10. Determinar las series de Taylor y de Laurent de la siguiente función en torno a $z = 0$.

$$f(z) = \frac{3}{(z-1)(z+2)}$$



Esta función tiene dos singularidades en $z_1 = 1$ y en $z_2 = -2$, por tanto tiene tres series de Laurent (la primera coincidente con la de Taylor) centradas todas en el punto holomorfo $z = 0$, con los siguientes dominios de convergencia:

- $|z| < |1| = 1$ (zona gris claro) : serie Laurent 1 coincidente con el D. de McLaurin de la función.
- $1 < |z| < |-2| = 2$ (zona gris medio) : serie de Laurent 2 en torno a $z = 0$.
- $|z| > 2$ (zona gris oscuro) : serie de Laurent 3 en torno a $z = 0$.

Primeramente descomponemos la función en fracciones simples.

$$f(x) = \frac{3}{(z-1)(z+2)} = \underbrace{\frac{1}{z-1}}_{\text{Fracción I}} - \underbrace{\frac{1}{z+2}}_{\text{Fracción II}}$$

Vamos a hacer cambios de variable apropiados en los dos desarrollos conocidos de la serie geométrica:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1 \quad (8.3)$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} -z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} -z^{-n-1}, \quad |z| > 1 \quad (8.4)$$

²⁶Es decir, con todas sus potencias enteras y positivas.

- La primera serie de Laurent en torno a $z = 0$ se encuentra en el primer dominio $|z| < 1$, donde no se ha atravesado ningún punto singular, utilizamos la **Ecuación (8.3)** en las dos fracciones I y II anteriores.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2} = -\frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{-z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-z}{2}\right)^n = \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} z^n = \boxed{-\sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right] z^n} \quad , \quad |z| < 1 \end{aligned}$$

Como la primera parte de la serie es válida para $|z| < 1$ y la segunda para $|-z/2| < 1 \implies |z| < 2$, el resultado completo es válido en el menor dominio, es decir $|z| < 1$.

- La segunda serie de Laurent en torno a $z = 0$ se encuentra en el dominio $1 < |z| < 2$, donde se utiliza la **Ecuación (8.4)** en la fracción I correspondiente al punto singular $z = 1$, ya que se atraviesa, y la **Ecuación (8.3)** en la fracción II ya que no se atraviesa su punto singular $z = -2$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2} = -\frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{-z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-z}{2}\right)^n = \\ &= \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n} \quad , \quad 1 < |z| < 2 \end{aligned}$$

- Por último la tercera serie de Laurent en torno a $z = 0$ corresponde al dominio $|z| > 2$, donde se utiliza la **Ecuación (8.4)** en las dos fracciones I y II, ya que se atraviesan los dos puntos singulares.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2} = -\frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{-z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-z}{2}\right)^{-n-1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n}{z^{n+1}} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - (-2)^n}{z^{n+1}}} \quad , \quad |z| > 2 \end{aligned}$$

Ejercicio 8.11. Obtener el desarrollo en serie de Laurent de las siguientes funciones en torno a la singularidad indicada, especificando en cada caso su región de convergencia.

a) $\frac{e^z}{1+z}$, $z = -1$

b) $\frac{e^{2z}}{(z-i)^3}$, $z = i$

c) $\frac{1 - \cos z}{z^2}$, $z = 0$

d) $(z-3) \sin \frac{1}{z+2}$, $z = -2$

e) $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$, $z = -2$

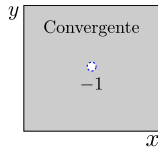
f) $\frac{1}{z^2(z-3)^2}$, $z = 3$

- a) Esta función tiene una única singularidad en $z = -1$ y por tanto solo hay una serie de Laurent en torno a dicho punto. Para encontrarla podemos hacer un cambio de variable apropiado en el desarrollo de McLaurin de la función exponencial, de forma que se obtengan potencias de $(1+z)$.

$$\frac{e^z}{1+z} = \frac{e^{1+z}}{e(1+z)} \xrightarrow{w=1+z} \frac{e^w}{ew} = \frac{1}{ew} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{n-1}}{n!}$$

Deshaciendo el cambio de variable se tiene:

$$\frac{e^z}{1+z} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+z)^{n-1}}{n!} = \frac{1}{e} \left[\frac{1}{1+z} + 1 + \frac{1}{2}(1+z) + \frac{1}{3!}(1+z)^2 + \dots \right] \quad , \quad |1+z| > 0$$



Este desarrollo es válido para un disco perforado centrado en $z = -1$ y de radio infinito.

$$0 < |1 + z| \iff z \neq -1$$

- b) Esta función tiene una única singularidad en $z = i$, (es un *polo* de orden 3, ver la [Sección 8.2.2, página 303](#)). Realizamos un cambio de variable apropiado y utilizamos el desarrollo de la exponencial.

$$\begin{aligned} \frac{e^{2z}}{(z-i)^3} &= \frac{e^{2i} e^{2z-2i}}{(z-i)^3} = \frac{e^{2i} e^{2(z-i)}}{(z-i)^3} \xrightarrow[w=z-i]{c.v.} \frac{e^{2i} e^{2w}}{w^3} = \frac{e^{2i}}{w^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2w)^n}{n!} = e^{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} w^{n-3} \stackrel{c.v.}{=} \\ &= e^{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} (z-i)^{n-3} = e^{2i} \left[\frac{1}{(z-i)^3} + \frac{2}{(z-i)^2} + \frac{2}{z-i} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} (z-i) + \dots \right], \quad |z-i| > 0 \end{aligned}$$

Al igual que en el caso a), como solo hay una singularidad la región de convergencia es $\mathbb{C} - \{i\}$.

- c) Esta función tiene una única singularidad en $z = 0$. Utilizando el desarrollo de McLaurin del coseno (ver el [Ejemplo 8.1.5, página 276](#)), se tiene:

$$\frac{1 - \cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \right] = \frac{1}{z^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-2}}{(2n)!}, \quad |z| > 0$$

Su región de convergencia es $z \neq 0$, (en este caso se trata de una *singularidad evitable*, ver la [Sección 8.2.2, página 303](#)).

- d) Esta función tiene una única singularidad en $z = -2$. Haciendo el cambio de variable $w = z + 2$ y utilizando el desarrollo de McLaurin del seno (ver el [Ejemplo 8.1.5, página 276](#)) con potencias negativas se tiene:

$$\begin{aligned} (z-3) \operatorname{sen} \frac{1}{z+2} &\stackrel{c.v.}{=} (w-5) \operatorname{sen} \frac{1}{w} = (w-5) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{w^{-2n-1}}{(2n+1)!} \stackrel{c.v.}{=} (z-3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z+2)^{2n+1}} \\ &= (z+2-5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z+2)^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z+2)^{2n}} - 5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z+2)^{2n+1}} \end{aligned}$$

válida para $|z+2| > 0$, siendo el punto $z = -2$ una *singularidad esencial* ([Sección 8.2.2, página 304](#)).

- e) En este caso la función tiene dos singularidades aisladas en $z = -1$ y $z = -2$. En torno a cada una de ellas hay dos series de Laurent. El ejercicio pide calcular las dos series que corresponden a $z = -2$, donde tienen que aparecer potencias de $(z+2)$. Haciendo el cambio de variable $w = z + 2$ se tiene:

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{w-2}{(w-1)w} = \frac{2-w}{w} \frac{1}{1-w} = \left(\frac{2}{w} - 1 \right) \frac{1}{1-w}$$

Ahora teniendo en cuenta los dos desarrollos de la serie geométrica:

$$\boxed{\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n}, \quad |z| < 1 \quad ; \quad \boxed{\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} -z^{-n-1}}, \quad |z| > 1$$

se tiene:

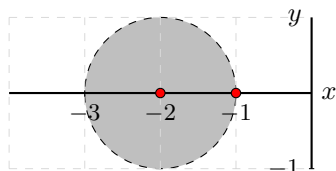
- 1) Tomando el primer desarrollo:

$$\left(\frac{2}{w} - 1 \right) \frac{1}{1-w} = \left(\frac{2}{w} - 1 \right) \sum_{n=0}^{\infty} w^n = \left(\frac{2}{w} - 1 \right) (1 + w + w^2 + w^3 + \dots) =$$

$$= \frac{2}{w} - 1 + 2 - w + 2w - w^2 + 2w^2 - w^3 + \dots = \frac{2}{w} + 1 + w + w^2 + w^3 + \dots = \frac{2}{w} + \sum_{n=0}^{\infty} w^n$$

válida para $0 < |w| < 1$. Deshaciendo el cambio de variable se tiene:

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{2}{z+2} + \sum_{n=0}^{\infty} (z+2)^n, \quad 0 < |z+2| < 1$$



Esta serie converge para $0 < |z+2| < 1$, que es un disco abierto perforado de centro $z = -2$ y radio 1.

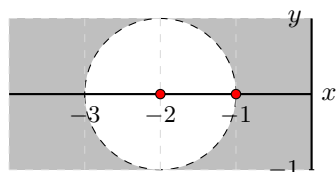
Se trata de un polo de orden 1 (ver la [Sección 8.2.2](#), página 303).

2) Tomando el segundo desarrollo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{w} - 1\right) \frac{1}{1-w} &= \left(\frac{2}{w} - 1\right) \sum_{n=1}^{\infty} -w^{-n} = \left(\frac{2}{w} - 1\right) (-w^{-1} - w^{-2} - w^{-3} + \dots) = \\ &= -\frac{2}{w^2} + \frac{1}{w} - \frac{2}{w^3} + \frac{1}{w^2} - \frac{2}{w^4} + \frac{1}{w^3} - \dots = \frac{1}{w} - \frac{1}{w^2} - \frac{1}{w^3} - \frac{1}{w^4} - \dots = \frac{1}{w} - \sum_{n=2}^{\infty} w^{-n} \end{aligned}$$

válida para $|w| > 1$. Deshaciendo el cambio de variable se tiene:

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{1}{z+2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(z+2)^n}, \quad |z+2| > 1$$



Esta serie converge para $|z+2| > 1$, que corresponde con el exterior del disco abierto de centro $z = -2$ y radio 1.

f) La función tiene dos singularidades en $z = 0$ y $z = 3$ y en torno a cada una de ellas hay dos series de Laurent. Vamos a determinar las series en torno a $z = 3$ donde aparecerán potencias de $(z-3)$. Haciendo el cambio de variable $w = z - 3$ se tiene:

$$\frac{1}{z^2(z-3)^2} = \frac{1}{(w+3)^2 w} = \frac{1}{9w^2(1+w/3)^2} \quad (8.5)$$

De forma análoga a como se hizo en la [Sección 8.1.6](#), página 281 con la función de la serie geométrica, vamos a determinar los dos desarrollos de la siguiente función en torno a $x = 0$:

$$\frac{1}{(1+x)^2} \quad (8.6)$$

Hay diferentes métodos para obtenerlas. El primer desarrollo de esta función en potencias positivas se puede obtener calculando el desarrollo de McLaurin de la misma, o bien mediante división polinómica, de la siguiente forma:

1	1 + 2x + x ²	$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots =$	$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n \quad (8.7)$
-1 - 2x - x ²	1 - 2x + 3x ² + ...		
0 - 2x - x ²	2x + 4x ² + 2x ³		
0 + 3x ² + 2x ³	-3x ² - 6x ³ - 3x ⁴		
0 - 4x ³ - 3x ⁴	0 - 4x ³ - 3x ⁴		
⋮	⋮		

$|x| < 1$

Para obtener el desarrollo en potencias negativas válido para $|z| > 1$, se puede realizar la división polinómica cambiando el orden de los monomios del numerador de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r|l}
 1 & x^2 + 2x + 1 \\
 -1 - 2x^{-1} - x^{-2} & x^{-2} - 2x^{-3} + 3x^{-4} - \dots \\
 \hline
 0 - 2x^{-1} - x^{-2} & \\
 2x^{-1} + 4x^{-2} + 2x^{-3} & \\
 \hline
 0 + 3x^{-2} + 2x^{-3} & \\
 3x^{-2} + 6x^{-3} + 3x^{-4} & \\
 \hline
 \vdots &
 \end{array}
 \quad
 \frac{1}{(1+x)^2} = x^{-2} - 2x^{-3} + 3x^{-4} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^{-n-2} \quad (8.8)$$

Una mejor forma de obtener esta segunda serie es utilizar el primer desarrollo obtenido en la **Ecuación (8.7)** (serie de Taylor), y hacer un cambio de variable en potencias negativas, de la siguiente forma²⁷:

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1/x^2}{\frac{1}{x^2}(1+x)^2} = \frac{1}{x^2} \frac{1}{(1+x^{-1})^2} \stackrel{w=x^{-1}}{=} \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^{-n-2}$$

Una forma alternativa muy útil de encontrar los dos desarrollos de la función dada en la **Ecuación (8.6)**, es utilizar los desarrollos conocidos de la serie geométrica (**Ecuación (8.3)** y **Ecuación (8.4)**), teniendo en cuenta la relación entre su derivada y nuestra función, y derivando ambos desarrollos de la siguiente forma:

$$\frac{1}{(1+z)^2} = \frac{1}{[1-(-z)]^2} = -\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{1-(-z)} \right] = \begin{cases} -\frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n z^{n-1} & |z| < 1 \\ -\frac{d}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} (-z)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n z^{-n-1} & |z| > 1 \end{cases}$$

Obteniéndose el mismo resultado de la **Ecuación (8.7)** y **Ecuación (8.8)** respectivamente, teniendo en cuenta el *desplazamiento de índices*²⁸.

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} (n+1) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^n & , \quad |z| < 1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n z^{-n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} (n+1) z^{-n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^{-n-2} & , \quad |z| > 1 \end{cases}$$

Notar que con este procedimiento, se pueden también obtener los dos desarrollos de cualquier función de tipo $1/(1 \pm z)^n$, derivando de forma sucesiva los desarrollos de la función de la serie geométrica (y teniendo en cuenta los correspondientes coeficientes).

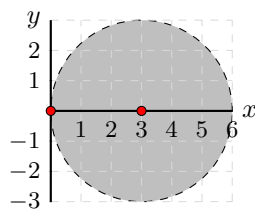
Por tanto, con los dos desarrollos obtenidos de cualquiera de las formas, **Ecuación (8.7)** y **Ecuación (8.8)**, vamos a obtener los dos desarrollos de nuestra función **Ecuación (8.5)**:

1) Tomando el primer desarrollo **Ecuación (8.7)**:

$$\frac{1}{9w^2} \frac{1}{(1+w/3)^2} = \frac{1}{9w^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left(\frac{w}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \frac{w^{n-2}}{3^{n+2}} \quad , \quad |w| < 1$$

Deshaciendo el cambio de variable $w = z - 3$ se tiene la primera serie de Laurent pedida:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \frac{w^{n-2}}{3^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+2}} (n+1) (z-3)^{n-2} \quad , \quad 0 < |z-3| < 3$$



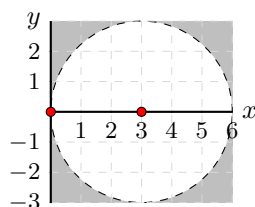
Esta serie converge para $0 < |z - 3| < 3$, correspondiente a un disco abierto perforado de centro $z = 3$ y radio 3.

2) Tomando el segundo desarrollo **Ecuación (8.8)**:

$$\frac{1}{9w^2} \frac{1}{(1 + w/3)^2} = \frac{1}{9w^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left(\frac{w}{3}\right)^{-n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \frac{3^n}{w^{n+4}}, \quad |w| > 1$$

Deshaciendo el cambio de variable $w = z - 3$ se tiene la segunda serie de Laurent pedida:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \frac{3^n}{w^{n+4}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) 3^n \frac{1}{(z-3)^{n+4}}, \quad |z-3| > 3$$



Esta serie converge para $|z - 3| > 3$, que corresponde con el exterior del disco abierto de centro $z = 3$ y radio 3.

Ejercicio 8.12. Obtener los desarrollos en serie de Taylor y/o Laurent de la función,

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$$

válidos para los siguientes dominios:

a) $|z| < 1$

b) $0 < |z+1| < 2$

c) $1 < |z| < 3$

d) $0 < |z+3| < 2$

e) $2 < |z+3| < \infty$

f) $|z| > 3$

Esta función tiene dos singularidades en $z = -1$ y en $z = -3$. Primeramente descomponemos la función en fracciones simples:

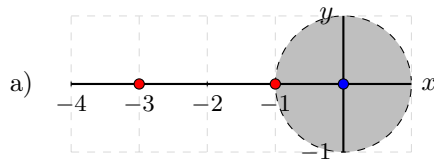
$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1/2}{z+1} - \frac{1/2}{z+3} = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{z+1}}_{\text{Fracción I}} - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{z+3}}_{\text{Fracción II}} \quad (8.9)$$

En todos los casos vamos a hacer cambios de variable apropiados en los dos desarrollos de la serie geométrica:

Serie I : $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1$; **Serie II** : $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} -z^{-n-1}, \quad |z| > 1$

²⁷Otra forma alternativa es utilizar la fórmula del binomio de Newton generalizada.

²⁸Ver la **Sección 4.3.1**, página 106.



El dominio $|z| < 1$ corresponde con un disco abierto de centro en el origen (punto azul) y radio 1. Por tanto el desarrollo tiene que ser en torno a $z = 0$, donde aparecerán solo potencias de z , y tenemos que tomar las partes internas de las dos discontinuidades (ver la convergencia de la serie de Laurent en la página 283). Para ello utilizamos la **serie I** en las dos fracciones **I** y **II**:

$$|z| < 1 \quad : \quad \frac{1}{2} \frac{1}{z+1} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - (-z)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

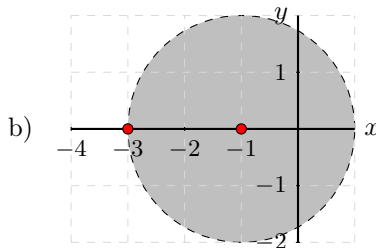
$$|z| < 3 \quad : \quad \frac{1}{2} \frac{1}{z+3} = \frac{1}{6} \frac{1}{1 - (-z/3)} = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{3}\right)^n = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{3^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{3^{n+1}}$$

En base a la **Ecuación (8.9)** restamos el primer desarrollo menos el segundo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z+1)(z+3)} &= \frac{1}{2} \frac{1}{z+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{z+3} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[z^n - \frac{z^n}{3^{n+1}} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n+1} - 1}{3^{n+1}} z^n, \quad |z| < 1 \end{aligned}$$

Como la primera serie es válida para $|z| < 1$ y la segunda para $|z| < 3$, ambas son válidas para $|z| < 1$ (disco abierto centrado en el origen y radio 1).

Este resultado es la primera serie de Laurent en torno a $z = 0$ y corresponde con el desarrollo de McLaurin (**serie de Taylor**) de la función.

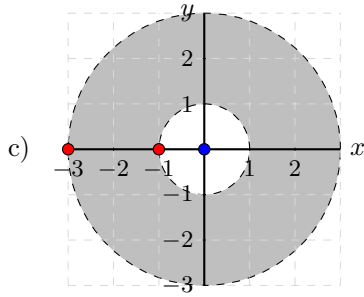


La región $0 < |z+1| < 2$ corresponde con un disco perforado abierto de centro $z = -1$ y radio 2. En este caso el desarrollo se tiene que hacer en torno al punto singular $z = -1$, por tanto tienen que aparecer potencias de $(z+1)$, por lo que hacemos un cambio de variable $w = 1 + z$ y utilizamos la **serie I** en la parte de la **fracción II** (parte interna de la discontinuidad $z = -3$). Notar que la **fracción I** ya está en forma de potencia $(1+z)$ y por tanto se queda como está.

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{w(2+w)} = \frac{1/2}{w(1+w/2)} = \frac{1}{2w} \frac{1}{1 - (-w/2)} = \frac{1}{2w} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-w}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{w^{n-1}}{2^{n+1}}$$

Deshaciendo el cambio de variable $w = 1 + z$ se obtiene la primera **serie de Laurent** en torno al punto $z = -1$:

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1+z)^{n-1}}{2^{n+1}}, \quad 0 < |z+1| < 2$$



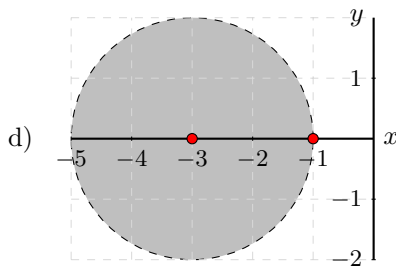
La región $1 < |z| < 3$ corresponde con una corona circular de centro cero y radios $r = 1$ y $R = 3$. En este caso el desarrollo se tiene en hacer en torno a $z = 0$ (punto azul), estando la zona de convergencia fuera del disco de la primera singularidad, $|z| > 1$, pero dentro del disco de la segunda discontinuidad, $|z| < 3$. Por tanto para la **fracción I** utilizamos la **serie II** y para la **fracción II** utilizamos la **serie I**.

$$|z| > 1 : \frac{1}{2} \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} -(-z)^{-n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} z^{-n}$$

$$|z| < 3 : \frac{1}{2} \frac{1}{z+3} = \frac{1}{6} \frac{1}{1-(-z/3)} = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{3}\right)^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{3^{n+1}}$$

Restando la primera fracción menos la segunda, desplazando los índices de la primera serie y ordenando los términos se obtiene el resultado correspondiente a la segunda **serie de Laurent** en torno a $z = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z+1)(z+3)} &= \frac{1}{2} \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} z^{-n} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{3^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^{n+2}}_{(-1)^n} z^{-n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{3^{n+1}} \right] = \boxed{\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{z^{n+1}} - \frac{z^n}{3^{n+1}} \right]}, \quad 1 < |z| < 3 \end{aligned}$$



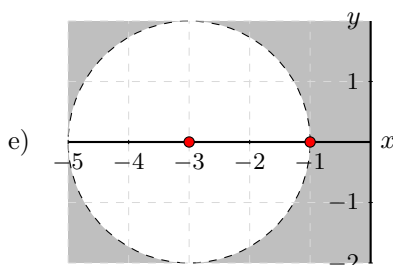
La región $0 < |z+3| < 2$ corresponde con un disco perforado abierto de centro $z = -3$ y radio 2. En este caso el desarrollo se tiene en hacer en torno a $z = -3$, por tanto tienen que aparecer potencias de $(z+3)$, por lo que hacemos un cambio de variable $w = 3 + z$ y utilizamos la **serie I** en la parte de la **fracción I** (ya que el punto singular $z = -1$ no ha sido atravesado).

En este caso la **fracción II** no hay que desarrollarla al encontrarse en potencias de $(z+3)$.

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{(w-2)w} = \frac{-1/2}{w(1-w/2)} = \frac{-1}{2w} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w}{2}\right)^n = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{n-1}}{2^{n+1}}$$

Deshaciendo el cambio de variable $w = 3 + z$ se tiene la primera **serie de Laurent** en torno a $z = -3$:

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \boxed{- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3+z)^{n-1}}{2^{n+1}}}, \quad 0 < |z+3| < 2$$



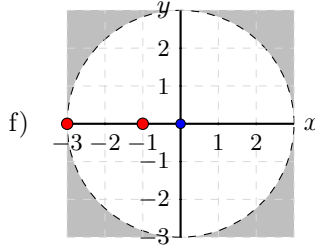
La región $2 < |z+3| < \infty$ corresponde con el exterior de un disco de centro $z = -3$ y radio 2. En este caso el desarrollo se tiene que hacer en torno a $z = -3$ apareciendo potencias de $(z+3)$, por lo que al igual que en el caso *d)* hacemos un cambio de variable $w = 3 + z$ pero en este caso utilizamos la **serie II** en la parte de la **fracción I** (ya que el punto singular $z = -1$ ahora sí ha sido atravesado).

La **fracción II** no hay que desarrollarla al encontrarse ya en potencias de $(z+3)$.

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{(w-2)w} = \frac{-1/2}{w(1-w/2)} = \frac{-1}{2w} \sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{w}{2}\right)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{w^{n+1}}$$

Deshaciendo el cambio de variable $w = 3 + z$ se tiene la segunda **serie de Laurent** en torno a $z = -3$:

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{w^{n+1}}, \quad |z+3| > 2$$



La región $|z| > 3$ corresponde con el exterior de una circunferencia centrada en el origen y radio 3. En este caso el desarrollo se tiene que hacer en torno a $z = 0$ apareciendo potencias de z . Como la zona a considerar está en el exterior de los dos puntos singulares se utiliza la **serie II** en ambas fracciones.

$$|z| > 1 : \quad \frac{1}{2} \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} -(-z)^{-n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{z^n}$$

$$|z| < 3 : \quad \frac{1}{2} \frac{1}{z+3} = \frac{1}{6} \frac{1}{1-(-z/3)} = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} -\left(-\frac{z}{3}\right)^{-n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^{n-1}}{z^n}$$

Restando la primera fracción menos la segunda se obtiene la tercera **serie de Laurent** en torno a $z = 0$:

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2} \frac{1}{z+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{z+3} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (1-3^{n-1}) \frac{1}{z^n}, \quad |z| > 3$$

Como la primera es válida para $|z| > 1$ y la segunda para $|z| > 3$, ambas son válidas para $|z| > 3$.

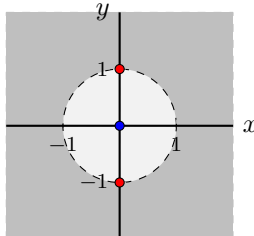
Ejercicio 8.13. Determinar las series Laurent de la siguiente función en torno a $z = 0$.

$$f(z) = \arctan z$$

Como se ha indicado en la **Sección 6.5.10, página 219**, la función arcotangente compleja se puede expresar como:

$$\arctan z = \frac{i}{2} \log \left(\frac{1-iz}{1+iz} \right) ; \quad z \neq \pm i$$

y por tanto presenta dos singularidades aisladas en $z = \pm i$.



Se puede obtener la serie de Taylor de la función en torno a $z = 0$ (desarrollo de McLaurin) con una región de convergencia $|z| < 1$ correspondiente a la primera serie de Laurent en torno a $z = 0$. Por otra parte también se puede obtener una segunda serie de Laurent de la función en torno a $z = 0$ con una región de convergencia $|z| > 1$.

Vamos a utilizar una técnica alternativa para determinar las series, mediante la derivada e integral de la función. La derivada de la función arcotangente es:

$$f'(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

Esta función tiene también dos singularidades en $z = \pm i$. Una forma de obtener las dos series (con potencias positivas y negativas) de la función derivada en torno a $z = 0$ puede ser dividiendo el polinomio de dos formas distintas:

$\begin{array}{r} 1 \\ -1 - z^2 \\ \hline 0 - z^2 \\ z^2 + z^4 \\ \hline 0 + z^4 \\ \vdots \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 + z^2 \\ \hline 1 - z^2 + z^4 - \dots \end{array}$	$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad z < 1$
---	--	---

$\begin{array}{r} 1 \\ -1 - z^{-2} \\ \hline 0 - z^{-2} \\ z^{-2} + z^{-4} \\ \hline 0 + z^{-4} \\ \vdots \end{array}$	$\begin{array}{r} z^2 + 1 \\ \hline z^{-2} - z^{-4} + \dots \end{array}$	$\frac{1}{1+z^2} = z^{-2} - z^{-4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^{-2n} \quad z > 1$
--	--	--

Sin embargo esta forma es algo pesada de realizar, por ello es preferible sacar los desarrollos utilizando la serie geométrica:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z^2} &= \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad ; \quad |-z^2| < 1 \implies |z| < 1 \\ \frac{1}{1+z^2} &= \frac{1}{z^2} \frac{1}{1+z^{-2}} = z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1-(-z^{-2})} = z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} [-z^{-2}]^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-2n-2} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^{-2n} \quad ; \quad |-z^{-2}| < 1 \implies |z| > 1 \end{aligned}$$

Para recuperar la función original $f(z)$ podemos integrar término a término en los desarrollos.

$$f(z) = \int f'(z) dz = \int (1 - z^2 + z^4 - \dots) dz = c + z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots = c + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

El valor de la constante de integración c se determina teniendo en cuenta que $\arctan 0 = 0$ y de ahí $c = 0$, por tanto el desarrollo de McLaurin de $f(z)$ se puede expresar como:

$$\boxed{\arctan z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}} \quad , \quad |z| < 1 \quad (8.10)$$

Para la serie de Laurent se puede hacer lo mismo con la segunda serie obtenida en la división polinómica:

$$f(z) = \int f'(z) dz = \int (z^{-2} - z^{-4} + z^{-6} - \dots) dz = c - z^{-1} + \frac{z^{-3}}{3} - \frac{z^{-5}}{5} + \dots = c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)z^{2n+1}}$$

Para determinar el valor de la constante c , nos fijamos que comparando el desarrollo obtenido con el calculado en la **Ecuación (8.10)** se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)z^{2n+1}} = -\arctan \frac{1}{z} \implies \arctan z = c - \arctan \frac{1}{z}$$

evaluando esta expresión por ejemplo en $z = 1$, como $\arctan 1 = \pi/4$, se tiene que $c = \pi/2$, y por tanto finalmente la serie de Laurent de $f(z)$ en torno a $z = 0$ se puede expresar como:

$$\boxed{\arctan z = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)z^{2n+1}}} \quad , \quad |z| > 1$$

8.2. Singularidades. Ceros y Polos

8.2.1. Ceros de una Función

Definición 8.9. Cero de una Función

Un **cero** o **raíz** de una función compleja $f(z)$ es un punto z_0 del plano complejo donde,

$$f(z_0) = 0$$

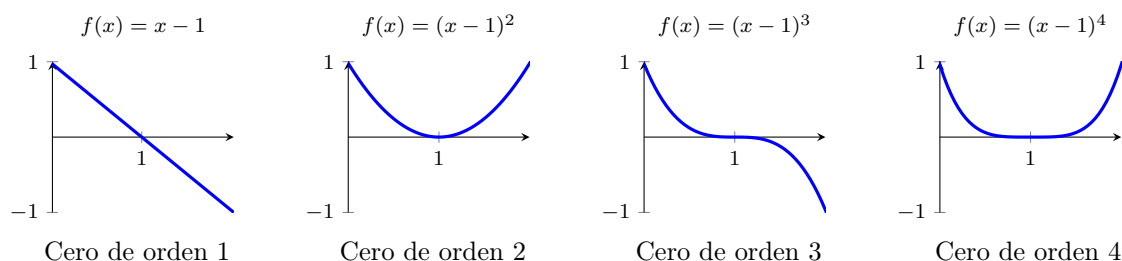
Se dice que z_0 es un **cero de orden** k si:

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \quad , \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0$$

Un cero de orden 1 se dice que es **simple** y si el orden es $k > 1$ se dice que es **múltiple** con *multiplicidad*²⁹ k .

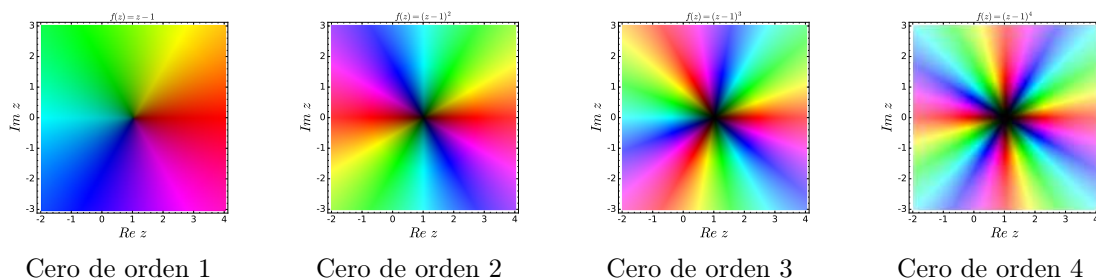
Ejemplo 8.2. Orden de un Cero Real

A medida que aumenta el orden de un cero x_0 de una función real, más rápido la función tiende a cero en las cercanías de x_0 . En la siguiente gráfica se muestran varias funciones con ceros de distintos órdenes en el punto $x_0 = 1$. Observamos como a medida que aumenta el orden del cero, la función tiende a *aplanarse* cada vez más en un entorno del punto, acercándose cada vez más a cero los valores de la función en ese entorno.



Ejemplo 8.3. Orden de un Cero Complejo

En las funciones complejas el significado geométrico del orden de un cero es análogo al de las funciones reales, de forma que a medida que aumenta el orden de un cero z_0 , más rápido la función tiende a cero en las cercanías de z_0 . En la siguiente gráfica se muestran varias funciones complejas con ceros de distintos órdenes en el punto $z_0 = 1$. Observamos como a medida que aumenta el orden del cero, la función tiende a *aplanarse* en un entorno de $z = 1$ cada vez mayor, acercándose cada vez más a cero los valores de la función en ese entorno (zona oscura).



²⁹Orden y multiplicidad de un cero se pueden considerar sinónimos.

Desarrollo de Taylor

Sea $f(z)$ una función *holomorfa* en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ con un cero de orden k en z_0 en el interior de D . El *desarrollo de Taylor* de esa función en $z = z_0$ será:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \cdots$$

Como $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ se tiene:

$$f(z) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z - z_0)^{k+1} + \cdots = (z - z_0)^k \left[\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z - z_0) + \cdots \right]$$

Por tanto, si $f(z)$ tiene un cero de orden k en z_0 se puede expresar como:

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z), \quad g(z_0) \neq 0$$

siendo $g(z)$ una determinada función *analítica*³⁰ en D .

Teorema 8.8. Ceros de una Función Holomorfa

Sea $f(z)$ holomorfa en un abierto conexo³¹ D . Si f no es la función nula en D , entonces sus ceros son aislados.

8.2.2. Singularidades Aisladas

Recordamos que una *singularidad*³² de una función $f(z)$ es un punto z_0 donde la función no es *holomorfa*³³ y por tanto tampoco es *analítica*³⁴. Esto significa que la función no es holomorfa en ese punto, bien porque no está definida en este punto, porque no es continua o derivable, por tender a infinito o por otras causas. Recordamos también a continuación un tipo particular de singularidad³⁵.

Definición 8.10. Singularidad Aislada

Si una función $f(z)$ es *holomorfa* (*analítica*) en un dominio $D - \{z_0\}$, se dice que $f(z)$ tiene una **singularidad aislada** en $z = z_0$.

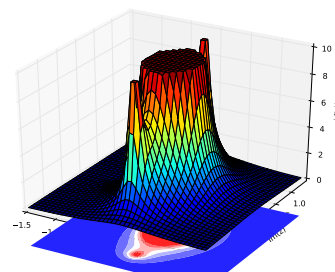
Si una función $f(z)$ es *analítica* en la región interior a un camino cerrado simple, excepto en un número finito de puntos, estos *puntos singulares* son necesariamente *aislados*.

Ejemplo 8.4. Singularidades Aisladas

- La función,

$$f(z) = \frac{z+1}{z^3(z^2+1)}$$

tiene un *cero* en $z = -1$ y tres *puntos singulares aislados* en $z = 0$ y $z = \pm i$. En la gráfica se ha representado el módulo de la función $f(z)$.



³⁰Ver la Definición 8.7, página 275.

³¹Ver la Definición 6.21, página 195.

³²Ver la Definición 7.9, página 243.

³³Ver la Definición 7.7, página 243.

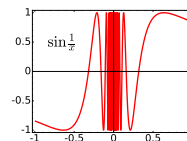
³⁴Ya que no se puede desarrollar en serie de potencias en ese punto.

³⁵Ver la Definición 7.10, página 244.

- La función,

$$f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi/z)}$$

tiene *singularidades* en $z = 1/n$ con $n = \{\pm 1, \pm 2, \dots\}$, todas *aisladas*. En $z = 0$ tiene otra singularidad que no es *aislada*, ya que todo entorno perforado del origen contiene infinitos puntos singulares de la función (ver a la derecha la representación gráfica de la función real $\operatorname{sen}(1/x)$).



Toda función compleja $f(z)$ con una *singularidad aislada* en z_0 es *analítica* en $0 < |z - z_0| < R$, para un determinado valor R , y por tanto puede ser representada por una serie de Laurent centrada en z_0 de la forma³⁶:

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots, \quad 0 < |z - z_0| < R$$

Definición 8.11. Tipos de Singularidades Aisladas

Las *singularidades aisladas* se pueden clasificar en base al tipo de desarrollo de la primera serie de Laurent de $f(z)$ alrededor de ellas como:

- **Singularidad evitable:** no tiene parte principal
- **Singularidad regular o polo:** número finito de términos en la parte principal
- **Singularidad esencial:** infinitos términos en la parte principal

La *parte principal* de la serie de Laurent permite caracterizar el tipo de *singularidad*, y de ahí su nombre.

Vamos a estudiar cada uno de estos tipos.

Punto Singular Evitable

Si la serie de Laurent de una función $f(z)$ en torno a un *punto singular* z_0 no tiene *parte principal*, de la forma:

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots + a_m(z - z_0)^m + \dots$$

entonces la función $f(z)$ no es holomorfa en z_0 , (al ser una *singularidad*). Sin embargo en caso de que exista:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0 = L \quad ; \quad L \in \mathbb{C}$$

se dice que la función tiene una **singularidad evitable** en $z = z_0$, pudiéndose redefinir la función $f(z)$ de la siguiente forma:

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \neq z_0 \\ L & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

para tener una función analítica en $z = z_0$.

Ejemplo 8.5. Singularidad Evitable

La función,

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$$

es analítica en $\mathbb{C} - \{0\}$, no estando definida en $z = 0$. Sin embargo como:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1$$

³⁶En caso de existir varias series de Laurent en torno al punto singular z_0 , ésta corresponde con la **primera**, más cercana al punto. Ver la [Sección 8.1.6, página 285](#).

se puede redefinir la función de la siguiente forma:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} z}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

obteniéndose una función *analítica* en todo $\mathbb{C}$, y siendo en este caso su desarrollo de McLaurin:

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = \frac{1}{z} \left[z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \right] = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots, \quad z \in \mathbb{C}$$

Punto Singular Regular o Polo

Si la serie de Laurent en torno a un *punto singular* z_0 tiene un número *finito* m de términos en su parte principal, de la forma:

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots + a_m(z - z_0)^m + \cdots, \quad a_{-m} \neq 0 \quad (8.11)$$

se dice que z_0 es un **punto singular regular** o más comúnmente se denomina **polo de orden** m . Si $m = 1$ se dice que es un polo **simple** y si $m > 1$ se dice que es un polo **múltiple** de *multiplicidad* u *orden* m .

Ejemplo 8.6. Ejemplos de polos.

- Polo de orden 1 en $z_0 = 0$.

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \cdots, \quad 0 < |z| < 1$$

- Polo de orden 2 en $z_0 = 0$.

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \cdots, \quad 0 < |z| < 1$$

- Polo de orden m en $z_0 = 0$.

$$f(z) = \frac{1}{z^m(1-z)} = \frac{1}{z^m} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-m} = \frac{1}{z^m} + \cdots + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \cdots, \quad 0 < |z| < 1$$

Otra forma alternativa de definir un polo de orden m es la siguiente.

Definición 8.12. Polo de Orden m

Un polo de orden m de una función $f(z)$ es un punto z_0 del plano complejo donde,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = a_{-m} \quad ; \quad a_{-m} \in \mathbb{R} - \{0\}$$

siendo a_{-m} **finito y distinto de cero**.

Nota 8.2. Al multiplicar por $(z - z_0)^m$ en la **Ecuación (8.11)** y calcular el límite, todos los términos de la serie se hacen cero excepto el término a_{-m} .

Si una función $f(z)$ tiene un *polo* de orden m en z_0 , entonces la función $f(z^{-1})$ tiene un *cero*³⁷ de orden m en el punto z_0 .

³⁷Ver la **Sección 8.2.1**, página 300.

Definición 8.13. Función Meromórfica

Una función compleja $f(z)$ se dice que es **meromorfa** si es *analítica* en $\mathbb{C}$ excepto en un número (finito o infinito) de *polos aislados*.

Punto Singular Esencial

Las singularidades que no son *polos* ni puntos singulares *evitables* se denominan **singularidades esenciales**.

Características de una singularidad esencial:

- Una función $f(z)$ tiene una *singularidad esencial* en un punto z_0 si no existe $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.
- La serie de Laurent en torno a un *punto singular esencial* z_0 tiene un número *infinito* de términos en su parte principal, de la forma:

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots + a_m(z - z_0)^m + \cdots$$

- Las funciones $f(z)$ presentan grandes oscilaciones en un entorno cercano a sus *singularidades esenciales*, tomando todos³⁸ los valores complejos infinitas veces, debido a los infinitos términos de la parte principal.

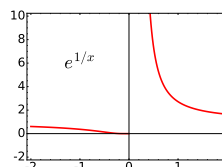
Ejemplo 8.7. Singularidad Esencial

La función,

$$f(z) = e^{1/z}$$

es *analítica* en $\mathbb{C} - \{0\}$, teniendo una singularidad aislada en $z = 0$. Para determinar su tipo estudiamos el valor del límite de la función tendiendo a cero. Para ello tenemos que tener presente el siguiente resultado correspondiente a una función real de variable real³⁹:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = e^{+\infty} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = e^{-\infty} = 0 \end{cases}$$



por lo que el valor del límite de la función (tanto real como compleja) depende de la dirección elegida y por tanto no existe, produciéndose una *singularidad esencial* en $z = 0$, (ver una representación gráfica de la función compleja en el [Ejercicio 6.8, página 204](#)).

Su desarrollo de Laurent en torno a $z = 0$ es (ver el [Ejercicio 8.8, página 288](#)):

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \cdots$$

El tipo de una singularidad aislada z_0 de una función $f(z)$ se puede determinar en función del valor del límite de la función en ese punto:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \quad \begin{cases} \textbf{Evitable} : \text{límite finito} \\ \textbf{Polo} : \text{límite infinito} \\ \textbf{Esencial} : \text{no existe el límite} \end{cases}$$

³⁸Salvo a lo sumo en una excepción, donde puede ocurrir que haya un valor que no se toma, según establece el *teorema grande de Picard*.

³⁹Notar que en la función compleja $f(z) = 1/z$ existe el límite en $z = 0$ de la forma $\lim_{z \rightarrow 0} 1/z = \infty$, mientras que en la función real $f(x) = 1/x$ no existe dicho límite ya que $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1/x = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 0^-} 1/x = -\infty$. Esto es consecuencia de considerar un único valor infinito en el plano complejo (ver la [Sección 6.3.5, página 196](#)).

8.3. Residuos

Una de las aplicaciones del desarrollo de Laurent en torno a una *singularidad aislada* es el cálculo de integrales sobre caminos cerrados. En este proceso es fundamental el concepto de *residuo*.

Definición 8.14. Residuo

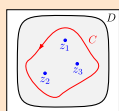
Sea la *primera* serie de Laurent de una función en torno a un *punto singular aislado*⁴⁰ z_0 . Entonces existe un número real $r > 0$ para el cual⁴¹:

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots, \quad 0 < |z-z_0| < r$$

El número complejo correspondiente al coeficiente⁴² a_{-1} , se denomina **residuo** de $f(z)$ en z_0 .

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1}$$

Teorema 8.9. Teorema de los Residuos de Cauchy



Sea $f(z)$ una función *holomorfa* en un dominio D abierto y simplemente conexo excepto en un número finito de singularidades aisladas $z_1, \dots, z_n$, y sea C un camino cerrado orientado positivamente contenido en D y que encierra a las singularidades z_k . Entonces:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k)$$

Demostración 8.9.

Por el *teorema de la deformación de contornos*, (ver el **Teorema 7.15**, página 266), se tiene:

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz$$

Ahora, por las condiciones del teorema, $f(z)$ se puede desarrollar como serie de Laurent en torno a cada una de las singularidades z_k , (ver el **Teorema 8.7**, página 285):

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^k (z-z_k)^n \quad ; \quad a_n^k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_k} \frac{f(z)}{(z-z_k)^{n+1}} dz$$

donde a_n^k es el coeficiente n -ésimo de la serie de Laurent en torno a la singularidad z_k . Para el caso particular $n = -1$, (primer término de la parte principal de la serie de Laurent), se tiene:

$$a_{-1}^k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_k} f(z) dz \quad \implies \quad \oint_{C_k} f(z) dz = 2\pi i a_{-1}^k$$

y por la definición de *residuo* (ver la **Definición 8.14**, página 305), se tiene finalmente:

$$\text{Res}(f, z_k) = a_{-1}^k \quad \implies \quad \oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k)$$

⁴⁰Ver la **Definición 8.10**, página 301.

⁴¹El siguiente desarrollo corresponde a la *primera* serie de Laurent de $f(z)$ en torno al punto singular z_0 , es decir, sin atravesar ningún otro punto singular.

⁴²Primer término de la parte principal.

Ejercicio 8.14. Determinar la siguiente integral utilizando el teorema de los residuos,

$$\oint_C \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^2} dz$$

sabiendo que C es un camino simple orientado positivamente que encierra al origen.

Esta función solo tiene una *singularidad* en $z = 0$, siendo su serie de Laurent en torno a $z = 0$:

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \dots$$

Por tanto,

$$\operatorname{Res}(f, 0) = a_{-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \oint_C \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = \boxed{2\pi i}$$

8.3.1. Cálculo de Residuos

Vamos a ver algunas técnicas prácticas que ayudan a calcular los *residuos* de funciones, en muchos casos, sin tener que encontrar explícitamente su desarrollo en *serie de Laurent*.

- Los *residuos* de las funciones con singularidades *evitables*⁴³ son cero, al no tener parte principal.
- Los *residuos* de las funciones con singularidades *esenciales*⁴⁴ suelen ser los más difíciles de calcular y normalmente hay que determinar la serie de Laurent en ese punto para encontrarlo.

Vamos a ver cómo determinar los residuos en los *polos*⁴⁵ de una función.

Residuos en Polos

Una función $f(z)$ con un *polo* de orden m en un punto z_0 se puede desarrollar en serie de Laurent en torno a ese punto como:

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots$$

de forma que si multiplicamos la función por $(z-z_0)^m$ se tiene:

$$(z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + a_0(z-z_0)^m + a_1(z-z_0)^{m+1} + \dots$$

y calculando el límite:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^m f(z) = a_{-m}$$

Esto nos da un procedimiento para determinar el orden m de un polo de una función.

⁴³Ver la Sección 8.2.2, página 302.

⁴⁴Ver la Sección 8.2.2, página 304.

⁴⁵Ver la Sección 8.2.2, página 303.

1. Para que una función tenga un polo en z_0 se tiene que cumplir:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

2. Si $f(z)$ tiene un polo (se cumple lo anterior) de orden m :

$$\begin{cases} \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = \infty & \implies \forall k < m \\ \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = a \neq 0 & \implies k = m \\ \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = 0 & \implies k > m \end{cases}$$

El *residuo* de una función en un polo se podrá determinar en base a su orden m de la siguiente forma:

• **Polo simple**, ($m = 1$)

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + \dots \quad ; \quad (z - z_0)f(z) = a_{-1} + a_0(z - z_0) + \dots$$

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$$

• **Polo de orden 2**, ($m = 2$)

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + \dots \quad ; \quad (z - z_0)^2 f(z) = a_{-2} + a_{-1}(z - z_0) + a_0(z - z_0)^2 + \dots$$

En este caso:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \infty \quad ; \quad \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^2 f(z) = a_{-2}$$

Esto no nos sirve ya que queremos el coeficiente a_{-1} , de forma que para obtenerlo primero tenemos que derivar $(z - z_0)^2 f(z)$ para eliminar el término a_{-2} .

$$\frac{d}{dz} (z - z_0)^2 f(z) = a_{-1} + 2a_0(z - z_0) + \dots \implies \text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} (z - z_0)^2 f(z)$$

• **Polo de orden m**

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + \dots$$

$$(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + \dots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + a_0(z - z_0)^m + \dots$$

En este caso hay que eliminar $a_m, a_{-m+1}, \dots$, y a_{-2} , para ello hay que derivar $m - 1$ vez antes de calcular el límite.

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z) \quad (8.12)$$

Nota 8.3. Si una función definida mediante un cociente de dos funciones:

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

tiene un polo de orden 1 en un punto z_0 , $\left(\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \right)$, con $g(z_0) \neq 0$ y $h(z_0) = 0$ pero $h'(z_0) \neq 0$, entonces:

$$\text{Re}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \quad \text{ya que:} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) + \cancel{(z - z_0)} g'(z)}{h'(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Ejercicio 8.15. Determinar el valor de la siguiente integral,

$$\oint_{|z|=1} \frac{z+1}{z^2} dz$$

mediante los siguientes métodos:

- Cálculo directo de la integral.
- Utilizando la extensión de la fórmula integral de Cauchy.
- Utilizando el teorema de los residuos.

- a) La función a integrar tiene un único punto singular en $z = 0$ y la curva cerrada sobre la que integrar es el círculo unidad, que contiene a esta singularidad en su interior. por tanto no podemos utilizar el teorema de Cauchy-Goursat (ver la [Sección 7.7, página 262](#)). Aplicando integración paramétrica (ver la [Sección 7.5.1, página 252](#)) se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} C(t) = e^{it} \\ dC = ie^{it} dt \end{array} \right\} \implies \oint_{|z|=1} \frac{z+1}{z^2} dz = \int_0^{2\pi} (e^{-it} + e^{-2it}) ie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} (1 + e^{-it}) dt =$$

$$= i[t - i^{-1}e^{-it}]_0^{2\pi} = i[2\pi - i^{-1}e^{-i2\pi} - 0 + i^{-1}] = i[2\pi - i^{-1} - 0 + i^{-1}] = \boxed{2\pi i}$$

- b) Aplicando la extensión de la fórmula integral de Cauchy (ver el [Teorema 7.17, página 270](#)) se tiene:

$$\oint_{|z|=1} \frac{z+1}{z^2} dz = \oint_{|z|=1} \frac{z+1}{(z-0)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} \frac{d}{dz}(z+1) \Big|_{z=0} = 2\pi i (1) \Big|_{z=0} = \boxed{2\pi i}$$

- c) Para aplicar el *teorema de los residuos* (ver el [Teorema 8.9, página 305](#)) necesitamos calcular el residuo de la función en sus singularidades.

Esta función solo tiene un punto singular en $z = 0$. Determinamos el tipo de singularidad.

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z+1}{z^2} = \infty$$

Por tanto se trata de un *polo*. Como además:

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 \frac{z+1}{z^2} = 1$$

el polo es de orden 2 y por tanto el residuo de la función en $z = 0$ es:

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} (z - z_0)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} (z+1) = 1$$

Notar que si descomponemos en fracciones simples la función se obtiene fácilmente su serie de Laurent en torno a $z = 0$:

$$\frac{z+1}{z^2} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$$

comprobándose que es un polo de segundo orden y que su residuo es 1. Por tanto, por el teorema de los residuos:

$$\oint \frac{z+1}{z^2} dz = 2\pi i \text{Res}(f, 0) = \boxed{2\pi i}$$

que coincide con los resultados de los apartados a) y b).

Ejercicio 8.16. Determinar los residuos de la siguiente función en cada uno de sus puntos singulares.

$$f(z) = \frac{2z}{(z^2 + 1)(2z - 1)}$$

y utilizarlos para resolver las siguientes integrales:

a) $\oint_{|z-i|=1} f(z) dz$

b) $\oint_{|z|=2} f(z) dz$

c) $\oint_{|z+i|=3/2} f(z) dz$

d) $\oint_{|z+1|=1} f(z) dz$

e) $\oint_{|z-1|=1/2} f(z) dz$

Esta función tiene tres puntos singulares en $z_1 = 1/2$, $z_2 = i$ y $z_3 = -i$. Claramente en ellos la función tiende a infinito y por tanto se trata de polos. Determinamos el orden de cada uno de ellos:

$$z_1 = 1/2$$

Vamos a simplificar algo la función para calcular el límite más fácilmente:

$$f(z) = \frac{2z}{(z^2 + 1)(2z - 1)} = \frac{z}{(z^2 + 1)(z - 1/2)}$$

entonces,

$$\lim_{z \rightarrow 1/2} \left(z - \frac{1}{2} \right) \frac{z}{(z^2 + 1)(z - 1/2)} = \lim_{z \rightarrow 1/2} \frac{z}{(z^2 + 1)} = \frac{2}{5} \implies \text{Orden 1, } \boxed{\text{Res}(f, 1/2) = \frac{2}{5}}$$

$$z_{2,3} = \pm i$$

Teniendo en cuenta que $z^2 + 1 = (z + i)(z - i)$, se tiene,

$$\lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{2z}{(z + i)(z - i)(2z - 1)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{2z}{(z + i)(2z - 1)} = \frac{-1 - 2i}{5} \implies \text{Orden 1, } \boxed{\text{Res}(f, i) = \frac{-1 - 2i}{5}}$$

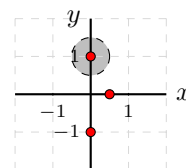
$$\lim_{z \rightarrow -i} (z + i) \frac{2z}{(z + i)(z - i)(2z - 1)} = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{2z}{(z - i)(2z - 1)} = \frac{-1 + 2i}{5} \implies \text{Ord. 1, } \boxed{\text{Res}(f, -i) = \frac{-1 + 2i}{5}}$$

Calculamos el valor de las integrales utilizando estos valores y el teorema de los residuos de Cauchy.

a) $\oint_{|z-i|=1/2} f(z) dz$

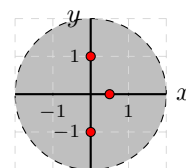
La curva es una circunferencia centrada en el punto singular $z = i$ y con radio $r = 1/2$. Esta curva solo incluye en su interior al punto singular $z = i$, por tanto aplicando el teorema de los residuos se tiene:

$$\oint_{|z-i|=1/2} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, i) = 2\pi i \frac{-1 - 2i}{5} = \boxed{(4 - 2i) \frac{\pi}{5}}$$



b) $\oint_{|z|=2} f(z) dz$

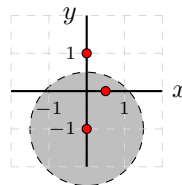
La curva en este caso es una circunferencia centrada en el origen $z = 0$ y con radio $r = 2$. Esta curva incluye en su interior a los tres puntos singulares de la función, por tanto aplicando el teorema de los residuos se tiene:



$$\oint_{|z|=2} f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}(f, 1/2) + \text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, -i)] = 2\pi i \left(\frac{2}{5} + \frac{-1 - 2i}{5} + \frac{-1 + 2i}{5} \right) = \boxed{0}$$

$$c) \oint_{|z+i|=3/2} f(z) dz$$

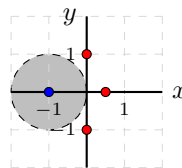
La curva en este caso es una circunferencia centrada en el punto singular $z = -i$ y con radio $r = 3/2$. Esta curva incluye en su interior a los puntos singulares $z = -i$ y $z = 1/2$, por tanto aplicando el teorema de los residuos se tiene:



$$\oint_{|z+i|=3/2} f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}(f, 1/2) + \text{Res}(f, -i)] = 2\pi i \left(\frac{2}{5} + \frac{-1+2i}{5} \right) = \boxed{(-4+2i)\frac{\pi}{5}}$$

$$d) \oint_{|z+1|=1} f(z) dz$$

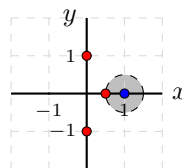
La curva en este caso es una circunferencia centrada en el punto $z = -1$ y con radio $r = 1$. Esta curva no incluye ni en su interior ni sobre la curva a ningún punto singular, por tanto aplicando el teorema de Cauchy-Goursat se tiene:



$$\oint_{|z+1|=1} f(z) dz = \boxed{0}$$

$$e) \oint_{|z-1|=1/2} f(z) dz$$

La curva en este caso es una circunferencia centrada en el punto $z = 1$ y con radio $r = 1/2$. Esta curva no incluye en su interior ningún punto singular, pero sí aparece el punto singular $z = 1/2$ **sobre** la curva, por tanto se trata de una integral impropia (de segunda especie) que puede ser convergente, con un valor fijo dado, o divergente, en cuyo caso su valor sería infinito. Este tipo de integrales no se estudiarán en este curso.



Ejercicio 8.17. Determinar los residuos de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a) $\frac{e^z}{(1+z^2)^2}$, $z = i$

b) $\left(\frac{\sin z}{z^2}\right)^3$, $z = 0$

c) $\frac{z^4}{(z+1)^3}$, $z = -1$

a) Claramente $z = i$ es un polo de la función, ya que $\lim_{z \rightarrow i} f(z) = \infty$. Primeramente hay que descomponer el denominador en factores de $(z - i)$. Dividiendo polinómicamente se obtiene:

$$\frac{z^2 + 1}{z - i} = z + i \implies z^2 + 1 = (z + i)(z - i) \implies (z^2 + 1)^2 = (z + i)^2(z - i)^2$$

Ahora como:

$$\lim_{z \rightarrow i} (z - i)^2 \frac{e^z}{(z + i)^2(z - i)^2} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^z}{(z + i)^2} = \frac{e^i}{-4}$$

el polo $z = i$ es de orden 2. Por tanto:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} (z - i)^2 f(z) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \frac{e^z}{(z + i)^2} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^z(z + i)^2 - 2e^z(z + i)}{(z + i)^4} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^z(z + i - 2)}{(z + i)^3} = \frac{2e^i(i - 1)}{-8i} = \\ &= -\frac{e^i(1 + i)}{4} \implies \boxed{\text{Res}(f, i) = -\frac{e^i(1 + i)}{4}} \end{aligned}$$

b) El punto $z = 0$ es un polo de esta función. Como:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1 \implies \lim_{z \rightarrow 0} z^3 \left(\frac{\sin z}{z^2}\right)^3 = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\sin z}{z}\right)^3 = 1 \implies \text{Orden 3}$$

Ya que derivar a mano dos veces esta función puede resultar pesado, se puede encontrar el coeficiente a_{-1} determinando los primeros términos de su desarrollo de Laurent. Como:

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) = \frac{1}{z} - \frac{z}{6} + \frac{z^3}{120} - \dots$$

y teniendo en cuenta que:

$$(a+b+c)^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$$

elegimos los términos con potencias más pequeñas:

$$\left(\frac{1}{z} - \frac{z}{6} + \frac{z^3}{120} - \dots \right)^3 = \frac{1}{z^3} - 3\frac{1}{z^2} \frac{z}{6} + \dots = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2} \frac{1}{z} + \dots \implies \boxed{\text{Res}(f, 0) = a_{-1} = \frac{1}{2}}$$

c) Esta función tiene un polo en $z = -1$ y como:

$$\lim_{z \rightarrow -1} (z+1)^3 \frac{z^4}{(z+1)^3} = 1 \implies \text{Orden } 3$$

Entonces teniendo en cuenta la [Ecuación 8.12, página 307](#) se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, -1) &= \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d^2}{dz^2} (z+1)^3 \frac{1}{2} \frac{z^4}{(z+1)^3} = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d^2}{dz^2} z^4 = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} 4z^3 = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} 12z^2 = \boxed{6} \end{aligned}$$

8.3.2. Aplicaciones de los Residuos

El *teorema de los residuos* tiene múltiples aplicaciones entre las que destacan:

- Resolución de integrales definidas reales
- Cálculo de integrales involucradas en el análisis de Fourier.
- Cálculo de transformadas inversas de Laplace
- Determinación de sumas de series

Aquí veremos solo algunos ejemplos de resolución de integrales reales.

8.3.3. Cálculo de Integrales Reales Definidas

En determinados casos, las técnicas de integración compleja son útiles para cálculo de integrales definidas de funciones reales de variable real $f(x)$ mediante la integración de adecuadas funciones complejas $f(z)$, en apropiadas trayectorias cerradas C . En este texto vamos a ver la resolución de dos tipos importantes de integrales de este estilo:

- Integrales de funciones trigonométricas
- Integrales impropias

Integrales Trigonómicas

Sea una integral de una función real de la forma⁴⁶:

$$\int_0^{2\pi} F(\cos x, \operatorname{sen} x) dx$$

donde $F(\cos x, \operatorname{sen} x)$ es una función trigonométrica. Esta integral real puede ser transformada en una integral de línea compleja alrededor del círculo unidad $|z| = 1$ mediante el siguiente cambio de variable.

$$z = \cos x + i \operatorname{sen} x = e^{ix} \implies dz = ie^{ix} dx = iz dx \implies dx = \frac{dz}{iz}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2} ; \quad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}$$

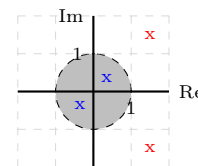
De forma que la integral original se transforma en⁴⁷:

$$\int_0^{2\pi} f(\cos x, \operatorname{sen} x) dx = \oint_{|z|=1} \frac{1}{iz} f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) dz = 2\pi i \sum [\operatorname{Res} F(z) \text{ interior de } |z|=1]$$

donde $F(z)$ es la nueva función en la variable compleja z integrada sobre la circunferencia unidad $|z| = 1$.

En la aplicación del *teorema de los residuos* en este caso solo se tendrán en cuenta los *puntos singulares aislados* de $F(z)$ que se encuentren en el **interior** de la circunferencia unidad.

En la siguiente figura se muestra un ejemplo con una función holomorfa excepto en los puntos singulares aislados indicados por x en la gráfica. Para calcular en este caso el valor de una integral trigonométrica aplicando el teorema de los residuos solo se considerarían los puntos singulares localizados en el interior de la circunferencia unidad (color azul).



Ejercicio 8.18. Determinar el valor de la siguiente integral utilizando el método de los residuos.

$$\int_0^\pi \frac{1}{a - b \cos \theta} d\theta \quad ; \quad a > b > 0$$

Ya que la función coseno es par, $\cos \theta = \cos(-\theta)$, la integral anterior se puede expresar como:

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a - b \cos \theta} d\theta$$

Entonces haciendo el cambio de variable:

$$z = e^{i\theta} \quad ; \quad dz = iz d\theta \quad ; \quad \cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

se obtiene:

$$\frac{1}{2i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{az - b\frac{1}{2}(z^2 + 1)} dz = -\frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{bz^2 - 2az + b} dz$$

Factorizamos el denominador a través de sus ceros:

$$r_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4b^2}}{2b} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

Como $a > b > 0$ estas dos raíces son reales y distintas. Entonces la integral queda:

$$-\frac{1}{bi} \oint_{|z|=1} \frac{1}{(z - r_1)(z - r_2)} dz$$

⁴⁶Los límites de integración no necesariamente tienen que ser de 0 a 2π , ya que basta con que cubran una vuelta completa, pudiendo ser por ejemplo de $-\pi$ a π o de 1 a $2\pi + 1$, por ejemplo.

⁴⁷Con este cambio de variable, a cada pto $x \in [0, 2\pi]$ le hace corresponder (por la fórmula de Euler) un punto perteneciente a la circunferencia $|z| = 1$ del plano complejo. Así para $x = 0$ le corresponde el $(1, 0)$, para el $x = \pi/4$ el $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, etc.

Los puntos singulares de esta función son r_1 y r_2 que claramente ambos son del tipo polos simples. Solo nos interesa aquellos que se encuentren dentro del círculo unidad. Claramente la primera raíz (tomando el signo positivo), $|r_1| > 1$, mientras que la segunda:

$$|r_2| = \left| \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right| = \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b} = \frac{a^2 - (a^2 - b^2)}{b(a + \sqrt{a^2 - b^2})} = \frac{b}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} < 1$$

por lo que solo nos interesa el polo simple r_2 , de forma que:

$$\text{Res}(f, r_2) \lim_{z \rightarrow r_2} (z - r_2) \frac{1}{(z - r_1)(z - r_2)} = \frac{1}{r_2 - r_1} = \frac{-b}{2\sqrt{a^2 - b^2}}$$

Entonces:

$$-\frac{1}{bi} \oint_{|z|=1} \frac{1}{(z - r_1)(z - r_2)} dz = -\frac{2\pi i}{bi} \text{Res}(f, r_2) = \boxed{\frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}}$$

Este cambio de variable se puede extender a integrales reales donde aparezcan funciones del tipo $\sin(nx)$ y $\cos(nx)$ para todo los valores $n \in \mathbb{R}$, teniendo en cuenta:

$$\cos(nx) = \frac{e^{nxi} + e^{-nxi}}{2} = \frac{z^n + z^{-n}}{2}, \quad \sin(nx) = \frac{e^{nxi} - e^{-nxi}}{2i} = \frac{z^n - z^{-n}}{2i}, \quad \text{con } z = e^{ix}$$

Ejercicio 8.19. Calcular el valor de siguiente integral,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2x)}{5 + 4 \sin x} dx, \quad x \in \mathbb{R}$$

Haciendo el cambio de variable $z = e^{ix}$ con $dx = dz/(iz)$ se tiene:

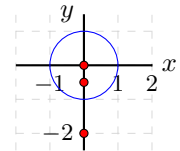
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x}{5 + 4 \sin x} dx = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{z^2 + z^{-2}}{2}}{5 + 4 \frac{z - z^{-1}}{2i}} \frac{dz}{zi} = \oint_{|z|=1} \frac{z^4 + 1}{2z^3 i (5 + 2 \frac{z^2 - 1}{zi})} dz = \frac{1}{2} \oint_{|z|=1} \frac{z^4 + 1}{z^2 (2z^2 + 5zi - 2)} dz$$

Encontramos los ceros del denominador (puntos singulares):

$$z^2(2z^2 + 5zi - 2) = 0 \implies \begin{cases} z = 0 \\ z = \frac{-5i \pm \sqrt{-25 + 16}}{4} = \frac{-5i \pm \sqrt{-9}}{4} = \frac{-5i \pm 3i}{4} = \{-i/2, -2i\} \end{cases}$$

Los únicos puntos singulares que están dentro de la circunferencia unidad son $z = 0$ y $z = -i/2$. Por tanto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \oint_{|z|=1} \frac{z^4 + 1}{z^2(2z^2 + 5zi - 2)} dz &= \frac{1}{2} \left[\oint_{|z|=1} \frac{\frac{z^4 + 1}{2z^2 + 5zi - 2}}{z^2} dz + \oint_{|z|=1} \frac{\frac{z^4 + 1}{2z^2(z + 2i)}}{z + i/2} dz \right] = \\ &= \frac{1}{2} 2\pi i \left[\frac{d}{dz} \frac{z^4 + 1}{2z^2 + 5zi - 2} \Big|_{z=0} + \frac{z^4 + 1}{2z^2(z + 2i)} \Big|_{z=-i/2} \right] = \\ &= \pi i \left[\frac{z^3(2z^2 + 5zi - 2) - (z^4 + 1)(4z + 5i)}{(2z^2 + 5zi - 2)^2} \Big|_{z=0} + \frac{z^4 + 1}{2z^2(z + 2i)} \Big|_{z=-i/2} \right] = \\ &= \pi i \left[-\frac{5i}{4} + \frac{\frac{i^4}{2^4} + 1}{2 \frac{i^2}{2^2} (-\frac{i}{2} + 2i)} \right] = \pi i \left[-\frac{5i}{4} + \frac{\frac{1}{16} + 1}{2 \frac{-1}{4} \frac{3i}{2}} \right] = \pi i \left[-\frac{5i}{4} + \frac{17i}{12} \right] = \pi i \frac{2i}{12} = \boxed{-\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$



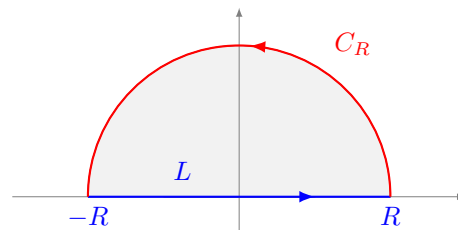
Integrales Impropias

Vamos a ver un método para determinar el valor de una integral real impropia de la forma⁴⁸:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad \text{donde} \quad \begin{cases} f(z) \text{ es una función racional sin singularidades en el eje real} \\ \lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0 \end{cases}$$

El proceso consiste en sustituir la función real $f(x)$ por su correspondiente función compleja $f(z)$ e integrar alrededor de una curva cerrada C recorrida en sentido positivo y formada por dos tramos, de forma $C = C_R \cup L$, donde:

- C_R es una semicircunferencia en la parte superior del plano complejo, de centro origen y radio $R > 0$.
- L es un segmento de $-R$ a R a lo largo del eje real.



Entonces:

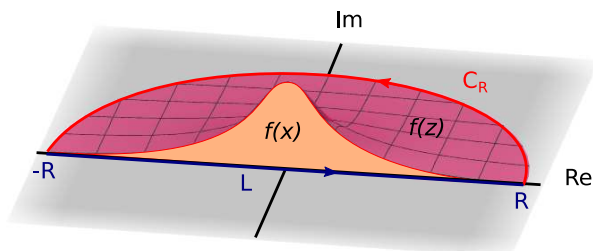
$$\oint_C f(z) dz = \int_{-R}^R f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz$$

Si hacemos tender $R \rightarrow \infty$ todos los polos de f en la mitad superior del plano complejo quedan encerrados dentro de C . Además se puede demostrar⁴⁹ que:

$$\text{si } \lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$



De forma intuitiva podemos entender la función $f(z)$ como una superficie extendida sobre el plano complejo, de forma que dando un corte por un plano vertical que pasase por el eje real se obtuviese la función real $f(x)$. Para que la integral impropia converja, es decir que el área debajo de la curva sea un valor finito, es necesario que la función tienda a cero rápidamente, de forma que la integral de línea sobre la curva C_R alejada infinitamente del origen es cero.

Notar que la integral compleja $\oint_C f(z) dz$ solo tiene en cuenta el valor de la función $f(z)$ sobre el borde externo de la curva C , pero no el valor de la función en el interior de la curva.

Para calcular el valor de la integral compleja podemos utilizar por ejemplo el teorema de los residuos, de forma que:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum [\text{Residuos en los polos de } f \text{ en semi-plano superior}]$$

Notar que si la función $f(x)$ es par, es decir $f(x) = f(-x)$, entonces se cumple:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) dx$$

por lo que este método también permite calcular este tipo de integrales.

⁴⁸En este caso $f(z)$ es la misma función $f(x)$ pero extendida al dominio del plano complejo.

⁴⁹De forma intuitiva vemos que la función $f(z) \rightarrow 0$ más rápidamente que $z \rightarrow \infty$ cuando nos alejamos del origen del plano complejo, ya que $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$, y por tanto la integral $\int_{C_R}$ sobre esa zona del infinito recorre valores de la función tendiendo a cero, y por tanto su valor será cero.

Ejercicio 8.20. Determinar el valor de la siguiente integral utilizando el método de los residuos.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(4+x^2)^2} dx$$

Claramente la función es racional y cumple:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(4+x^2)^2} = 0$$

Por tanto consideramos la función compleja:

$$f(z) = \frac{z^2}{(4+z^2)^2}$$

cuyos polos son:

$$z = \sqrt{-4} = \pm 2i$$

De estas dos singularidades la única que está en la parte superior del plano complejo es $2i$, que es la que nos interesa, (ver la [Sección 8.3.3, página 314](#)).

Por tanto hay que determinar el orden de este polo (ver la [Definición 8.12, página 303](#)) para ello tenemos en cuenta que:

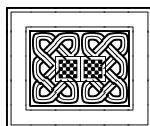
$$\lim_{z \rightarrow 2i} (z-2i)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} (z-2i)^2 \frac{z^2}{(4+z^2)^2} = \lim_{z \rightarrow 2i} (z-2i)^2 \frac{z^2}{(z-2i)^2(z+2i)^2} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^2}{(z+2i)^2} = \frac{-4}{-16} = \frac{1}{4}$$

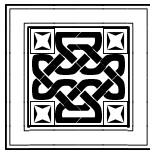
Por tanto es un polo de orden 2. Para encontrar el residuo calculamos el siguiente límite (ver la [Sección 8.3.1, página 306](#)):

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{d}{dz} (z-2i)^2 f(z) &= \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{d}{dz} \frac{z^2}{(z+2i)^2} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{2z(z+2i)^2 - 2z^2(z+2i)}{(z+2i)^4} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{2z(z+2i-z)}{(z+2i)^3} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{4zi}{(z+2i)^3} = \frac{-8}{-64i} = \frac{1}{8i} = -\frac{1}{8}i \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum [\text{Residuos en los polos de } f \text{ dentro de } C] = -2\pi i \frac{1}{8}i = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

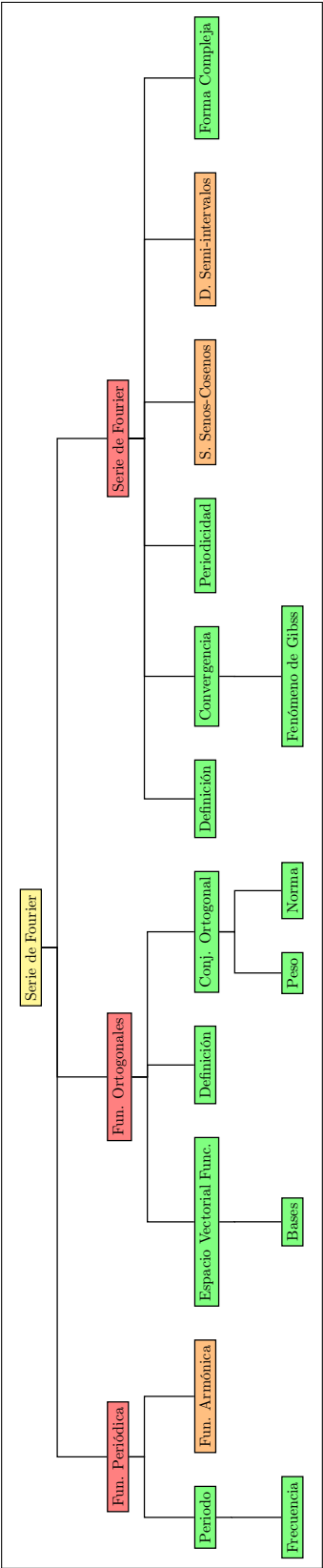




Series de Fourier

Contenido

9.1	Introducción	319
9.2	Funciones Periódicas	319
9.3	Espacios Vectoriales de Funciones	320
9.3.1	Funciones Ortogonales	321
9.3.2	Bases de Espacios Vectoriales de Funciones	322
9.4	Serie de Fourier	323
9.4.1	Convergencia de la Serie de Fourier	324
9.4.2	Fenómeno de Gibbs	327
9.4.3	Extensión Periódica de una Función	327
9.4.4	Series de Fourier de Senos y Cosenos	328
9.4.5	Desarrollo en Semi-intervalos. Series de Senos y Cosenos de una Función	330
9.4.6	Continuidad, Derivabilidad e Integrabilidad de las Series de Fourier	331
9.4.7	Forma Compleja de la Serie de Fourier	333



9.1. Introducción

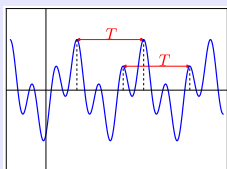
El *análisis de Fourier* fue introducido por el matemático y físico francés Joseph Fourier en 1822 en su *Teoría analítica del calor*, para tratar la solución de *problemas de valores frontera*¹ en la conducción del calor².

Las *series de Fourier* están formadas por términos seno y coseno que permiten representar funciones periódicas generales y constituyen una herramienta muy importante en la solución de problemas en los que intervienen *ecuaciones diferenciales ordinarias*³ y *parciales*⁴. Este tipo de series son, en cierto sentido, más generales que las *series de Taylor*⁵, ya que muchas funciones periódicas discontinuas pueden desarrollarse en *serie de Fourier*, pero no tienen representación en *serie de Taylor*.

La introducción a partir del siglo XIX de las series de Fourier y su representación en forma de *integrales de Fourier* supuso uno de los mayores avances en la física matemática y en sus aplicaciones en la ingeniería. Así, mientras que la *transformada de Laplace*⁶ es la transformada integral más importante en ingeniería, la segunda en importancia es la *transformada de Fourier*⁷. En la actualidad sus aplicaciones son muy amplias en diversos campos, como: sistemas lineales, comunicaciones, electrónica, óptica, redes eléctricas, etc.

9.2. Funciones Periódicas

Definición 9.1. Función Periódica



Una función $f(x)$ es **periódica** si satisface la relación:

$$f(x) = f(x + T) \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad T \in \mathbb{R}^+$$

donde la constante T se denomina **periodo**.

Si $f(x)$ es una función periódica definida en $\mathbb{R}$ con periodo T , cualquier valor kT con $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ también es un periodo de la función.

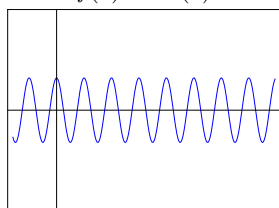
$$f(x + kT) = f(x) \quad ; \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Al menor de los periodos se denomina **periodo principal**.

Ejemplo 9.1. Periodicidad de las funciones

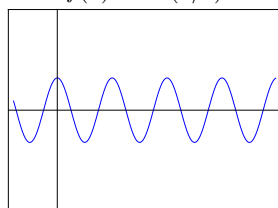
La función coseno es periódica con periodo 2π , sin embargo la combinación de funciones coseno puede cambiar el periodo e incluso generar funciones no periódicas como muestran los siguientes ejemplos⁸.

$$f(x) = \cos(x)$$



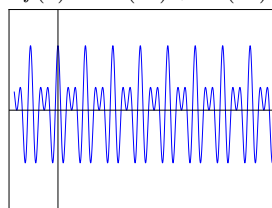
Periódica con $T = 2\pi$

$$f(x) = \cos(x/2)$$



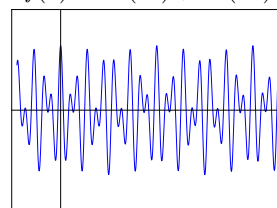
Periódica con $T = 4\pi$

$$f(x) = \cos(2x) + \cos(3x)$$



Periódica con $T = 2\pi$

$$f(x) = \cos(2x) + \cos(\pi x)$$



No periódica

Nota 9.1. Una función constante es una función periódica cuyo periodo es cualquier número real positivo.

¹Ver la Sección 1.3.5, página 15.

²Ver la Sección 11.4.2, página 372 y la Sección 11.6.1, página 402.

³Ver temas 1-5.

⁴Ver el Tema 11, página 359.

⁵Ver por ejemplo "Clases de Cálculo I para Ingeniería" en la Bibliografía, pág. 517.

⁶Ver el Tema 5, página 143.

⁷Este tema no será visto en este curso.

⁸Ver también la Sección 12.3.3, página 430.

Definición 9.2. Frecuencia

La **frecuencia** f de una función periódica con *periodo* T se define como:

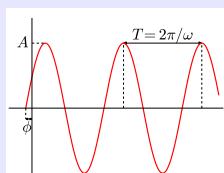
$$f = \frac{1}{T}$$

y determina el número de *periodos* (ciclos u oscilaciones completas) por unidad de tiempo. Se mide en *hercios* (Hz=ciclos/s).

También es muy utilizada la **frecuencia angular** ω definida como:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

que representa la rapidez de cambio de una magnitud angular, de modo que sus unidades son rad/s.

Definición 9.3. Función Armónica Simple

$$f(t) = A \operatorname{sen}(\phi + \omega t)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} A : & \text{amplitud} \\ \omega : & \text{frecuencia angular} \\ \omega t : & \text{fase} \\ \phi : & \text{fase inicial} \end{array} \right.$$

9.3. Espacios Vectoriales de Funciones

Recordamos de *Álgebra Lineal*⁹ que un **espacio vectorial** es una terna $(V, +, \cdot)$ formada por un conjunto de elementos¹⁰ V en el que se definen dos operaciones $+$ y $\cdot$ que cumplen una serie de propiedades (conmutativa, asociativa, distributiva, elemento neutro, unitario y opuesto, etc.).

Definición 9.4. Espacio Vectorial de Funciones

Un **espacio vectorial de funciones** es el conjunto formado por funciones reales $f_i(x)$ definidas en un intervalo $[a, b]$ junto con sus operaciones básicas y en el que se define el siguiente **producto interno**¹¹:

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx$$

⁹Ver por ejemplo "Clases de Álgebra Lineal para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 517.

¹⁰Denominados de forma general *vectores*.

¹¹El *producto interno* es una generalización del *producto escalar* entre vectores para espacios vectoriales generales. Un *espacio vectorial* real en el que se define un *producto interno* se le denomina *espacio euclídeo*, mientras que si el espacio vectorial es complejo se denomina *espacio unitario*.

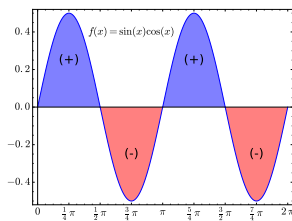
9.3.1. Funciones Ortogonales

Definición 9.5. Funciones Ortogonales

Dos funciones f_1 y f_2 pertenecientes a un *espacio vectorial de funciones* se dice que son **ortogonales** en un intervalo $[a, b]$ si su producto interno es nulo en ese intervalo.

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_a^b f_1(x)f_2(x) dx = 0$$

Ejemplo 9.2. Funciones ortogonales



Las funciones seno y coseno son ortogonales en $[0, 2\pi]$.

$$\int_0^{2\pi} \sin(x) \cos(x) dx = 0$$

Definición 9.6. Conjunto Ortogonal de Funciones

Un conjunto de funciones reales $\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots\}$ se dice que es **ortogonal** en un intervalo $[a, b]$ si para todo par de funciones distintas del conjunto se cumple:

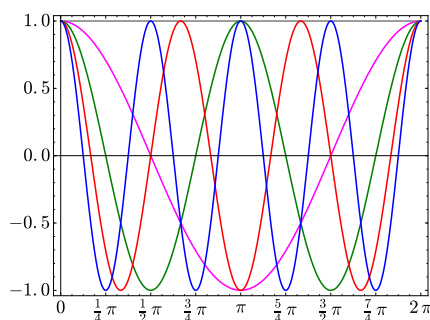
$$\langle f_i, f_j \rangle = \int_a^b f_i(x)f_j(x) dx = 0 \quad , \quad i \neq j$$

Definición 9.7. Ortogonalidad Respecto a Funciones Peso

Un conjunto de funciones reales $\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots\}$ se dice que es **ortogonal respecto a una función peso $w(x)$** si:

$$\int_a^b w(x)f_i(x)f_j(x) dx = 0 \quad , \quad i \neq j$$

Ejemplo 9.3. Conjunto ortogonal de funciones



El conjunto de funciones:

$$\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty} = \{1, \cos(x), \cos(2x), \dots\}$$

es ortogonal en $[-\pi, \pi]$, ya que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = 0 \quad \text{con } n \neq m$$

teniendo todas ellas además el mismo *periodo*¹².

¹²Ver la Sección 9.2, página 319.

Definición 9.8. Norma de una Función

La **norma** de una función $f(x)$ pertenecientes a un *espacio vectorial de funciones* definido en $[a, b]$ se define como:

$$\|f(x)\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$$

Al valor $\|f(x)\|^2$ se denomina **norma cuadrada** de $f(x)$.

Definición 9.9. Conjunto Ortonormal de Funciones

Un conjunto de funciones reales $\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots\}$ se dice que es **ortonormal** en un intervalo $[a, b]$ si es un *conjunto ortogonal* y además todas sus funciones tienen norma unidad en ese intervalo.

Ejercicio 9.1. Obtener un conjunto ortonormal de funciones en $[-\pi, \pi]$ a partir del conjunto ortogonal:

$$\{1, \cos(x), \cos(2x), \dots\}$$

Hay que *normalizar* cada función dividiéndola por su norma en ese intervalo.

$$\|1\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx} = \sqrt{2\pi} \quad ; \quad \|\cos(nx)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx} = \sqrt{\pi}$$

Por tanto el conjunto ortonormal de funciones en ese intervalo es:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

9.3.2. Bases de Espacios Vectoriales de Funciones

Recordamos que en el contexto del Álgebra Lineal, si tenemos una **base ortogonal**¹³ $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ de un subespacio vectorial $V \subseteq \mathbb{R}^n$ de dimensión **finita** n , entonces para cualquier $\vec{v} \in V$ se tiene:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n c_i \vec{u}_i = c_1 \vec{u}_1 + \dots + c_n \vec{u}_n \quad ; \quad c_i = \frac{\vec{u}_i \cdot \vec{v}}{\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i} = \frac{\vec{u}_i \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}_i\|^2}$$

donde $\vec{u}_i \cdot \vec{v}$ es el *producto escalar*¹⁴ de los vectores. Si además la base es **ortonormal**, cumpliéndose que $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i = 1$ y por tanto $\|\vec{u}_i\| = 1$, se tiene:

$$c_i = \vec{u}_i \cdot \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^n (\vec{u}_i \cdot \vec{v}) \vec{u}_i = (\vec{u}_1 \cdot \vec{v}) \vec{u}_1 + \dots + (\vec{u}_n \cdot \vec{v}) \vec{u}_n$$

Vamos a extender estos conceptos a los *espacios vectoriales de funciones*.

En el caso de *espacios vectoriales de funciones* con dimensión infinita¹⁵, la base debe ser un **conjunto completo**, es decir que la única función ortogonal a todas las funciones de la base sea la función nula.

¹³Una base de un subespacio vectorial V de dimensión n es un conjunto de n vectores del subespacio linealmente independientes. Para que la base sea ortogonal, sus vectores tienen que formar un conjunto ortogonal (producto escalar nulo entre vectores distintos).

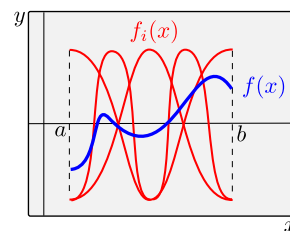
¹⁴Un tipo particular de *producto interno*.

¹⁵Es decir que están formados por un conjunto de infinitas funciones, como por ejemplo el mostrado en el **Ejercicio 9.1**, página 322. Los espacios vectoriales de dimensión infinita (denominados *espacios de Hilbert*) a pesar de tener analogías con el caso finito, presenta diferencias relevantes que no se analizarán aquí.

Sea un conjunto infinito de *funciones ortogonales*¹⁶ en un intervalo $[a, b]$ que forman un *conjunto completo*:

$$\{f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots\}$$

y sea una función $f(x)$ definida en $[a, b]$.



Bajo determinadas condiciones que se verán posteriormente¹⁷ se tiene:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i f_i(x) = c_0 f_0(x) + c_1 f_1(x) + \dots \quad ; \quad c_i = \frac{\langle f_i, f \rangle}{\|f_i\|^2} = \frac{\int_a^b f_i(x) f(x) dx}{\int_a^b f_i^2(x) dx}$$

Nota 9.2. Notar la analogía en estas relaciones entre las funciones y los vectores del Álgebra Lineal.

Si $\{f_i(x)\}$ es ortogonal respecto a una *función peso*¹⁸ $w(x)$ entonces:

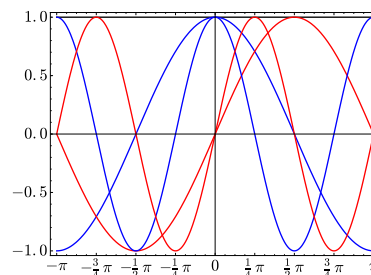
$$c_i = \frac{\int_a^b w(x) f_i(x) f(x) dx}{\int_a^b w(x) f_i^2(x) dx}$$

9.4. Serie de Fourier

El siguiente conjunto infinito de funciones:

$$\{\cos nx, \sin nx\} = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}$$

es *ortogonal* en el intervalo $[-\pi, \pi]$, y como consecuencia de la periodicidad de las funciones trigonométricas, es *ortogonal* en cualquier intervalo de longitud 2π .



Teniendo en cuenta:

$$\begin{aligned} \sin \alpha \pm \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad ; \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cos(nx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} 1 \sin(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx = 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m \end{cases} \quad ; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m \end{cases} \end{aligned}$$

De igual forma, el conjunto:

$$\left\{ \cos \frac{n\pi x}{L}, \sin \frac{n\pi x}{L} \right\} = \left\{ 1, \cos \frac{\pi x}{L}, \sin \frac{\pi x}{L}, \cos \frac{2\pi x}{L}, \sin \frac{2\pi x}{L}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{L}, \sin \frac{n\pi x}{L}, \dots \right\}$$

donde $L \in \mathbb{R} - \{0\}$ es ortogonal en el intervalo $[-L, L]$, ya que:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L 1 \cos \frac{n\pi x}{L} dx &= \int_{-L}^L 1 \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = 0 \quad ; \quad \int_{-L}^L 1 dx = 2L \\ \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ L & \text{si } n = m \end{cases} \quad ; \quad \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ L & \text{si } n = m \end{cases} \end{aligned}$$

¹⁶Ver la Definición 9.5, página 321.

¹⁷Ver la Sección 9.4.1, página 324.

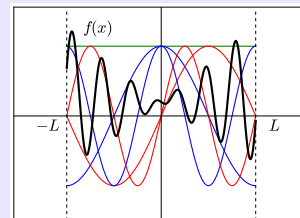
¹⁸Ver la Definición 9.7, página 321.

Teniendo en cuenta la **Sección 9.3.2, página 322**, este conjunto ortogonal de funciones puede ser utilizado para descomponer funciones generales en términos de senos y cosenos.

Definición 9.10. Serie de Fourier

La serie de Fourier de una función $f(x)$ definida en el intervalo $(-L, L)$ está dada por¹⁹:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$



donde los denominados **coeficientes de Fourier** a_i y b_i vienen dados por:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad ; \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad ; \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

El valor aproximado ($\sim$) del desarrollo vendrá dado por las condiciones de convergencia que se verán a continuación.

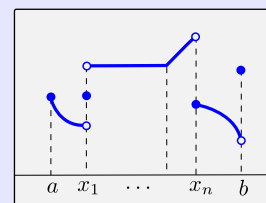
9.4.1. Convergencia de la Serie de Fourier

Vamos a empezar por una definición.

Definición 9.11. Función de Clase $\mathcal{C}^1$ a Trozos

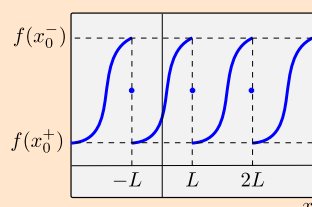
Se dice que una función $f(x)$ es de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos en $[a, b]$ si se puede dividir el intervalo en subintervalos $[a, b] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_n, b]$ de forma que:

- $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas en cada subintervalo (x_k, x_{k+1}) .
- Los límites laterales de $f(x)$ y $f'(x)$ en cada punto x_k existen y son finitos.



Teorema 9.1. Convergencia de la Serie de Fourier

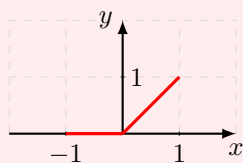
Si $f(x)$ es de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos en $(-L, L)$, entonces la serie de Fourier de $f(x)$ en ese intervalo converge en todos los puntos continuos del dominio, y en los puntos de discontinuidad x_0 converge al valor:



$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \begin{cases} f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \\ f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \end{cases}$$

¹⁹El término a_0 suele aparecer dividido por 2 por conveniencia, para que la fórmula posterior donde aparece su cálculo tenga una forma similar al del resto de coeficientes a_n y b_n .

Ejercicio 9.2. Obtener la serie de Fourier de la siguiente función:



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

$$\bullet a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 0 dx + \int_0^1 x dx = 0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \bullet a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-1}^1 f(x) \cos(n\pi x) dx = \int_{-1}^0 0 dx + \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx = \\ &= \frac{1}{n^2\pi^2} [n\pi x \sin(n\pi x) + \cos n\pi x]_0^1 = \begin{cases} n \text{ impar} : \frac{1}{n^2\pi^2} (0 - 1 - 0 - 1) = \boxed{-\frac{2}{n^2\pi^2}} \\ n \text{ par} : \frac{1}{n^2\pi^2} (0 + 1 - 0 - 1) = \boxed{0} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-1}^1 f(x) \sin(n\pi x) dx = \int_{-1}^0 0 dx + \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx = \\ &= \frac{1}{n^2\pi^2} [-n\pi x \cos(n\pi x) + \sin n\pi x]_0^1 = \begin{cases} n \text{ impar} : \frac{1}{n^2\pi^2} [n\pi - 0 + 0 - 0] = \boxed{\frac{1}{n\pi}} \\ n \text{ par} : \frac{1}{n^2\pi^2} [-n\pi + 0 + 0 - 0] = \boxed{-\frac{1}{n\pi}} \end{cases} \end{aligned}$$

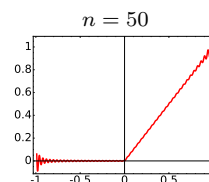
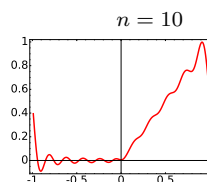
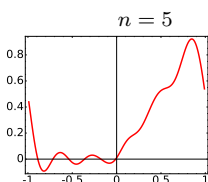
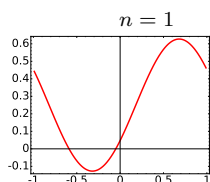
Por tanto, teniendo en cuenta los términos pares e impares se tiene:

$$f(x) \sim \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{(2n-1)^2\pi^2} \cos[(2n-1)\pi x] + \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin(n\pi x) \right)$$

donde los primeros términos son:

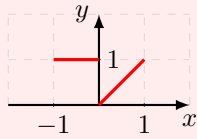
$$f(x) \sim \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \cos(\pi x) + \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) - \frac{2}{9\pi^2} \cos(3\pi x) - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x) - \dots$$

En las siguientes gráficas se muestra la evolución de la convergencia en función de n .



En los extremos del intervalo se observan oscilaciones consecuencia del *fenómeno de Gibbs* (ver la [Sección 9.4.2, página 327](#)).

Ejercicio 9.3. Obtener la serie de Fourier de la siguiente función:



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

$$\bullet a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 1 dx + \int_0^1 x dx = [x]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 1 + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$$\bullet a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-1}^1 f(x) \cos(n\pi x) dx = \int_{-1}^0 \cos(n\pi x) dx + \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx = \left[\frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \right]_{-1}^0 + \frac{1}{n^2\pi^2} [n\pi x \sin(n\pi x) + \cos n\pi x]_0^1 =$$

$$\begin{cases} n \text{ impar} : (0 - 0) + \frac{1}{n^2\pi^2} (0 - 1 - 0 - 1) = \boxed{-\frac{2}{n^2\pi^2}} \\ n \text{ par} : (0 - 0) + \frac{1}{n^2\pi^2} (0 + 1 - 0 - 1) = \boxed{0} \end{cases}$$

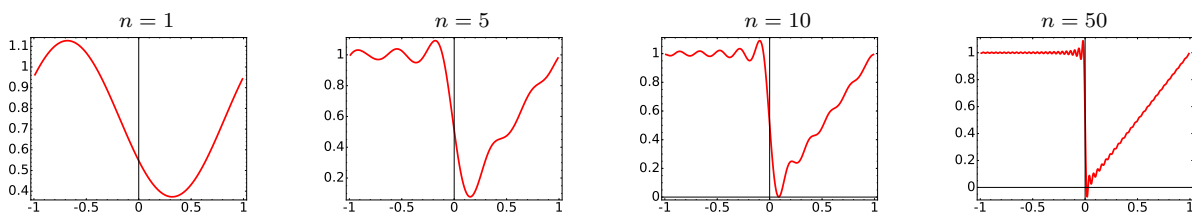
$$\bullet b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-1}^1 f(x) \sin(n\pi x) dx = \int_{-1}^0 \sin(n\pi x) dx + \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx = \left[-\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x \right]_{-1}^0 + \frac{1}{n^2\pi^2} [-n\pi x \cos(n\pi x) + \sin n\pi x]_0^1 =$$

$$\begin{cases} n \text{ impar} : \left[-\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{n\pi} \right] + \frac{1}{n^2\pi^2} [n\pi - 0 + 0 - 0] = -\frac{2}{n\pi} + \frac{1}{n\pi} = \boxed{\frac{-1}{n\pi}} \\ n \text{ par} : \left[-\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right] + \frac{1}{n^2\pi^2} [-n\pi + 0 + 0 - 0] = \boxed{\frac{-1}{n\pi}} \end{cases}$$

Por tanto, teniendo en cuenta los términos pares e impares se tiene:

$$f(x) \sim \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{(2n-1)^2\pi^2} \cos[(2n-1)\pi x] - \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) \right)$$

En las siguientes gráficas se muestra la evolución de la convergencia en función de n .



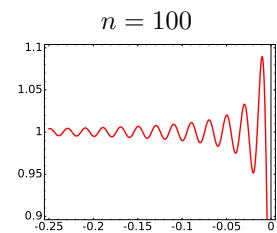
Notar que en $x = 0$ la función presenta una discontinuidad, de forma que la serie de Fourier converge en ese punto al valor medio del salto, en este caso $1/2$. Además en las cercanías de este punto de discontinuidad aparece también el *fenómeno de Gibbs*, como se explica en la siguiente sección.

9.4.2. Fenómeno de Gibbs

La serie de Fourier no converge uniformemente en las cercanías de un punto de discontinuidad, incluso para desarrollos con un número de términos tendiendo a infinito, produciéndose variaciones de aproximadamente un 10% del salto de discontinuidad y pudiendo llegar al 18%.

Este fenómeno ocurre cada vez que las señales tienen *discontinuidades de salto* (generalmente en los extremos) y siempre estarán presentes cuando la señal tiene oscilaciones fuertes.

En la gráfica se muestra una ampliación de la serie de Fourier cerca del salto que se produce en el [Ejercicio 9.3, página 326](#) para $n = 100$.



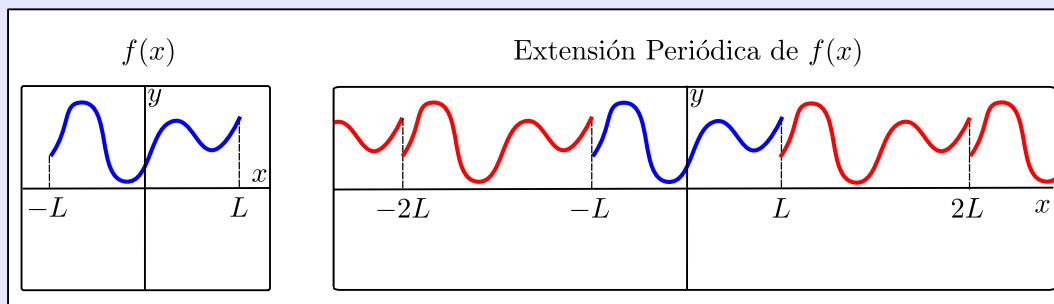
9.4.3. Extensión Periódica de una Función

Como hemos visto²⁰, la serie de Fourier de una determinada función $f(x)$ aproxima²¹ a la misma en un intervalo $(-L, L)$. Mientras que la serie de Fourier es una función periódica con periodo $2L$, la función original $f(x)$ no necesariamente lo es, por ello la serie de Fourier realmente converge a la extensión periódica de la función $f(x)$.

Definición 9.12. Extensión Periódica de una Función

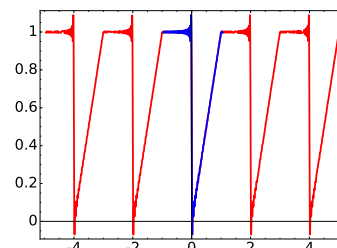
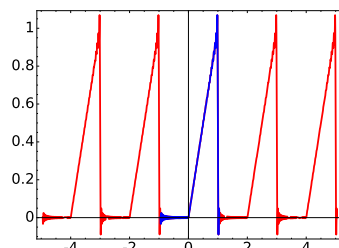
Dada una función $f(x)$ definida en un intervalo $(-L, L)$ se define su **extensión periódica** a una nueva función $F(x)$ periódica con periodo $2L$ definida de la siguiente forma:

$$F(x + 2kL) = f(x) \quad , \quad \forall x \in (-L, L) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$



Ejemplo 9.4. Extensión Periódica

En las siguientes gráficas se muestran las series de Fourier (en rojo) de los ejercicios [Ejercicio 9.2, página 325](#) y [Ejercicio 9.3, página 326](#) en una región extendida del intervalo $(-1, 1)$ donde está definidas las funciones originales.



Se puede observar como se obtienen series periódicas en todo $\mathbb{R}$ con periodo 2.

²⁰Ver la [Definición 9.10, página 324](#).

²¹Ver el [Teorema 9.1, página 324](#).

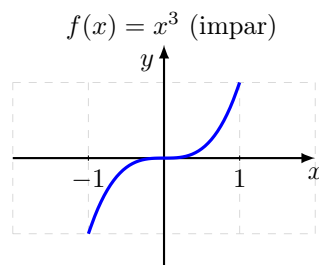
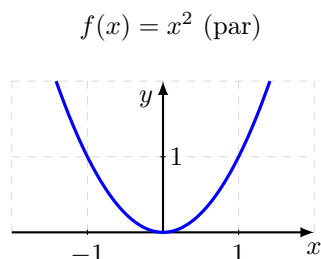
9.4.4. Series de Fourier de Senos y Cosenos

En el caso de que la función $f(x)$ sea **par** o **impar**,

$$f(x) \text{ par} \iff f(-x) = f(x) \quad ; \quad f(x) \text{ impar} \iff f(-x) = -f(x)$$

la serie de Fourier de la función se simplifica, debido a las propiedades de este tipo de funciones.

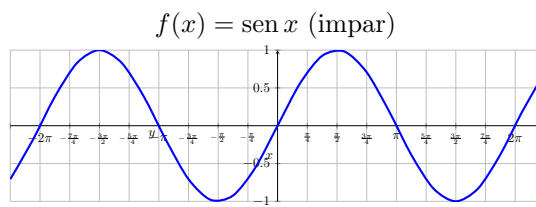
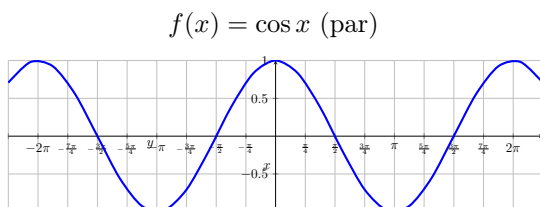
- Las funciones pares son simétricas respecto al eje y , mientras que las funciones impares son simétricas respecto al origen.



- El producto de funciones pares es una función par.
- El producto de funciones impares es una función par.
- El producto de una función par por otra impar es una función impar.
- La suma y resta de funciones pares es una función par.
- La suma y resta de funciones impares es una función impar.
- Propiedades en la integración de funciones pares e impares:

$$f(x) \text{ par: } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \quad ; \quad f(x) \text{ impar: } \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

Tener en cuenta que la función coseno es par mientras que la función seno es impar.



Serie de Fourier de Cosenos

En la serie de Fourier de una función **par** solo aparecen términos coseno.

$$f(x) \text{ par} \left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \underbrace{f(x)}_{\text{par}} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx \\ a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \underbrace{f(x)}_{\text{par}} \underbrace{\cos \frac{n\pi x}{L}}_{\text{par}} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \underbrace{f(x)}_{\text{par}} \underbrace{\sin \frac{n\pi x}{L}}_{\text{impar}} dx = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \end{array} \right.$$

Serie de Fourier de Senos

En la serie de Fourier de una función **impar** solo aparecen términos seno.

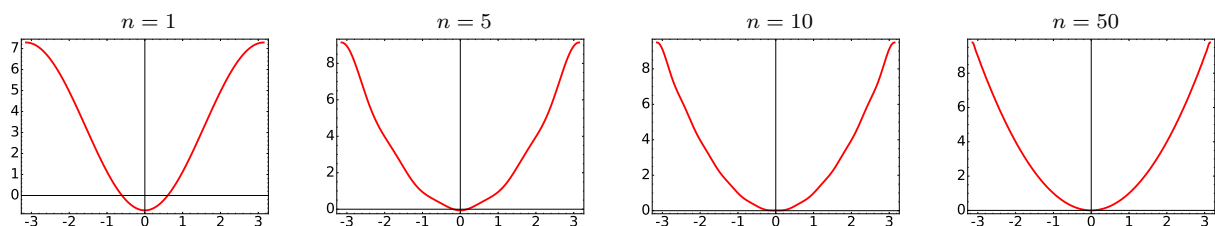
$$\left. \begin{array}{l}
 \boxed{f(x) \text{ impar}} \left\{ \begin{array}{l}
 a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \underbrace{f(x)}_{\text{impar}} dx = 0 \\
 a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \underbrace{f(x)}_{\text{impar}} \underbrace{\cos \frac{n\pi x}{L}}_{\text{par}} dx = 0 \\
 b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \underbrace{f(x)}_{\text{impar}} \underbrace{\sin \frac{n\pi x}{L}}_{\text{impar}} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx
 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l}
 f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Ejercicio 9.4. Obtener la serie de Fourier de la siguiente función.

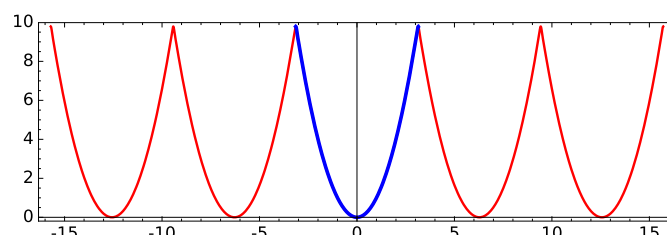
$$f(x) = x^2 \quad ; \quad -\pi < x < \pi$$

Al ser una función par, se tiene:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^{\pi} = \boxed{\frac{2\pi^2}{3}} \\
 a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi n^3} [2nx \cos(nx) + (n^2 x^2 - 2) \sin(nx)]_0^{\pi} = \\
 &= \frac{2}{\pi n^3} (-1)^n 2n\pi = \boxed{(-1)^n \frac{4}{n^2}} \\
 b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \boxed{0} \\
 x^2 &\sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx)
 \end{aligned}$$

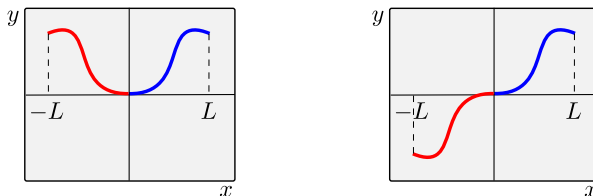


En este caso como no hay puntos de discontinuidad no se presenta el fenómeno de Gibbs en todo $\mathbb{R}$. En la siguiente gráfica se muestra la serie de Fourier de la función x^2 para $n = 50$ en el intervalo $[-5\pi, 5\pi]$.



9.4.5. Desarrollo en Semi-intervalos. Series de Senos y Cosenos de una Función

También se pueden obtener la serie Fourier de una función en un intervalo $(0, L)$, en lugar de un intervalo centrado en el origen $(-L, L)$. Para ello se puede completar la parte izquierda $(-L, 0)$ con una función arbitraria. Lo más sencillo es completar con funciones que la transformen en una función par o impar, de forma que sus respectivas series sean de senos o cosenos. La elección dependerá de cada caso particular.

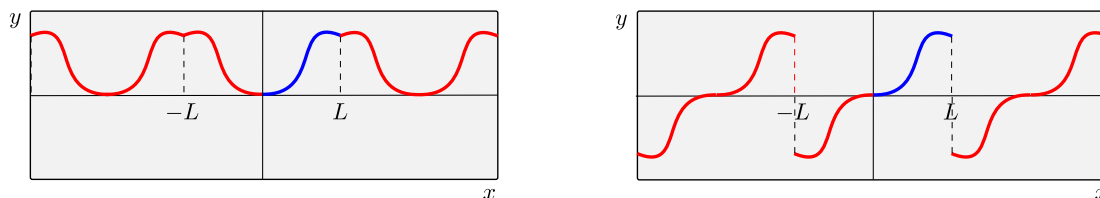


- Si se elige la forma par, la serie resultante se denomina **serie de Fourier de cosenos de $f(x)$** en el intervalo $[0, L]$ y la nueva función resultante se denomina **extensión par de $f(x)$** , que será continua en todo $\mathbb{R}$ (figura abajo izquierda).

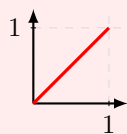
$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \quad ; \quad a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx \quad ; \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

- Si se elige la forma impar, la serie resultante se denomina **serie de Fourier de senos de $f(x)$** en el intervalo $[0, L]$ y la nueva función resultante se denomina **extensión impar de $f(x)$** , apareciendo puntos de discontinuidad (figura abajo derecha).

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad ; \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$



Ejercicio 9.5. Obtener la serie de senos y la serie de cosenos de la siguiente función.



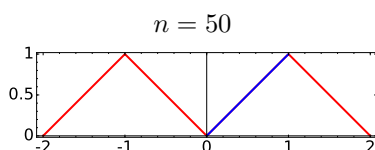
$$f(x) = x \quad ; \quad 0 < x < 1$$

a) Serie de cosenos

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx = \frac{2}{1} \int_0^1 x dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 1$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 2 \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ -\frac{4}{\pi^2 n^2} & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$b_n = 0$$

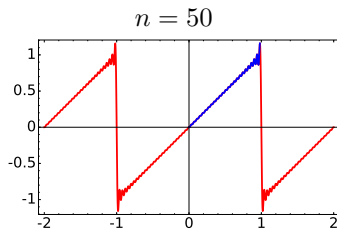


$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2n-1)^2} \cos[(2n-1)\pi x]$$

b) Serie de senos

$$a_0 = 0 \quad ; \quad a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = 2 \int_0^1 x \operatorname{sen}(n\pi x) dx = \begin{cases} -\frac{2}{\pi n} & n \text{ par} \\ \frac{2}{\pi n} & n \text{ impar} \end{cases}$$



$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{\pi n} \operatorname{sen}(n\pi x)$$

9.4.6. Continuidad, Derivabilidad e Integrabilidad de las Series de Fourier

Como consecuencia de la convergencia de las series de Fourier (en sus diversas versiones: completa, de senos y de cosenos) se obtienen las siguientes propiedades sobre la continuidad, derivabilidad e integrabilidad de las series Fourier.

Continuidad de las Series de Fourier

- **Series de Fourier:** Si $f \in \mathcal{C}^1$ a trozos en $[-L, L]$, entonces su serie de Fourier es continua si y solo si f es continua en $[-L, L]$ y $f(-L) = f(L)$.
- **Series de Senos:** Si $f \in \mathcal{C}^1$ a trozos en $[0, L]$, entonces su serie de Fourier de senos es continua si y solo si f es continua en $[0, L]$ y $f(0) = f(L) = 0$.
- **Series de Cosenos:** Si $f \in \mathcal{C}^1$ a trozos en $[0, L]$, entonces su serie de Fourier de cosenos es continua si y solo si f es continua en $[0, L]$.

Notar que la que menos requerimientos necesita para la continuidad es la serie de cosenos y la que más la serie de senos.

Derivabilidad de las Series de Fourier

- **Series de Fourier:** Si $f \in \mathcal{C}^1$ a trozos y su serie de Fourier es continua entonces ésta se puede derivar término a término, y la serie obtenida es la serie de Fourier de $f'(x)$.
- **Series de Senos:** Si $f \in \mathcal{C}^1$ a trozos en $[0, L]$, entonces su serie de Fourier de senos se puede derivar término a término si y solo si f es continua en $[0, L]$ y $f(0) = f(L) = 0$. En estos casos la serie obtenida es la serie de Fourier de Cosenos de $f'(x)$.
- **Series de Cosenos:** Si $f \in \mathcal{C}^1$ a trozos en $[0, L]$, entonces su serie de Fourier de cosenos se puede derivar término a término si y solo si f es continua en $[0, L]$. En estos casos la serie obtenida es la serie de Fourier de Senos de $f'(x)$.

Notar que la derivada de la serie senos de una función en $[0, L]$ si $f(0) \neq f(L)$ (que suele ser lo más habitual) no corresponde con la serie de la derivada de la función, que como hemos visto, corresponde con la serie de cosenos de $f'(x)$ en $[0, L]$.

Vamos a obtener una fórmula que permite obtener la forma apropiada de la serie de $f'(x)$, a partir de la serie de senos de $f(x)$ en los casos $f(0) \neq f(L)$, dada por:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad ; \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

La derivada punto por punto de esta expresión sería:

$$\frac{n\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

Pero como hemos visto, ésta no es la serie de la función derivada $f'(x)$ si no cumple $f(0) = f(L) = 0$. La verdadera serie de la derivada corresponde con la serie de cosenos de $f'(x)$. La calculamos:

$$f'(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \quad ; \quad a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f'(x) dx \quad ; \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad (9.1)$$

Calculamos los coeficientes:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{L} \int_0^L f'(x) dx = \frac{2}{L} f(x) \Big|_0^L = \frac{2}{L} [f(L) - f(0)] \\ a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \cos \frac{n\pi x}{L} \quad , \quad du = -\frac{n\pi}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \\ dv = f'(x) dx \quad , \quad v = f(x) \end{array} \right\} = \\ &= \frac{2}{L} \left[f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \right]_0^L + \frac{2}{L} \frac{n\pi}{L} \underbrace{\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx}_{b_n \frac{L}{2}} = \frac{2}{L} [f(L) \cos(n\pi) - f(0)] + \frac{n\pi}{L} b_n = \frac{2}{L} [(-1)^n f(L) - f(0)] + \frac{n\pi}{L} b_n \end{aligned}$$

Por tanto, sustituyendo en (9.1):

$$f'(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} = \underbrace{\frac{1}{L} [f(L) - f(0)]}_{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{2}{L} [(-1)^n f(L) - f(0)] + \frac{n\pi}{L} b_n \right]}_{a_n} \cos \frac{n\pi x}{L}$$

Derivación de la Serie de Fourier respecto a un Parámetro

En muchos casos prácticos²² se necesita derivar series de Fourier respecto a variables (*parámetros*²³) que no aparecen en los términos de la serie. En el siguiente teorema se explica la forma de hacerlo.

Teorema 9.2. Derivación de la Serie de Fourier respecto a un Parámetro

Sea una función $u = u(x, t)$ continua en $[-L, L] \times [0, \infty)$ tal que $\partial u / \partial t \in \mathcal{C}^1$ a trozos como función de $x \in [-L, L]$ para cada $t \in [0, \infty)$, entonces la serie de Fourier de $u(x, t)$ dada por:

$$Su(x, t) = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

se puede derivar término a término con respecto al *parámetro* t , obteniendo:

$$\frac{\partial}{\partial t} Su(x, t) = a'_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(t) \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b'_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

²²Ver el Tema 11, página 359.

²³Ver la Definición 1.14, página 13.

Integrabilidad de las Series de Fourier

Si $f \in \mathcal{C}^1$ a trozos, entonces sus tres series de Fourier se pueden integrar término a término, y el resultado es una serie que converge para todo $x \in [-L, L]$ a la integral de $f(x)$.

Notar que la serie obtenida no siempre es una serie de Fourier. Por ejemplo, si $f \in \mathcal{C}^1$ a trozos en $[-L, L]$ con serie de Fourier:

$$Sf(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Su integración término a término da lugar a:

$$\begin{aligned} \int_L^x Sf(r) dr &= a_0 r \Big|_{-L}^x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n L}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^x = \\ &= a_0(x+L) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n L}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi x}{L} - \underbrace{\sin(-n\pi)}_0 \right) \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n L}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi x}{L} - \underbrace{\cos(-n\pi)}_{(-1)^n} \right) \right] \\ &= a_0(x+L) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n L}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n L}{n\pi} \left[(-1)^n - \cos \frac{n\pi x}{L} \right] \end{aligned}$$

Esta serie solo es de tipo Fourier si $a_0 = 0$.

9.4.7. Forma Compleja de la Serie de Fourier

Sea la *serie de Fourier* de una función periódica $f(x)$ con periodo $T = 2L$,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nx}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{T} \right)$$

donde los denominados *coeficientes de Fourier* a_i y b_i vienen dados por:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad ; \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad ; \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (9.2)$$

Definiendo la *frecuencia angular*²⁴ :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{L} \quad \Rightarrow \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \sin(n\omega_0 x)]$$

Usando ahora la definición de coseno y seno general²⁵:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(n\omega_0 x) = \frac{e^{in\omega_0 x} + e^{-in\omega_0 x}}{2} \\ \sin(n\omega_0 x) = \frac{e^{in\omega_0 x} - e^{-in\omega_0 x}}{2i} \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{e^{in\omega_0 x} + e^{-in\omega_0 x}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega_0 x} - e^{-in\omega_0 x}}{2i} \right]$$

Teniendo en cuenta que $1/i = -i$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\omega_0 x} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\omega_0 x} \right]$$

²⁴La *frecuencia* $f = 1/T$ se mide en Hz = ciclos/seg donde T es el *periodo* (tiempo que tarda un ciclo), mientras que la *frecuencia angular* $\omega_0 = 2\pi/T$ se mide en rad/seg, cumpliéndose $\omega_0 = 2\pi f$. El subíndice 0 se pone para diferenciarla de la variable ω que se usará en la definición de la *transformada de Fourier* del **Tema 12, página 425**.

²⁵Estas fórmulas se obtienen fácilmente a partir de la *fórmula de Euler* $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, dando lugar a $\cos(z) = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ y $\sin(z) = (e^{iz} - e^{-iz})/(2i)$, generalizando las funciones trigonométricas a valores complejos. Ver por ejemplo "Clases de Álgebra Lineal para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 517.

definiendo:

$$\begin{cases} c_0 = a_0/2 \\ c_n = (a_n - ib_n)/2 \\ c_{-n} = (a_n + ib_n)/2 \end{cases} \implies f(x) \sim c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\omega_0 x} + c_{-n} e^{-in\omega_0 x}) \quad (9.3)$$

Reemplazando²⁶ n por $-n$ en el segundo sumatorio y teniendo en cuenta que $a_{-n} = a_n$, $b_{-n} = -b_n$ y $b_0 = 0$ se tiene finalmente,

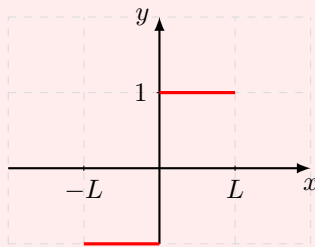
$$f(x) \sim c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 x} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{in\omega_0 x} = \boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 x}}$$

se obtiene la denominada **forma compleja de la serie de Fourier**, donde los coeficientes c_n se pueden obtener mediante las fórmulas de la **Ecuación (9.3)** y **Ecuación (9.2)** o bien directamente de la siguiente forma:

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2L} \left[\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx - i \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right] = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left(\cos \frac{n\pi x}{L} - i \sin \frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx} \quad ; \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ejercicio 9.6. Encontrar la forma compleja de la serie de Fourier de la siguiente función.



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < L \\ -1 & \text{si } -L < x < 0 \end{cases}$$

Notar que en este caso $T = 2L$ y $\omega_0 = 2\pi/T = \pi/L$. Calculamos los coeficientes:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx = \frac{1}{2L} \left[\int_0^L e^{-in\pi x/L} dx - \int_{-L}^0 e^{-in\pi x/L} dx \right] = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{-in\pi x/L} dx = \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L e^{-in\pi x/L} dx = \frac{-1}{in\pi} \left[e^{-in\pi x/L} \right]_0^L = \frac{i}{n\pi} (e^{-in\pi} - 1) = \frac{i}{n\pi} [\cos(n\pi) - \cancel{i \sin(n\pi)} - 1] = \\ &= \frac{i}{n\pi} [(-1)^n - 1] = \frac{-2i}{(2n+1)\pi} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Y por tanto:

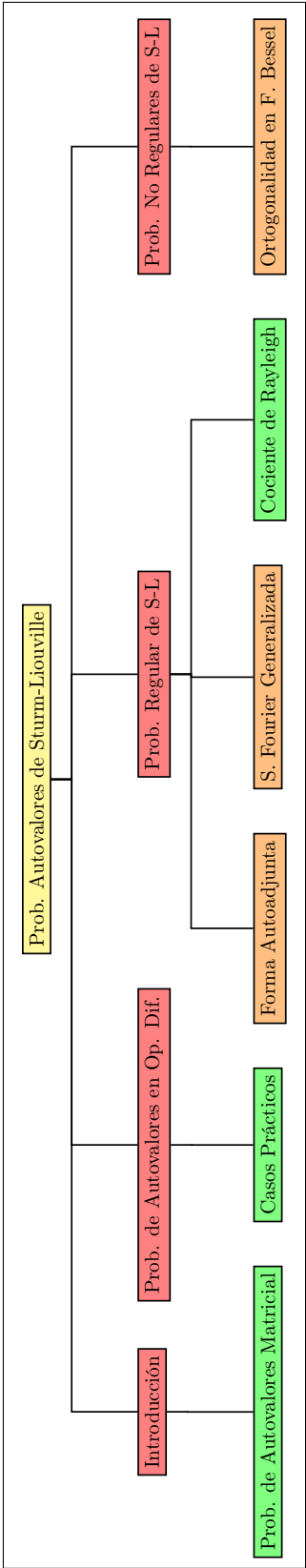
$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 x} = \boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-2i}{(2n+1)\pi} e^{in\omega_0 x}} = \\ &= \boxed{\frac{2i}{\pi} \left(\dots + \frac{1}{5} e^{-5i\omega_0 x} + \frac{1}{3} e^{-3i\omega_0 x} + e^{-i\omega_0 x} - e^{i\omega_0 x} - \frac{1}{3} e^{3i\omega_0 x} - \frac{1}{5} e^{5i\omega_0 x} - \dots \right)} \end{aligned}$$

²⁶Se puede hacer el mismo cambio de variable en el primer sumatorio dando como resultado una exponencial negativa y posteriormente en la fórmula del coeficiente c_n daría lugar a una exponencial positiva. Ambos casos son equivalentes y se pueden de ver las dos formas en la bibliografía.

Problemas de Autovalores de Sturm-Liouville

Contenido

10.1 Introducción: Problema de Autovalores Matricial	337
10.2 Problema de Autovalores en Operadores Diferenciales	337
10.2.1 Casos Prácticos	337
10.3 Problema Regular de Sturm-Liouville	344
10.3.1 Forma Autoadjunta	347
10.3.2 Serie de Fourier Generalizada	348
10.3.3 Cociente de Rayleigh	351
10.4 Problemas No Regulares de Sturm-Liouville	353
10.4.1 Ortogonalidad en las Funciones de Bessel	355
10.4.2 Serie de Fourier-Bessel	356



10.1. Introducción: Problema de Autovalores Matricial

Recordamos de álgebra lineal¹ que dada una matriz cuadrada $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se definen sus **autovalores** o **valores propios** $\lambda \in \mathbb{C}$ y **autovectores** o **vectores propios** $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$ asociados, a aquellos que verifican:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad ; \quad \vec{v} \neq \vec{0}$$

El cálculo de los *autovalores* da lugar a una ecuación polinómica de n soluciones dada por:

$$|A - \lambda I| = 0 \quad \implies \quad \lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

El conjunto de valores λ_i se denomina *espectro* de la matriz A . Para cada uno de los *autovalores* λ_i existe un subespacio vectorial asociado (*autoespacio*) de al menos dimensión² 1 que se determina calculando $\ker(A - \lambda_i I)$:

$$(A - \lambda_i I)\vec{v}_i = \vec{0}$$

A los vectores de una base del *autoespacio* asociado a cada *autovalor* λ_i se denominan *autovectores* asociados a ese *autovalor*.

Este proceso se puede generalizar para *operadores diferenciales*³.

10.2. Problema de Autovalores en Operadores Diferenciales

Definición 10.1. Problema de Autovalores en Operadores Diferenciales

Sea L un *operador diferencial lineal*⁴ de orden n y $u(x) \in \mathcal{C}^k$ una función no nula definida en un intervalo $[a, b]$, que satisface ciertas condiciones frontera⁵. Se dice que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un **autovalor** o **valor propio** del operador L con **autofunción** o **función propia** asociada $u(x)$ si se verifica el problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} Lu = \lambda u \\ + \\ \text{Condicions Frontera} \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{ll} L & \text{Operador Diferencial Lineal} \\ \lambda \in \mathbb{C} & \text{Autovalor o Valor Propio de } L \\ u(x) \neq 0 & \text{Autofunción o Fun. Propia de } L \end{array} \right.$$

Nota 10.1. Es fácil comprobar que si $u(x)$ es una autofunción asociada al autovalor λ entonces $cu(x)$, siendo c una constante no nula, también será *autofunción* asociada a λ , por tanto, basta con que las *autofunciones* se definan con una única constante multiplicativa.

Las condiciones frontera más comunes para una función u definida en $[a, b]$ son:

- **Condiciones de Dirichlet:** $u(a) = u(b) = 0$.
- **Condiciones de Neumann:** $u'(a) = u'(b) = 0$.
- **Condiciones Periódicas:** $u(a) = u(b)$, $u'(a) = u'(b)$.

Veamos ejemplos de problemas de autovalores de un operador diferencial sencillo.

10.2.1. Casos Prácticos

Vamos a encontrar los autovalores y autofunciones del operador diferencial $L = -D^2 \equiv -\frac{d^2}{dx^2}$.

Buscamos *autovalores* $\lambda \in \mathbb{C}$ y funciones no nulas u definida en $[a, b]$ sujeta a ciertas condiciones frontera.

$$Lu = \lambda u \quad ; \quad -\frac{d^2 u}{dx^2} = \lambda u \quad ; \quad u'' + \lambda u = 0$$

¹Ver por ejemplo "Clases de Álgebra Lineal para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 517.

²La dimensión máxima del autoespacio es la multiplicidad algebraica de su autovalor asociado.

³Ver la *Definición 1.4*, página 5.

⁴Ver la *Definición 1.5*, página 6.

⁵Ver la *Definición 1.18*, página 15.

Caso 1: Condiciones Frontera de tipo Dirichlet

Tenemos el siguiente *problema de valores en la frontera* (PVF)⁶ formado con una EDO lineal de segundo orden homogénea con coeficientes constantes⁷:

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u(0) = 0 ; u(L) = 0 \end{cases} ; \quad u(x) \in [0, L] \quad , \quad L > 0 \quad (10.1)$$

Analizamos bajo que valores de λ se obtienen soluciones u no triviales (distintas de cero), probando para valores $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ y $\lambda > 0$.

- $\lambda = 0$

$$\frac{d^2}{dx^2} u = 0 \quad ; \quad \frac{d}{dx} u = c_1 \quad ; \quad \boxed{u(x) = c_1 x + c_2}$$

Aplicando las condiciones frontera:

$$\begin{cases} u(0) = 0 & : c_1 \cdot 0 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \\ u(L) = 0 & : c_1 L = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{u(x) = 0}$$

En este caso se obtiene la solución trivial, por lo que $\lambda = 0$ **no** es un autovalor.

- $\lambda < 0$

Por simplicidad en los resultados vamos a utilizar el cambio de variable $\lambda = -k^2$ con el *parámetro* $k > 0$.

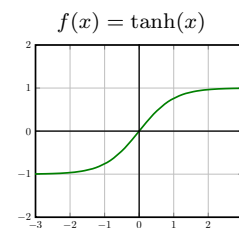
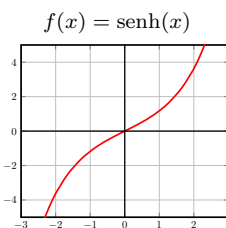
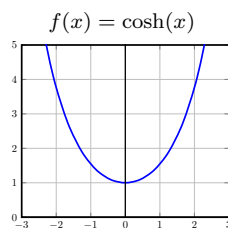
$$u'' - k^2 u = 0$$

A través de su *ecuación característica*⁸ podemos obtener la solución de la EDO.

$$m^2 - k^2 = 0 \quad ; \quad m = \pm k \quad \Rightarrow \quad \boxed{u(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}}$$

Para encontrar los valores de c_1 y c_2 de acuerdo a las condiciones frontera es más sencillo expresar la solución de la siguiente forma: para los valores particulares $c_1 = c_2 = 1/2$ y $c_1 = 1/2$ y $c_2 = -1/2$ se tiene:

$$u(x) = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} = \cosh kx \quad ; \quad u(x) = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2} = \sinh kx$$



Teniendo en cuenta que las funciones $\cosh(x)$ y $\sinh(x)$ son linealmente independientes, la solución se puede expresar como combinación lineal de ambas:

$$\boxed{u(x) = c_1 \cosh(kx) + c_2 \sinh(kx)}$$

Entonces, aplicando las condiciones frontera:

$$\begin{cases} u(0) = 0 & : 1c_1 + 0c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ u(L) = 0 & : c_2 \underbrace{\sinh(kL)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{u(x) = 0}$$

Por lo que se vuelve a obtener la solución trivial y **ningún** valor $\lambda < 0$ es autovalor del problema.

⁶Ver la Definición 3.6, página 61.

⁷Ver la Sección 3.2, página 65.

⁸Ver el Teorema 3.3, página 65.

- $\lambda > 0$

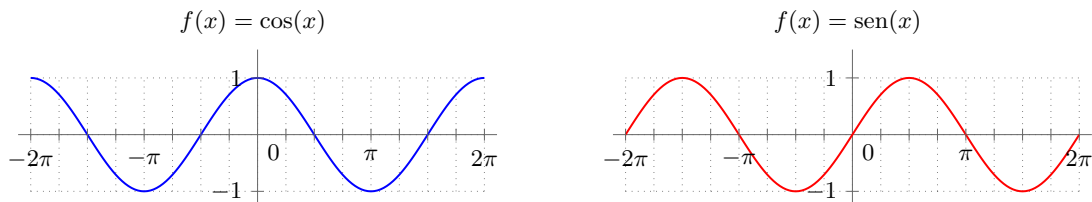
Al igual que antes, por simplicidad en los resultados vamos a utilizar el cambio de variable $\lambda = k^2$ con el parámetro $k > 0$.

$$u'' + k^2 u = 0$$

A través de la *ecuación característica* asociada a la EDO podemos obtener la solución de la ecuación.

$$m^2 + k^2 = 0 \quad ; \quad m = \pm ki \quad \implies \quad \boxed{u(x) = c_1 \cos kx + c_2 \operatorname{sen} kx}$$

Entonces, aplicando las condiciones frontera y teniendo en cuenta el comportamiento de las funciones coseno y seno:

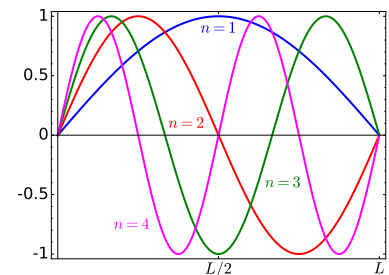


$$\begin{cases} u(0) = 0 & : & 1c_1 + 0c_2 = 0 & \implies & c_1 = 0 \\ u(L) = 0 & : & \underbrace{c_2}_{\neq 0} \underbrace{\operatorname{sen}(kL)}_0 = 0 & \implies & k_n L = n\pi \quad ; \quad k_n = \frac{n\pi}{L} \end{cases}$$

Por tanto las soluciones del problema (autofunciones) son en este caso:

$$\boxed{u_n(x) = c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

La constante $c_2 \neq 0$ indica que cualquier múltiplo no nulo de las autofunciones también es autofunción. Teniendo esto en cuenta, vamos a tomar de forma genérica $c_2 = 1$ (gráfica izquierda).



Finalmente el conjunto de autovalores y autofunciones asociadas del PVF definido en el caso 1 es un conjunto infinito dado por:

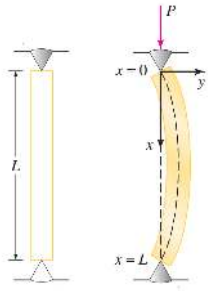
$$\left. \begin{array}{l} \boxed{\lambda_n = k_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \\ \boxed{u_n(x) = c \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)} \end{array} \right\} n = 1, 2, \dots \xRightarrow{c=1} \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\lambda_n = \left\{ \frac{\pi^2}{L^2}, \frac{4\pi^2}{L^2}, \frac{9\pi^2}{L^2}, \dots \right\}} \\ \boxed{u_n(x) = \left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \dots \right\}} \end{array} \right.$$

Notar que el conjunto de estas autofunciones es un **conjunto ortogonal de funciones**⁹, que corresponden en este ejemplo a las funciones que aparecen en el **serie de Fourier de senos**¹⁰.

⁹Ver la **Definición 9.6**, página 321.

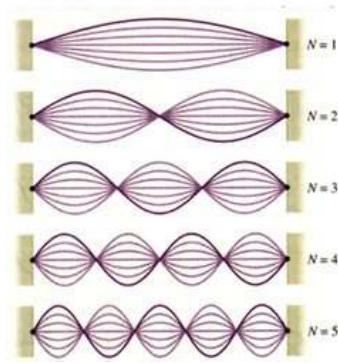
¹⁰Ver la **Sección 9.4.4**, página 329.

El problema representado en la **Ecuación (10.1)** representa diferentes problemas físicos como por ejemplo los dos siguientes:



Deflexión de una columna delgada frente una carga vertical,

$$\begin{cases} EIy'' + Py = 0 \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} E : \text{módulo de Young (elasticidad)} \\ I : \text{momento inercia sec. transversal} \\ P : \text{carga} \\ L : \text{longitud columna} \\ y : \text{deflexión columna (despl. horiz.)} \end{cases}$$



Oscilación de una cuerda respecto a un eje vertical a velocidad constante:

$$\begin{cases} Ty'' + \rho\omega^2 y = 0 \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} T : \text{tensión tangencial cuerda} \\ \rho : \text{densidad lineal cuerda} \\ \omega : \text{velocidad angular de giro} \\ L : \text{longitud de la cuerda} \\ y : \text{forma de la cuerda} \end{cases}$$

Los diferentes modos de giro dependen de los valores del parámetro $\lambda = (\rho\omega^2)/T$.

Nota 10.2.

- Estos problemas explican de forma práctica porqué λ solo puede ser mayor que cero para producir soluciones no triviales.
- La **Ecuación (10.1)** aparece en el estudio de la ecuación de ondas unidimensional (ver la **Sección 11.5.1, página 386**).

Caso 2: Condiciones Frontera de tipo Neumann

En este caso tenemos el siguiente PVF:

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u'(0) = 0 ; u'(L) = 0 \end{cases} \quad ; \quad u(x) \in [0, L] \quad , \quad L > 0$$

Al igual que el caso anterior, estudiamos los tres posibles casos de λ .

- $\lambda = 0$

$$u'' = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x) = c_1 x + c_2 \quad ; \quad u'(x) = c_1$$

Teniendo en cuenta las condiciones frontera:

$$\begin{cases} u'(0) = 0 : c_1 = 0 \\ u'(L) = 0 : c_1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u(x) = c_2$$

En este caso $\lambda = 0$ **sí** es un autovalor del problema, siendo la autofunción asociada una función constante.

- $\lambda < 0$

Como se vio anteriormente, si hacemos $\lambda = -k^2$ la solución en este caso es:

$$u(x) = c_1 \cosh(kx) + c_2 \sinh(kx) \quad ; \quad u'(x) = c_1 k \sinh(kx) + c_2 k \cosh(kx)$$

Teniendo en cuenta las condiciones frontera:

$$\begin{cases} u'(0) = 0 : c_2 k \cosh(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \\ u'(L) = 0 : c_1 k \sinh(L) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u(x) = 0$$

Por tanto $\lambda < 0$ **no** es autovalor del problema.

- $\lambda > 0$

Como se vio en el caso anterior, haciendo $\lambda = k^2$ la solución es:

$$u(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx \quad ; \quad u'(x) = -c_1 k \sin kx + c_2 k \cos kx$$

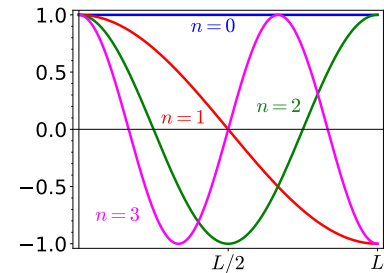
Teniendo en cuenta las condiciones frontera:

$$\begin{cases} u'(0) = 0 & : & c_2 k \cos(0) = 0 & \implies & c_2 = 0 \\ u'(L) = 0 & : & c_1 k \sin(kL) = 0 & \implies & k_n L = n\pi \quad ; \quad k_n = \frac{n\pi}{L} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Por tanto la solución del problema (autofunciones) es en este caso:

$$u_n(x) = c_1 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Notar que ahora el valor de n empieza en 0, en lugar de 1 como el caso anterior. Igual que en el caso anterior, vamos a tomar de forma genérica $c_1 \neq 0$ como $c_1 = 1$.



Finalmente el conjunto de autovalores y autofunciones asociadas del PVF definido en el caso 2 es un conjunto infinito dado por:

$$\left. \begin{cases} \lambda_n = k_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \\ u_n(x) = c \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{cases} \right\} n = 0, 1, 2, \dots \xrightarrow{c=1} \begin{cases} \lambda_n = \left\{ \frac{\pi^2}{L^2}, \frac{4\pi^2}{L^2}, \frac{9\pi^2}{L^2}, \dots \right\} \\ u_n(x) = \left\{ \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right), \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \dots \right\} \end{cases}$$

Notar que el conjunto ortogonal de funciones $\{\cos(n\pi x/L)\}_{n=0}^{\infty}$ corresponden con las funciones que aparecen en el **serie de Fourier de cosenos** (ver la **Sección 9.4.4, página 328**).

Caso 3: Condiciones Frontera de tipo Periódico

Por simplicidad, para este caso vamos estudiar el siguiente PVF:

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u(-L) = u(L) \quad , \quad u'(-L) = u'(L) \end{cases} \quad ; \quad u(x) \in [-L, L] \quad , \quad L > 0$$

Nota 10.3. Si en lugar del intervalo $[-L, L]$ el problema estuviera definido en un intervalo general $[a, b]$, con $b > a$, las condiciones frontera serían $u(a) = u(b)$ y $u'(a) = u'(b)$ y haciendo el cambio de variable:

$$x = a + \frac{r+L}{2L}(b-a) \quad ; \quad x \in [a, b] \quad ; \quad r \in [-L, L]$$

se obtendría el siguiente PVF en la variable r :

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dr^2} + \mu u = 0 \\ u(-L) = u(L) \quad ; \quad u'(-L) = u'(L) \end{cases} \quad ; \quad L > 0$$

Una vez resuelto siguiendo el procedimiento que veremos aquí, se obtendrían los autovalores μ y autofunciones asociadas $u(r)$ y deshaciendo el cambio de variable se pueden obtener los autovalores y autofunciones originales mediante:

$$r = -L + \frac{2L}{b-a}(x-a) \quad ; \quad \lambda = \frac{(2L)^2}{(b-a)^2} \mu$$

Al igual que en los casos anteriores, estudiamos los tres posibles casos de λ .

- $\lambda = 0$

$$u'' = 0 \implies \boxed{u(x) = c_1 x + c_2} \quad ; \quad u'(x) = c_1$$

Teniendo en cuenta las condiciones frontera:

$$\begin{cases} u(-L) = u(L) & : -c_1 L + c_2 = c_1 L + c_2 \implies c_1 = 0 \\ u'(-L) = u'(L) & : c_1 = c_1 = 0 \end{cases} \implies \boxed{u(x) = c_2}$$

En este caso $\lambda = 0$ **sí** es un autovalor del problema, siendo la autofunción asociada una función constante.

- $\lambda < 0$

Como se vio anteriormente, si hacemos $\lambda = -k^2$ la solución en este caso es:

$$\boxed{u(x) = c_1 \cosh(kx) + c_2 \sinh(kx)} \quad ; \quad u'(x) = c_1 k \sinh(kx) + c_2 k \cosh(kx)$$

Con las condiciones frontera y teniendo en cuenta que $\cosh(-x) = \cosh(x)$ y $\sinh(-x) = -\sinh(x)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(-L) = u(L) \quad : \quad \cancel{c_1 \cosh(kL)} - c_2 \sinh(kL) = \cancel{c_1 \cosh(kL)} + c_2 \sinh(kL) \\ \qquad \qquad \qquad 2c_2 \underbrace{\sinh(kL)}_{\neq 0} = 0 \implies c_2 = 0 \\ u'(-L) = u'(L) \quad : \quad -c_1 k \sinh(kL) + \cancel{c_2 k \cosh(kL)} = c_1 k \sinh(kL) + \cancel{c_2 k \cosh(kL)} \\ \qquad \qquad \qquad 2c_1 \underbrace{\sinh(kL)}_{\neq 0} = 0 \implies c_1 = 0 \end{array} \right. \implies \boxed{u(x) = 0}$$

Por tanto $\lambda < 0$ **no** es autovalor del problema.

- $\lambda > 0$

Como se vio en el caso anterior, haciendo $\lambda = k^2$ la solución es:

$$\boxed{u(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx} \quad ; \quad u'(x) = -c_1 k \sin kx + c_2 k \cos kx$$

Con las condiciones frontera y teniendo en cuenta que $\cos(-x) = \cos(x)$ y $\sin(-x) = -\sin(x)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(-L) = u(L) \quad : \quad \cancel{c_1 \cos(kL)} - c_2 \sin(kL) = \cancel{c_1 \cos(kL)} + c_2 \sin(kL) \\ \qquad \qquad \qquad 2 \underbrace{c_2}_{\neq 0} \sin(kL) = 0 \implies k_n L = n\pi \quad , \quad n = 1, 2, \dots \\ u'(-L) = u'(L) \quad : \quad c_1 k \sin(kL) + \cancel{c_2 k \cos(kL)} = -c_1 k \sin(kL) + \cancel{c_2 k \cos(kL)} \\ \qquad \qquad \qquad 2 \underbrace{c_1 k}_{\neq 0} \sin(kL) = 0 \implies k_n L = n\pi \quad , \quad n = 1, 2, \dots \end{array} \right.$$

En ambos casos se puede obtener una solución no nula para $\lambda_n = k_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} > 0$ siendo los autovalores y autofunciones asociadas, tomando $c_1 = c_2 = 1$:

$$u_{1n}(x) = \cos(kx) = \cos(x\sqrt{\lambda}) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad ; \quad u_{2n}(x) = \sin(kx) = \sin(x\sqrt{\lambda}) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\left\{ \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right\} \quad ; \quad u_n(x) = \left\{ \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Notar que para cada autovalor λ_n hay dos autofunciones asociadas¹¹, indicando que la dimensión del autoespacio asociado es 2 (cualquier combinación lineal de esas dos autofunciones es también una autofunción asociada al autovalor).

¹¹Correspondería con una base del autoespacio asociado al autovalor.

Como $\lambda = 0$ también es un autovalor con autofunción asociada¹² $\{1\}$, podemos expresar el conjunto completo de autovalores y autofunciones de este problema, incluyendo el valor $n = 0$ de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_n = k_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \\ u_n(x) = c_1 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + c_2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{array} \right\} \quad n = 0, 1, 2, \dots \xrightarrow[c_2=1]{c_1=1} \left\{ \begin{array}{l} \lambda_n = \left\{ \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right\} \\ u_n(x) = \left\{ \cos \frac{n\pi x}{L} + \sin \frac{n\pi x}{L} \right\} \end{array} \right.$$

Notar que el conjunto ortogonal de funciones $\{\cos(n\pi x/L), \sin(n\pi x/L)\}_{n=0}^{\infty}$ corresponden con las funciones que aparecen en el *serie de Fourier* (ver la [Sección 9.4, página 323](#)).

Resumen

Problema Básico de Autovalores

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u = 0$$

Cond. Frontera	$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u(L) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} u'(0) = 0 \\ u'(L) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} u(-L) = u(L) \\ u'(-L) = u'(L) \end{cases}$
Autovalores λ_n	$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ $n = 1, 2, \dots$	$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ $n = 0, 1, 2, \dots$	$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ $n = 0, 1, 2, \dots$
Autofunciones	$\sin \frac{n\pi x}{L}$	$\cos \frac{n\pi x}{L}$	$\sin \frac{n\pi x}{L}, \cos \frac{n\pi x}{L}$
Serie	$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L}$	$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L}$	$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} + B_n \sin \frac{n\pi x}{L}$
Coeficientes	$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$	$A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$ $A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$	$A_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$ $A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$ $B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$

Notar que las soluciones forman conjuntos completos ortogonales y por tanto, podemos con ellos desarrollar con ellas determinadas funciones $f(x)$ en forma de series.

¹²Cualquier constante valdría, indicando que cualquier de sus múltiplos (combinación lineal) es también autofunción.

10.3. Problema Regular de Sturm-Liouville

Los problemas anteriores son casos particulares del problema regular de Sturm-Liouville.

Definición 10.2. Problema Regular de Sturm-Liouville

Dadas $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ funciones reales continuas en el intervalo $[a, b]$, donde $p(x)$ y $r(x)$ no cambian de signo en ese intervalo¹³, se define el **problema regular de Sturm-Liouville** al siguiente PVF:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}[p(x)y'] + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0 \\ A_1 y(a) + B_1 y'(a) = 0 \\ A_2 y(b) + B_2 y'(b) = 0 \end{cases} \quad (10.2)$$

donde las constantes A_1 y B_1 no pueden ser cero a la vez, al igual que A_2 y B_2 .

Características de los Problemas Regulares de Sturm-Liouville

Los problemas regulares de Sturm-Liouville tienen una gran importancia en la práctica ya que aparecen en la resolución de un número importante de EDP¹⁴. Además desde un punto de vista teórico reúne un conjunto de características de una gran relevancia¹⁵ que veremos a continuación.

- Las incógnitas de este tipo de problemas son el **autovalor**¹⁶ λ y sus **autofunciones** asociadas $y(x)$.
- La EDO es homogénea, al igual que las condiciones frontera¹⁷, por tanto es un PVF *homogéneo*¹⁸.
- Los PVF homogéneos siempre tienen la solución trivial nula, que no tiene interés.
- Las condiciones frontera de este caso son **separadas**, ya que cada condición implica solo un punto en la frontera¹⁹.
- Existe un número infinito de autovalores reales $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$, donde $\lambda_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.
- Para cada **autovalor** existe un **autoespacio** de una determinada dimensión, formada por las autofunciones asociadas al autovalor.
- Cada **autofunción** $y_n(x)$ con $n > 1$ tiene $n - 1$ ceros en el dominio (a, b) .
- El conjunto de **autofunciones** es **ortogonal** respecto a la **función peso** $r(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

$$\int_a^b r(x)y_n(x)y_m(x)dx = 0 \quad ; \quad \lambda_n \neq \lambda_m$$

¹³Muchas veces se considera, sin pérdida de generalidad, que $q(x) > 0$ y $r(x) > 0$. A la función $r(x)$ se le denomina *función peso*.

¹⁴Ver el Tema 11, página 359.

¹⁵Algunas de estas características o propiedades forman parte del conocido como **Teorema de Sturm-Liouville**.

¹⁶Ver la Definición 10.1, página 337.

¹⁷Una condición frontera $Ay(x_0) + By'(x_0) = C$ con $C \neq 0$ se dice no homogénea.

¹⁸Si la ecuación o las condiciones frontera no son homogéneas, el problema se denomina *no homogéneo*.

¹⁹Condiciones del tipo $A_1y(x_1) + B_1y'(x_1) = C_1$ y $A_2y(x_2) + B_2y'(x_2) = C_2$ se denominan *acopladas*.

²⁰Ver la Sección 9.3.2, página 322.

²¹También llamada "de clase C^1 a trozos", ver la Definición 9.11, página 324.

²²Ver la Sección 10.3.2, página 348.

²³Ver la Sección 10.3.3, página 351.

- Las *autofunciones* forman un **conjunto completo**²⁰ y por tanto cualquier *función suave a trozos*²¹ $f(x)$ se puede representar en forma de **serie de Fourier generalizada**²² de las *autofunciones*:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n(x)$$

- Cada autovalor está relacionado con su autofunción asociada mediante el **cociente de Rayleigh**²³.

$$\lambda = \frac{[-p y y']_a^b + \int_a^b [p(y')^2 - q y^2] dx}{\int_a^b r y^2 dx}$$

Nota 10.4. De forma general, en la resolución de este tipo de problemas es necesario resolver EDO *numéricamente* para encontrar el valor de los *autovalores*.

Ejercicio 10.1. Obtener los autovalores y autofunciones del siguiente problema.

$$\begin{cases} y'' + 2y' + (1 + \lambda)y = 0 \\ y(0) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

Aunque inicialmente puede no parecerlo, se trata de un problema regular de Sturm-Liouville donde $p(x) = q(x) = r(x) = e^{2x}$, (ver la [Sección 10.3.1, página 347](#) y el [Ejercicio 10.2, página 347](#)).

Hay dos tipos de EDO en función de que $\lambda = -1$ o $\lambda \neq -1$.

1. Si $\lambda = -1$, la ec original es en este caso: $y'' + 2y' = 0$ cuya ec. característica es:

$$r^2 + 2r = r(r + 2) = 0 \implies r = \{0, -2\} \implies \begin{cases} y(x) = c_1 + c_2 e^{-2x} \\ y'(x) = -2c_2 e^{-2x} \end{cases}$$

Imponiendo las cond. iniciales:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = 0 : 0 = c_1 + c_2 \\ y'(1) = 0 : 0 = -2c_2 e^{-2} \end{array} \implies c_2 = 0 = c_1 \right\} \implies \lambda = 1 \text{ no es un autovalor}$$

2. Para $\lambda \neq -1$, la ec. característica es:

$$r^2 + 2r + (1 + \lambda) = 0 \implies r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1 + \lambda)}}{2} = \boxed{-1 \pm \sqrt{-\lambda}}$$

En función del signo del interior de la raíz dará tipos de soluciones distintas. Estudiamos tres casos: $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ (con $\lambda \neq -1$) y $\lambda > 0$.

- $\lambda = 0$: $r = -1$ (raíz real y doble) $\implies \begin{cases} y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-1} \\ y'(x) = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} - c_2 x e^{-x} \end{cases}$

Teniendo en cuenta las condiciones frontera:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = 0 : c_1 = 0 \\ y'(1) = 0 : c_2 e^{-1} - c_2 e^{-1} = 0 \end{array} \right\} \implies y(x) = c_2 x e^{-x}$$

Por tanto $\boxed{\lambda_0 = 0}$ es un autovalor con autofunción asociada $\boxed{y_0(x) = x e^{-x}}$

- $\lambda < 0$ ($\lambda \neq -1$): $\lambda = -k^2$, $k > 0 \implies r = -1 \pm k$ (raíces reales y distintas)

$$y = c_1 e^{(-1+k)x} + c_2 e^{(-1-k)x} \quad ; \quad y' = c_1(-1+k)e^{(-1+k)x} - c_2(1+k)e^{(-1-k)x}$$

Teniendo en cuenta las condiciones frontera:

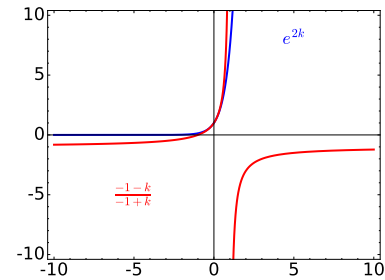
$$\begin{cases} y(0) = 0 & : c_1 + c_2 = 0 \quad ; \quad c_2 = -c_1 \\ y'(1) = 0 & : c_1(-1+k)e^{-1+k} - c_2(1+k)e^{-1-k} = 0 \end{cases}$$

$$c_1(-1+k)e^{-1+k} + c_1(1+k)e^{-1-k} = 0 \quad ; \quad c_1 e^{-1} [e^k(-1+k) + e^{-k}(1+k)] = 0$$

Para encontrar soluciones no nulas $c_1 \neq 0$ y como $e^{-1} > 0$, busquemos si es posible que el término restante sea nulo:

$$e^k(-1+k) = -e^{-k}(1+k) \quad ; \quad e^{2k} = \frac{-1-k}{-1+k}$$

Representando gráficamente ambas funciones se observa que solo $k = 0$ es solución. Como buscamos $k > 0$, se deduce que no hay autovalores para $\lambda < 0$.



- $\lambda > 0$: $\lambda = k^2$, $k > 0 \implies r = -1 \pm ki$ (raíces complejas)

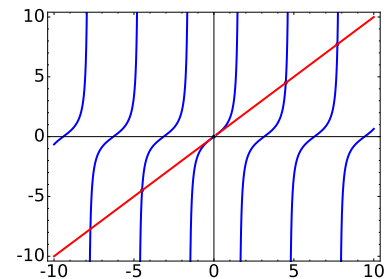
$$y(x) = e^{-x} [c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx)] \quad ; \quad y'(x) = e^{-x} [(kc_2 - c_1) \cos(kx) - (c_1 k + c_2) \sin(kx)]$$

Teniendo en cuenta las condiciones frontera:

$$\begin{cases} y(0) = 0 & : c_1 = 0 \\ y'(1) = 0 & : c_2 e^{-1} [k \cos(k) - \sin(k)] = 0 \end{cases} \implies \boxed{\tan k = k} \quad ; \quad \lambda = k^2, \quad k > 0$$

Esta es una ecuación trascendente que no tiene soluciones analíticas. Resolviendo numéricamente con algún software informático se pueden encontrar las soluciones positivas, que denominaremos μ_n :

$$k_n = \mu_n = \{4.49341, 7.72525, \dots\} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$



Los autovalores y autofunciones asociadas a este caso son:

$$\boxed{\lambda_n = \mu_n^2} \quad ; \quad \boxed{y_n(x) = e^{-x} \sin(\mu_n x)} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

Teniendo en cuenta el primer autovalor λ_0 y su autofunción asociada, el conjunto completo de autovalores y autofunciones del problema son:

$$\boxed{\lambda_0 = 0} \quad ; \quad \boxed{y_0(x) = x e^{-x}} \quad ; \quad \boxed{\lambda_n = \mu_n^2} \quad ; \quad \boxed{y_n(x) = e^{-x} \sin(\mu_n x)} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

10.3.1. Forma Autoadjunta

La EDO de la [Ecuación A.4](#), [página 497](#),

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'] + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0$$

se dice que está en su forma **autoadjunta**. Cualquier ecuación de la forma,

$$a(x)y'' + b(x)y' + [c(x) + \lambda d(x)]y = 0$$

donde las funciones coeficiente son continuas y $a(x) \neq 0$ en un determinado dominio, se puede poner en la forma autoadjunta en ese dominio. Para ello:

1. Se divide la ecuación entre $a(x)$,

$$y'' + \frac{b(x)}{a(x)}y' + \left[\frac{c(x)}{a(x)} + \lambda \frac{d(x)}{a(x)} \right] y = 0$$

2. Se multiplica la ecuación por el **factor integrante** $\exp[\int b(x)/a(x)]$,

$$\underbrace{y'' e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}} + e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}} \frac{b(x)}{a(x)} y'}_{\frac{d}{dx} \left[y' e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}} \right]} + e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}} \left[\frac{c(x)}{a(x)} + \lambda \frac{d(x)}{a(x)} \right] y = 0$$

3. Se identifican los términos:

$$\frac{d}{dx} \left[\underbrace{e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}}}_{p(x)} y' \right] + \left[\underbrace{e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}} \frac{c(x)}{a(x)}}_{q(x)} + \lambda \underbrace{e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}} \frac{d(x)}{a(x)}}_{r(x)} \right] y = 0$$

No es necesario expresar una ecuación en su forma autoadjunta para poder resolverla, pero sí es necesario si se quiere conocer la función peso $r(x)$ que define la ortogonalidad entre las autofunciones (ver la [Sección 10.3](#), [página 344](#) y la [Sección 10.3.2](#), [página 348](#)).

Ejercicio 10.2. Obtener la forma autoadjunta del [Ejercicio 10.1](#), [página 345](#).

$$y'' + 2y' + (1 + \lambda)y = 0$$

En este caso $a(x) = c(x) = d(x) = 1$, $b(x) = 2$ y por tanto no es necesario dividir por $a(x)$. Calculamos entonces el valor de la exponencial $\exp[\int b(x)/a(x)]$:

$$e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}} = e^{\int 2dx} = e^{2x}$$

y multiplicamos toda la ecuación por este valor:

$$\underbrace{e^{2x}y'' + 2e^{2x}y'}_{\frac{d}{dy}[e^{2x}y']} + e^{2x}(1 + \lambda)y = 0$$

La forma autoadjunta es por tanto:

$$\frac{d}{dy}[e^{2x}y'] + e^{2x}(1 + \lambda)y = 0$$

donde $p(x) = q(x) = r(x) = e^{2x}$.

10.3.2. Serie de Fourier Generalizada

En la [Definición 9.10](#), página 324 se vio cómo la serie de Fourier:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

permite aproximar una función $f(x)$ de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos²⁴ en el intervalo $(-L, L)$ mediante una serie infinita formada por funciones seno y coseno que forman un *conjunto completo de funciones ortogonales*²⁵. Como hemos visto²⁶, en un *problema regular de Sturm-Liouville*²⁷:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}[p(x)y'] + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0 \\ A_1 y(a) + B_1 y'(a) = 0 \\ A_2 y(b) + B_2 y'(b) = 0 \end{cases} \quad (10.3)$$

se obtiene como solución un **conjunto completo** de *autofunciones* que son **ortogonales** con respecto a la *función peso* $r(x)$:

$$\langle y_n, y_m \rangle = \int_a^b r(x) y_n(x) y_m(x) dx = 0$$

Este conjunto completo de funciones ortogonales se pueden utilizar para aproximar funciones de forma análoga a como se utilizan las series de Fourier, generalizando este proceso.

Teorema 10.1. Serie de Fourier Generalizada

Si $f(x)$ es de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos en $[a, b]$ que satisface las condiciones frontera del problema (10.3), entonces su **serie de Fourier generalizada** viene dada por:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n y_n(x)$$

;

$$a_n = \frac{\langle y_n, f(x) \rangle}{\langle y_n, y_n \rangle} = \frac{\int_a^b r(x) f(x) y_n(x) dx}{\int_a^b r(x) y_n^2(x) dx}$$

donde $r(x)$ es la *función peso*, $\{y_n(x)\}$ es el conjunto de *autofunciones* de dicho problema y a_n los correspondientes coeficientes²⁸.

Dicha serie converge a $f(x)$ en los $x \in (a, b)$ en los que f es continua y hacia $\frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)]$ en los $x \in (a, b)$ en los que f es discontinua.

Las series de Fourier Generaliza, en sus distintas formas²⁹, tienen un papel muy importante en la solución de problemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP), como se verá en el [Tema 11](#), página 359.

²⁴Ver la [Definición 9.11](#), página 324.

²⁵Ver la [Sección 9.3.2](#), página 322.

²⁶Ver la [Sección 10.3](#), página 344.

²⁷Ver la [Sección 10.3](#), página 344.

²⁸Ver la [Sección 9.3.2](#), página 322.

²⁹Ver la [Sección 10.4.2](#), página 356.

Ejercicio 10.3. Dado el siguiente problema de Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} y'' - y' + \lambda y = 0 & , \quad 0 < x < 2 \\ y'(0) = 0 & , \quad y'(2) = 0 \end{cases}$$

- Calcula sus autovalores y autofunciones asociadas.
- Encuentra la forma autoadjunta de la ecuación y la relación de ortogonalidad entre las autofunciones.
- Expresa la forma de la serie generalizada de Fourier de una apropiada función $f(x)$ en términos de las autofunciones del problema, en el intervalo $[0, 2]$.

a) Buscamos soluciones no nulas en función del *parámetro* λ . Notar que el valor $\lambda = 0$ da lugar a un problema de naturaleza distinta y por tanto es necesario estudiar este caso aparte.

- $\lambda = 0$

$$y'' - y' = 0 \xrightarrow{EcC} m^2 - m = 0 ; \quad m(m-1) = 0 \implies m = \{0, 1\} \implies \boxed{y(x) = c_1 + c_2 e^x}$$

$$y'(x) = c_2 e^x \left\{ \begin{array}{l} y'(0) = c_2 = 0 \\ y'(2) = c_2 e^2 = 0 \end{array} \right\} \implies \boxed{y(x) = c_1 \neq 0} \quad \boxed{\lambda = 0 \text{ sí es autovalor}}$$

- $\lambda \neq 0 \xrightarrow{EcC} m^2 - m + \lambda = 0 ; \quad \boxed{m = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\lambda}}{2}} ; \quad 1-4\lambda = 0 \implies \lambda = \frac{1}{4}$

Estudiamos los posibles casos de $\lambda \neq 0$.

- $\lambda = 1/2: m = 1/2 \text{ (doble)} \implies \boxed{y(x) = e^{x/2}(c_1 + c_2 x)}$

$$y'(x) = e^{x/2} \left(c_2 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2} x \right) \left\{ \begin{array}{l} y'(0) = \frac{c_1}{2} + c_2 = 0 \\ y'(2) = \frac{c_1}{2} + 2c_2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\implies \boxed{c_1 = c_2 = 0} \quad \boxed{\lambda = \frac{1}{2} \text{ no es autovalor}}$$

- $\lambda < 1/4: m = \{r_1, r_2\} \text{ (reales y } \neq) \implies \boxed{y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}}$

$$y'(x) = c_1 r_1 e^{r_1 x} + c_2 r_2 e^{r_2 x} \left\{ \begin{array}{l} y'(0) = c_1 r_1 + c_2 r_2 = 0 \\ y'(2) = c_1 r_1 e^{2r_1} + c_2 r_2 e^{2r_2} = 0 \end{array} \right\}$$

Donde el determinante del sistema es:

$$\begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ r_1 e^{2r_1} & r_2 e^{2r_2} \end{vmatrix} = r_1 r_2 (e^{2r_2} - e^{2r_1})$$

Para que este sistema tenga soluciones no nulas el determinante tiene que ser cero, pero para ello la única forma es que $r_1 = r_2$ lo que no es posible y por tanto:

$$\implies \det \neq 0 \implies \text{S.C.D.} \implies \boxed{c_1 = c_2 = 0} \implies \boxed{\lambda < \frac{1}{4} \text{ no autovalor}} , \quad \lambda \neq 0$$

Notar que aquí no se tiene en cuenta el caso $\lambda = 0$, que como hemos visto antes, sí es un autovalor.

$$\bullet \lambda > 1/4: m = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{4\lambda - 1}}{2} ; \quad \mu^2 = 4\lambda - 1 \implies m = \frac{1}{2} \pm \frac{\mu}{2} i \quad , \quad \mu > 0$$

$$y(x) = e^{x/2} \left[c_1 \cos \frac{x\mu}{2} + c_2 \sin \frac{x\mu}{2} \right]$$

$$y'(x) = e^{x/2} \left(-\frac{\mu}{2} c_1 \sin \frac{\mu x}{2} + \frac{1}{2} c_1 \cos \frac{\mu x}{2} + \frac{1}{2} c_2 \sin \frac{\mu x}{2} + \frac{\mu}{2} c_2 \cos \frac{\mu x}{2} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(0) = c_1 + \mu c_2 = 0 \\ y'(2) = (c_1 + \mu c_2) \cos \mu + (c_2 - \mu c_1) \sin \mu = 0 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} c_1 = -\mu c_2 \\ c_2 \sin \mu = 0 \end{array} \right.$$

$$\mu = \sqrt{4\lambda - 1} = n\pi ; \quad \boxed{\lambda_n = \frac{n^2\pi^2 + 1}{4}} ; \quad \boxed{y_n(x) = c_2 e^{x/2} \left(-n\pi \cos \frac{n\pi x}{2} + \sin \frac{n\pi x}{2} \right)} , \quad \boxed{n > 0}$$

Por tanto los autovalores y autofunciones del problema son:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda_0 = 0 & : y_0(x) = c \neq 0 \\ \lambda_n = \frac{n^2\pi^2 + 1}{4} & : y_n(x) = c e^{x/2} \left(-n\pi \cos \frac{n\pi x}{2} + \sin \frac{n\pi x}{2} \right) , \quad n = 1, 2, \dots \end{array} \right.$$

b) La forma autoadjunta del problema de Sturm-Liouville viene dada por:

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + [q(x) + \lambda r(x)] y(x) = 0$$

$$\text{Para nuestro caso: } y'' - y' + \lambda y = 0 ; \quad e^{-\int dx} = e^{-x} \implies \underbrace{e^{-x}(y'' - y')}_{(e^{-x}y')'} + e^{-x}\lambda y(x) = 0$$

Así, la forma autoadjunta de la ecuación del problema:

$$\boxed{\frac{d}{dx} \left(e^{-x} \frac{dy}{dx} \right) + e^{-x} \lambda y(x) = 0} \quad \boxed{\left\{ \begin{array}{l} p(x) = r(x) = e^{-x} \\ q(x) = 0 \end{array} \right.}$$

La relación de ortogonalidad entre las autofunciones $y_i(x)$ viene dada a través de la función peso $r(x) = e^{-x}$.

$$\int_a^b r(x) y_n(x) y_m(x) dx = 0 \implies \boxed{\int_0^2 e^{-x} y_n(x) y_m(x) dx = 0} , \quad m \neq n$$

c) Serie generalizada de Fourier de este caso:

$$\boxed{f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n y_n(x)} ; \quad x \in [0, 2] ; \quad \boxed{A_n = \frac{\int_0^2 e^{-x} f(x) y_n(x) dx}{\int_0^2 e^{-x} y_n^2(x) dx}}$$

10.3.3. Cociente de Rayleigh

Como hemos visto³⁰ el cociente de Rayleigh relaciona los autovalores y autofunciones de un problema de Sturm-Liouville. Para obtenerlo basta multiplicar la EDO del problema por una autofunción $y(x)$ e integrar en todo el dominio $[a, b]$:

$$(py')' + qy + \lambda ry = 0 \quad ; \quad \int_a^b y(py')' dx + \int_a^b qy^2 dx + \lambda \int_a^b ry^2 dx = 0$$

Aplicando integración por partes a la primera integral se tiene:

$$\int_a^b \underbrace{y}_u \underbrace{(py')'}_{dv} dx = pyy'|_a^b - \int_a^b p(y')^2 dx$$

Por otra parte, como $r(x) \neq 0$ se tiene que $\int_a^b ry^2 dx \neq 0$, y por tanto se puede despejar el autovalor λ quedando:

$$\lambda = \frac{[-pyy']_a^b + \int_a^b [p(y')^2 - qy^2] dx}{\int_a^b ry^2 dx}$$

Como generalmente las autofunciones de un problema de Sturm-Liouville no se conocen, la fórmula del cociente de Rayleigh no sirve para calcular los autovalores, sin embargo resulta muy útil en la estimación de los mismos, sobre todo cuando no se pueden determinar de forma analítica. Para ello se utiliza el principio de minimización.

Teorema 10.2. Principio de Minimización

El primer autovalor λ_1 de un problema regular de Sturm-Liouville coincide con el valor mínimo del cociente de Rayleigh sobre todas las funciones continuas a trozos u (funciones test) que satisfacen las condiciones frontera del problema (aunque no necesariamente la ecuación diferencial).

$$\lambda_1 = \min_u \frac{[-puu']_a^b + \int_a^b [p(u')^2 - qu^2] dx}{\int_a^b ru^2 dx}$$

El primer autovalor λ_1 (el más pequeño) tiene importancia práctica en diferentes problemas³¹. Haciendo uso del cociente de Rayleigh visto en la sección anterior se puede obtener una estimación del valor del primer autovalor, a través de una cota superior, mediante el principio de minimización siguiente.

³⁰Ver la Sección 10.3, página 344.

³¹Por ejemplo está relacionado con la solución estacionaria a largo tiempo de la ecuación del calor (ver Sección 11.4, página 370). También, por ejemplo, está relacionado con la frecuencia del armónico fundamental en la ecuación de ondas.

Ejercicio 10.4. Sin resolver el problema, encontrar una acotación del primer autovalor λ_1 del siguiente problema con condiciones Dirichlet:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(1) = 1 \end{cases}$$

Este problema fue resuelto en la [Sección 10.2.1, página 338](#) y sabemos que el primer autovalor para $L = 1$ es $\lambda_1 = \pi^2 \approx 9.87$. Vamos a buscar funciones test sencillas $u(x)$ que verifiquen las condiciones frontera $u(0) = u(1) = 0$. Vamos a usar una función lineal, otra cuadrática y otra trigonométrica:

$$u_1 = \begin{cases} x & x \leq 1/2 \\ 1-x & x > 1/2 \end{cases} \quad u_2 = x(x-1) = x^2 - x \quad u_3 = \sin(\pi x)$$

Notar que en este problema se tiene:

$$(py')' + qy + \lambda ry = 0 \implies p(x) = r(x) = 1, \quad q(x) = 0$$

Usando el principio de minimización:

$$\lambda_1 \leq \frac{-puu'|_0^1 + \int_0^1 [p(u')^2 - qu^2] dx}{\int_0^1 ru^2 dx} = \frac{\int_0^1 (u')^2 dx}{\int_0^1 u^2 dx}$$

Notar que el primer término $-puu'|_0^1 = -p(1)u(1)u'(0) + p(0)u(0)u'(1) = 0$, ya que las funciones cumplen las condiciones frontera y por tanto $u(0) = u(1) = 0$.

Usando cada una de las tres funciones test u_i seleccionadas podemos obtener una cota superior de λ_1 , siendo la mejor aproximación aquella que se obtenga la menor cota, ya que según el principio de minimización, el valor mínimo sobre todas las funciones continuas que cumplan las condiciones frontera corresponde con la autofunción y_1 .

- $\lambda_1 \leq \frac{\int_0^1 (u_1')^2 dx}{\int_0^1 u_1^2 dx} = \frac{\int_0^{1/2} (1)^2 dx + \int_{1/2}^1 (-1)^2 dx}{\int_0^{1/2} x^2 dx + \int_{1/2}^1 (1-x)^2 dx} = 12$
- $\lambda_1 \leq \frac{\int_0^1 (u_2')^2 dx}{\int_0^1 u_2^2 dx} = \frac{\int_0^1 (2x-1)^2 dx}{\int_0^1 (x^2-x)^2 dx} = 10$
- $\lambda_1 \leq \frac{\int_0^1 (u_3')^2 dx}{\int_0^1 u_3^2 dx} = \frac{\int_0^1 (\pi \cos(\pi x))^2 dx}{\int_0^1 (\sin(\pi x))^2 dx} = \pi^2 \approx 9.87$

Notar que la aproximación obtenida con la función test u_2 es mejor que la obtenida con u_1 , al ser mas pequeña y la aproximación de u_3 coincide exactamente con el valor λ_1 , ya que $y_1 = \sin(\pi x)$ es la primera autofunción del problema.

10.4. Problemas No Regulares de Sturm-Liouville

En determinadas ocasiones aparece el problema de Sturm-Liouville dado la [Ecuación A.4, página 497](#),

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}[p(x)y'] + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0 \\ A_1 y(a) + B_1 y'(a) = 0 \\ A_2 y(b) + B_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

pero sin cumplirse las condiciones para que sea un **problema regular**³² de Sturm-Liouville. En estos casos los problemas se clasifican como:

- **Problema Singular de Sturm-Liouville:** Si las funciones $p(x)$ y/o $r(x)$ se anulan o no son continuas en los extremos del intervalo $[a, b]$. En estos casos es posible que la solución no esté acotada en estos valores y para obtener soluciones con la propiedad de ortogonalidad es necesario imponer **condiciones de acotación** también denominados de **compatibilidad**³³.
- **Problema Periódico de Sturm-Liouville:** Si $p(a) = p(b)$ y las condiciones frontera son de tipo periódico:

$$\begin{cases} y(a) = y(b) \\ y'(a) = y'(b) \end{cases}$$

En este caso solución $y(x)$ se puede extender como una función periódica en el dominio infinito³⁴.

Vamos a ver un par de ejemplos prácticos sencillos del tratamiento matemático de estos casos.

Ejercicio 10.5. Obtener los autovalores y autofunciones del siguiente problema.

$$\begin{cases} xy'' + 2y' + \lambda xy = 0 \\ y \text{ acotada en } x = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Este es un problema singular de Sturm-Liouville, ya que $p(x) = x$ se anula en el extremo izquierdo $x = 0$. Si las condiciones frontera fueran $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ la única solución es la trivial $y = 0$ para cualquier valor de λ , por ello se relajan estas condiciones imponiendo la acotación en el extremo $x = 0$. Si hacemos el cambio de variable $u = xy$ se tiene:

$$\begin{cases} u' = y + xy' \\ u'' = y' + y' + xy'' = 2y' + xy'' \end{cases} \implies xy'' + 2y' + \lambda xy = u'' + \lambda u = 0$$

Esta ecuación ya se resolvió en el [Sección 10.2.1, página 338](#), y solo aparecen soluciones no triviales para $\lambda > 0$ de la forma:

$$u = c_1 \cos x\sqrt{\lambda} + c_2 \sin x\sqrt{\lambda} \implies y = c_1 \frac{\cos x\sqrt{\lambda}}{x} + c_2 \frac{\sin x\sqrt{\lambda}}{x}$$

Para que la solución sea acotada en $x = 0$ es necesario que $c_1 = 0$. Con la otra condición de contorno:

$$y(1) = 0 \implies 0 = c_2 \sin \sqrt{\lambda} \implies \sqrt{\lambda} = n\pi, \quad \lambda = n^2\pi^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$y_n = \frac{\sin n\pi x}{x}$$

Para conocer la relación de ortogonalidad es necesario encontrar la forma autoadjunta de esta ecuación. Siguiendo los pasos de la [Sección 10.3.1, página 347](#):

$$1. \quad y'' + \frac{2}{x}y' + \lambda y = 0$$

$$2. \quad e^{\int 2/x} = e^{2 \log x} = x^2 \implies x^2 y'' + 2xy' + \lambda x^2 y = 0$$

³²Ver la [Definición 10.2, página 344](#).

³³Ver el [Ejercicio 10.5, página 353](#).

³⁴Ver el [Ejercicio 10.6, página 354](#).

$$3. \frac{d}{dx}[x^2 y'] + \lambda x^2 y = 0 \implies r(x) = x^2$$

Por tanto las autofunciones y_n son ortogonales respecto al peso $r(x) = x^2$.

Ejercicio 10.6. Obtener los autovalores y autofunciones del siguiente problema.

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(L) \\ y'(0) = y'(L) \end{cases}$$

Este es un problema periódico de Sturm-Liouville, debido a las condiciones periódicas. Vamos a analizarlo para los casos $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ y $\lambda > 0$, teniendo en cuenta que el polinomio característico es en este caso:

$$m^2 + \lambda = 0$$

- $\lambda = 0$

$$y'' = 0 \implies y = c_1 + c_2 x$$

Teniendo en cuenta las condiciones frontera:

$$\begin{cases} y(0) = y(L) & : & c_1 = c_1 + c_2 L & ; & c_2 L = 0 & \implies & c_2 = 0 \\ y'(0) = y'(L) & : & y = c_1 & ; & y' = 0 & \text{(se cumple)} \end{cases}$$

Por tanto $\lambda = 0$ es un autovalor del problema con autofunción asociada $y = c_1$.

- $\lambda < 0$

Como se vio en la [Sección 10.2.1, página 338](#), si hacemos $\lambda = -k^2$ la solución en este caso es:

$$y = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$$

como esta solución no está acotada cuando $x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow -\infty$, la solución no puede ser periódica, por tanto no hay autovalores negativos.

- $\lambda > 0$

En este caso la solución es:

$$y(x) = c_1 \cos xk + c_2 \sin xk \quad ; \quad y'(x) = -c_1 k \sin xk + c_2 k \cos xk$$

Teniendo en cuenta las condiciones frontera:

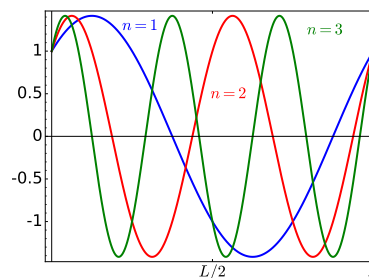
$$\begin{cases} y(0) = y(L) & : & c_1 = c_1 \cos Lk + c_2 \sin Lk \\ y'(0) = y'(L) & : & c_2 = -c_1 \sin Lk + c_2 \cos Lk \end{cases}$$

se obtiene un sistema de ecuaciones lineales. Si $c_1 = 0$ y $c_2 \neq 0$, o bien $c_1 \neq 0$ y $c_2 = 0$ entonces $k = 2n\pi/L$. En el caso de que ninguno de los dos sea cero, multiplicando la primera ecuación por c_1 y la segunda por c_2 y sumando se obtiene el mismo resultado $k = 2n\pi/L$.

Por tanto el problema tiene soluciones no triviales para los autovalores y autofunciones:

$$\lambda = \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

$$y_n(x) = \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)$$



10.4.1. Ortogonalidad en las Funciones de Bessel

El siguiente problema de autovalores para el caso particular de la ecuación de Bessel paramétrica³⁵ representa un ejemplo de un **Problema Singular de Sturm-Liouville**³⁶.

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \left(\lambda x - \frac{m^2}{x} \right) y = 0 \\ y(L) = 0 \\ |y(0)| < \infty \end{cases} \quad (10.4)$$

Con el cambio de variable $z = x\sqrt{\lambda}$ se tiene:

$$x = \frac{z}{\sqrt{\lambda}} ; \quad y(x) = y(z/\sqrt{\lambda}) = f(z) ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dz} \frac{dz}{dx} = f'(z)\sqrt{\lambda} ; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dz} [f'(z)\sqrt{\lambda}] \frac{dz}{dx} = f''(z)\lambda$$

se obtiene:

$$\sqrt{\lambda} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{\sqrt{\lambda}} f' \right) + \left(\lambda \frac{z}{\sqrt{\lambda}} - \frac{m^2}{z} \sqrt{\lambda} \right) f = 0 ; \quad \frac{d}{dz} \left(z \frac{df}{dz} \right) + \left(z - \frac{m^2}{z} \right) f = 0$$

multiplicando por z se obtiene la ecuación de Bessel³⁷:

$$z^2 \frac{d}{dz} \left(z \frac{df}{dz} \right) + (z^2 - m^2) f = 0 ; \quad z^2 f'' + z f' + (z^2 - m^2) f = 0$$

La solución general, teniendo en cuenta el cambio de variable es:

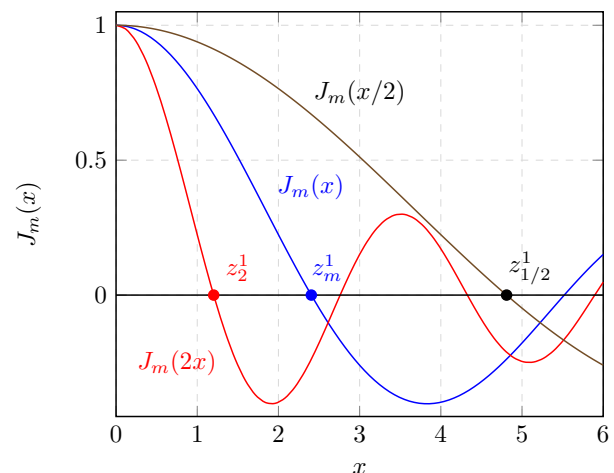
$$f(z) = c_1 J_m(z) + c_2 Y_m(z) \xrightarrow{c.v.} y(x) = c_1 J_m(x\sqrt{\lambda}) + c_2 Y_m(x\sqrt{\lambda})$$

Las funciones $J_m(x\sqrt{\lambda})$ y $Y_m(x\sqrt{\lambda})$ son funciones escaladas de las originales $J_m(x)$ e $Y_m(x)$.

De forma general una función $J_m(\alpha x)$ encoge la gráfica de la función original si $\alpha > 1$ y la *ensancha* si $\alpha \in (0, 1)$ (ver gráfica).

De esta forma, si z_m^k es el cero k -ésimo de la función $J_m(x)$, los correspondientes ceros z_α^k de sus funciones escaladas también quedan escalados de la siguiente forma:

$$J_m(z_\alpha^k) = 0 \implies \alpha z_\alpha^k = z_m^k \implies \boxed{z_\alpha^k = z_m^k / \alpha}$$



Teniendo en cuenta que $y(0)$ debe ser finito, implica que $c_2 = 0$ ya que $Y_m(0)$ es infinito³⁸ y por tanto:

$$y(x) = c_1 J_m(x\sqrt{\lambda})$$

Con la condición $y(L) = 0$ se determinan los autovalores:

$$J_m(L\sqrt{\lambda}) = 0$$

Por lo que el valor $L\sqrt{\lambda}$ debe ser un cero de la función de Bessel $J_m(z)$. Si designamos mediante z_m^n el n -ésimo cero de la función $J_m(z)$ se tiene³⁹:

$$L\sqrt{\lambda_n} = z_m^n \implies \boxed{\lambda_n = \left(\frac{z_m^n}{L} \right)^2} \quad (10.5)$$

³⁵Ver la Sección 4.5.1, página 135.

³⁶Ver la Sección 10.4, página 353.

³⁷Ver la Sección ??, página ??.

³⁸Ver la Sección ??, página ??.

³⁹Notar que para cada ecuación con valor m hay un número infinito de autovalores λ_n y esta expresión es análoga a $\lambda_n = (n\pi/L)^2$, donde $n\pi$ son los ceros de $\sin x$.

Las autofunciones son entonces:

$$y_n(x) = J_m(x\sqrt{\lambda_n}) = J_m(x z_m^n / L) \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Para cada m hay un conjunto infinito de autofunciones $y_n(x)$ para el problema singular de Sturm-Liouville dado por (10.4) que forman un conjunto completo de funciones ortogonales con la función peso x de forma:

$$\int_0^L J_m(x\sqrt{\lambda_i}) J_m(x\sqrt{\lambda_j}) x dx = 0 \quad , \quad i \neq j$$

$$\int_0^L J_m^2(x\sqrt{\lambda_i}) x dx = \frac{L^2}{2} J_{m+1}^2(z_m^i) \quad , \quad i = j$$

10.4.2. Serie de Fourier-Bessel

En base a todo lo realizado en el apartado anterior, se puede establecer un teorema muy importante en aplicaciones prácticas⁴⁰.

Teorema 10.3. Serie de Fourier-Bessel de Orden m

Toda función $f(x)$ suave a trozos en $[0, L]$ se puede representar mediante una *serie de Fourier generalizada*⁴¹ con las autofunciones obtenidas en el apartado anterior, de forma:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_m(x\sqrt{\lambda_n}) \quad ; \quad \lambda_n = \left(\frac{z_m^n}{L} \right)^2$$

conocida como **serie de Fourier-Bessel de orden m** , y cuyos coeficientes A_n pueden determinarse por la condición de ortogonalidad⁴² de las funciones de Bessel con respecto a la función peso x :

$$A_n = \frac{\int_0^L f(x) J_m(x\sqrt{\lambda_n}) x dx}{\int_0^L J_m^2(x\sqrt{\lambda_n}) x dx} = \frac{2}{L^2 J_{m+1}^2(z_m^n)} \int_0^L f(x) J_m(x\sqrt{\lambda_n}) x dx$$

donde z_m^n es el n -ésimo cero de la función $J_m(x)$ y λ_n es el n -ésimo autovalor del problema (10.4) dado por la ecuación (10.5).

⁴⁰Ver por ejemplo la Sección 11.4.3, página 382 y la Sección 11.5.3, página 396.

⁴²Ver el Sección 10.4.1, página 355 y el Teorema 10.1, página 348.

⁴²Ver la Sección 10.3.2, página 348.

Ejercicio 10.7. Aproximar la función:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

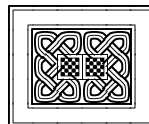
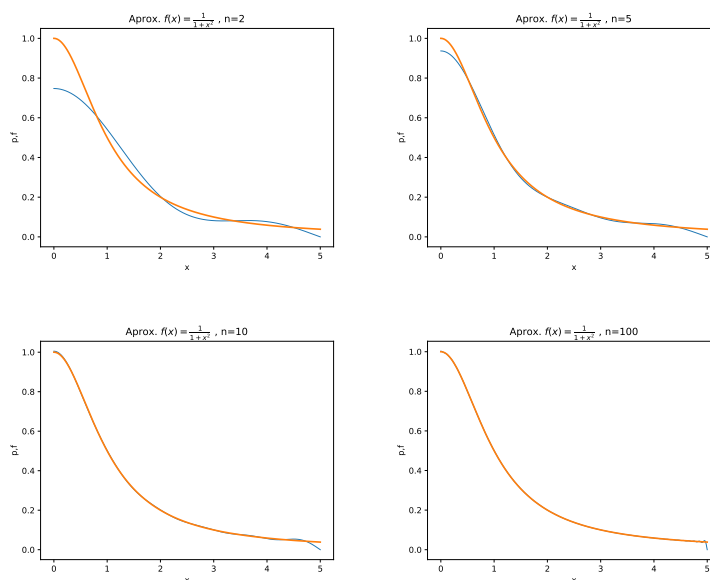
en el intervalo $[0, 5]$ mediante funciones de Bessel de primera clase $J_m(x)$.

En este caso $L = 5$ y teniendo en cuenta el teorema anterior se tiene:

$$\frac{1}{1+x^2} \sim \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_m(x\sqrt{\lambda_n}) \quad ; \quad \lambda_n = \left(\frac{z_0^n}{5}\right)^2 \quad ; \quad A_n = \frac{\int_0^5 f(x) J_0(x\sqrt{\lambda_n}) x dx}{\int_0^5 J_0^2(x\sqrt{\lambda_n}) x dx}$$

Con un ordenador y a través de algún lenguaje de programación apropiado⁴³ se pueden calcular estos coeficientes de forma sencilla, haciendo uso de las definiciones internas de las funciones de Bessel y sus correspondientes ceros.

En la siguiente gráfica se muestra un resultado de estas simulaciones usando diferentes términos de la serie infinita, $n = 2$, $n = 5$, $n = 10$ y $n = 100$. En rojo aparece la función original $f(x)$ y en azul su aproximación para distintos valores de n . Vemos que al aumentar el número de términos aumenta la precisión del ajuste, aunque en los extremos se puede observar en algunos casos fenómenos similares al efecto Gibbs (ver [Sección 9.4.2, página 327](#)). Dependiendo de la función y el intervalo de definición $[0, L]$ se puede obtener una mayor o menor velocidad de convergencia.



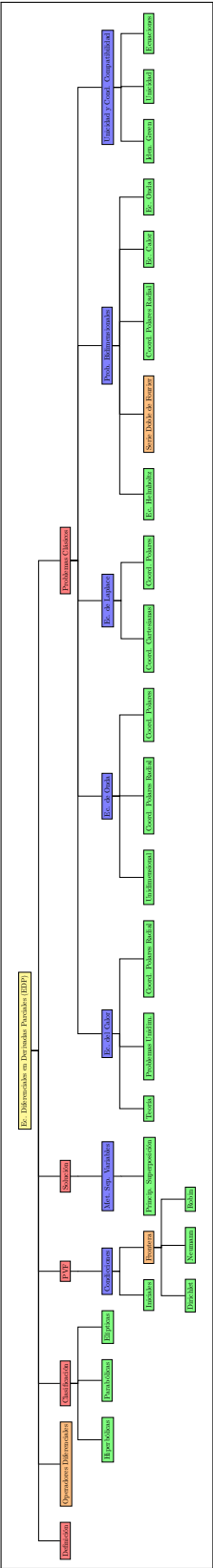
⁴³Por ejemplo *Python* y los paquetes (librerías científicas) *Numpy* y *Scipy*.



Ecuaciones en Derivadas Parciales

Contenido

11.1	Introducción	361
11.1.1	Solución de una EDP	361
11.1.2	Características de las EDP	362
11.1.3	Operadores Diferenciales Lineales	363
11.1.4	Clasificación de las EDP	364
11.1.5	Problemas en EDP	366
11.1.6	Solución de un Problema en EDP	367
11.2	Método de Separación de Variables	367
11.2.1	Procedimiento General	367
11.2.2	Principio de Superposición	370
11.3	Problemas Clásicos en EDP	370
11.4	Ecuación de Calor	370
11.4.1	Transferencia de Calor	370
11.4.2	Ecuación del Calor Unidimensional	372
11.4.3	Ecuación del Calor en Polares con Simetría Radial	382
11.5	Ecuación de Onda	385
11.5.1	Ecuación de Onda Unidimensional	386
11.5.2	Ecuación de Onda en Coordenadas Polares con Simetría Radial	393
11.5.3	Ecuación de Onda en Coordenadas Polares	396
11.6	Ecuación de Laplace	400
11.6.1	Ecuación de Laplace Bidimensional	402
11.7	Problemas de Evolución Bidimensionales	412
11.7.1	Ecuación del Calor Bidimensional en Coordenadas Cartesianas	412
11.7.2	Ecuación de Onda Bidimensional en Coordenadas Cartesianas	414
11.7.3	Ecuación del Calor en un Cilindro con Simetría Radial	417
11.8	Unicidad y Condiciones de Compatibilidad en EDP	420
11.8.1	Identidades de Green	421
11.8.2	Estudio de la Unicidad	421



11.1. Introducción

Recordamos¹ que una *ecuación diferencial en derivadas parciales* (EDP) es aquella ecuación cuya incógnita es una función² escalar u que depende de varias variables independientes³ $x, y, t, \dots$ y donde aparecen derivadas parciales de la función con respecto a una o varias de las variables independientes $u_x, u_{tt}, u_{xy}, \dots$

$$u(x, y, z, t, \dots) \xrightarrow{\text{EDP}} \boxed{F(x, y, z, t, u, u_x, u_t, u_{xy}, \dots) = 0} \quad (11.1)$$

De forma general:

$$u(\vec{z}) = u(\vec{x}, t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \begin{cases} n = N + 1, & N = \{1, 2, 3\} \\ \vec{x} = [x, y, z] \in \mathbb{R}^N \\ \vec{z} = [x, y, z, t] \in \mathbb{R}^{N+1} \end{cases}$$

Dependiendo del tipo de variables de la función incógnita u las ecuaciones se clasifican en:

- **Ecuaciones estacionarias:** Cuando la función depende solo de una o varias variables espaciales $u(\vec{x}) = u(x, y, z)$.
- **Ecuaciones de evolución:** Cuando la función depende de una o varias variables espaciales y de la temporal $u(\vec{z}) = u(\vec{x}, t) = u(x, y, z, t)$.

Dominio de definición de la función:

$$u(\vec{z}) = (\vec{x}, t) \in U = \Omega \times (0, \infty) \subset \mathbb{R}^{N+1} \quad \begin{cases} \Omega \subseteq \mathbb{R}^N & : \text{dominio espacial} \\ \partial\Omega \subset \mathbb{R}^N & : \text{frontera o borde de } \Omega \\ (0, \infty) \subset \mathbb{R} & : \text{dominio temporal} \end{cases}$$

La frontera o borde de Ω , $\partial\Omega$, son puntos de espacio $\mathbb{R}^N$ de forma que cualquier bola abierta⁴ que los contenga incluye puntos tanto del interior de Ω como de su complemento⁵.

Notación

- Du : Conjunto de todas las derivadas parciales de primer orden de u , $\left(\frac{\partial u}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial z_n}\right)$
- $D^k u$: Conjunto de todas las derivadas parciales de orden k de u , del tipo $\frac{\partial^k u}{\partial z_i \dots \partial z_j}$

11.1.1. Solución de una EDP

El concepto de solución de una EDP es un tema complejo y de una importancia fundamental. De hecho, el análisis de dicho concepto ha conducido al desarrollo de buena parte de las Matemáticas en los últimos años⁶. En este curso utilizaremos la siguiente definición básica.

Definición 11.1. Solución Clásica de una EDP

Una función escalar $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ es solución *clásica* de (11.1) si es suficientemente derivable y verifica dicha ecuación en U .

¹Ver los tipos ecuaciones diferenciales en [Sección 1.2.3, página 7](#).

²En este tema vamos a denotar de forma general a la función de varias variables u , aunque en cada contexto se suelen utilizar diferentes nombres de variables.

³Las variables independientes pueden ser muy variadas aunque las más habituales son una o varias espaciales x, y y z y la temporal t .

⁴Ver por ejemplo "Clases de Cálculo II para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 517.

⁵En un problema unidimensional (segmento) la frontera son los dos extremos, en un problema bidimensional (superficie) la frontera es la curva que encierra el dominio y en un problema tridimensional (sólido) la frontera es la superficie que encierra el dominio.

⁶Algunas de las nociones relacionadas con este desarrollo se estudian en la asignatura Análisis Funcional.

11.1.2. Características de las EDP

Como se vio en la [Sección 1.2.3, página 8](#) todas las ecuaciones diferenciales poseen diferentes características en base a las cuales se pueden clasificar, siendo las dos más importantes:

- **Orden** : Es el orden de la derivada de mayor orden.
- **Linealidad** : Ecuaciones diferenciales que cumplen dos propiedades:
 - La variable dependiente (función u) y todas sus derivadas son a lo sumo funciones polinómicas de primer grado.
 - Todos los coeficientes que multiplican a u y a sus derivadas solo son función de las variables independientes⁷.

A diferencia de lo que sucede con las EDO, no existe una teoría general de las EDP, ni siquiera para las ecuaciones más sencillas de bajo orden. El estudio se centra en el desarrollo de teorías particulares aplicables a determinados tipos de EDP importantes por sus aplicaciones en diversas áreas de las matemáticas, en la física y otras ciencias.

Algunas de las EDP más importantes en las aplicaciones prácticas son las lineales de segundo orden.

Definición 11.2. EDP lineal de Segundo Orden

Una **EDP lineal de segundo orden** es una ecuación de la forma:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\vec{z}) \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial z_j} + \sum_{i=1}^n b_i(\vec{z}) \frac{\partial u}{\partial z_i} + c(\vec{z})u(\vec{z}) = f(\vec{z}) \quad (11.2)$$

donde las funciones a_{ij} , b_i y c se denominan **coeficientes** de la ecuación y la función f es el **término independiente**, todas ellas definidas en U , un abierto de $\mathbb{R}^n$.

- Si las funciones $a_{ij}(\vec{z})$, $b_i(\vec{z})$ y $c(\vec{z})$ son constantes se dice que es una **EDP de coeficientes constantes**.
- Si $f(\vec{z}) = 0$ se dice que es una **EDP homogénea**.
- Si la solución es *clásica*⁸ se puede suponer que $a_{ij}(\vec{z}) = a_{ji}(\vec{z})$.
- Una EDP de segundo orden se dice que es **semilineal** si solo es lineal en las derivadas de segundo orden, de la forma:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\vec{z}) \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial z_j} = f(\vec{z}, u, Du)$$

- Una EDP de segundo orden se dice que es **cuasilineal** si tiene la forma:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\vec{z}, u, Du) \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial z_j} = f(\vec{z}, u, Du)$$

⁷Y no de u ni de sus derivadas.

⁸Ver la [Definición 11.1, página 361](#).

11.1.3. Operadores Diferenciales Lineales

Las EDP lineales de segundo orden⁹ se pueden definir de forma compacta como:

$$Lu = f$$

donde f es una función conocida y si $f = 0$ se dice que la EDP es **homogénea**. L es un *operador diferencial lineal*¹⁰, combinación lineal de u y de sus derivadas parciales de primer y segundo orden, de la forma:

$$L = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\vec{z}) \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} + \sum_{i=1}^n b_i(\vec{z}) \frac{\partial}{\partial z_i} + c(\vec{z})$$

Definición 11.3. Operador Laplaciano

El operador **laplaciano**¹¹ de una función *escalar* $f(\vec{x}) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ en *coordenadas cartesianas* se define como el *producto escalar* entre el *operador gradiente*¹² ∇ y el vector gradiente de la función ∇f :

$$\Delta = \operatorname{div} \nabla = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$$

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Ejemplo 11.1. Operadores laplacianos en coordenadas cartesianas de dimensión 1, 2 y 3.

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad ; \quad \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad ; \quad \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Operador Laplaciano 3D en otras Coordenadas

- **C. Rectangulares** (x, y, z) : $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
- **C. Cilíndricas**¹³ (r, θ, z) : $\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
- **C. Esféricas** (r, θ, ϕ) : $\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$

Ejemplo 11.2. Desarrollo completo del laplaciano en coordenadas esféricas.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} = \\ & = \frac{1}{r^2} \left(2r \frac{\partial f}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} = \\ & = \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left(\cotan \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \operatorname{cosec}^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned}$$

⁹Ver la **Definición 11.2**, página 362.

¹⁰Ver la **Definición 1.5**, página 6.

¹¹Para representar el operador *laplaciano* se puede utilizar de forma indistinta la letra Δ , (delta mayúscula), o el símbolo ∇^2 , (nabla cuadrado), sin embargo debido a su simplicidad se acostumbra a utilizar Δ .

¹²Ver por ejemplo "Clases de Cálculo II para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 517.

¹³Las **coordenadas cilíndricas** en 2D son las **coordenadas polares** (r, θ) .

Otros Operadores Lineales

A través del operador laplaciano se definen los tres operadores diferenciales lineales más usados en la práctica:

$$L = \Delta$$

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta$$

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

Estos operadores dan lugar a las conocidas como **EDP fundamentales**, ya que todas las *EDP lineales de segundo orden* se clasifican en función de los coeficientes de los términos de grado dos del operador.

- **Ecuación de Poisson¹⁴ N-dimensional** : $\Delta u = f(\vec{x})$ $u(\vec{x})$; $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$
- **Ecuación del Calor N-dimensional** : $\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = f(\vec{x}, t)$; $k > 0$ $u(\vec{x}, t)$; $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$
- **Ecuación de Onda N-dimensional** : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c\Delta u = f(\vec{x}, t)$; $c > 0$ $u(\vec{x}, t)$; $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$

Notar que la ecuación de Poisson (caso general de la ecuación de Laplace) es de tipo estacionaria, mientras que las ecuaciones del calor y de onda son de evolución¹⁵.

11.1.4. Clasificación de las EDP

Desde un punto de vista aplicado, uno de los tipos de EDP más interesantes son las *lineales de segundo orden* para funciones del tipo $u(x, y)$ o $u(x, t)$.

Las EDP de segundo orden *lineales* con *coeficientes constantes*¹⁶ y *homogéneas*¹⁷ para funciones de dos variables $u(x, y)$ o $u(x, t)$ de la forma:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F u = 0 \quad (11.3)$$

se pueden clasificar en función de las constantes de las derivadas de segundo orden A , B y C , en tres tipos¹⁸:

- **Parabólicas:** $B^2 - 4AC = 0$
- **Hiperbólicas:** $B^2 - 4AC > 0$
- **Elípticas:** $B^2 - 4AC < 0$

Cada uno de estos tres tipos tienen unas características comunes que sirven para modelizar distintos problemas en las ciencias aplicadas.

- Las ecuaciones **parabólicas** determinan la variación de una función en espacio y tiempo¹⁹, presentando derivadas en las dos variables. Este tipo de ecuaciones aparecen de forma frecuente en muchas aplicaciones cuando se intenta describir el comportamiento de fenómenos *difusivos*, ligados a una propagación rápida de la variable dependiente.

El ejemplo más característico es la **ecuación del calor unidimensional**:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad \implies \quad B^2 - 4AC = 0 - 4(-1)0 = 0$$

¹⁴Si $f = 0$ la ecuación se denomina de **Laplace**.

¹⁵Ver la **Sección 11.1**, página 361.

¹⁶Los coeficientes $A, \dots, E$ son constantes reales.

¹⁷El término independiente, a la derecha del signo igual, es cero.

¹⁸Esta clasificación está basada la teoría de las secciones cónicas que cumplen la ecuación de segundo grado $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

¹⁹En estos casos la variable y se suele denotar por t .

o en su versión N-dimensional²⁰:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = f(\vec{x}, t)$$

donde el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es el interior de un medio conductor²¹ en el que actúa una fuente de calor $f(\vec{x}, t)$ durante un intervalo temporal $(0, T)$. Entonces, bajo determinadas circunstancias, se puede aceptar que la temperatura del medio $u(\vec{x}, t)$ verifica dicha ecuación para una constante positiva k (conductividad del medio). De ahí el nombre que se le da a la ecuación.

- Las ecuaciones **hiperbólicas** sirven para describir fenómenos ondulatorios caracterizados por la propagación de señales a velocidad finita.

El ejemplo más característico es la **ecuación de onda unidimensional**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad \implies \quad B^2 - 4AC = 0 - 4(1)(-c) = 4c > 0$$

que permite determinar, bajo ciertas condiciones, las vibraciones de una cuerda elástica²², cuyas características están determinadas por la constante positiva c . En este caso la función $u(x, t)$ determinan la posición de cada punto de la cuerda en función del tiempo.

La ecuación de onda en su versión N-dimensional es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c\Delta u = f(\vec{x}, t)$$

Notar que la diferencia más importante con respecto a las ecuaciones *parabólicas* es la presencia de la segunda derivada con respecto al tiempo, lo que hace que la solución *oscile*. Esta diferencia de orden en la derivada temporal entre las ecuaciones *parabólicas* e *hiperbólicas*, también se manifiesta en la forma que se propaga la solución. Así, para los problemas definidos por ecuaciones *hiperbólicas* en las que se produce una perturbación en el contorno, esta perturbación viaja al interior del cuerpo pero existiendo un intervalo de tiempo antes de que los puntos internos perciban esa perturbación²³. Por el contrario, en los problemas con ecuaciones diferenciales *parabólicas*, los puntos en el interior perciben inmediatamente la perturbación en la frontera, intensificándose el efecto con el tiempo.

- Las ecuaciones **elípticas** se usan para caracterizar sistemas en estado estable, independiente del tiempo.

El ejemplo más característico es la **ecuación de Poisson bidimensional**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad \implies \quad B^2 - 4AC = 0 - 4(1)(1) = -4 < 0$$

que recibe el nombre de **ecuación de Laplace** si $f = 0$. Ambas ecuaciones aparecen con frecuencia en muchas aplicaciones prácticas cuando se intenta describir el comportamiento de fenómenos estacionarios, es decir, independientes del tiempo²⁴.

Por ejemplo, el campo eléctrico generado en un medio que ocupa el abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ por una distribución de carga f definida en Ω , está dado por $E = -\nabla u$, donde u es solución de la *ecuación de Poisson*²⁵:

$$-\Delta u = \frac{1}{\alpha} f(\vec{x}) \quad ; \quad \alpha > 0$$

²⁰Ver la Sección 11.1.3, página 363.

²¹Alambre unidimensional, placa metálica bidimensional o sólido tridimensional.

²²Siempre que éstas sean de pequeña amplitud.

²³Ver la Sección 11.5.1, página 386.

²⁴Ver la Sección 11.6.1, página 402.

²⁵Ver la Sección 11.1.3, página 364 y Sección 11.8.2, página 421.

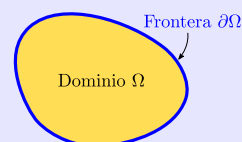
- Hay otras muchas ecuaciones interesantes desde el punto de vista de las aplicaciones, que en buena parte son variantes de los tres tipos anteriores. Así por ejemplo, el operador del calor suele estar presente en la dinámica de fluidos y en los fenómenos de difusión, y el operador de onda aparece en fenómenos de elasticidad y en la propagación de ondas acústicas y electromagnéticas. Otras veces aparecen sistemas acoplados con todas las componentes del mismo tipo o con componentes parabólicos e hiperbólicos, (como por ejemplo en sistemas termoelásticos).
- Cuando las ecuaciones modelan fenómenos en medios heterogéneos, adoptan formas más complejas y en particular presentan coeficientes A , B , etc. de la ecuación (11.3) variables, dependientes de la posición $\vec{x}$, del tiempo t o de ambos.
- Además de las EDP lineales, muchas EDP no lineales presentan un enorme interés en muchos ámbitos de la Ciencia y la Tecnología, aunque no serán tratadas en este curso.

11.1.5. Problemas en EDP

Definición 11.4. Problema de Valores en la Frontera (PVF)

Se denomina **problema de valores en la frontera**²⁶ (PVF) al conjunto de una EDP definida en un dominio Ω junto con las *condiciones iniciales y/o de frontera o contorno*.

$$\text{Problema EDP (PVF)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{EDP en un dominio} \\ + \\ \text{Condiciones iniciales y/o de contorno} \end{array} \right.$$



Tipos de Condiciones

• Condiciones Iniciales (o Problema de Cauchy)

Se necesitan cuando una de las variables es el tiempo t . Hay dos tipos básicos de *condiciones iniciales*:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u(\vec{x}, t=0) = f(\vec{x}) & : \text{Especifica la posición o distribución inicial de la función } u \text{ en el dominio.} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}, t=0) = g(x) & : \text{Especifica la velocidad inicial } u_t \text{ de cambio de la función } u \text{ en el dominio.} \end{array} \right.$$

• Condiciones de Contorno o Frontera

Se necesitan cuando una de las variables es de tipo espacial ($\vec{x}$) y fijan las condiciones de la función u en los extremos, bordes o frontera del dominio Ω , denotado por $\partial\Omega$. Hay tres tipos básicos de condiciones frontera o de contorno:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{Condiciones Dirichlet} & u(\partial\Omega) = u_0(\vec{x}) & : \text{Especifica un valor } u_0 \text{ en } \partial\Omega. \\ \text{Condiciones Neumann} & \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \nabla u \cdot \vec{n} = u_0(\vec{x}) & : \text{Especifica cómo varía } u \text{ en } \partial\Omega \text{ en función de su forma, dada por el vector normal a la misma, } \vec{n}. \\ \text{Condiciones Mixtas o Robin} & \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = u_0(\vec{x}) & : \text{Condiciones Dirichlet + Neumann.} \end{array} \right.$$

²⁶También denominados con condiciones de borde o contorno.

11.1.6. Solución de un Problema en EDP

Con frecuencia es difícil o imposible obtener la *solución general*²⁷ de una EDP, siendo además poco útil en muchos problemas aplicados, por lo que en la práctica solo se está interesado en encontrar *soluciones particulares*²⁸ de algunas EDP con interés en algún campo.

Definición 11.5. Problemas Bien Planteados

Se dice que un problema en EDP está **bien planteado** si tiene solución única y ésta depende continuamente de los datos²⁹.

- En algunos casos solo se obtienen problemas bien planteados para determinadas condiciones frontera de un dominio.
- Cuando el problema no está bien planteado y existen más de una solución, es necesario clasificar y caracterizar las soluciones obtenidas.

Hay varios métodos para encontrar soluciones de una EDP, siendo uno de los más sencillos y útiles en determinados casos, el conocido como *método de separación de variables* que veremos a continuación.

11.2. Método de Separación de Variables

El método de separación de variables permite calcular explícitamente las soluciones de problemas asociados a algunas EDPs de segundo orden lineales³⁰. Fue inicialmente esbozado en el s. XVIII por Bernoulli y Euler para estudiar el problema de la cuerda vibrante y posteriormente en el s. XIX Fourier consolidó el método con la teoría de las series que llevan su nombre³¹.

Aunque en teoría el método es eficaz para problemas con cualquier número de variables independientes, solo resulta verdaderamente práctico para funciones incógnitas u que dependen de únicamente dos variables independientes (una temporal y otra espacial o bien dos espaciales). En la [Sección 11.7.1, página 412](#) se verá cómo se puede aplicar de forma reiterada para problemas de más de dos variables.

11.2.1. Procedimiento General

El método consiste en buscar soluciones definidas como producto de funciones que dependen de variables distintas. Vamos a resumir los pasos para un problema en EDP con dos variables³² formado por una ecuación definida a través de un operador diferencial lineal³³ L y unas condiciones iniciales y/o de contorno apropiadas.

$$u(x, y) \quad \begin{cases} Lu = f(x, y) \\ \text{Condiciones} \end{cases}$$

Aquí x e y representan dos variables espaciales o una espacial y otra temporal.

²⁷Conjunto de todas las funciones que cumplen una EDP, independientemente de las condiciones iniciales y/o de contorno.

²⁸Funciones que verifican problemas específicos de EDP (ecuación + condiciones).

²⁹Esta condición es trivial en las EDO, sin embargo en el caso de las EDP suele ser un tema muy importante en aplicaciones físicas.

³⁰Ver la [Definición 11.2, página 362](#).

³¹Ver el [Tema 9, página 317](#).

³²En la [Sección 11.7, página 412](#) se extenderá este método a más dimensiones.

³³Ver la [Sección 11.1.3, página 363](#).

El método supone que la solución particular $u(x, y)$ del problema puede expresarse como producto de funciones X e Y que dependen de una única variable.

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \implies \begin{cases} u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dX}{dx}Y = X'Y \\ u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = X \frac{dY}{dy} = XY' \\ u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{dX}{dx} \frac{dY}{dy} = X'Y' \\ u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 X}{dx^2}Y = X''Y \\ u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X \frac{d^2 Y}{dy^2} = XY'' \end{cases}$$

De esta forma las derivadas parciales se transforman en derivadas totales y, en algunos casos, la solución particular de una EDP se puede obtener resolviendo dos EDO, que generalmente dependen de algún *parámetro*, a través de problemas de *autovalores de Sturm-Liouville*³⁴.

Pasos del método de separación de variables para resolver una EDP.

1. Suponer que la solución se puede expresar como producto de dos funciones X e Y que dependen de una sola variable cada una.
2. Sustituir la función u y sus derivadas en la EDP en función de X e Y .
3. Separar³⁵ a un lado de la igualdad la función X y sus derivadas, y al otro lado la función Y y sus derivadas.
4. Igualar por separado ambos términos de la igualdad a una misma constante³⁶ dando lugar a dos EDO, cada una dependiente de una única variable.
5. Resolver ambas EDO teniendo en cuenta, en caso de existir, las condiciones iniciales y/o de contorno de la EDP.
6. La solución particular de la EDP se obtendrá multiplicando las dos soluciones de las EDO.

Ejercicio 11.1. En caso de ser posible, encontrar la solución de las siguientes EDP.

$$a) \quad y \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$b) \quad u_{xx} + uu_x = u_{yy}$$

- a) Esta es una EDP lineal de primer orden. Vamos a ver si es posible resolverla mediante el *método de separación de variables*. Para ello seguimos los pasos descritos anteriormente.

$$yu_x = u_y$$

1. Suponemos que la solución de la EDP se puede expresar mediante producto de dos funciones X e Y dependientes de una única variable y calculamos las derivadas que aparecen en la EDP.

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \implies \begin{cases} u_x = X'Y \\ u_y = XY' \end{cases}$$

³⁴Ver el Tema 10, página 335.

³⁵En caso de no ser posible, el método de separación de variables no sería aplicable en este caso.

³⁶La razón de esto es que la única forma de que se cumpla la igualdad, dependiendo cada parte de variables independientes distintas, es que ambas partes sean igual a una constante. Esta constante se suele denominar *constante de separación* y corresponde al valor de λ en un problema de autovalores en operadores diferenciales (ver la Definición 10.1, página 337).

2. Sustituimos en la EDP los resultados anteriores.

$$yX'Y = XY'$$

3. Intentamos separar en un lado de la igualdad todo lo que depende de una variable y en el otro lo que depende de la segunda variable.

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{yY}$$

En este caso claramente sí es posible y por tanto sí es aplicable el *método de separación de variables*.

4. Igualamos ambas expresiones a una constante que vamos a denominar λ y formamos dos EDO.

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{yY} = \lambda \implies \begin{cases} \frac{X'}{X} = \lambda \\ \frac{Y'}{yY} = \lambda \end{cases}$$

5. Resolvemos ambas EDO por separado.

$$\begin{cases} \frac{X'}{X} = \lambda & ; & \int \frac{dX}{X} = \int \lambda dx & ; & \log X = \lambda x + c_1 & ; & X(x) = c_1 e^{\lambda x} \\ \frac{Y'}{yY} = \lambda & ; & \int \frac{dY}{Y} = \int \lambda y dy & ; & \log Y = \lambda \frac{y^2}{2} + c_2 & ; & Y(y) = c_2 e^{\lambda y^2/2} \end{cases}$$

6. Solución final

$$u(x, y) = X(x)Y(y) = ce^{\lambda(x+y^2/2)}$$

Podemos comprobar que efectivamente esta función es solución de la EDP dada:

$$u(x, y) = ce^{\lambda(x+y^2/2)} \left\{ \begin{array}{l} yu_x = c\lambda ye^{\lambda(x+y^2/2)} \\ u_y = c\lambda ye^{\lambda(x+y^2/2)} \end{array} \right\} \implies yu_x = u_y$$

Esta solución depende de dos *parámetros* c y λ cuyos posibles valores dependerán de las condiciones iniciales y/o de contorno que pudieran añadirse a la EDP.

- b) En este caso se trata de una EDP no lineal de segundo orden. Al igual que en el caso anterior, vamos a ver si es aplicable el método de separación de variables a este caso.

$$u_{xx} + uu_x = u_{yy}$$

- 1.

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \implies \begin{cases} u_{xx} = X''Y \\ u_x = X'Y \\ u_{yy} = XY'' \end{cases}$$

2. Sustituimos en la EDP.

$$X''Y + XY^2X' = XY''$$

3. Intentamos separar variables, por ejemplo dividiendo ambas partes de la igualdad por XY .

$$\frac{X''}{X} + YX' = \frac{Y''}{Y} \implies \text{No es posible}$$

Claramente el segundo término del lado izquierdo de la igualdad depende tanto de la variable x como de la variable y , y por tanto no es posible separar variables de esta forma. Se puede intentar de otras formas, por ejemplo dividiendo por XY^2 obteniéndose:

$$\frac{X''}{YX} + X' = \frac{Y''}{Y^2} \implies \text{No es posible}$$

En este caso es el primer término de la izquierda el que depende de x e y . Se pueden probar otras formas de separar las variables y en ninguna de ellas será posible obtener dos partes independientes y por tanto no es aplicable el método de separación de variables para resolver esta ecuación³⁷.

11.2.2. Principio de Superposición

El siguiente teorema es análogo al [Teorema 3.4, página 66](#) para EDO de orden superior.

Teorema 11.1. Principio de Superposición

Si $u_1, u_2, \dots, u_n$ son soluciones de una EDP lineal homogénea ([Ecuación 11.3, página 364](#)), entonces cualquier combinación lineal de ellas,

$$u = c_1 u_1 + \dots + c_n u_n$$

también es solución.

Si el conjunto de soluciones $\{u_i\}$ es infinito, entonces la serie,

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i \quad ; \quad c_i \in \mathbb{R}$$

también es solución.

11.3. Problemas Clásicos en EDP

Vamos a estudiar tres tipos de problemas asociados a las **ecuaciones clásicas** que se ajustan a los modelos de ecuaciones y problemas vistos en la [Sección 11.1.4, página 364](#).

Nombre	Ecuación	Tipo
Ecuación del Calor	$u_t - k\Delta u = f(\vec{x}, t)$	Parabólica
Ecuación de Onda	$u_{tt} - c\Delta u = f(\vec{x}, t)$	Hiperbólica
Ecuación de Laplace	$\Delta u = 0$	Elíptica

11.4. Ecuación de Calor

11.4.1. Transferencia de Calor

El **calor** es una forma de energía que se transfiere de manera espontánea entre distintas zonas de un cuerpo o desde un cuerpo hacia otro. La cantidad de calor se mide a través de la **temperatura**, que es una magnitud escalar medible con un termómetro e indicativa de la cantidad de energía térmica o calorífica de un cuerpo. Se puede medir en Kelvin (K), grados centígrados o Celsius ($^{\circ}C$) o grados Fahrenheit ($^{\circ}F$).

Calor y temperatura son cosas distintas, aunque están estrechamente relacionadas entre sí. El calor es la transferencia de energía térmica que pasa de una zona de mayor temperatura a otra de menor temperatura. Esta transferencia siempre tiene una dirección definida por la diferencia de temperatura entre las zonas. El calor fluye del cuerpo más caliente al más frío, hasta que se alcanza una temperatura de equilibrio ³⁸.

El calor se puede transmitir de tres formas diferentes:

- **Conducción térmica.** El calor se transmite por el choque de las moléculas al vibrar sobre posiciones fijas, lo que provoca que la temperatura se incremente. En este caso no hay transferencia de materia.
- **Convección térmica.** El calor se transfiere por medio del movimiento de las moléculas de un fluido, como puede ser un gas y un líquido, produciéndose además una transferencia de materia en el proceso.
- **Radiación térmica.** El calor se propaga a través de ondas electromagnéticas. Todos los cuerpos emiten calor de esta forma, a menos que estén a una temperatura igual al cero absoluto (0K), sin embargo este fenómeno solo resulta importante a efectos prácticos a altas temperaturas.

³⁷Para su resolución se pueden probar otros métodos analíticos y numéricos que no se verán en este curso.

³⁸La velocidad de transferencia de calor depende de la diferencia de temperaturas, de forma realmente la temperatura de equilibrio solo se alcanza a 0K, aunque a efectos prácticos se considera que se alcanza cuando la diferencia es muy pequeña.

Transferencia de Calor por Conducción

Vamos a deducir la EDP que modela la **conducción**³⁹ de calor en un dominio⁴⁰ $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ conductor del calor de dimensión $N = \{1, 2, 3\}$. El objetivo es la determinación espacio-temporal de la distribución de **temperatura** $u(\vec{x}, t)$ en el dominio, bajo unas determinadas condiciones espacio-temporales. Primeramente necesitamos la relación entre la temperatura y la **densidad de energía térmica**⁴¹ $e(\vec{x}, t)$, que viene dada a través del **calor específico**⁴² c del sólido:

$$\boxed{e(\vec{x}, t) = cu(\vec{x}, t)} \quad \begin{cases} e & : \text{Densidad de Energía Térmica} \\ u & : \text{Distribución de Temperatura} \\ c & : \text{Calor específico} \\ \vec{x} & : \text{Posición en el espacio } N\text{-dimensional, } \vec{x} \in \mathbb{R}^N \\ t & : \text{tiempo} \end{cases}$$

La relación fundamental es la ley de conservación de la energía:

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{Variación} \\ \text{Energía Térmica} \\ \text{en el tiempo} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{Flujo de Calor} \\ \text{por la frontera} \\ \text{por unidad de tiempo} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{Generación de Calor} \\ \text{en el interior} \\ \text{por unidad de tiempo} \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho e = - \int_{\partial\Omega} \Phi \cdot \vec{n} + \int_{\Omega} Q(\vec{x}, t)$$

donde:

- ρ : **Densidad de masa**⁴³
- Φ : **Flujo de calor**⁴⁴, $\Phi = -\mu \nabla u$

Por el *teorema de Gauss o de la divergencia*⁴⁵:

$$\int_{\partial\Omega} \Phi \cdot \vec{n} = \int_{\Omega} \operatorname{div} \Phi = \int_{\Omega} \nabla \cdot (-\mu \nabla u) = - \int_{\Omega} \mu \Delta u$$

Metiendo la derivada parcial temporal dentro de la primera integral⁴⁶ e introduciendo el resultado anterior se obtiene la conocida como **Ecuación Clásica del Calor**:

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial u}{\partial t} = \int_{\Omega} \mu \Delta u + \int_{\Omega} Q(\vec{x}, t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k \Delta u + f(\vec{x}, t)} \quad (11.4)$$

donde $k = \mu/(\rho c)$ es el **coeficiente de difusión de calor** o **difusividad térmica**, característica del sistema, y $f(\vec{x}, t)$ es una función que determina una **fuentes o sumidero de calor** en el sistema, en unidades apropiadas.

³⁹Ver la **Sección 11.4.1, página 370**.

⁴⁰Comúnmente es un sistema conductor en estado sólido.

⁴¹Cantidad de energía calorífica o térmica, bien por unidad de volumen (J/m^3), de superficie (J/m^2) o de longitud (J/m), en función de que la dimensión del sistema N sea 3, 2 ó 1 respectivamente.

⁴²Cantidad de calor que por unidad de masa necesita una sustancia para que su temperatura se eleve un grado. Sus unidades en el sistema internacional son $J/(kg \times ^\circ C)$ y de forma general depende del material y de la temperatura, y por tanto si el sistema es heterogéneo depende de la posición y de la temperatura, $c(\vec{x}, u)$. Para sistemas homogéneos (formados por un mismo material conductor) y si las variaciones de temperatura no son muy grandes, el calor específico c se puede considerar constante.

⁴³Masa por unidad de volumen (denominada densidad volumétrica, kg/m^3), de superficie (denominada densidad superficial, kg/m^2) o de longitud (denominada densidad lineal, kg/m).

⁴⁴Cantidad de energía calorífica que atraviesa una superficie (energía por unidad de superficie y unidad de tiempo) ($J/(m^2 \times s)$) o que atraviesa una curva (energía por unidad de longitud y unidad de tiempo) ($J/(m \times s)$). Tiene un carácter vectorial y de ahí que sea necesario multiplicarlo por el vector normal de la superficie o de la curva $\vec{n}$ para determinar el flujo efectivo. Se considera flujo positivo al que sale hacia el exterior del sólido y negativo hacia el interior. Viene definido de forma empírica por la conocida *ley de Fourier*, $\Phi = -\mu \nabla u$, donde μ es la *conductividad térmica* que mide la capacidad de la conducción de calor en un material. Generalmente $\mu u(\vec{x}, u)$ aunque al igual que el calor específico c , para sistemas homogéneos con variaciones de temperatura no muy grandes se puede considerar constante.

⁴⁵Ver la **Sección 11.8, página 420**.

⁴⁶Según la *regla integral de Leibniz*, si $f(x, t)$ es una función continua y derivable en un dominio, entonces $\frac{d}{dt} \int f(x, t) dx = \int \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx$.

11.4.2. Ecuación del Calor Unidimensional

Estudiaremos el fenómeno de la transferencia de calor por *conducción*⁴⁷ en una varilla delgada de material conductor con *difusividad térmica*⁴⁸ k dada por:



$$k = \frac{\mu}{\rho c} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu : \text{conductividad térmica}^{49} \\ \rho : \text{densidad} \\ c : \text{calor específico}^{50} \end{array} \right.$$

Consideraremos las siguientes suposiciones para la simplificación del problema:

- La longitud de la varilla L es constante.
- El material conductor es homogéneo y con k constante.
- El área lateral de la varilla es muy pequeña, de forma que la conducción del calor se considera solo en una dirección x (problema unidimensional).
- No hay generación de calor en el interior de la varilla.

Bajo estas suposiciones la variación de *temperatura* $u(x, t)$ en el interior de la varilla viene dada por la EDP conocida como **ecuación unidimensional del calor** o **ecuación de difusión**:

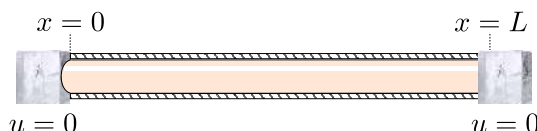
$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad ; \quad k > 0$$

que es del tipo *parabólico*⁵¹. El dominio Ω de esta ecuación es la varilla, considerada una línea recta en la dirección x y su frontera $\partial\Omega$ está formada por los extremos derecho e izquierdo y la superficie lateral de la varilla.

Vamos a analizar la solución de diferentes problemas en EDP formados por esta ecuación y determinadas condiciones iniciales y de contorno sencillas.

Caso 1: Superficie Lateral Aislada y Condiciones Dirichlet

Vamos a considerar el caso de una varilla aislada en su superficie lateral y donde los extremos $x = 0$ y $x = L$ se encuentran a temperatura constante⁵² igual a cero⁵³, por lo que solo existe conducción de calor en el interior de la varilla en la dirección x .



Inicialmente a tiempo $t = 0$ suponemos que hay una distribución de temperatura en el interior de la varilla que viene dada por una función $f(x)$. Estamos interesados en conocer la evolución de la temperatura con el tiempo en todos los puntos $0 < x < L$. Claramente, debido al fenómeno de la conducción del calor, éste fluirá de la zonas más calientes a las zonas más frías, hasta alcanzarse un estado estacionario⁵⁴ que corresponderá con una distribución lineal de temperatura en función de los valores frontera⁵⁵.

El problema en EDP para este caso se puede expresar de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{ll} k u_{xx} = u_t & 0 < x < L \quad ; \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0 \quad , \quad u(L, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < L \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(EDP interior varilla)} \\ \text{(Cond. contorno Dirichlet)} \\ \text{(Cond. iniciales)} \end{array} \quad (11.5)$$

⁴⁷Ver la [Sección 11.4.2, página 378](#) para el caso de transferencia de calor por *convección*.

⁴⁸Capacidad térmica de un material.

⁴⁹Proporcional al flujo de calor Q .

⁵⁰Calor necesario para subir 1°C la temperatura.

⁵¹Ver la [Sección 11.1.4, página 364](#).

⁵²En el caso 3 de la [Sección 11.4.2, página 377](#) se verá el caso de temperaturas constantes no nulas.

⁵³Se puede suponer de forma ideal que los extremos están en contacto con un bloque de hielo a temperatura 0°C como muestra la figura.

⁵⁴Realmente este se obtiene a tiempo infinito pero la velocidad de cambio va disminuyendo con el tiempo.

⁵⁵En este caso, claramente la temperatura de toda la barra a tiempos grandes tiene que ser cero, igual a la temperatura que hay en sus dos extremos. Parte del calor que inicialmente contenía la barra será absorbido por el hielo, que suponemos se encuentra en condiciones ideales para que no varíe su temperatura.

Vamos calcular la solución particular de este problema mediante el *método de separación de variables*. Suponemos que la solución se puede expresar como producto de dos funciones que dependen solo de una variable. Determinando la derivadas y sustituyendo en la EDP se tiene.

$$u(x, t) = X(x)T(t) \implies \begin{cases} u_{xx} = X''T \\ u_t = XT' \end{cases} \implies kX''T = XT' \quad ; \quad \frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT}$$

Claramente este método sí es válido para esta ecuación. Para que pueda cumplirse esta igualdad entre variables independientes x y t , es necesario que ambas partes de la igualdad sean iguales a una misma constante⁵⁶, que por comodidad la expresaremos como⁵⁷ $-\lambda$, obteniéndose dos ecuaciones:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = -\lambda \implies \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & \text{(Ec. 1)} \\ T' + \lambda kT = 0 & \text{(Ec. 2)} \end{cases} \quad (11.6)$$

que junto con las condiciones iniciales y de contorno apropiados en cada caso dan lugar a dos *problemas de autovalores*⁵⁸.

Problema 1

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & \text{(Ec. 1)} \\ X(0) = X(L) = 0 & \text{(Cond. frontera)} \end{cases}$$

Este es un problema básico de Sturm-Liouville que ya fue resuelto en la [Sección 10.2.1, página 338](#), siendo sus autovalores y autofunciones asociadas:

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad ; \quad X_n(x) = c_{2n} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad (11.7)$$

Problema 2

Teniendo en cuenta los autovalores λ_n calculados anteriormente se tiene:

$$\begin{cases} T' + k\lambda_n T = 0 & \text{(Ec. 2)} \\ u(x, 0) = X(x)T(0) = f(x) & \text{(Cond. inicial)} \end{cases} \quad (11.8)$$

En este caso se trata de una EDO de primer orden separable⁵⁹, siendo la solución:

$$\int \frac{dT}{T} = -k\lambda_n t \quad ; \quad \log T = -k\lambda_n t + c_3 \quad ; \quad T(t) = c_3 e^{-k\lambda_n t}$$

Teniendo en cuenta el valor de los autovalores λ_n obtenidos en el problema anterior, Ecuación (??), se tiene:

$$T_n(t) = c_n e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2} \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

Por tanto una solución completa para $n > 0$ será:

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = c_{3n} e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Para cada valor de n se obtiene una posible solución al problema, por tanto por el *principio de superposición*⁶⁰ la solución general del problema dado en la [Ecuación 11.5, página 372](#) es:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

⁵⁶De otra forma habría alguna relación entre x y t y dejarían de ser independientes.

⁵⁷El resultado es el mismo si lo expresamos como $+\lambda$.

⁵⁸Ver la [Definición 10.1, página 337](#).

⁵⁹Ver la [Sección 2.2, página 29](#).

⁶⁰Ver la [Sección 11.2.2, página 370](#).

Las constantes c_n se pueden obtener a través de la condición inicial de la [Ecuación 11.8, página 373](#):

$$u(x, 0) = X(x)T(0) = f(x) \quad \Rightarrow \quad u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

Esto corresponde con la *serie de Fourier de senos*⁶¹ de $f(x)$ y por tanto las constantes c_n correspondientes a los coeficientes de la serie se pueden obtener como:

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(s) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}s\right) ds$$

Siendo por tanto la solución particular final de nuestro problema:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L f(s) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}s\right) ds \right) e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (11.9)$$

En la [Figura 11.1](#) se muestran la gráficas de resultados obtenidos en un par de ejemplos.

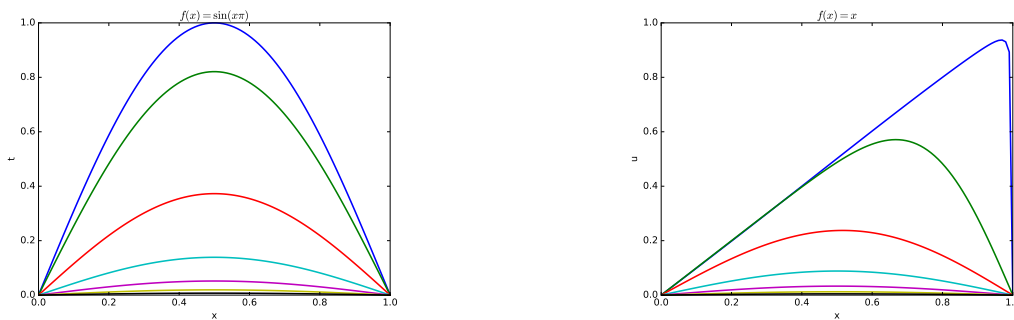


Figura 11.1: Resultados obtenidos en la ecuación del calor unidimensional con condiciones Dirichlet y valores $L = k = 1$, utilizando diferentes funciones $f(x)$ como condición inicial. En cada una de las gráficas se muestran los perfiles de temperatura de la varilla a distintos tiempos (colores). En ambos casos se han utilizado una aproximación de 200 términos en la serie que define la solución $u(x, t)$. Podemos observar como a medida que evoluciona el tiempo desde $t = 0$ (gráfica azul) la temperatura de todos los puntos interiores de la varilla tienden a la temperatura 0 de los extremos. Hay por tanto una pérdida de calor por los extremos.

Función de Green del Problema

La solución (11.9) del problema puede expresarse alternativamente de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L f(s) \operatorname{sen} \frac{n\pi s}{L} ds \right) e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = \\ &= \int_0^L \underbrace{\left(\frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi s}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \right)}_{G(x, t, s)} f(s) ds = \int_0^L G(x, t, s) f(s) ds \end{aligned}$$

donde $G(x, t, s)$ es la **función de Green**⁶² de este problema.

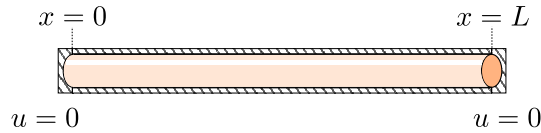
Caso 2: Superficie Lateral Aislada y Condiciones Neumann

Vamos a considerar un problema similar al caso 1 de la [Sección 11.4.2, página 372](#), salvo que los extremos $x = 0$ y $x = L$ también se encuentran aislados térmicamente al igual que la superficie lateral, y por tanto no habrá transferencia de calor con el exterior⁶³ en ningún punto.

⁶¹Ver la [Sección 9.4.4, página 329](#).

⁶²Ver la [Definición 3.11, página 83](#).

⁶³A pesar de ello, como en el interior de la barra existe un perfil de temperatura inicial, se produce transferencia de calor y una variación de la temperatura en todos sus puntos con el tiempo.



Matemáticamente las condiciones en los extremos se expresan indicando que la variación de temperatura con respecto a la variable x es siempre cero, $u_x(0,t) = 0$ y $u_x(L,t) = 0$, siendo el PVF asociado a este caso el siguiente:

$$\begin{cases} ku_{xx} = u_t & 0 < x < L ; t > 0 & \text{(EDP interior varilla)} \\ u_x(0,t) = 0, u_x(L,t) = 0 & t > 0 & \text{(Cond. frontera Neumann)} \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < L & \text{(Cond. iniciales)} \end{cases}$$

Siguiendo el mismo procedimiento del caso 1, al aplicar el *método de separación de variables* se obtienen las dos mismas EDO de la [Ecuación 11.6, página 373](#) y sus correspondientes problemas con las condiciones iniciales y de frontera que resolveremos por separado.

Problema 1

En este caso solo cambian las condiciones frontera:

$$u_x(0,t) = X'(0)T(t) = 0 \implies X'(0) = 0$$

ya que al igual que el caso anterior $T(t)$ no puede ser nula para todo t . De igual forma se obtiene:

$$u_x(L,t) = X'(L)T(t) = 0 \implies X'(L) = 0$$

de forma que el primer problema queda como:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & \text{(Ec. 1)} \\ X'(0) = X'(L) = 0 & \text{(Cond. frontera)} \end{cases}$$

Este es un problema básico de Sturm-Liouville que ya fue resuelto en la [Sección 10.2.1, página 340](#), siendo sus autovalores y autofunciones asociadas:

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad ; \quad X_n(x) = c_{2n} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Notar que en este caso aparece el coseno en lugar del seno del Problema 1 del Caso 1 en la [Ecuación 11.7, página 373](#), además de haber incluido el valor de $n = 0$ que da lugar a una solución constante.

Problema 2

Teniendo en cuenta los autovalores λ_n calculados anteriormente se tiene:

$$\begin{cases} T' + k\lambda_n T = 0 & \text{(Ec. 2)} \\ u(x,0) = X(x)T(0) = f(x) & \text{(Cond. inicial)} \end{cases}$$

En este caso repitiendo los mismos pasos del **Problema 2** del **Caso 1** ([Ecuación 11.8, página 373](#)) se obtiene:

$$T' + k\lambda_n T = 0 \quad ; \quad \int \frac{dT}{T} = -k\lambda_n dt \quad ; \quad \log T = -k\lambda_n t + c_3 \quad ; \quad T(t) = c_3 e^{-k\lambda_n t}$$

$$T_n(t) = c_{3n} e^{-kn^2\pi^2 t/L^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Por tanto la solución completa es:

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = c_n e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

y por el *principio de superposición* la solución general será:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Las constantes c_n se pueden obtener a través de la condición inicial del problema:

$$u(x, 0) = f(x) \quad \Rightarrow \quad u(x, 0) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

que corresponde en este caso con la *serie de Fourier de cosenos*⁶⁴ de $f(x)$ y por tanto las constantes c_n se pueden obtener como:

$$c_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(s) ds \quad ; \quad c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(s) \cos\left(\frac{n\pi}{L}s\right) ds$$

Siendo finalmente la solución particular del problema la siguiente:

$$u(x, t) = \frac{1}{L} \int_0^L f(s) ds + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L f(s) \cos \frac{n\pi s}{L} ds \right) e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (11.10)$$

En la **Figura 11.2** se muestran la gráficas de resultados obtenidos en un par de ejemplos, utilizando las mismas funciones de la **Figura 11.1**, página 374.

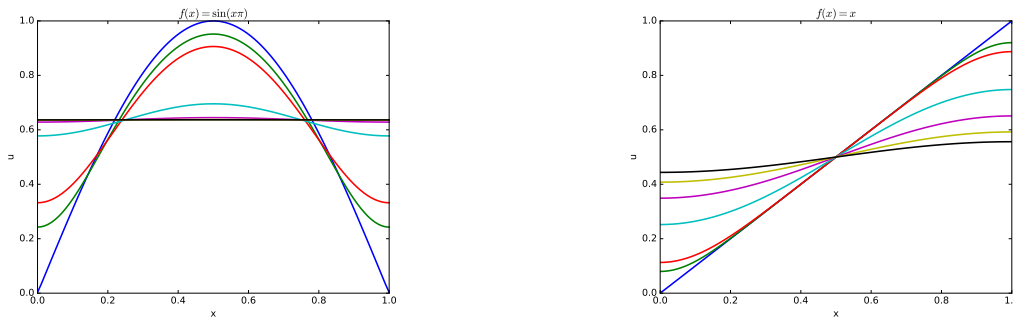


Figura 11.2: Resultados obtenidos en la ecuación del calor con condiciones Neumann y los mismos valores de los *parámetros* que los utilizados en la **Figura 11.1**, página 374. En estos casos podemos observar como a medida que evoluciona el tiempo desde $t = 0$ (gráfica azul), la temperatura de todos los puntos internos de la varilla tienden a homogeneizarse al valor constante correspondiente a la temperatura promedio. Esto se debe a que no hay pérdidas de calor al estar aislados tanto la superficie lateral como los dos extremos. Notar que salvo a $t = 0$, los extremos de todas las gráficas tienen pendiente horizontal (derivada cero) correspondiente a las condiciones Neumann.

Las condiciones Dirichlet y Neumann pueden aparecer en un mismo problema, por ejemplo, con un extremo de la varilla a temperatura constante y el otro aislado.

Función de Green del Problema

La solución (11.10) del problema puede expresarse alternativamente de la siguiente forma:

$$u(x, t) = \int_0^L \underbrace{\left(\frac{1}{L} + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi s}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \right)}_{G(x, t, s)} f(s) ds = \int_0^L G(x, t, s) f(s) ds$$

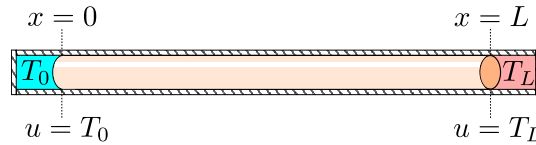
donde $G(x, t, s)$ es la **función de Green**⁶⁵ de este problema.

⁶⁴Ver la **Sección 9.4.4**, página 328.

⁶⁵Ver la **Definición 3.11**, página 83.

Caso 3: Condiciones Dirichlet No Homogéneas

Estudiamos ahora el caso de una barra metálica aislada en su superficie lateral y con temperatura constante en sus dos extremos⁶⁶: T_0 es la temperatura en el extremo $x = 0$ y T_L es la temperatura en $x = L$.



El problema matemático que describe este sistema está formado por la ecuación del calor, unas condiciones iniciales y unas condiciones frontera de tipo Dirichlet no nulas, conocidas como **condiciones no homogéneas**⁶⁷, de la forma:

$$\begin{cases} ku_{xx} = u_t & 0 < x < L ; t > 0 & \text{(EDP interior varilla)} \\ u(0, t) = T_0, \quad u(L, t) = T_L & t > 0 & \text{(Cond. frontera Dirichlet)} \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < L & \text{(Cond. iniciales)} \end{cases}$$

Este problema a pesar de ser similar al Caso 1 (Sección 11.4.2, página 372), las condiciones Dirichlet no nulas hacen que el uso del método tradicional no resulte sencillo para encontrar los autovalores del problema⁶⁸. En esta sección vamos a ver un método alternativo de cálculo más sencillo, basado en la descomposición del problema en dos más simples.

Debido a las condiciones frontera, es lógico pensar que la temperatura $u(x, t)$, solución de este problema, tendrá inicialmente un perfil dado por la condición inicial $f(x)$ y a medida que avanza el tiempo sufrirá unas determinadas variaciones hasta alcanzar un estado **estacionario**, a tiempo infinito, donde la temperatura solo dependerá de la posición x y no del tiempo t . Por tanto podemos descomponer la solución del problema $u(x, t)$ en la suma de dos funciones como:

$$u(x, t) = v(x, t) + u_{\infty}(x)$$

donde $v(x, t)$ es la **solución transitoria** que depende tanto de x como de t y que tiende a cero a medida que $t \rightarrow \infty$, y donde $u_{\infty}(x)$ es la **solución estacionaria** que es el perfil de temperatura fijo que se alcanza a tiempos suficientemente grandes y que solo depende de la posición.

La solución estacionaria $u_{\infty}(x)$ es fácil de calcular en este caso, ya que al no depender del tiempo, su derivada con respecto a t es igual a cero y por tanto sustituyendo en la EDP del problema se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{\infty} = 0 \xrightarrow{ku_{xx}=u_t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{\infty} = 0 \quad ; \quad u_{\infty} = c_1 + c_2 x \quad \left\{ \begin{array}{l} u(0, t) = T_0 \\ u(L, t) = T_L \end{array} \right\} \quad u_{\infty}(x) = T_0 + \frac{T_L - T_0}{L} x$$

Notar que esta función corresponde con una línea recta que une los puntos $(0, T_0)$ y (L, T_L) . Una vez conocido el *estado estacionario* $u_{\infty}(x)$, la *solución transitoria* $v(x, t)$ se puede obtener resolviendo el siguiente problema con condiciones de contorno homogéneas:

$$\begin{cases} kv_{xx} = v_t & 0 < x < L ; t > 0 & \text{(EDP interior varilla)} \\ v(0, t) = 0, \quad v(L, t) = 0 & t > 0 & \text{(Cond. frontera Dirichlet)} \\ v(x, 0) = f(x) - u_{\infty}(x) & 0 < x < L & \text{(Cond. iniciales)} \end{cases}$$

que es similar al Caso 1 de la Sección 11.4.2, página 372 (solo cambia la función de la condición inicial) y por tanto cuya solución es:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L [f(s) - u_{\infty}(s)] \sin \frac{n\pi s}{L} ds \right) e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

⁶⁶En la figura se representa en cada extremo de la barra un medio, por ejemplo un líquido, aislado a temperatura constante en contacto con la superficie del extremo. Los colores indican que la temperaturas T_0 y T_L pueden ser iguales o distintas.

⁶⁷Si ambas son nulas, como en los dos casos anteriores se denominan *condiciones Dirichlet homogéneas*.

⁶⁸Se recomienda probar a resolverlo para darse cuenta de ello.

que puede expresarse a través de su **función de Green** de la forma:

$$v(x, t) = \int_0^L \left(\frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi s}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \right) [f(s) - u_{\infty}(s)] ds = \int_0^L G(x, t, s) [f(s) - u_{\infty}(s)] ds$$

y la solución final del problema puede expresarse entonces como:

$$u(x, t) = v(x, t) + u_{\infty}(x) = \int_0^L G(x, t, s) \left[f(s) - T_0 - \frac{T_L - T_0}{L} s \right] ds + T_0 + \frac{T_L - T_0}{L} x$$

En la **Figura 11.3** se muestra la gráfica de resultados obtenidos en un ejemplo práctico de este caso.

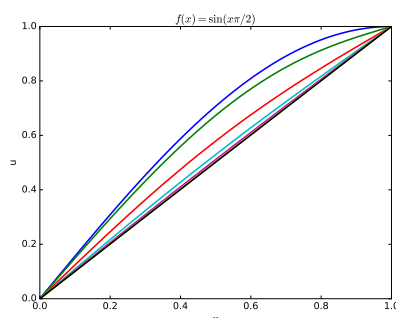
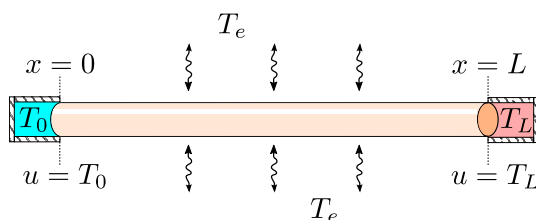


Figura 11.3: Resultados obtenidos en la ecuación del calor con condiciones Dirichlet no homogéneas, tomando como valores $L = k = 1$ y como condición inicial $f(x) = \sin(x\pi/2)$, de forma que $u(0, t) = 0$ y $u(L, t) = 1$. Podemos observar como a medida que evoluciona el tiempo desde $t = 0$ (gráfica azul), la temperatura tiende a la recta $u_{\infty}(x) = 0 + \frac{1-0}{1}x = x$, (gráfica negra). En este caso no hay pérdida de calor, al estar la varilla totalmente aislada, y simplemente hay una redistribución del perfil de temperatura inicial.

Este procedimiento de *descomponer un problema* en su parte estacionaria más otro problema con condiciones de contorno homogéneas, es una técnica que se puede utilizar en la resolución de otros casos más complicados, como veremos a continuación.

Caso 4: Superficie Lateral No Aislada

En los dos casos anteriores se ha supuesto que la superficie lateral de la varilla estaba aislada y por tanto no había transferencia de calor con el exterior en esa parte. Vamos a estudiar ahora el caso en el que los extremos se encuentren a temperatura constante pero la superficie esté en contacto directo con el medio exterior, sin ningún tipo de aislamiento.



En este caso, el calor fluirá no solo en el interior de la varilla por *conducción* sino que también habrá una pérdida o ganancia del mismo por *convección*, en función de la temperatura del exterior⁶⁹ constante T_e .

⁶⁹La temperatura del medio T_e se supone que está medida a una distancia suficientemente alejada de la varilla, ya que en el medio exterior cerca del extremo $x = L$ tiene que haber una temperatura variable en función del tiempo como consecuencia de la transferencia de calor con la varilla.

Una forma simplificada de modelizar la transferencia de calor en el interior de la varilla es mediante la siguiente ecuación.

$$\boxed{\underbrace{ku_{xx}}_{\text{I}} + \underbrace{h(T_e - u)}_{\text{II}} = u_t} \quad \begin{cases} u & : \text{temperatura interior varilla} \\ T_e & : \text{temperatura exterior} \\ k & : \text{difusividad térmica (conducción), } k > 0 \\ h & : \text{coef. intercambio calor (convección), } h > 0 \end{cases} \quad (11.11)$$

- **Término I** : Transmisión de calor por conducción en el interior de la varilla.
- **Término II** : Transmisión de calor por convección en la superficie de la varilla.

donde la difusividad térmica k depende exclusivamente del material de la barra, mientras que el coeficiente de intercambio de calor h depende tanto del material de la barra como del medio exterior que rodea a su superficie lateral.

Vamos a seguir el procedimiento del anterior Caso 3 de *descomposición del problema*. Se entiende que inicialmente hay un perfil de temperatura dado en el interior de la barra $f(x)$ y a medida que avanza el tiempo hay una serie de variaciones espacio-temporales de la temperatura que vienen dadas por la *solución transitoria* $v(x, t)$ y que a tiempos suficientemente grandes se alcanza un *estado estacionario* $u_\infty(x)$ independiente del tiempo, cumpliéndose:

$$\boxed{u(x, t) = v(x, t) + u_\infty(x)} \quad (11.12)$$

Para determinar la solución estacionaria $u_\infty(x)$ se puede sustituir en la **Ecuación (11.11)** teniendo en cuenta que $u_t = 0$ obteniéndose:

$$ku_\infty'' + h(T_e - u_\infty) = 0 \quad ; \quad ku_\infty'' - hu_\infty = -hT_e \quad (11.13)$$

donde $u_\infty'' = \frac{d^2}{dx^2}u_\infty$. Esta ecuación es una EDO lineal de segundo orden no homogénea⁷⁰ cuya solución general es⁷¹:

$$\boxed{u_\infty(x) = c_1 e^{x\sqrt{h/k}} + c_2 e^{-x\sqrt{h/k}} + T_e}$$

y teniendo en cuenta las condiciones frontera $u_\infty(0) = T_0$ y $u_\infty(L) = T_L$ se pueden determinar las constantes de integración (solución particular):

$$c_2 = \frac{T_L - T_e - (T_0 - T_e)e^{L\sqrt{h/k}}}{e^{-L\sqrt{h/k}} - e^{L\sqrt{h/k}}} \quad ; \quad c_1 = T_0 - T_e - c_2$$

Para encontrar el problema que define la solución transitoria $v(x, t)$ se deriva la **Ecuación (11.12)** obteniéndose:

$$\begin{cases} u_x = v_x + u_\infty' \\ u_{xx} = v_{xx} + u_\infty'' \\ u_t = v_t \end{cases}$$

e introduciendo estos valores en la **Ecuación (11.11)** y teniendo en cuenta la **Ecuación (11.13)** se tiene:

$$k(v_{xx} + u_\infty'') + h(T_e - v - u_\infty) = v_t \quad \implies \quad kv_{xx} + \underbrace{ku_\infty'' + h(T_e - u_\infty)}_0 - hv = v_t$$

Por tanto el problema que define la solución transitoria es:

$$\begin{cases} kv_{xx} - hv = v_t & 0 < x < L \quad ; \quad t > 0 \\ v(0, t) = 0 \quad , \quad v(L, t) = 0 & t > 0 \\ v(x, 0) = f(x) - u_\infty(x) & 0 < x < L \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(EDP interior varilla)} \\ \text{(Cond. frontera Dirichlet homogéneas)} \\ \text{(Cond. iniciales)} \end{array}$$

Esta EDP se puede resolver mediante el método de separación de variables de la siguiente forma⁷²:

$$v = XT \quad ; \quad \frac{X''}{X} = \frac{T' + hT}{kT} = -\lambda^2 \quad \implies \quad \begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ T' + (h + k\lambda^2)T = 0 \end{cases}$$

⁷⁰Ver la **Sección 3.3, página 72**.

⁷¹Se puede encontrar fácilmente por ejemplo aplicando el *método de los coeficientes indeterminados* (**Sección 3.3.1, página 72**).

⁷²Aquí se utiliza como constante $-\lambda^2$ por conveniencia en la simplificación del proceso, pero se puede tomar cualquier otro valor obteniéndose el mismo resultado.

cuyas respectivas soluciones son:

$$X_n(x) = c_{3n} \cos \lambda_n x + c_{4n} \sin \lambda_n x \quad ; \quad T_n(t) = c_{5n} e^{-(h+k\lambda_n^2)t}$$

y teniendo en cuenta las condiciones de contorno $X(0) = X(L) = 0$ se tiene que $c_{3n} = 0$ y $\lambda_n = n\pi/L$ con $n = 1, 2, \dots$. Por tanto:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(h+k\lambda_n^2)t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad ; \quad A_n = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - u_{\infty}(x)] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

En la **Figura 11.4** se muestran la gráficas de resultados obtenidos en un par de ejemplos prácticos de este caso.

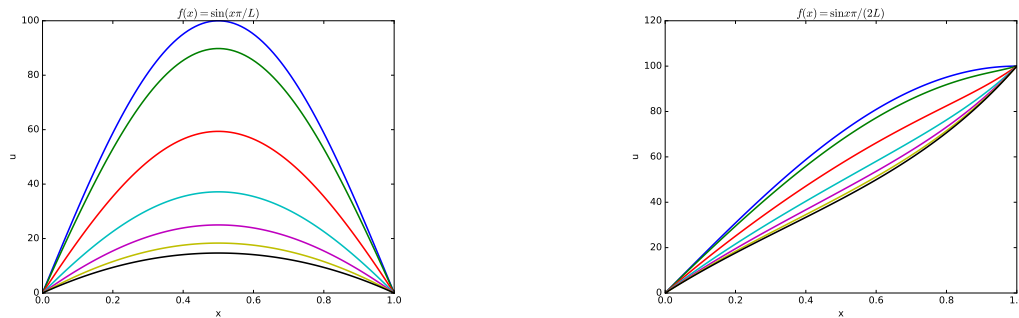
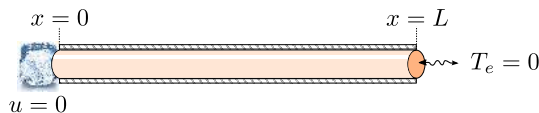


Figura 11.4: Resultados obtenidos en la ecuación del calor con condiciones Dirichlet no homogéneas y valores $L = 1$, $k = 1$, $h = 5$ y $T_e = 25$. En la gráfica de la izquierda se ha tomado como condición inicial $f(x) = 100 \sin(\pi x/L)$ (curva azul) y valores en la frontera $T_0 = T_L = 0$, observándose que como consecuencia de la transmisión de calor con el exterior el perfil de temperatura estacionario (curva negra) no es plano, como sí ocurre cuando la superficie lateral está aislada (ver la **Figura 11.1**, página 374). En la gráfica de la derecha se ha tomado como condición inicial $f(x) = 100 \sin \pi x/(2L)$ (curva azul) y valores en la frontera $T_0 = 0$ y $T_L = 100$, observándose que como consecuencia de la transmisión de calor con el exterior el perfil de temperatura estacionario (curva negra) no es una línea recta, como sí ocurre cuando la superficie lateral está aislada (ver la **Figura 11.3**, página 378).

Caso 5: Condiciones Dirichlet + Robin

Vamos a considerar ahora el caso de una varilla con la superficie lateral aislada, uno de los extremos a temperatura constante, por ejemplo⁷³ $u = 0$ (condición de tipo Dirichlet), y el otro en contacto directo con el medio exterior (condición de tipo Robin), siendo la temperatura constante del medio exterior T_e , que por simplicidad vamos a suponer $T_e = 0$.



El PVF de este caso se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{cases} ku_{xx} = u_t & 0 < x < L \ ; \ t > 0 & \text{(EDP interior varilla)} \\ u(0, t) = 0 & t > 0 & \text{(Cond. frontera Dirichlet)} \\ u_x(L, t) = -hu(L, t) & t > 0 & \text{(Cond. frontera Robin)} \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < L & \text{(Cond. iniciales)} \end{cases}$$

donde h es un valor constante representativo de la transferencia de calor entre la varilla y el medio ambiente en ese extremo⁷⁴. Esta condición frontera Robin establece que la velocidad de transferencia de calor u_x entre el

⁷³Podemos suponer idealmente que ese extremo está en contacto con un trozo de hielo.

⁷⁴El valor y las unidades de este coeficiente h son distintos del valor de h que aparece en el Caso 4 anterior.

extremo derecho de la varilla y el medio ambiente es proporcional a la diferencia de temperatura, en cada tiempo, entre el extremo y el medio circundante. Notar que si la temperatura exterior T_e es superior a la temperatura del extremo $x = L$, entonces $u_x(L, t) > 0$ y hay una transferencia de calor del medio a la varilla⁷⁵, y de igual forma si $T_e < u(L, t)$ entonces $u_x(L, t) < 0$ y la transferencia de calor se produce de la varilla al medio⁷⁶.

Aplicando separación de variables se obtienen los dos problemas siguientes:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = -\lambda \implies \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & \text{(Ec. 1)} \\ T' + \lambda kT = 0 & \text{(Ec. 2)} \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X'(L) + hX(L) = 0 \end{cases} ; \quad (2) \begin{cases} T' + k\lambda T = 0 \\ u(x, 0) = X(x)T(0) = f(x) \end{cases}$$

El problema (1) es un *problema regular de autovalores de Sturm-Liouville*⁷⁷, de forma que analizando los tres casos de λ : $\lambda = 0$, $\lambda > 0$ y $\lambda < 0$ se tiene:

- $\lambda = 0$

$$X = c_1 + c_2x \implies \begin{cases} X(0) = 0 \implies c_1 = 0 \\ X'(L) + hX(L) = 0 \implies c_2 + hc_2L = 0 ; c_2(1 + hL) = 0 \implies c_2 = 0 \end{cases}$$

Por tanto $\lambda = 0$ no es un autovalor, ya que $hL > 0$.

- $\lambda \neq 0$. La ecuación característica queda $m^2 + \lambda = 0 \implies m = \sqrt{-\lambda}$

$$1. \lambda < 0 \implies m = \pm\alpha, \text{ con } \alpha > 0 \implies X = c_1 \cosh(\alpha x) + c_2 \sinh(\alpha x)$$

$$\begin{cases} X(0) = 0 \implies c_1 = 0 \\ X'(L) + hX(L) = 0 \implies c_2\alpha \cosh(\alpha L) + hc_2 \sinh(\alpha L) = 0 ; c_2[\alpha \cosh(\alpha L) + h \sinh(\alpha L)] = 0 \end{cases}$$

Para que c_2 no fuera nulo se tendría que cumplir $\tanh(\alpha L) = -\alpha/h < 0$, que ocurre para⁷⁸ $\alpha L < 0$, lo que es imposible ya que α y L son positivos, y por tanto $c_2 = 0$ y $\lambda < 0$ tampoco es autovalor.

$$2. \lambda > 0 \implies m = \pm i\sqrt{\lambda} \implies X = c_1 \cos(x\sqrt{\lambda}) + c_2 \sin(x\sqrt{\lambda})$$

$$\begin{cases} X(0) = 0 \implies c_1 = 0 \\ X'(L) + hX(L) = 0 \implies c_2\sqrt{\lambda} \cos(L\sqrt{\lambda}) + hc_2 \sin(L\sqrt{\lambda}) = 0 \end{cases}$$

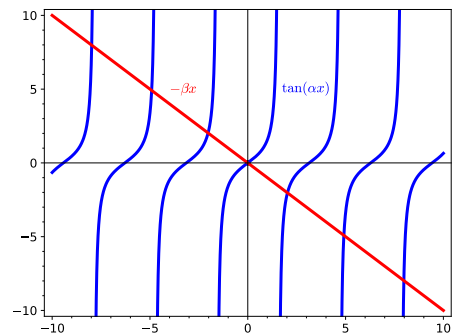
$$c_2[\sqrt{\lambda} \cos(L\sqrt{\lambda}) + h \sin(L\sqrt{\lambda})] = 0 \xrightarrow{c_2 \neq 0} \tan(L\sqrt{\lambda}) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h}$$

Notar que la ecuación:

$$\tan(\alpha x) = -\beta x \quad ; \quad \alpha, \beta > 0$$

tiene infinitas soluciones positivas $x = \mu_n$, por tanto los autovalores y autofunciones asociadas a este problema son:

$$\sqrt{L\lambda_n} = \mu_n \implies \boxed{\lambda_n = \frac{\mu_n^2}{L^2}} \quad \boxed{X_n(x) = c_2 \sin \frac{\mu_n x}{L}}$$



Con estos autovalores, la ecuación del problema (2) queda:

$$T' + k\lambda_n T = 0 \implies T' + \frac{k\mu_n^2}{L^2} T = 0 \implies \boxed{T_n(t) = c_n e^{-\frac{k\mu_n^2}{L^2} t}}$$

⁷⁵Aumentando por tanto la temperatura en ese extremo de la varilla.

⁷⁶Disminuyendo la temperatura en el extremo.

⁷⁷Ver la [Sección 10.3, página 344](#).

⁷⁸Ver la gráfica de la función $\tanh(x)$ en la [Sección 10.2.1, página 338](#).

Y la solución completa, teniendo en cuenta el principio de superposición:

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = A_n e^{-\frac{\kappa \mu_n^2}{L} t} \sin \frac{\mu_n x}{L} \quad \Rightarrow \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^n A_n e^{-\frac{\kappa \mu_n^2}{L} t} \sin \frac{\mu_n x}{L}$$

La determinación de los coeficientes se hace a través de la condición inicial del problema:

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^n A_n \sin \frac{\mu_n x}{L}$$

Notar que esta serie **no** corresponde con la *serie de Fourier de senos*⁷⁹, si no que corresponde con el desarrollo de la función $f(x)$ en términos de las autofunciones del anterior problema de Sturm-Liouville (1), que como sabemos forman un *conjunto completo ortogonal de funciones*⁸⁰ con respecto a la función peso $r(x)$, que en este caso es $r(x) = 1$.

Por tanto tenemos una **serie de Fourier Generalizada**⁸¹ y los coeficientes A_n pueden ser determinados mediante:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} A_n y_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{\mu_n x}{L} \quad \Rightarrow \quad A_n = \frac{\int_a^b r(x) f(x) y_n(x) dx}{\int_a^b r(x) y_n^2(x) dx} = \frac{\int_0^L f(x) \sin \frac{\mu_n x}{L} dx}{\int_0^L \sin^2 \frac{\mu_n x}{L} dx}$$

El resultado final se puede expresarse también a través de su **función de Green** como:

$$u(x, t) = \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\int_0^L \sin^2 \frac{\mu_n s}{L} ds} \sin \frac{\mu_n s}{L} \sin \frac{\mu_n x}{L} e^{-\frac{\kappa \mu_n^2}{L} t} f(s) ds = \int_0^L G(x, t, s) f(s) ds$$

En la **Sección 11.7.1, página 412** se analizarán problemas de la ecuación del calor en varias dimensiones, después de estudiar problemas con la ecuación de Laplace en la **Sección 11.6.1, página 402**, ya que estos últimos serán necesarios.

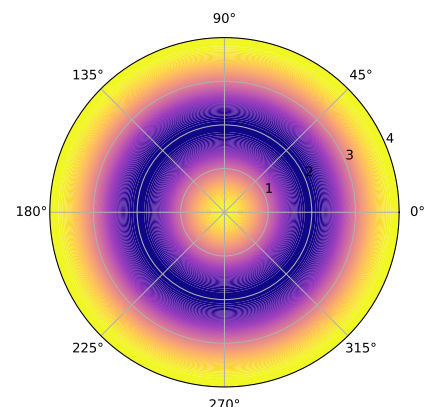
11.4.3. Ecuación del Calor en Polares con Simetría Radial

Consideramos la ecuación del calor en una placa bidimensional circular de radio r con **simetría radial** donde la solución no depende del ángulo⁸² θ .

En la figura se muestra el *mapa de contorno* coloreado de una función con simetría radial, donde cada color representa un valor en una determinada escala. Se observa que la variación de valores se produce en la dirección radial, pero esa distribución es la misma independientemente del ángulo. Usando coordenadas polares⁸³:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}}_0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

Notar que este caso corresponde con un problema unidimensional en el espacio, donde $u(r, t)$ solo depende de la variable espacial r .



⁷⁹Ver la **Sección 9.4.5, página 330**.

⁸⁰Ver la **Sección ??, página ??**.

⁸¹Ver el **Teorema 10.1, página 348**.

⁸²Notar que el tratamiento seguido aquí también sería equivalente al del problema del calor en una esfera de radio r y con *simetría radial*.

⁸³Un problema similar pero con la ecuación de onda se estudia en la **Sección 11.5.2, página 393**.

Resolvamos el siguiente problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) & r \in (0, a), t > 0 \\ u(a, t) = 0 & t > 0 \\ |u(0, t)| < \infty & t > 0 \\ u(r, 0) = f(r) & r \in (0, a) \end{cases} \quad \text{(Cond. Compatibilidad)} \quad (11.14)$$

Aplicando separación de variables: $u(r, t) = R(r)T(t)$

$$RT' = \frac{k}{r} T(rR')' \quad ; \quad \frac{T'}{kT} = \frac{1}{rR} T(rR')' = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (rR')' + \lambda rR = 0 & (1) \\ T' + k\lambda T = 0 & (2) \end{cases} \quad (11.15)$$

El primer problema es:

$$\begin{cases} (rR')' + \lambda rR = 0 & r \in (0, a) \\ R(a) = 0 \\ |R(0)| < \infty \end{cases} \quad \text{Cond. Compatibilidad}$$

Notar que al ser una EDO de segundo orden hay que imponer dos condiciones frontera, pero solo tenemos una en el borde $r = a$. En necesario imponer una nueva condición en el otro borde $r = 0$, denominada **condición de compatibilidad**⁸⁴, que será que la solución en $r = 0$ sea real.

Analizamos el primer problema de autovalores:

- $\lambda = 0$

$$(rR')' = 0 \quad ; \quad rR' = c_1 \quad ; \quad dR = \frac{C_1}{r} dr \quad ; \quad R(r) = c_1 \ln(r) + c_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{Cond. Compatibilidad:} & c_1 = 0 \\ R(a) = 0 : & c_2 = 0 \end{cases}$$

Por tanto, $\lambda = 0$ no es autovalor del problema.

- $\lambda \neq 0$

$$rR'' + R' + \lambda rR = 0 \quad \xrightarrow{\text{Multiplicando por } r} \quad r^2 R'' + rR' + \lambda Rr^2 = 0 \quad (11.16)$$

que corresponde con una **ecuación paramétrica de Bessel**⁸⁵ y por tanto haciendo el cambio de variable:

$$z = r\sqrt{\lambda} \quad ; \quad r = \frac{z}{\sqrt{\lambda}}$$

$$R(r) = R(z/\sqrt{\lambda}) = \phi(z) \quad ; \quad R'(r) = \frac{d\phi}{dz} \frac{dz}{dr} = \phi'(z)\sqrt{\lambda} \quad ; \quad R''(r) = \frac{d}{dz} \left[\phi'(z)\sqrt{\lambda} \right] \frac{dz}{dr} = \phi''(z)\lambda$$

Sustituyendo estos valores en la (11.16) se tiene:

$$\frac{z^2}{\lambda} \phi'' \cancel{\lambda} + \frac{z}{\sqrt{\lambda}} \phi' \cancel{\sqrt{\lambda}} + \phi \frac{z^2}{\lambda} \cancel{\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 \phi'' + z\phi' + z^2 \phi = 0$$

que es una **ecuación de Bessel**⁸⁶ de orden $m = 0$ y cuya solución es:

$$\phi(z) = c_1 J_0(z) + c_2 Y_0(z) \quad \xrightarrow{c.v.} \quad \boxed{R(r) = c_1 J_0(r\sqrt{\lambda}) + c_2 Y_0(r\sqrt{\lambda})}$$

Recordamos que la función Y_m no está acotada en el origen⁸⁷ y por tanto, por la concición de compatibilidad obliga a eliminar ese término, por tanto:

$$c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R(r) = c_1 J_0(r\sqrt{\lambda})$$

⁸⁴Ver la Sección 10.4, página 353.

⁸⁵Notar que es necesario que $\lambda > 0$ para que las soluciones sean reales. Ver la Sección 4.5.1, página 135.

⁸⁶Ver la Sección ??, página ??.

⁸⁷Ver la Sección ??, página ??.

Imponiendo la condición de contorno:

$$R(a) = 0 \implies c_1 J_0(r\sqrt{\lambda}) = 0$$

Para que $c_1 \neq 0$ el valor $a\sqrt{\lambda}$ deben coincidir con los ceros de esa función. Si denominamos z_m^n al n -ésimo cero de la función $J_m(x)$, entonces los autovalores y autofunciones asociadas a este caso son:

$$J_0(a\sqrt{\lambda}) = 0 \implies a\sqrt{\lambda_n} = z_0^n \implies \boxed{\lambda_n = \left(\frac{z_0^n}{a}\right)^2} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\boxed{R_n(r) = c_n J_0(r\sqrt{\lambda_n}) = c_n J_0\left(\frac{r z_0^n}{a}\right)}$$

Teniendo en cuenta los autovalores obtenidos, la solución del problema (2) de (11.15) viene dada por:

$$T' + k\lambda_n T = 0 \implies \boxed{T_n(t) = c_n e^{-k\lambda_n t}}$$

La solución final del problema, teniendo en cuenta el principio de superposición es:

$$\boxed{u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{r z_0^n}{a}\right) e^{-k\lambda_n t}}$$

Para determinar los coeficientes es necesario tener en cuenta la condición inicial del problema original (11.14).

$$u(r, 0) = f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{r z_0^n}{a}\right)$$

Notar que esto corresponde con la **serie de Fourier generalizada**⁸⁸ de la función $f(r)$ en términos de las funciones de Bessel. Teniendo en cuenta las propiedades de ortogonalidad de las funciones de Bessel⁸⁹ con la función peso r se tiene finalmente:

$$\boxed{A_n = \frac{\int_0^a f(r) J_0\left(\frac{r z_0^n}{a}\right) r dr}{\int_0^a J_0^2\left(\frac{r z_0^n}{a}\right) r dr} = \frac{2}{a^2 J_1^2(z_0^n)} \int_0^a f(r) J_0\left(\frac{r z_0^n}{a}\right) r dr} \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

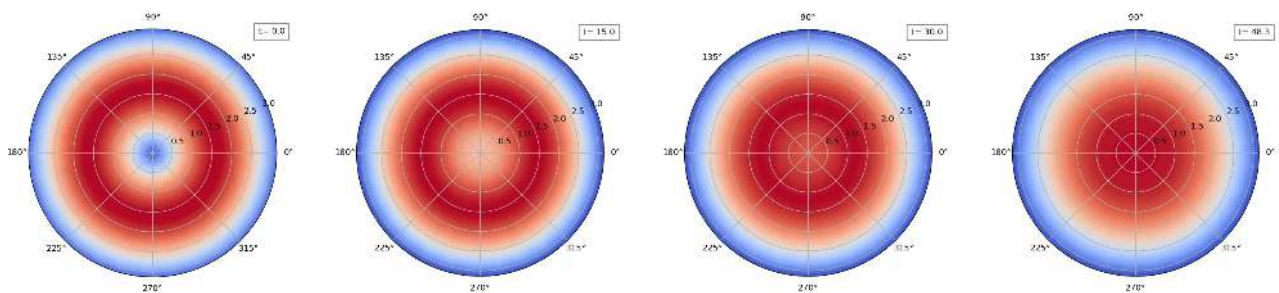


Figura 11.5: Simulación de un problema de la ecuación del calor en polares con simetría radial, donde se observa la distribución de temperatura en distintos tiempos para un disco de radio $R = \pi$ con condición inicial $f(r) = \sin r$ y condición frontera $u(R, t) = 0$. Las zonas azules indican bajas temperaturas y las rojas altas.

⁸⁸Ver la Sección 10.3.2, página 348.

⁸⁹Ver la Sección 10.4.1, página 355.

11.5. Ecuación de Onda

Una *onda* es una perturbación periódica que se propaga en un medio. Como hemos visto⁹⁰ la **ecuación de onda** es el ejemplo típico de una EDP hiperbólica. La función escalar $u(\vec{x}, t)$ puede ser, por ejemplo, una variación de la presión del medio en el que se propaga la onda; también puede ser un desplazamiento (respecto a unas posiciones de equilibrio) de partículas del gas, líquido o sólido al propagarse la onda.

Para desplazamientos pequeños en medios homogéneos, perfectamente elásticos con tensión constante y despreciando efectos de rozamiento y fuerzas externas, la función u satisface la siguiente EDP⁹¹:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u \quad u(\vec{x}, t) \quad ; \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^N$$

donde c es la **velocidad de propagación de la onda**⁹² y Δ es el *operador laplaciano*⁹³ en dimensión N . Esta ecuación básica se puede completar con otros términos que hacen referencia a fuerzas externas (como la gravedad) y rozamientos (amortiguación proporcional a la velocidad de la perturbación), de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha^2 \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \Delta u + f(\vec{x}, t)$$

La ecuación de onda aparece en muchas aplicaciones prácticas, siendo las más características:

- En una dimensión $N = 1$, vibración de una cuerda.
- En dos dimensiones $N = 2$, vibración de una membrana.
- En tres dimensiones $N = 3$, propagación de ondas acústicas y electromagnéticas.

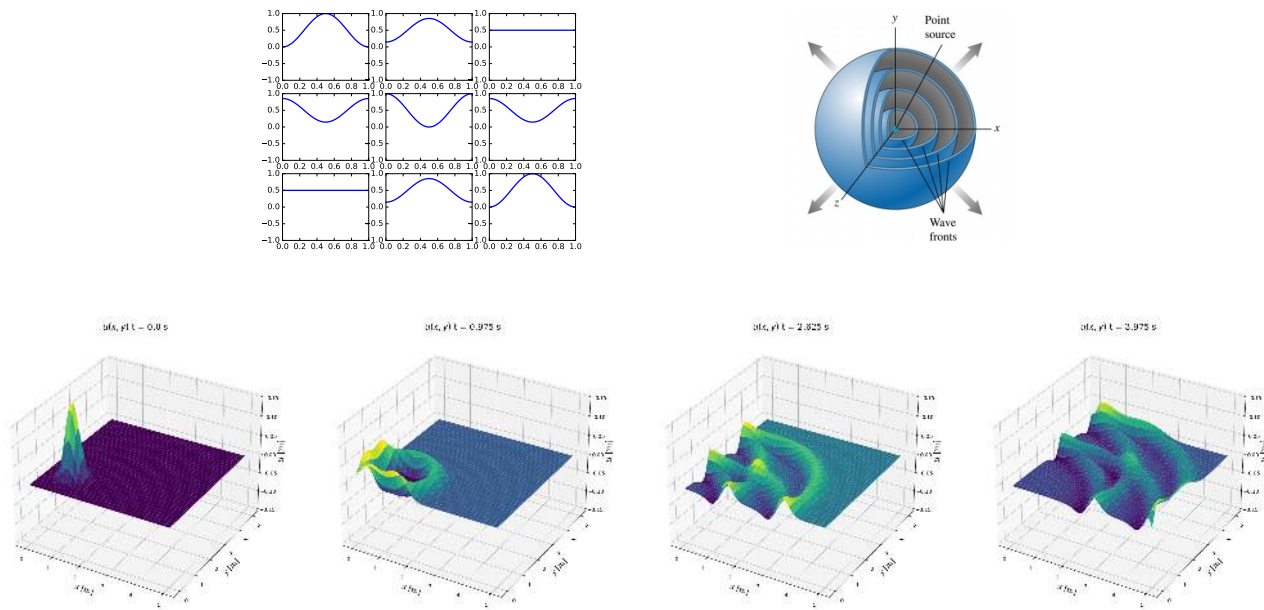


Figura 11.6: Representaciones de aplicaciones de la ecuación de onda. Arriba a la izquierda aparece la simulación espacio-temporal de las oscilaciones de una onda unidimensional modelada por la ecuación de onda. En la parte inferior aparecen cuatro gráficas de una simulación espacio-temporal de las vibraciones de una membrana bidimensional. Por último en la parte superior derecha aparece una onda tridimensional con simetría esférica.

⁹⁰Ver la Sección 11.1.4, página 364.

⁹¹La deducción de esta ecuación no se realizará aquí.

⁹²Nosotros la consideraremos un valor constante, aunque en muchos casos es una función dependiente de u .

⁹³Ver la Definición 11.3, página 363.

11.5.1. Ecuación de Onda Unidimensional

Consideremos el caso de una cuerda de longitud finita L , homogénea con densidad ρ constante y perfectamente flexible, la cual está sujeta en sus dos extremos con dispositivos que pueden ser fijos⁹⁴ o móviles verticalmente⁹⁵ y sometida a una tensión T constante y tangencial a cada punto de la cuerda. Si apartamos la cuerda de su posición de equilibrio y la soltamos, comenzará a vibrar, estando interesados en analizar la vibración producida. Para simplificar el problema se hacen las siguientes suposiciones:

- La cuerda vibra en un plano.
- El desplazamiento vertical $u(x, t)$ no se aparta mucho de su posición de equilibrio.

De esta forma el problema viene modelado, de una forma algo general, por la siguiente ecuación conocida como **ecuación de onda unidimensional**.

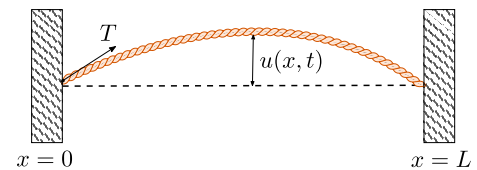
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{f(x, t)}{\rho} \quad ; \quad c^2 = \frac{T}{\rho}$$

En ella el término c^2 tiene unidades de velocidad, $k > 0$ suele ser un coeficiente relacionado con rozamiento o amortiguación. El término $f(X, y)$ está relacionado con fuerzas externas, donde ρ es la densidad lineal de la cuerda (masa por unidad de longitud).

Vamos a analizar la solución de diferentes PVF formados por esta ecuación y determinadas condiciones iniciales y de frontera.

Caso 1: Extremos Fijos (Condiciones Dirichlet)

Analizamos el caso en el que los extremos de la cuerda están fijos sin posibilidad de movilidad ni horizontal ni verticalmente.



En este caso el PVF es el siguiente:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & 0 < x < L \quad ; \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < L \\ u_t(x, 0) = g(x) & 0 < x < L \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(EDP interior varilla)} \\ \text{(Cond. frontera Dirichlet)} \\ \text{(Cond. inicial I)} \\ \text{(Cond. inicial II)} \end{array} \quad (11.17)$$

Los extremos en $x = 0$ y $x = L$ se encuentran fijos a $u = 0$. Como además aparece una segunda derivada temporal es necesario especificar dos condiciones iniciales, indicando la posición de la cuerda $f(x)$ y la velocidad en cada punto $g(x)$ a $t = 0$.

Vamos a calcular la solución particular de este problema mediante el *método de separación de variables*⁹⁶. Suponemos que la solución se puede expresar como producto de dos función que dependen solo de una variable.

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u_{xx} = X''T \\ u_{tt} = XT'' \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c^2 X''T = XT'' \quad ; \quad \frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T}$$

De esta forma comprobamos que este método es válido para esta ecuación. Para que pueda cumplirse esta igualdad entre las variables independientes x y t , es necesario que ambas partes de la igualdad sean iguales a una misma constante $-\lambda$, obteniéndose dos *problemas de autovalores*⁹⁷:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T} = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T'' + \lambda c^2 T = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(Ec. 1)} \\ \text{(Ec. 2)} \end{array}$$

Resolveremos cada ecuación por separado atendiendo a las condiciones iniciales y de frontera.

⁹⁴Permite variar libremente el ángulo formado por la cuerda y la pared vertical.

⁹⁵En este caso el ángulo entre la cuerda y la pared vertical es fijo a 90° .

⁹⁶Ver la [Sección 11.2, página 367](#).

⁹⁷Ver la [Definición 10.1, página 337](#).

Problema 1

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

Este problema es idéntico al tratado en el Problema 1 del Caso 1 de la ecuación del calor en la [Sección 11.4.2, página 373](#), obteniéndose la solución trivial no válida para $\lambda \leq 0$ y solo para $\lambda > 0$ se tiene:

$$L\sqrt{\lambda} = n\pi \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad \implies \quad \boxed{\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}} \quad ; \quad \boxed{X_n(x) = c_{2n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$$

Problema 2

Teniendo en cuenta los autovalores λ_n calculados anteriormente se tiene:

$$T'' + c^2\lambda_n T = 0$$

Teniendo en cuenta que los valores de λ_n determinados en el problema 1, la solución de este caso queda:

$$m^2 + c^2\lambda_n = 0 \quad \implies \quad m = \sqrt{-c^2\lambda_n} = \pm i \frac{n\pi c}{L}$$

$$\boxed{T_n(t) = c_{3n} \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + c_{4n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)} \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

Por tanto las soluciones completas serán⁹⁸:

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

Para cada valor de n se obtiene una solución al problema, por tanto por el *principio de superposición*⁹⁹ la solución completa será la combinación lineal de todas:

$$\boxed{u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$$

Las constantes A_n y B_n se pueden obtener a través de las dos condiciones iniciales del problema inicial (11.17):

- $u(x, 0) = f(x)$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

Esto corresponde con la serie de Fourier de senos¹⁰⁰ de $f(x)$ y por tanto las constantes A_n correspondientes a los coeficientes de la serie se pueden obtener como:

$$\boxed{A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx}$$

- $u_t(x, 0) = g(x)$

$$u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} \left[-A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi c}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = g(x)$$

Esto corresponde con la serie de Fourier de senos de $g(x)$ y por tanto las constantes B_n correspondientes a los coeficientes de la serie se pueden obtener como:

$$B_n \frac{n\pi c}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L g(s) \operatorname{sen} \frac{n\pi s}{L} ds \quad \implies \quad \boxed{B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx}$$

⁹⁸Se ha denominado $A_n = c_2 c_3$ y $B_n = c_2 c_4$.

⁹⁹Ver la [Sección 11.2.2, página 370](#).

¹⁰⁰Ver la [Sección 9.4.4, página 329](#).

La solución final se puede expresar a través de las **funciones de Green** del problema de la siguiente forma:

$$u(x, t) = \int_0^L \frac{1}{L} \left(2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi s}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \right) f(s) ds + \int_0^L \frac{1}{n\pi c} \left(2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi s}{L} \sin \frac{n\pi ct}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \right) g(s) ds$$

$$u(x, t) = \int_0^L G(x, t, s) \left[\frac{1}{L} f(s) + \frac{1}{n\pi c} g(s) \right] ds$$

donde $G(x, t, s)$ es la función de Green de este problema.

En la **Figura 11.7** se muestran las gráficas correspondientes a un caso práctico con $L = 1$, $a = 1$ y diferentes condiciones iniciales.

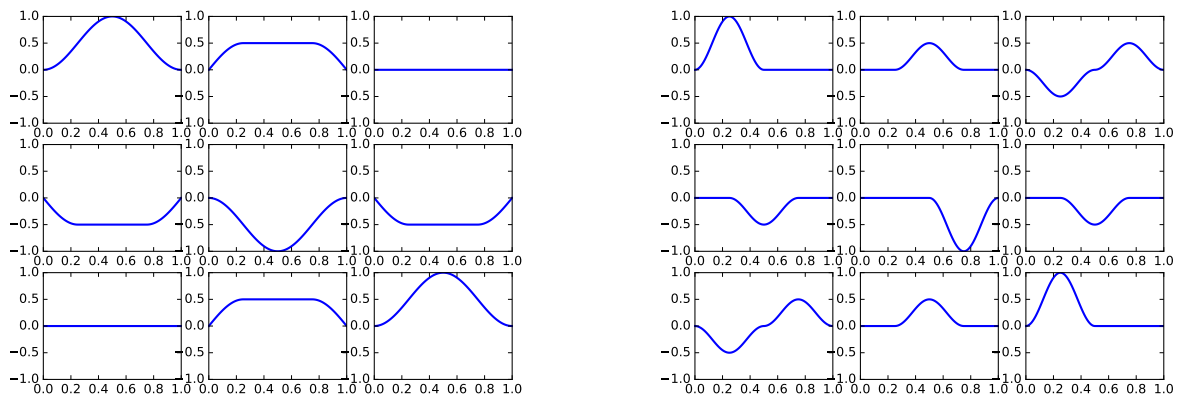


Figura 11.7: Resultados obtenidos en la ecuación de onda unidimensional con condiciones Dirichlet.

En la parte izquierda se muestra la evolución temporal para las condiciones iniciales $u(x, 0) = \sin^2(\pi x)$ y $u_t(x, 0) = 0$. La onda inicial oscila en torno a la posición de equilibrio, denominándose este tipo de movimiento *onda pulsada* y siendo un ejemplo de *ondas estacionarias*¹⁰¹.

En la parte derecha se muestra la evolución temporal para las condiciones iniciales:

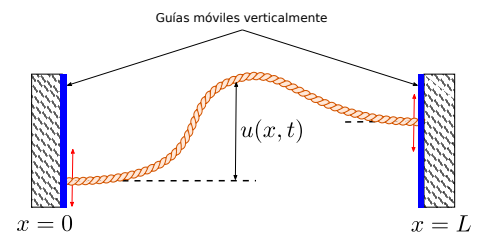
$$u(x, 0) = \begin{cases} \sin^2(2\pi x) & 0 \leq x < L/2 \\ 0 & L/2 \leq x \leq L \end{cases} \quad ; \quad u_t(x, 0) = 0$$

En este caso la onda inicial viaja en la parte positiva del eje vertical, rebotando en el extremo derecho, volviendo a viajar hacia el extremo izquierdo por la parte negativa del eje vertical y repitiéndose el proceso. Este es un ejemplo de una *onda viajera*¹⁰².

En ambos ejemplos se observa como el ángulo formado por la cuerda en los extremos y la pared vertical varían en función del tiempo.

Caso 2: Extremos Móviles (Condiciones Neumann)

Analizamos el caso en el que los extremos de la cuerda están sujetos en sus extremos a unas guías móviles que permiten el desplazamiento vertical de los extremos, manteniendo la unión de la cuerda con la guía de forma horizontal (pendiente cero).



¹⁰¹No hay desplazamiento del perfil de la onda.

¹⁰²Existe un desplazamiento del perfil de la onda.

En este caso el PVF es el siguiente:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & 0 < x < L ; t > 0 & \text{(EDP interior varilla)} \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0 & t > 0 & \text{(Cond. frontera Neumann)} \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < L & \text{(Cond. inicial I)} \\ u_t(x, 0) = g(x) & 0 < x < L & \text{(Cond. inicial II)} \end{cases} \quad (11.18)$$

Vamos calcular la solución particular de este problema mediante el *método de separación de variables* de igual forma que el caso anterior:

$$u(x, t) = X(x)T(t) \implies \begin{cases} u_{xx} = \frac{X''T}{XT} \\ u_{tt} = \frac{XT''}{XT} \end{cases} \implies c^2 X''T = XT'' ; \quad \frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T}$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T} = -\lambda \implies \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & \text{(Ec. 1)} \\ T'' + \lambda c^2 T = 0 & \text{(Ec. 2)} \end{cases} \quad (11.19)$$

Resolveremos cada ecuación por separado atendiendo a las condiciones iniciales y de frontera.

Problema 1

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$$

Este problema es idéntico al tratado en el *Problema 1* del *Caso 1* de la ecuación del calor ([Sección 11.4.2, página 375](#)), obteniéndose la solución trivial no válida para $\lambda \leq 0$ y solo para $\lambda > 0$, por tanto:

$$L\sqrt{\lambda_n} = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \implies \boxed{\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}}$$

$$\boxed{X_n(x) = c_{2n} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Problema 2

Teniendo en cuenta que el valor de λ ha quedado determinado en el *Problema 1*, la solución de este caso queda:

$$T'' + c^2 \lambda_n T = 0$$

$$m^2 + c^2 \lambda_n = 0 \implies m = \sqrt{-c^2 \lambda_n} = \pm i \frac{n\pi c}{L} \implies \boxed{T_n(t) = c_{3n} \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + c_{4n} \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Por tanto la solución completa será:

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right] \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Para cada valor de n se obtiene una posible solución al problema, por tanto por el *principio de superposición* la solución general será:

$$\boxed{u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right] \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$$

Las constantes A_n y B_n se pueden obtener a través de las dos condiciones iniciales del problema inicial (11.18):

- $u(x, 0) = f(x)$

$$u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

Esto corresponde con la *serie de Fourier de cosenos* de $f(x)$ y por tanto las constantes A_n correspondientes a los coeficientes de la serie se pueden obtener como:

$$\boxed{A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx} \quad ; \quad \boxed{A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx}$$

• $u_t(x, 0) = g(x)$

$$u_t(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} \left[-A_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi c}{L} t \right) + B_n \cos \left(\frac{n\pi c}{L} t \right) \right] \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right)$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{n\pi c}{L} \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) = g(x)$$

Esto corresponde con la serie de Fourier de cosenos de $g(x)$ y por tanto:

$$B_n \frac{n\pi c}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} n = 0 : & \int_0^L g(x) dx = 0 \\ n > 1 : & B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx \end{cases}$$

La primera fórmula nos indica una condición que debe cumplir la función $g(x)$ que especifica la velocidad inicial de la cuerda, necesaria para que el problema tenga solución.

En la **Figura 11.8** se muestran las gráficas correspondientes a un caso práctico con $L = 1$, $a = 1$ y diferentes condiciones iniciales.

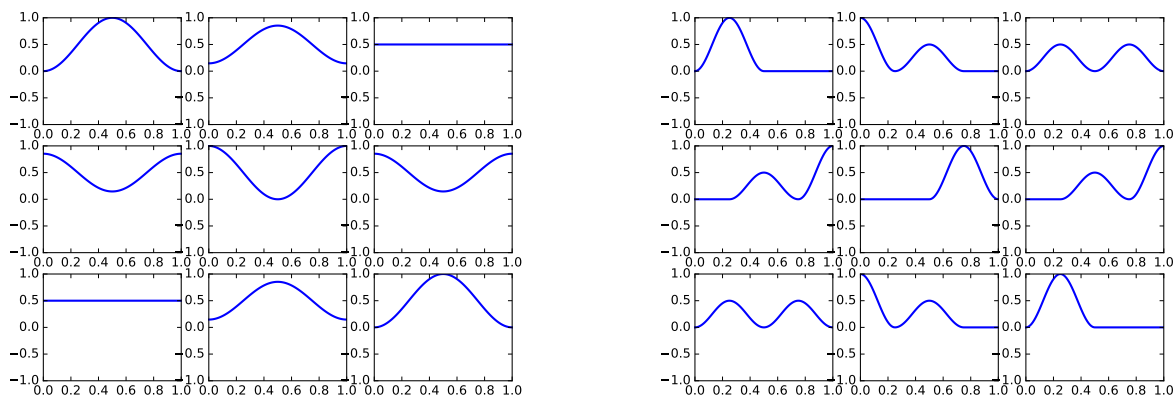


Figura 11.8: Resultados obtenidos en la ecuación de onda unidimensional con condiciones Neumann.

En la parte izquierda se muestra la evolución temporal para las condiciones iniciales $u(x, 0) = \sin^2(\pi x)$ y $u_t(x, 0) = 0$, iguales al caso 1 anterior. El tipo de movimiento generado es una *onda pulsada* diferente al caso 1, donde la onda inicial tiende primeramente a aplanarse elevando los extremos hasta el punto medio, posteriormente se crea una onda en la parte inferior elevándose los extremos y vuelve a aplanarse en el punto medio para crear una nueva onda en la parte superior y repetirse el proceso.

En la parte derecha se muestra la evolución temporal para las mismas condiciones iniciales del segundo ejemplo del caso 1 anterior:

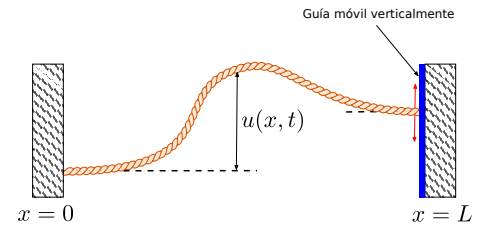
$$u(x, 0) = \begin{cases} \sin^2(2\pi x) & 0 \leq x < L/2 \\ 0 & L/2 \leq x \leq L \end{cases} \quad ; \quad u_t(x, 0) = 0$$

En este caso se obtiene una *onda viajera* que empieza desplazándose hacia la izquierda y al tocar el borde, rebota, empieza a disminuir su tamaño y a generarse una segunda onda más pequeña viajando ambas hacia la derecha. Cuando la primera toca el borde, ambas ondas se fusionan en una sola más grande, que rebota en el borde derecho, disminuye su tamaño, se genera una segunda onda y viajan ambas hacia la izquierda repitiéndose el proceso.

En ambos ejemplos se observa como el ángulo formado por la cuerda en los extremos y la pared vertical es siempre constante con tangente cero, siguiendo las condiciones frontera establecidas.

Caso 3: Extremos Fijo-Móvil (Condiciones Dirichlet-Neumann)

Analizamos el caso mixto en el que un extremo es fijo y el otro móvil con desplazamiento vertical.



En este caso el PVF es el siguiente:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & 0 < x < L ; t > 0 & \text{(EDP interior varilla)} \\ u(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0 & t > 0 & \text{(Cond. frontera Dirichlet y Neumann)} \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < L & \text{(Cond. inicial I)} \\ u_t(x, 0) = g(x) & 0 < x < L & \text{(Cond. inicial II)} \end{cases} \quad (11.20)$$

Volvemos a calcular la solución particular del problema mediante el *método de separación de variables*:

$$u(x, t) = X(x)T(t) \implies \begin{cases} u_{xx} = X''T \\ u_{tt} = XT'' \end{cases} \implies c^2 X''T = XT'' ; \quad \frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T}$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T} = -\lambda \implies \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & \text{(Ec. 1)} \\ T'' + \lambda c^2 T = 0 & \text{(Ec. 2)} \end{cases} \quad (11.21)$$

Resolveremos cada ecuación por separado atendiendo a las condiciones iniciales y de frontera.

Problema 1

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$$

Notar que éste no es uno de los tres problemas básicos de Sturm-Liouville. Vamos a analizar todos los posibles valores del autovalor λ .

$\lambda = 0$

En este caso la EDO queda:

$$X'' = 0 \implies X(x) = c_1 x + c_2$$

Imponiendo las condiciones frontera:

$$\begin{cases} X(0) = 0 \implies c_2 = 0 \\ X'(L) = 0 \implies c_1 = 0 \end{cases} \implies X(x) = 0$$

Esta es la solución trivial, no válida, y por tanto $\lambda = 0$ no es un valor posible para obtener una solución analítica al problema.

$\lambda < 0$

En este caso tenemos una EDO de segundo orden homogénea, cuya *ecuación característica* es:

$$X'' + \lambda X = 0 \implies m^2 + \lambda = 0 ; \quad m = \pm \sqrt{-\lambda} = \pm \alpha \quad (\alpha > 0)$$

Por tanto la solución queda en este caso (raíces reales distintas):

$$X(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}$$

Imponiendo las condiciones frontera¹⁰³:

$$\begin{cases} X(0) = 0 \implies c_1 + c_2 = 0 \\ X'(L) = 0 \implies c_1 A + c_2 B = 0 \end{cases}$$

Este es un SEL *homogéneo* compatible y determinado cuya única solución es $c_1 = c_2 = 0$, obteniéndose nuevamente la solución trivial $X(x) = 0$, no válida, y por tanto $\lambda < 0$ tampoco es un valor posible para obtener una solución analítica al problema.

¹⁰³Aquí $A = \alpha e^{\alpha L}$ y $B = -\alpha e^{-\alpha L}$, siendo $A \neq B$ si $L \neq 0$.

$\lambda > 0$

En este caso también tenemos una EDO de segundo orden homogénea, con ecuación característica:

$$X'' + \lambda X = 0 \implies m^2 + \lambda = 0 \quad ; \quad m = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm i\sqrt{\lambda}$$

Por tanto la solución queda en este caso (raíces complejas):

$$X(x) = c_1 \cos(x\sqrt{\lambda}) + c_2 \operatorname{sen}(x\sqrt{\lambda})$$

Imponiendo las condiciones frontera:

$$\begin{cases} X(0) = 0 & \implies c_1 = 0 \\ X'(L) = 0 & \implies c_2 \sqrt{\lambda} \cos(L\sqrt{\lambda}) = 0 \end{cases}$$

Para que la segunda ecuación se verifique sin que c_2 se anule tenemos que encontrar valores de $L\sqrt{\lambda}$ que anulen el coseno, lo que se cumple para:

$$L\sqrt{\lambda_n} = (2n-1)\frac{\pi}{2} \quad , \quad n = 1, 2, \dots \implies \lambda_n = \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4L^2} \quad (11.22)$$

siendo estos valores los **autovalores** del problema 1 y las correspondientes **autofunciones**:

$$X_n(x) = c_{2n} \operatorname{sen} \left[\frac{(2n-1)\pi}{2L} x \right] \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad (11.23)$$

Problema 2

Teniendo en cuenta los valores λ_n determinados en el problema 1, la solución de este caso queda:

$$T'' + c^2 \lambda_n T = 0$$

$$m^2 + c^2 \lambda_n = 0 \implies m = \sqrt{-c^2 \lambda_n} = \pm i \frac{(2n-1)\pi c}{2L}$$

$$T_n(t) = c_{3n} \cos \left[\frac{(2n-1)\pi c}{2L} t \right] + c_{4n} \operatorname{sen} \left[\frac{(2n-1)\pi c}{2L} t \right] \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

Por tanto la solución completa será:

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = \left\{ A_n \cos \left[\frac{(2n-1)\pi c}{2L} t \right] + B_n \operatorname{sen} \left[\frac{(2n-1)\pi c}{2L} t \right] \right\} \operatorname{sen} \left[\frac{(2n-1)\pi}{2L} x \right]$$

Para cada valor de n se obtiene una posible solución al problema, por tanto por el *principio de superposición* la solución general será:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \cos \left[\frac{(2n-1)\pi c}{2L} t \right] + B_n \operatorname{sen} \left[\frac{(2n-1)\pi c}{2L} t \right] \right\} \operatorname{sen} \left[\frac{(2n-1)\pi}{2L} x \right]$$

Las constantes A_n y B_n se pueden obtener a través de las dos condiciones iniciales del problema inicial (11.20):

- $u(x, 0) = f(x)$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \left[\frac{(2n-1)\pi}{2L} x \right] = f(x) \quad (11.24)$$

Notar que de forma general, el conjunto:

$$\left\{ \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L}, \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \cos \frac{\pi x}{2L}, \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2L}, \cos \frac{3\pi x}{2L}, \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{2L}, \dots \right\}$$

donde $L \in \mathbb{R} - \{0\}$ es ortogonal en el intervalo $[-L, L]$, formando una particular serie generalizada de Fourier, y por tanto la ecuación (11.24) corresponde con la *serie de senos* de $f(x)$ de este conjunto ortogonal y por tanto las constantes A_n correspondientes a los coeficientes de la serie se pueden obtener como:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \left[\frac{(2n-1)\pi}{2L} x \right] dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

- $u_t(x, 0) = g(x)$

$$u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)\pi c}{2L} \left\{ -A_n \sin \left[\frac{(2n-1)\pi c}{2L} t \right] + B_n \cos \left[\frac{(2n-1)\pi c}{2L} t \right] \right\} \sin \left[\frac{(2n-1)\pi}{2L} x \right]$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{(2n-1)\pi c}{2L} \sin \left[\frac{(2n-1)\pi}{2L} x \right] = g(x)$$

Esto corresponde con la serie de Fourier de senos de $g(x)$ y por tanto las constantes B_n correspondientes a los coeficientes de la serie se pueden obtener como:

$$B_n \frac{(2n-1)\pi c}{2L} = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \left[\frac{(2n-1)\pi}{2L} x \right] dx$$

$$B_n = \frac{4}{(2n-1)\pi c} \int_0^L g(x) \sin \left[\frac{(2n-1)\pi}{2L} x \right] dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

En la **Figura 11.9** se muestran las gráficas correspondientes a un caso práctico con $L = 1$, $a = 1$ y con las dos condiciones iniciales utilizadas en los dos casos anteriores.

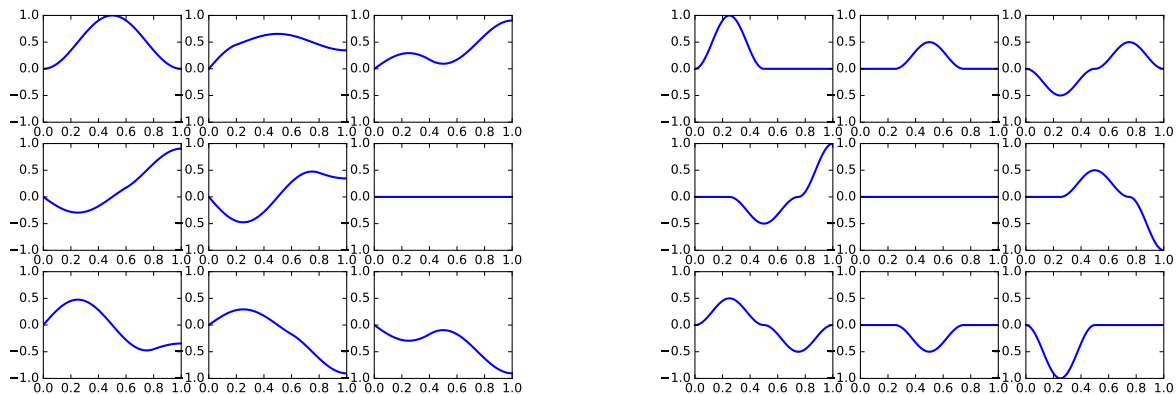


Figura 11.9: Resultados obtenidos en la ecuación de onda unidimensional con condiciones Dirichlet y Neumann.

En ambos casos se observan comportamientos más complicados que los anteriores, como consecuencia del extremo izquierdo fijo y el derecho móvil.

11.5.2. Ecuación de Onda en Coordenadas Polares con Simetría Radial

Consideramos aquí la ecuación de onda en una membrana bidimensional circular de radio r con simetría radial¹⁰⁴, donde la solución no depende del ángulo θ . Usando coordenadas polares se obtiene un problema **unidimensional** en el espacio, donde $u(r, t)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}}_0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

¹⁰⁴Este problema tiene semejanza con el del calor en polares, ver la **Sección 11.4.3**, página 382.

Resolvamos el siguiente problema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{c^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) & r \in (0, a), t > 0 \\ u(a, t) = 0 & t > 0 \\ |u(0, t)| < \infty & t > 0 \\ u(r, 0) = f(r) & r \in (0, a) \\ u_t(r, 0) = g(r) & r \in (0, a) \end{array} \right. \quad (\text{Cond. Compatibilidad}) \quad (11.25)$$

Aplicando separación de variables: $u(r, t) = R(r)T(t)$

$$RT'' = \frac{c^2}{r} T(rR')' \quad ; \quad \frac{T'}{c^2 T} = \frac{1}{rR} T(rR')' = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} (rR')' + \lambda r R = 0 \quad (1) \\ T'' + c^2 \lambda T = 0 \quad (2) \end{array} \right. \quad (11.26)$$

El primer problema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (rR')' + \lambda r R = 0 & r \in (0, a) \\ R(a) = 0 \\ |R(0)| < \infty & \text{Cond. Compatibilidad} \end{array} \right.$$

es el mismo analizado en la [Sección 11.4.3, página 382](#), siendo sus autovalores y autofunciones:

$$\lambda_n = \left(\frac{z_n^0}{a} \right)^2 \quad ; \quad R_n(r) = c_n J_0(r \sqrt{\lambda_n}) = c_n J_0 \left(\frac{r z_n^0}{a} \right) \quad ; \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

donde z_n^0 es el n -ésimo cero de la *función de Bessel*¹⁰⁵ de primera especie de orden cero $J_0(x)$. Con estos autovalores, la solución del problema (2) de (11.26) viene dada por:

$$T'' + c^2 \lambda_n T = 0$$

Cuya solución ya ha sido obtenida en el Problema 2 del caso anterior¹⁰⁶ de la siguiente forma:

$$m^2 + c^2 \lambda_n = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \sqrt{-c^2 \lambda_n} = \pm i \frac{c z_n^0}{a}$$

$$T_n(t) = c_{3n} \cos \frac{c z_n^0 t}{a} + c_{4n} \sen \frac{c z_n^0 t}{a} \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

Por tanto la solución completa será:

$$u_n(x, t) = R_n(x)T_n(t) = \left(A_n \cos \frac{c z_n^0 t}{a} + B_n \sen \frac{c z_n^0 t}{a} \right) J_0 \left(\frac{r z_n^0}{a} \right)$$

Para cada valor de n se obtiene una posible solución al problema, por tanto por el *principio de superposición* la solución general será:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{c z_n^0 t}{a} + B_n \sen \frac{c z_n^0 t}{a} \right) J_0 \left(\frac{r z_n^0}{a} \right)$$

Las constantes A_n y B_n se pueden obtener a través de las dos condiciones iniciales del problema inicial (11.25):

$$\bullet \quad u(r, 0) = f(r)$$

$$u(r, 0) = f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0 \left(\frac{r z_n^0}{a} \right)$$

¹⁰⁵Ver la Sección ??, página ??.

¹⁰⁶Ver la [Sección 11.5.1, página 392](#).

Esto corresponde¹⁰⁷ con la **serie de Fourier generalizada**¹⁰⁸ de la función $f(r)$ en términos de las funciones de Bessel. Teniendo en cuenta las propiedades de ortogonalidad de las funciones de Bessel¹⁰⁹ con la función peso r se tiene finalmente:

$$A_n = \frac{\int_0^a f(r) J_0\left(\frac{r z_n^0}{a}\right) r dr}{\int_0^a J_0^2\left(\frac{r z_n^0}{a}\right) r dr} = \frac{2}{a^2 J_1^2(z_n^0)} \int_0^a f(r) J_0\left(\frac{r z_n^0}{a}\right) r dr, \quad n = 1, 2, \dots$$

• $u_t(r, 0) = g(r)$

$$u_t(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{c z_n^0}{a} A_n \sin \frac{c z_n^0 t}{a} + \frac{c z_n^0}{a} B_n \cos \frac{c z_n^0 t}{a} \right) J_0\left(\frac{r z_n^0}{a}\right); \quad u_t(r, 0) = g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c z_n^0}{a} B_n J_0\left(\frac{r z_n^0}{a}\right)$$

Esto corresponde con la serie de Fourier generalizada de $g(r)$ y al igual que antes, teniendo en cuenta las propiedades de ortogonalidad de las funciones de Bessel, las constantes B_n se pueden obtener como:

$$\frac{c z_n^0}{a} B_n = \frac{\int_0^a g(r) J_0\left(\frac{r z_n^0}{a}\right) r dr}{\int_0^a J_0^2\left(\frac{r z_n^0}{a}\right) r dr}; \quad B_n = \frac{a}{c z_n^0} \frac{\int_0^a g(r) J_0\left(\frac{r z_n^0}{a}\right) r dr}{\int_0^a J_0^2\left(\frac{r z_n^0}{a}\right) r dr}, \quad n = 1, 2, \dots$$

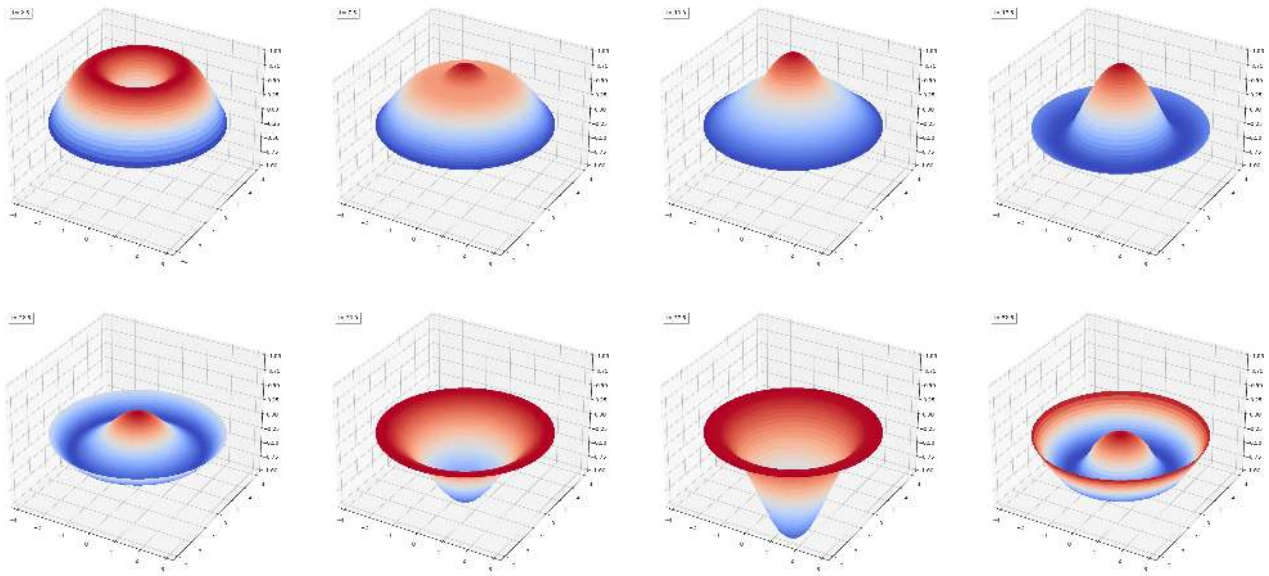


Figura 11.10: Simulación de un problema de la ecuación de onda en polares con simetría radial, donde se observa los desplazamientos $u(r, t)$ en distintos tiempos para un disco de radio $R = \pi$ con condiciones iniciales $u(r, 0) = \sin r$, $u_t(r, 0) = 0$ y condición frontera $u(R, t) = 0$. A diferencia de la ecuación del calor (Figura 11.5, página 384), se observa un proceso periódico de oscilaciones.

¹⁰⁷Al igual que en el problema del calor en coordenadas polares, ver la Sección 11.4.3, página 382.

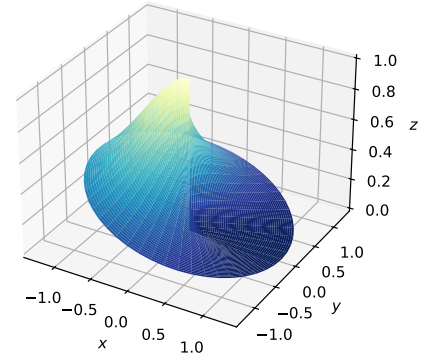
¹⁰⁸Ver la Sección 10.3.2, página 348.

¹⁰⁹Ver la Sección 10.4.1, página 355.

11.5.3. Ecuación de Onda en Coordenadas Polares

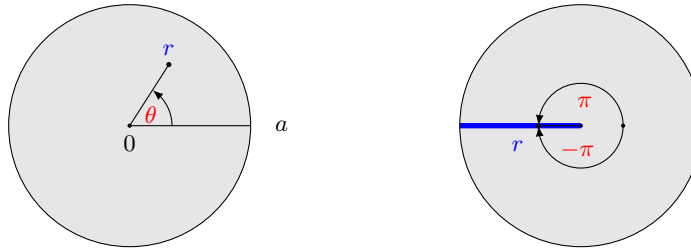
Vamos a estudiar ahora el caso de una membrana vibrante con forma circular de radio a , sin necesidad de simetría radial¹¹⁰ correspondiente a un problema **bidimensional** en coordenadas polares siendo $u(r, \theta, t)$ el desplazamiento en la dirección del eje z . La formulación del problema es el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] & r \in [0, a], \theta \in (-\pi, \pi], t > 0 \\ u(r, \pi, t) = u(r, -\pi, t) & r \in (0, a], t \geq 0 \\ u_\theta(r, \pi, t) = u_\theta(r, -\pi, t) & r \in (0, a], t \geq 0 \\ u(a, \theta, t) = 0 & \theta \in (-\pi, \pi], t \geq 0 \\ |u(r, \theta, t)| < \infty & r \in [0, a], \theta \in (-\pi, \pi], t \geq 0 \\ u(r, \theta, 0) = f(r, \theta) & r \in [0, a], \theta \in (-\pi, \pi] \\ u_t(r, \theta, 0) = 0 & r \in [0, a], \theta \in (-\pi, \pi] \end{array} \right.$$



Notar que consecuencia de las derivadas de segundo orden en las variables independientes, es necesario 6 condiciones, cuatro espaciales en r y θ y dos temporales.

- Las dos primeras condiciones espaciales en θ son de tipo periódico, y consecuencia del comportamiento del ángulo θ en radianes, que implica que todo punto de coordenadas (r, π) corresponda con el punto $(r, -\pi)$. Esto hará que las soluciones sean continuas y derivables en esos puntos.



- Las dos siguientes condiciones son de tipo espacial en r . La tercera es es una condición de tipo Dirichlet en la frontera $r = a$, y la cuarta es una condición de compatibilidad en r , necesaria para obtener soluciones acotadas con sentido físico.
- Las dos últimas condiciones imponen la forma y velocidad inicial de la membrana.

Resolvemos el problema aplicando el método de separación de variables. Notar que este caso tenemos tres variables independientes.

$$u(r, \theta, t) = R(r)H(\theta)T(t) \implies RHT'' = c^2(R''HT + \frac{1}{r}R'HT + \frac{1}{r^2}RH''T)$$

Dividimos toda la ec. por RHT y separamos una de las variables¹¹¹. Como cada término son función de variables independientes, tiene que ser igual a una constante (autovalor) $-\lambda$, obteniéndose dos ecuaciones.

$$\frac{T''}{Tc^2} = \frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{H''}{r^2H} = -\lambda \implies \left\{ \begin{array}{l} T'' + \lambda c^2 T = 0 \\ \frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{H''}{r^2H} = -\lambda \end{array} \right. \quad (3)$$

¹¹⁰Este caso es más general que el analizado en la sección anterior [Sección 11.5.2, página 393](#), donde se había impuesto una simetría radial en el dominio.

¹¹¹La que resulte más sencillo, en este caso el término temporal en T .

De la segunda ecuación con dos variables, separamos una de ellas (la más sencilla) dejando el autovalor λ al lado complicado e introduciendo un nuevo autovalor μ .

$$\frac{r^2 R''}{R} + \frac{r R'}{R} + \lambda r^2 = -\frac{H''}{H} = \mu \implies \begin{cases} \frac{H''}{H} = -\mu \implies \boxed{H'' + \mu H = 0} & (1) \\ \boxed{r^2 R'' + r R' + (\lambda r^2 - \mu) R = 0} & (2) \end{cases}$$

De esta forma la EDP original ha sido descompuesta en tres EDO acopladas a través de dos autovalores λ y μ . Las estrategias para obtener estas tres ecuaciones puede ser diversas, dando lugar a problemas distintos pero equivalentes¹¹². Junto con las condiciones iniciales se obtendrán tres problemas con EDO que habrá que resolver. El orden en su resolución vuelve a ser opcional, resolviéndose normalmente el más sencillo el primero.

1. Primer Problema

El primer problema que resolveremos será el de la ecuación (1) en la variable $H(\theta)$, determinando las dos condiciones frontera necesarias, al ser una EDO de segundo orden, a través de las condiciones del problema original.

$$\begin{cases} u(r, \pi, t) = u(r, -\pi, t) \implies R(r)H(\pi)T(t) = R(r)H(-\pi)T(t) \implies H(\pi) = H(-\pi) \\ u_\theta(r, \pi, t) = u_\theta(r, -\pi, t) \implies R(r)H'(\pi)T(t) = R(r)H'(-\pi)T(t) \implies H'(\pi) = H'(-\pi) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} H'' + \mu H = 0 \\ H(-\pi) = H(\pi) \\ H'(-\pi) = H'(\pi) \end{cases}}$$

Notar que este problema ya ha sido resuelto¹¹³, correspondiendo a la serie completa de Fourier, donde en este caso $L = \pi$.

$$\mu_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \implies \boxed{\mu_n = n^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \boxed{H_n(\theta) = c_1 \cos(n\theta) + c_2 \sin(n\theta)}$$

2. Segundo Problema

Una vez determinado el primer autovalor μ_n , que debe ser común en los tres problemas, determinamos el segundo autovalor a través de ecuación (2) en la variable $R(r)$ que relaciona los dos autovalores y nos permitirá determinar λ . Las dos condiciones son en este caso:

$$\begin{cases} u(a, \theta, t) = 0 \implies R(a)H(\theta)T(t) = 0 \implies R(a) = 0 \\ |u(r, \theta, t)| < \infty \implies |R(r)H(\theta)T(t)| < \infty \implies |R(\theta)| < \infty \end{cases} \quad \boxed{\begin{cases} r^2 R'' + r R' + (\lambda r^2 - \mu_n) R = 0 \\ R(a) = 0 \\ |R(0)| < \infty \end{cases}}$$

Notar que esta EDO corresponde con la ecuación paramétrica de Bessel¹¹⁴:

$$x^2 y'' + x y' + (\alpha^2 x^2 - m^2) y = 0 \quad ; \quad \text{c.v.: } z = \alpha x, \quad \alpha > 0$$

cuya solución, después de deshacer el cambio de variable:

$$y = c_1 J_m(\alpha x) + c_2 Y_m(\alpha x)$$

En nuestro caso:

$$r^2 R'' + r R' + (\lambda r^2 - \mu_n) R = 0 \implies \begin{cases} \alpha = \sqrt{\lambda} \\ m = \sqrt{\mu_n} = \sqrt{n^2} = n \end{cases} \quad \boxed{R(r) = c_3 J_n(r\sqrt{\lambda_n}) + c_4 Y_n(r\sqrt{\lambda_n})}$$

Para que sea finita la solución (condición de compatibilidad) es necesario que $c_4 = 0$, ya que la función $Y_m(x)$ no está acotada en el origen¹¹⁵, quedando la solución de este segundo problema como:

$$R(r) = c_3 J_n(r\sqrt{\lambda_n})$$

¹¹²En algunos casos pueden generarse algunos problemas más sencillos que otros.

¹¹³Ver la Sección 10.2.1, página 341.

¹¹⁴Ver la Sección 4.5.1, página 135.

¹¹⁵Ver la Sección ??, página ??.

Para determinar el autovalor λ , es necesario imponer la condición frontera, y denotando por z_m^k los ceros k -ésimos de la función $J_m(x)$ para $k = 1, 2, \dots$, se tiene:

$$R(a) = 0 = \underbrace{c_3}_{\neq 0} \underbrace{J_n(a\sqrt{\lambda_n})}_0 \implies a\sqrt{\lambda_{n,k}} = z_n^k \implies \lambda_{n,k} = \left(\frac{z_n^k}{a}\right)^2, \quad \{n = 0, 1, \dots\}, \{k = 1, 2, \dots\}$$

Siendo finalmente la solución del segundo problema:

$$R_{n,k}(r) = c_3 J_n(r\sqrt{\lambda_{k,n}})$$

3. Tercer Problema

Una vez determinados los dos autovalores μ_n y $\lambda_{n,k}$ podemos usarlos para determinar la última ecuación (3).

$$T'' + \lambda_{k,n} c^2 T = 0 \quad ; \quad m^2 + \lambda_{k,n} c^2 = 0 \quad ; \quad m = c\sqrt{-\lambda_{k,n}} = \pm ic\sqrt{\lambda_{k,n}}$$

$$T_{k,n}(t) = c_3 \cos(ct\sqrt{\lambda_{k,n}}) + c_4 \sin(ct\sqrt{\lambda_{k,n}})$$

Una vez resueltos los tres problemas de EDO, combinando las tres soluciones de los problemas se puede obtener la solución del problema original:

$$u_{n,k}(r, \theta, t) = H_n(\theta) R_{n,k}(r) T_{n,k}(t)$$

Por el principio de superposición, la combinación lineal de todas las soluciones también es solución del problema, y por tanto:

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [A_{k,n} \cos(n\theta) + B_{k,n} \sin(n\theta)] [C_{k,n} \cos(ct\sqrt{\lambda_{nk}}) + D_{k,n} \sin(ct\sqrt{\lambda_{nk}})] J_n(r\sqrt{\lambda_{nk}})$$

quedando una serie doble sobre cada uno de los autovalores $\mu = n^2$ y $\lambda = (z_n^k/a)^2$, y cuatro constantes a determinar.

Determinación de las Constantes

La determinación de las constantes $A_{k,n}$, $B_{k,n}$, $C_{k,n}$ y $D_{k,n}$ se realiza a través de las dos condiciones iniciales.

$$\bullet \quad u_t(r, \theta, 0) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [A_{k,n} \cos(n\theta) + B_{k,n} \sin(n\theta)] [J_n(r\sqrt{\lambda_{kn}})] (c\sqrt{\lambda_{kn}}) [-C_{k,n} \sin(ct\sqrt{\lambda_{kn}}) + D_{k,n} \cos(ct\sqrt{\lambda_{kn}})]$$

$$u_t(r, \theta, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [A_{k,n} \cos(n\theta) + B_{k,n} \sin(n\theta)] [J_n(r\sqrt{\lambda_{kn}})] D_{k,n} = 0 \implies D_{k,n} = 0$$

La solución queda entonces en este caso como:

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [A_{k,n} \cos(n\theta) + B_{k,n} \sin(n\theta)] J_n(r\sqrt{\lambda_{k,n}}) \cos(ct\sqrt{\lambda_{k,n}})$$

donde las nuevas constantes $A_{k,n}$, $B_{k,n}$, son el producto de las antiguas $A_{k,n}C_{k,n}$ y $B_{k,n}C_{k,n}$ respectivamente.

$$\bullet \quad u(r, \theta, 0) = f(r, \theta)$$

$$u(r, \theta, 0) = f(r, \theta) \implies \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [A_{k,n} \cos(n\theta) + B_{k,n} \sin(n\theta)] J_n(r\sqrt{\lambda_{k,n}}) = f(r, \theta)$$

Esta es una **serie doble de Fourier** cuyos coeficientes $A_{k,n}$ y $B_{k,n}$ se pueden calcular mediante una integral doble de la siguiente forma:

1. Para cada valor de k podemos identificar unas funciones $G_k(\theta)$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} [A_{k,n} \cos(n\theta) + B_{k,n} \sin(n\theta)]}_{G_k(\theta)} J_n(r\sqrt{\lambda_{k,n}}) = f(r, \theta)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \boxed{G_k(\theta)} J_n(r\sqrt{\lambda_{k,n}}) = f(r, \theta) \quad (11.27)$$

Esta segunda expresión corresponde con la **serie generalizada de Fourier-Bessel**¹¹⁶ de la función $f(r, \theta)$ cuyos coeficientes $G_k(\theta)$ se pueden determinar como¹¹⁷:

$$G_k(\theta) = \frac{\int_0^a f(r, \theta) J_n(r\sqrt{\lambda_{kn}}) r dr}{\int_0^a J_n^2(r\sqrt{\lambda_{kn}}) r dr} \quad (11.28)$$

2. Según la anterior definición (11.27), para cada valor de k se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [A_{k,n} \cos(n\theta) + B_{k,n} \sin(n\theta)] = G_k(\theta)$$

que corresponde con la **serie completa de Fourier**¹¹⁸ de la función $G_k(\theta)$, siendo A_{kn} y B_{kn} sus coeficientes, y por tanto para cada valor de $k = 1, 2, \dots$ y $n = 0, 1, 2, \dots$ se tiene:

$$A_{k,0} = \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi G_k(\theta) d\theta \xrightarrow{(11.28)} \boxed{A_{k,0} = \frac{\int_0^\pi \int_0^a f(r, \theta) J_0(r\sqrt{\lambda_{k0}}) r dr}{\pi \int_0^a J_0^2(r\sqrt{\lambda_{k0}}) r dr}}$$

$$A_{k,n} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi G_k(\theta) \cos(n\theta) d\theta \xrightarrow{(11.28)} \boxed{A_{k,n} = \frac{2 \int_0^\pi \int_0^a f(r, \theta) \cos(n\theta) J_n(r\sqrt{\lambda_{kn}}) r dr}{\pi \int_0^a J_n^2(r\sqrt{\lambda_{kn}}) r dr}} \quad n > 0$$

$$B_{k,n} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi G_k(\theta) \sin(n\theta) d\theta \xrightarrow{(11.28)} \boxed{B_{k,n} = \frac{2 \int_0^\pi \int_0^a f(r, \theta) \sin(n\theta) J_n(r\sqrt{\lambda_{kn}}) r dr}{\pi \int_0^a J_n^2(r\sqrt{\lambda_{kn}}) r dr}}$$

¹¹⁶Ver la Sección 10.4.2, página 356.

¹¹⁷Notar que es necesario incluir la función peso r en las integrales de ortogonalidad de esta serie.

¹¹⁸Ver la Sección 9.4.5, página 330.

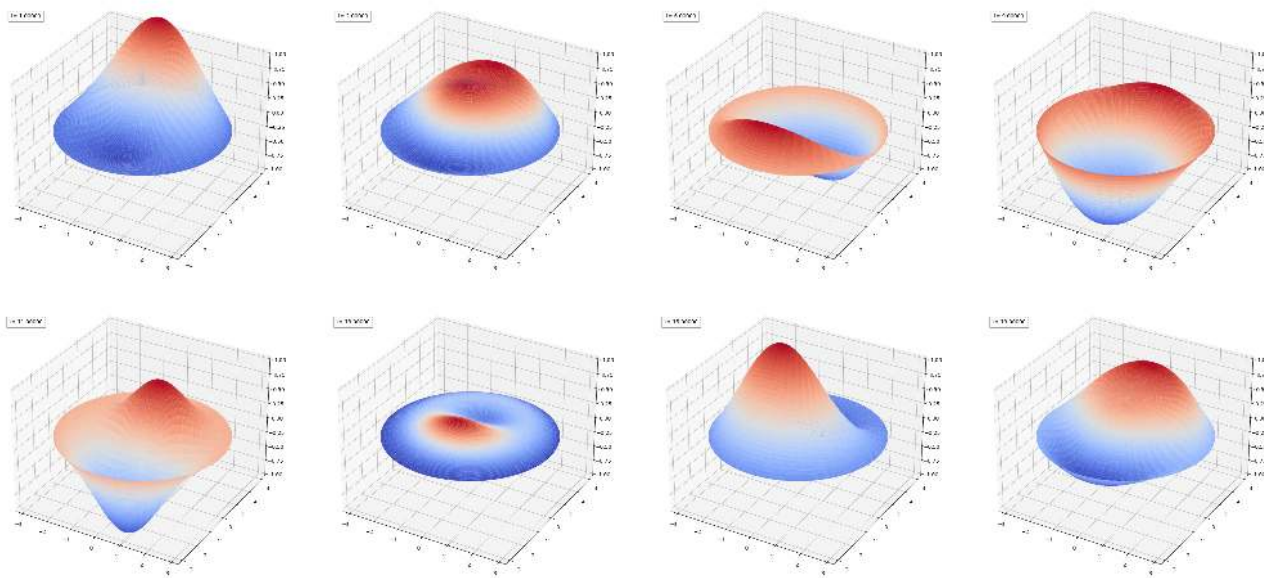


Figura 11.11: Simulación de un problema de la ecuación de onda en polares con condiciones periódicas, donde se observa los desplazamientos $u(r, t)$ en distintos tiempos para un disco de radio $R = \pi$ con condiciones iniciales $u(r, 0) = \cos(r/2)$, $u_t(r, 0) = 0$ y condición frontera $u(R, t) = 0$. Notar la falta de simetría radial, a diferencia del caso anterior, [Figura 11.10, página 395](#).

11.6. Ecuación de Laplace

La **ecuación de Laplace** es una EDP de segundo orden de tipo *elíptico*¹¹⁹ definida a través del *operador laplaciano*¹²⁰ que en dimensión n se define como:

$$\Delta u = 0$$

Dicha ecuación es un caso particular de la *ecuación de Helmholtz*¹²¹ que a su vez es un caso particular de la *ecuación de Poisson*¹²². Las soluciones de la ecuación de Laplace se denominan *funciones armónicas*¹²³.

Las aplicaciones de la ecuación de Laplace son numerosas y abarcan múltiples disciplinas, siendo algunas de las más destacadas:

- **Electrostática y electromagnetismo:** descripción del potencial eléctrico en regiones donde no hay cargas libres (en el vacío o en medios neutros). Aplicaciones:
 - Cálculo del potencial eléctrico en conductores
 - Diseño de condensadores y sistemas de almacenamiento de energía
 - Análisis de campos eléctricos en dispositivos electrónicos
- **Mecánica de fluidos:** descripción del potencial de velocidad en fluidos incompresibles y no viscosos, que está relacionado con el campo de velocidades del fluido. Aplicaciones:
 - Flujo potencial alrededor de obstáculos (por ejemplo, alas de aviones o perfiles aerodinámicos)
 - Modelado de flujos irrotacionales en ingeniería hidráulica

¹¹⁹Ver la [Sección 11.1.4, página 364](#).

¹²⁰Ver la [Definición 11.3, página 363](#).

¹²¹Ver la [Sección 11.7.1, página 412](#).

¹²²Ver la [Sección 11.1.3, página 364](#) y [Sección 11.8.2, página 421](#).

¹²³Se denomina *funciones holomorfas* o analíticas complejas $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, donde $z = x + iy$ aquellas cuyas partes real $u(x, y)$ y compleja $v(x, y)$ cumplen o son soluciones de la ecuación de Laplace. Ver por ejemplo "Clases de Ampliación de Matemáticas para Ingeniería" en la [Bibliografía](#), pág. 517.

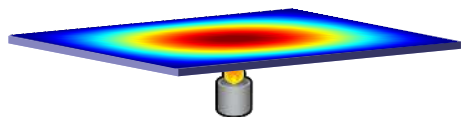
- **Transferencia de calor:** describe la distribución de temperatura en un medio sin fuentes de calor en estado estacionario (sin variación temporal). Aplicaciones:
 - Diseño de sistemas de enfriamiento y aislamiento térmico
 - Análisis de la conducción de calor en sólidos
- **Gravitación:** descripción del potencial gravitacional en regiones donde no hay masa. Aplicaciones:
 - Estudio del campo gravitacional de planetas y estrellas
 - Modelado de órbitas y trayectorias en mecánica celeste
- **Procesamiento de imágenes:** uso en técnicas de suavizado y detección de bordes en imágenes digitales. Aplicaciones:
 - Filtrado de imágenes
 - Mejora de la calidad visual en fotografía y visión por computadora
- **Ingeniería civil y estructural:** en elasticidad, la ecuación de Laplace puede describir la deformación de membranas o placas delgadas bajo ciertas condiciones. Aplicaciones:
 - Diseño de estructuras como puentes y edificios
 - Análisis de tensiones y deformaciones en materiales
- **Matemáticas puras:** estudio de las funciones armónicas con importantes propiedades matemáticas. Aplicaciones:
 - Teoría de funciones complejas
 - Análisis de problemas de contorno y valores en la frontera
- **Geofísica:** modelización de campos de potencial, como el campo magnético terrestre. Aplicaciones:
 - Estudio de anomalías magnéticas
 - Exploración de recursos naturales (petróleo, minerales)
- **Óptica:** descripción de la propagación de luz en medios homogéneos. Aplicaciones:
 - Diseño de lentes y sistemas ópticos
 - Análisis de la difracción de la luz
- **Economía y finanzas:** en algunos modelos económicos se utiliza para describir la distribución de probabilidades en procesos estocásticos. Aplicaciones:
 - Valoración de opciones financieras
 - Modelado de riesgos en mercados financieros

En resumen, la ecuación de Laplace es una herramienta matemática poderosa y versátil que se aplica en una amplia gama de problemas científicos y técnicos, desde la física teórica hasta la ingeniería práctica y su estudio es fundamental para comprender y resolver problemas en múltiples disciplinas.

En las siguientes secciones estudiaremos la resolución de diferentes problemas que involucran a la ecuación de Laplace.

11.6.1. Ecuación de Laplace Bidimensional

Sea una placa metálica rectangular¹²⁴ con una determinada distribución de temperatura a tiempo $t = 0$ y aislada del medio exterior. Si dejamos enfriar la placa, las variaciones de temperatura con el tiempo vienen dadas por la denominada *ecuación del calor*¹²⁵ *bidimensional* en coordenadas cartesianas,



$$k\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}$$

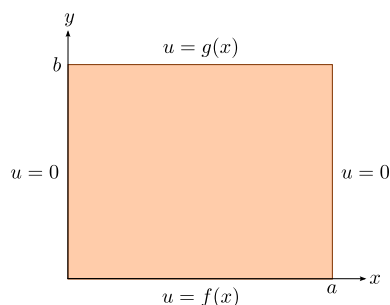
Para tiempos suficientemente grandes, la distribución de temperatura en el estado estacionario donde no existen variaciones de temperatura con el tiempo, $u_t = 0$, viene dada por la siguiente ecuación de tipo *elíptico*¹²⁶,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Conocida con el nombre de **Ecuación de Laplace** o **ecuación del potencial**¹²⁷. En este caso, cada uno de los cuatro bordes de la placa tiene que tener una condición de contorno de tipo Dirichlet, Neumann o Robin¹²⁸. Vamos a estudiar cuatro casos sencillos.

Caso 1: Condiciones Dirichlet (I)

Sea una placa bidimensional de dimensiones $a \times b$ sujeta a unas condiciones de temperatura de tipo Dirichlet en sus bordes, dados según se especifica en la siguiente figura. Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen que ser apropiadas para que la solución sea continua en las cuatro esquinas.



El PVF correspondiente a este caso se puede expresar de la siguiente forma¹²⁹:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad t > 0 & \text{(EDP interior placa)} \\ u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0 & 0 < y < b & \text{(Cond. frontera Dirichlet)} \\ u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = g(x) & 0 < x < a & \text{(Cond. frontera Dirichlet)} \end{cases} \quad (11.29)$$

Vamos calcular la solución particular de este problema mediante el *método de separación de variables*¹³⁰. Suponemos que la solución se puede expresar como producto de dos función que dependen solo de una variable, en este caso x o y :

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \implies \begin{cases} u_{xx} = X''Y \\ u_{yy} = XY'' \end{cases} \implies X''Y + XY'' = 0 \quad ; \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}$$

¹²⁴La dimensión z es despreciable frente a x e y .

¹²⁵Ver la [Sección 11.4.2, página 372](#).

¹²⁶Ver la [Sección 11.1.5, página 366](#).

¹²⁷Esta ecuación está relacionada con los campos eléctricos y gravitacionales. Por otra parte, toda función $u(x, y)$ que verifica la ecuación de Laplace se dice que es *armónica*. Ver por ejemplo "Clases de Ampliación de Matemáticas para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 517..

¹²⁸Ver la [Sección 11.1.5, página 366](#).

¹²⁹Notar que al no existir dependencia del tiempo (estado estacionario) el problema no tiene condiciones iniciales, solo condiciones frontera.

¹³⁰Ver la [Sección 11.2, página 367](#).

De esta forma comprobamos que este método es válido para esta ecuación. Para que pueda cumplirse la igualdad entre las variables independientes x e y , es necesario que ambas partes sean igual a una misma constante $-\lambda$, obteniéndose dos *problemas de autovalores*:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & \text{(Ec. 1)} \\ Y'' - \lambda Y = 0 & \text{(Ec. 2)} \end{cases}$$

Resolveremos cada ecuación por separado atendiendo a las condiciones frontera.

Problema 1

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases}$$

Este problema es idéntico a al tratado por ejemplo en el Problema 1 de la [Sección 11.4.2, página 373](#), obteniéndose la solución trivial no válida para $\lambda \leq 0$ y solo para $\lambda > 0$, por tanto:

$$a\sqrt{\lambda_n} = n\pi \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}}$$

$$\boxed{X_n(x) = c_{2n} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)} \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

Problema 2

Teniendo en cuenta que el valor de λ_n ha quedado determinado en el anterior Problema 1, la solución de este caso queda¹³¹:

$$Y'' - \lambda_n Y = 0$$

$$m^2 - \lambda_n = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \sqrt{\lambda_n} = \pm \frac{n\pi}{a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Y_n(y) = c_{3n} \cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + c_{4n} \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)} \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

Por tanto la solución completa será:

$$u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y) = \left[A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

Para cada valor de n se obtiene una posible solución al problema y aplicando el *principio de superposición*¹³² se obtiene la solución general:

$$\boxed{u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)} \quad (11.30)$$

Las constantes A_n y B_n se pueden obtener a través de las dos condiciones frontera del problema original ([Ecuación 11.29, página 402](#)):

- $u(x, 0) = f(x)$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = f(x)$$

Esta es la *serie de Fourier de senos*¹³³ de $f(x)$ y por tanto las constantes A_n correspondientes a los coeficientes de la serie se pueden obtener como:

$$\boxed{A_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx}$$

¹³¹El resultado también se puede expresar a través de exponenciales pero suele resultar más sencillo expresarla mediante el coseno y el seno hiperbólico (ver la [Sección 10.2.1, página 338](#)).

¹³²Ver la [Sección 11.2.2, página 370](#).

¹³³Ver la [Sección 9.4.4, página 329](#).

- $u(x, b) = g(x)$

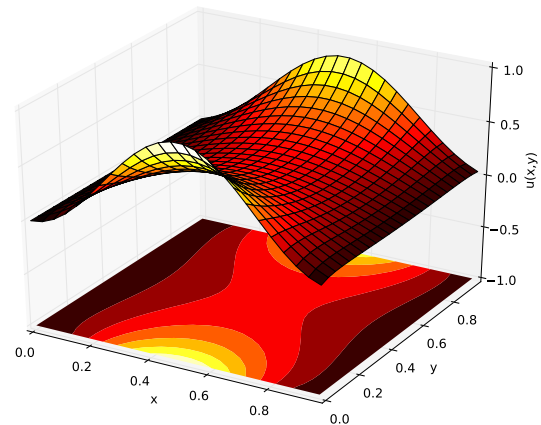
$$u(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) + B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = g(x)$$

Esta es la *serie de Fourier de senos* de $g(x)$ y por tanto las constantes B_n correspondientes a los coeficientes se pueden obtener como:

$$A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) + B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx$$

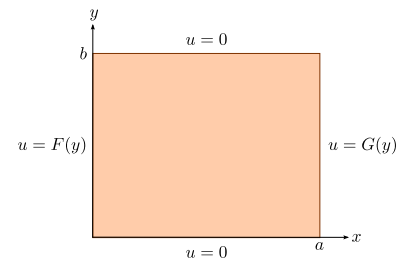
$$B_n = \frac{2}{a} \operatorname{cosech}\left(\frac{n\pi}{a}b\right) \int_0^a g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx - A_n \coth\left(\frac{n\pi}{a}b\right)$$

En la siguiente figura se muestra el resultado obtenido para un caso práctico con valores $a = b = 1$ y $f(x) = g(x) = \sin^2(x\pi)$, donde se aprecia gráficamente la distribución de temperatura $u(x, y)$ estacionaria en la placa bajo estas condiciones.



Caso 2: Condiciones Dirichlet (II)

Vamos a considerar un problema similar al Caso 1 de la página 402, cambiando la posición de los valores nulos en los lados verticales y pasándolos a los lados horizontales, como muestra la siguiente figura.



El PVF correspondiente a este caso se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad t > 0 & \text{(EDP interior placa)} \\ u(0, y) = F(y), \quad u(a, y) = G(y) & 0 < y < b & \text{(Cond. frontera Dirichlet)} \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 0 & 0 < x < a & \text{(Cond. frontera Dirichlet)} \end{cases} \quad (11.31)$$

Siguiendo un procedimiento análogo¹³⁴ al Caso 1, se tiene:

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \implies \begin{cases} u_{xx} = X''Y \\ u_{yy} = XY'' \end{cases} \implies X''Y + XY'' = 0 \quad ; \quad \frac{Y''}{Y} = -\frac{X''}{X}$$

$$\frac{Y''}{Y} = -\frac{X''}{X} = -\lambda \implies \begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 & \text{(Ec. 1)} \\ X'' - \lambda X = 0 & \text{(Ec. 2)} \end{cases}$$

Resolveremos cada ecuación por separado atendiendo a las condiciones frontera.

¹³⁴En este caso se intercambian los razonamientos entre las variables X e Y .

Problema 1

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y(0) = Y(b) = 0 \end{cases} ; \quad b\sqrt{\lambda_n} = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \implies \boxed{\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{b^2}}$$

$$\boxed{Y_n(y) = c_{2n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Problema 2

$$X'' - \lambda X = 0 ; \quad m^2 - \lambda_n = 0 \implies m = \sqrt{\lambda_n} = \pm \frac{n\pi}{b} \implies \boxed{X_n(x) = c_{3n} \cosh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) + c_{4n} \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)} \quad n = 1, 2, \dots$$

Por tanto la solución completa será:

$$\boxed{u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \cosh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) + D_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)} \quad (11.32)$$

Las constantes C_n y D_n se pueden obtener a través de las dos condiciones frontera del problema inicial (11.31):

- $u(0, y) = F(y)$

$$u(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = F(y) \implies \boxed{C_n = \frac{2}{b} \int_0^b F(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy}$$

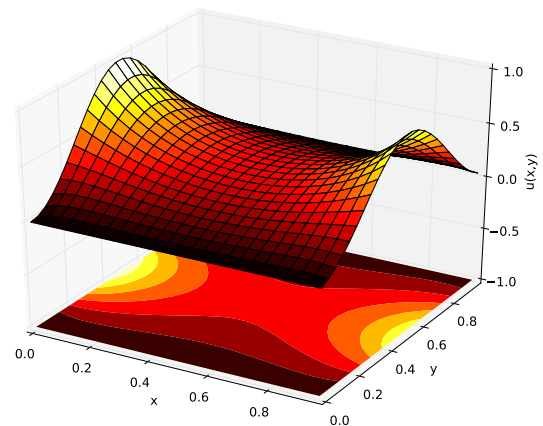
- $u(a, y) = G(y)$

$$u(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \cosh\left(\frac{n\pi}{b}a\right) + D_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}a\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = G(y)$$

$$C_n \cosh\left(\frac{n\pi}{b}a\right) + D_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}a\right) = \frac{2}{b} \int_0^b G(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy$$

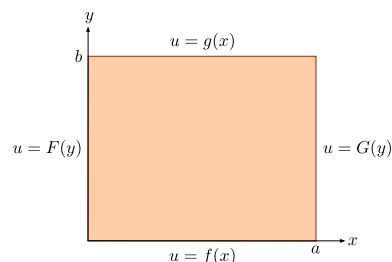
$$\boxed{D_n = \frac{2}{b} \operatorname{cosech}\left(\frac{n\pi}{b}a\right) \int_0^b G(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy - C_n \operatorname{cotanh}\left(\frac{n\pi}{b}a\right)}$$

En la siguiente figura se muestra el resultado obtenido para los valores $a = b = 1$, $F(y) = G(y) = \operatorname{sen}^2(y\pi)$.



Caso 3: Condiciones Dirichlet (III)

Vamos a considerar un problema general en el que cada uno de los cuatro bordes de la placa tiene asignado una condición frontera dada por funciones determinadas $f(x)$, $g(x)$, $F(x)$ y $G(x)$, según muestra la siguiente figura¹³⁵.



El PVF correspondiente se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad t > 0 & \text{(EDP interior placa)} \\ u(0, y) = F(y), \quad u(a, y) = G(y) & 0 < y < b & \text{(Cond. frontera Dirichlet)} \\ u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = g(x) & 0 < x < a & \text{(Cond. frontera Dirichlet)} \end{cases}$$

Aplicando el *principio de superposición* este problema se puede descomponer en la suma de la solución del problema del Caso 1 $u_1(x, y)$ (Ecuación 11.30, página 403), más la solución del problema del Caso 2 $u_2(x, y)$ (Ecuación 11.32, página 405) como se esquematiza en la siguiente figura:

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$$

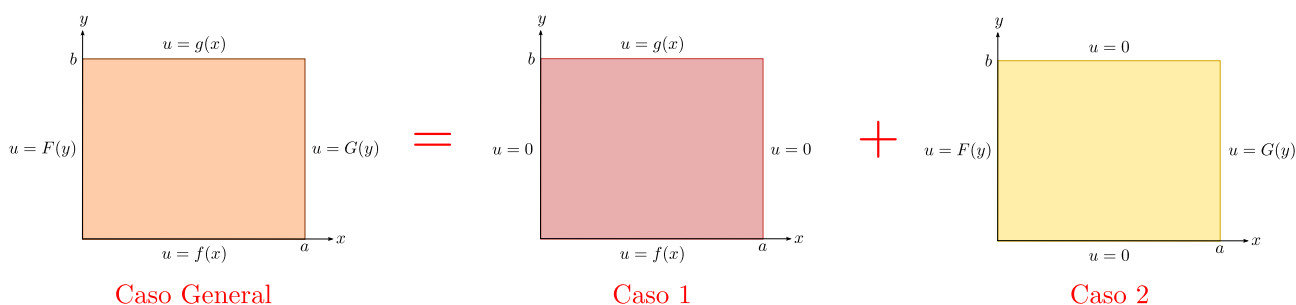
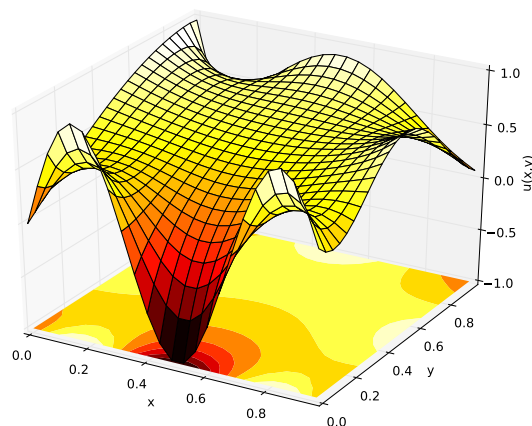


Figura 11.12: Esquema mostrando el principio de superposición para la resolución del problema general con condiciones Dirichlet de la ecuación de Laplace.

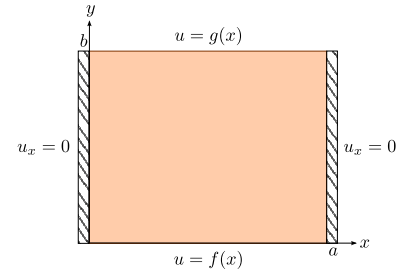
En la siguiente figura se muestra el resultado obtenido para los valores $a = b = 1$, $f(x) = \sin(3x\pi)$, $g(x) = \sin^2(x\pi)$, $F(y) = \sin(y\pi/2)$ y $G(y) = \sin^2(y\pi)$.



¹³⁵Las cuatro funciones tienen que ser apropiadas para que la solución sea continua en las esquinas.

Caso 4: Condiciones Neumann

Vamos a ver un ejemplo característico de las condiciones Neumann en la ecuación de Laplace. Sea una placa bidimensional $a \times b$ con las condiciones frontera mostradas en la siguiente figura, donde los lados verticales izquierdo y derecho se encuentran aislados, mientras que los lados horizontal superior e inferior tienen un perfil de temperaturas dados por unas funciones $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente.



El PVF correspondiente se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad t > 0 & \text{(EDP interior placa)} \\ u_x(0, y) = 0, \quad u_x(a, y) = 0 & 0 < y < b & \text{(Cond. frontera Neumann)} \\ u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = g(x) & 0 < x < a & \text{(Cond. frontera Dirichlet)} \end{cases} \quad (11.33)$$

Siguiendo el procedimiento del *método de separación de variables* se tiene:

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \implies \begin{cases} u_{xx} = X''Y \\ u_{yy} = XY'' \end{cases} \implies X''Y + XY'' = 0 \quad ; \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda \implies \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & \text{(Ec. 1)} \\ Y'' - \lambda Y = 0 & \text{(Ec. 2)} \end{cases}$$

Resolveremos cada ecuación por separado atendiendo a las condiciones frontera.

Problema 1

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(a) = 0 \end{cases}$$

Buscamos valores de λ que generen soluciones no triviales.

$$\lambda = 0$$

$$X'' = 0 \implies \begin{cases} X(x) = c_1 + c_2 x \\ X'(x) = c_2 \end{cases} \implies \begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(a) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases} \implies \boxed{X(x) = c_1}$$

Por tanto hay una solución no trivial para $\lambda = 0$, siendo éste un autovalor del problema 1.

$$\lambda < 0$$

$$X'' + \lambda X = 0 \implies m^2 + \lambda = 0 \quad ; \quad m = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm\alpha \quad (\alpha > 0)$$

$$X(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} \implies \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 A + c_2 B = 0 \end{cases}$$

Este es un SEL homogéneo compatible y determinado cuya única solución es la trivial $c_1 = c_2 = 0$, no válida, y por tanto $\lambda < 0$ no es un autovalor del problema.

$$\lambda > 0$$

$$X'' + \lambda X = 0 \implies m^2 + \lambda = 0 \quad ; \quad m = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm i\sqrt{\lambda}$$

$$\begin{cases} X(x) = c_1 \cos(x\sqrt{\lambda}) + c_2 \sin(x\sqrt{\lambda}) \\ X'(x) = -c_1 \sqrt{\lambda} \sin(x\sqrt{\lambda}) + c_2 \sqrt{\lambda} \cos(x\sqrt{\lambda}) \end{cases}$$

Imponiendo las condiciones frontera:

$$\begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(a) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} c_2 = 0 \\ -c_1 \sqrt{\lambda} \sin(a\sqrt{\lambda}) = 0 \end{cases} \implies a\sqrt{\lambda_n} = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \implies \boxed{\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{a^2}}$$

siendo λ_n otros autovalores del problema 1. Finalmente, todas las autofunciones asociadas al Problema 1 son:

$$X_n(x) = c_{1n} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Problema 2

Teniendo en cuenta los valores λ_n determinados en el Problema 1, la solución de este caso queda:

$$Y'' - \lambda_n Y = 0$$

$$m^2 - \lambda_n = 0 \implies m = \sqrt{\lambda_n} = \pm \frac{n\pi}{a} \implies Y_n(y) = c_{3n} \cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + c_{4n} \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Por tanto la solución completa $u(x, y) = X_n(x)Y_n(y)$ por el principio de superposición será:

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

Las constantes A_n y B_n se pueden obtener a través de las dos condiciones frontera del problema inicial (11.33):

- $u(x, 0) = f(x)$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = f(x)$$

que corresponde con la serie de Fourier de cosenos¹³⁶ de $f(x)$ y por tanto las constantes A_n correspondientes se pueden obtener como:

$$A_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- $u(x, b) = g(x)$

$$u(x, b) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) + B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = g(x)$$

que corresponde con la serie de Fourier de cosenos de $g(x)$ y por tanto las constantes B_n se pueden obtener como:

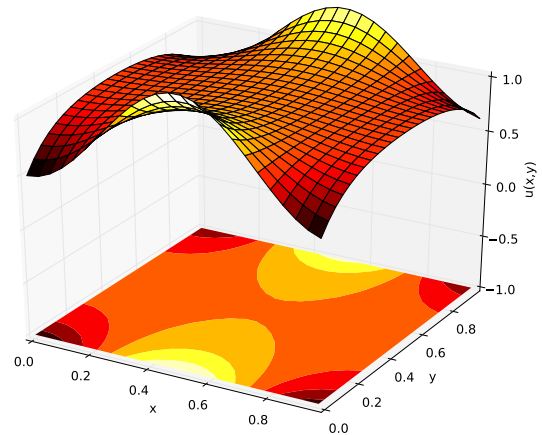
$$A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) + B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx$$

$$B_n = \frac{2}{a} \operatorname{cosech}\left(\frac{n\pi}{a}b\right) \int_0^a g(x) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx - A_n \coth\left(\frac{n\pi}{a}b\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Notar que en este caso el valor de B_0 no se puede determinar¹³⁷ pero no es necesario ya que para $n = 0$ se anula el término que multiplica a B_n .

En la siguiente figura se muestra el resultado obtenido para los valores $a = b = 1$, $f(x) = g(x) = \sin^2(x)$.

Comparando esta solución con la obtenida en el *Caso 1* (ver la página 412) con las mismas condiciones pero de tipo Dirichlet, observamos como en los bordes correspondientes a $x = 0$ y $x = a$ la temperatura no permanece constante al estar aislados y por tanto variar libremente en función de la distribución de temperatura impuesta por las otras dos condiciones Dirichlet.



¹³⁶Ver la Sección 9.4.4, página 328.

¹³⁷Ya que $\sinh(0) = 0$ y por tanto $\operatorname{cosech}(0)$ y $\coth(0)$ no están definidos.

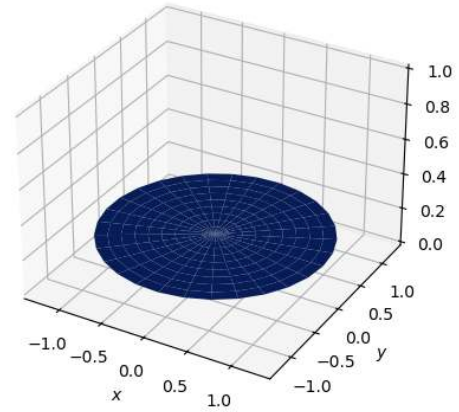
Aplicando el principio de superposición, de la misma forma que se hizo en la [Sección 11.6.1, página 406](#), se puede resolver problemas en los que se mezclen condiciones Dirichlet y Neumann en los distintos lados, descomponiendo el problema general en otros más sencillos y sumando las soluciones obtenidas.

Caso 5: Coordenadas Polares

En este caso tenemos una placa circular de radio a y espesor despreciable sujeta a una condición de temperatura de tipo Dirichlet en su borde a través de una función $f(\theta)$. En la ecuación de Laplace en este caso hay que poner el operador laplaciano en polares:

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

donde cada punto (r, θ) del sistema queda determinada por el valor del radio r y el ángulo θ .



El PVF correspondiente a este caso se puede expresar de la siguiente forma¹³⁸:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0 & 0 < r < a, \quad -\pi < \theta \leq \pi & \text{(EDP interior placa)} \\ u(a, \theta) = f(\theta) & -\pi < \theta \leq \pi & \text{(Cond. frontera Dirichlet)} \end{cases} \quad (11.34)$$

Notar que solo tenemos una condición de contorno, pero sin embargo tenemos dos derivadas de segundo orden y por tanto son necesarias cuatro condiciones en total. Las tres condiciones que faltan se denominan **condiciones de solubilidad** y se establecen por consideraciones físicas y matemáticas del problema:

1. Consecuencia de la naturaleza de variable angular θ , donde $\theta = \theta + 2k\pi$, la solución u tiene que ser obligatoriamente periódica y suave, debiendo cumplir $u(r, -\pi) = u(r, \pi)$ y $u_\theta(r, -\pi) = u_\theta(r, \pi)$.
2. Como el centro del disco es parte del dominio, la solución u para $r = 0$ tiene que ser un valor finito¹³⁹.

Vamos calcular la solución particular de este problema mediante el *método de separación de variables*. Suponemos que la solución se puede expresar como producto de dos función que dependen solo de una variable, en este caso r o θ :

$$u(r, \theta) = R(r)H(\theta) \implies \begin{cases} u_r = R'H \\ u_{rr} = R''H \\ u_{\theta\theta} = RH'' \end{cases} \implies R''H + \frac{1}{r} R'H + \frac{1}{r^2} RH'' = 0 \quad ; \quad \frac{1}{R} (r^2 R'' + rR') = -\frac{H''}{H}$$

De esta forma comprobamos que este método es válido para esta ecuación. Para que pueda cumplirse la igualdad entre las variables independientes r y θ , es necesario que ambas partes sean igual a una misma constante λ , obteniéndose dos *problemas de autovalores*:

$$\frac{1}{R} (r^2 R'' + rR') = -\frac{H''}{H} = \lambda \implies \begin{cases} H'' + \lambda H = 0 & \text{(Ec. 1)} \\ r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0 & \text{(Ec. 2)} \end{cases}$$

Resolveremos cada ecuación por separado atendiendo a la condición explícita dada en el problema y a las tres condiciones implícitas especificadas anteriormente.

¹³⁸Podría también establecerse el dominio de la variable angular θ entre 0 y 2π , siendo el problema equivalente, aunque resulta algo más sencillo de esta forma.

¹³⁹En problemas donde el dominio sea un anillo que no incluya al centro, esta condición no tendría sentido.

Problema 1

$$\begin{cases} H'' + \lambda H = 0 \\ H(-\pi) = H(\pi), \quad H'(-\pi) = H'(\pi) \end{cases}$$

Analizamos todos los posibles valores del autovalor λ .

$$\underline{\lambda = 0}$$

En este caso la EDO queda:

$$H'' = 0 \implies H(\theta) = c_1 + c_2\theta$$

Notar que es una recta, que de forma general no son funciones periódicas, excepto que sean horizontales (con pendiente cero). Imponiendo las condiciones frontera:

$$\begin{cases} H(-\pi) = H(\pi) \\ H'(-\pi) = H'(\pi) \end{cases} \implies c_2 = 0 \implies \boxed{H(\theta) = c_1}$$

Esta es una solución válida, y por tanto $\lambda = 0$ es un valor posible para obtener una solución analítica del problema.

$$\underline{\lambda < 0}$$

En este caso tenemos una EDO de segundo orden homogénea, cuya ecuación característica es:

$$H'' + \lambda H = 0 \implies m^2 + \lambda = 0 \quad ; \quad m = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm\alpha \quad (\alpha > 0)$$

Por tanto la solución queda en este caso (raíces reales distintas):

$$H(\theta) = c_1 e^{\alpha\theta} + c_2 e^{-\alpha\theta}$$

Notar que las funciones exponenciales no son periódicas y es fácil comprobar que al imponer las condiciones frontera la única solución es la trivial, por lo que $\lambda < 0$ no es un autovalor del problema.

$$\underline{\lambda > 0}$$

En este caso también tenemos una EDO de segundo orden homogénea, con ecuación característica:

$$H'' + \lambda H = 0 \implies m^2 + \lambda = 0 \quad ; \quad m = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm i\sqrt{\lambda}$$

Por tanto la solución queda en este caso (raíces complejas):

$$H(\theta) = c_1 \cos(\theta\sqrt{\lambda}) + c_2 \sin(\theta\sqrt{\lambda})$$

Notar que las funciones seno y coseno sí son periódicas con periodo 2π , por lo que todo apunta a que en este caso sí aparecerán autovalores. Imponiendo las condiciones frontera:

$$\begin{cases} H(-\pi) = H(\pi) \\ H'(-\pi) = H'(\pi) \end{cases} \implies \begin{cases} 0 = c_2 \sin(\pi\sqrt{\lambda}) \\ 0 = c_1 \sin(\pi\sqrt{\lambda}) \end{cases}$$

Para que las constantes no sean nulas se debe cumplir $\sqrt{\lambda_n} = n$ con $n \in \mathbb{Z} \implies \lambda_n = n^2$. Por tanto¹⁴⁰:

$$\boxed{\lambda_n = n^2} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \implies \boxed{H_n(\theta) = c_{1n} \cos(n\theta) + c_{2n} \sin(n\theta)}$$

Problema 2

Teniendo en cuenta los valores de $\lambda_n = n^2$ determinados en el anterior Problema 1:

$$\begin{cases} r^2 R'' + r R' - n^2 R = 0 \\ |R(0)| < \infty \end{cases} \quad ; \quad n \geq 0$$

¹⁴⁰El autovalor $\lambda = 0$ vuelve también a salir aquí con la misma autofunción.

Tenemos que analizarla para $n = 0$ y $n \neq 0$.

$n = 0$

Se puede resolver por reducción de orden¹⁴¹ o bien:

$$r^2 R'' + r R' = 0 \quad ; \quad r R'' + R' = 0 \quad ; \quad \frac{d}{dr}(r R') = 0 \implies r R' = c_1 \quad ; \quad dR = \frac{c_1}{r} dr \quad ; \quad \boxed{R(r) = c_1 \ln r + c_2}$$

Por la condición de compatibilidad¹⁴² $c_1 = 0$ y por tanto la solución válida para $n = 0$ es:

$$\boxed{R_0(r) = c_2}$$

$n \neq 0$

Esta es una EDO de tipo Cauchy-Euler¹⁴³ y por tanto:

$$m(m-1) + m - n^2 = 0 \implies m^2 = n^2 \quad ; \quad m = \pm n \implies R_n(r) = c_{1n} r^n + c_{2n} r^{-n}$$

Notar que para cumplir la condición del problema $c_{2n} = 0$ dando lugar a la solución:

$$\boxed{R_n(r) = c_n r^n}$$

Que también es compatible con el valor $n = 0$ obtenido anteriormente. Por tanto la solución completa será:

$$u_n(r, \theta) = R_n(r) H_n(\theta) = A_n r^n \cos(n\theta) + B_n r^n \sin(n\theta)$$

Para cada valor de n se obtiene una posible solución al problema y aplicando el *principio de superposición* se obtiene la solución general:

$$\boxed{u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n r^n \cos(n\theta) + B_n r^n \sin(n\theta)]} \quad (11.35)$$

Las constantes A_n y B_n se pueden obtener a través de la condición de contorno del problema original (Ecuación 11.34, página 409) para la frontera $r = a$ donde $u(r, \theta) = u(a, \theta) = f(\theta)$:

$$u(a, \theta) = f(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n a^n \cos(n\theta) + B_n a^n \sin(n\theta)] = A_0 + a^n \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)]$$

que corresponde con la *serie de Fourier*¹⁴⁴ de $f(\theta)$ y por tanto:

$$\boxed{A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) d\alpha} \quad ; \quad \boxed{A_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \cos(n\alpha) d\alpha} \quad ; \quad \boxed{B_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \sin(n\alpha) d\alpha}$$

Todos estos resultados se pueden poner juntos, sustituyendo en la ecuación (11.35):

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n r^n \cos(n\theta) + B_n r^n \sin(n\theta)] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) d\alpha + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \cos(n\alpha) d\alpha \right) \cos(n\theta) + \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \sin(n\alpha) d\alpha \right) \sin(n\theta) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) d\alpha + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \underbrace{[\cos(n\alpha) \cos(n\theta) + \sin(n\alpha) \sin(n\theta)]}_{\cos(n\alpha - n\theta)} d\alpha = \end{aligned}$$

¹⁴¹ Ver la Sección 2.9, página 46.

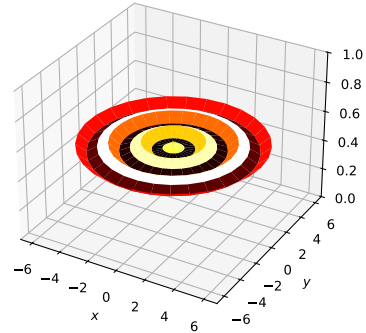
¹⁴² Ya que no estaría definida para $r = 0$.

¹⁴³ Ver la Sección 3.4.3, página 87.

¹⁴⁴ Ver la Definición 9.10, página 324.

donde la *función de Green* $P(r, \theta, \alpha)$ en este caso se suele denominar **núcleo de Poisson**.

En la siguiente figura se muestra el resultado obtenido para un caso práctico con condición de contorno $f(\theta) = 1/2 + 3\cos(2\theta)$, donde se aprecia gráficamente la distribución de temperatura $u(r, \theta)$ estacionaria en la placa bajo estas condiciones.



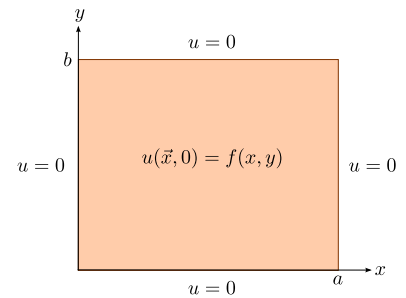
11.7. Problemas de Evolución Bidimensionales

11.7.1. Ecuación del Calor Bidimensional en Coordenadas Cartesianas

Vamos a ver ahora cómo generalizar el método de separación de variables a un problema de más de dos variables. Para ello estudiaremos la ecuación del calor en una placa rectangular $\vec{x} = (x, y) \in R = (0, a) \times (0, b) \subset \mathbb{R}^2$.

Sea una delgada placa conductora bidimensional $a \times b$ con las condiciones frontera mostradas en la siguiente figura, donde los cuatro lados de la frontera ∂R se encuentran a temperatura constante $u = 0$ verticales izquierdo y derecho y el lado horizontal superior se encuentran aislados, habiendo una distribución inicial de temperatura dada por $f(\vec{x})$.

En este caso la temperatura u depende de tres variables independientes, $u(\vec{x}, t) = u(x, y, t)$.



El PVF correspondiente se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u = k(u_{xx} + u_{yy}) & \vec{x} \in R, \quad t > 0 \quad (\text{EDP interior placa}) \\ u(\partial R) = 0 & (\text{Cond. frontera Dirichlet}) \\ u(\vec{x}, 0) = f(\vec{x}) & \vec{x} \in R, \quad t = 0 \quad (\text{Cond. iniciales}) \end{cases}$$

Empezamos aplicando el procedimiento del *método de separación de variables* a las variables espaciales y a la temporal¹⁴⁵:

$$u(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x})T(t) \implies \begin{cases} u_t = \phi T' \\ \Delta u = T \Delta \phi \end{cases} \implies \phi T' = Tk \Delta \phi; \quad \frac{\Delta \phi}{\phi} = \frac{T'}{Tk} = -\lambda$$

$$\begin{cases} \Delta \phi + \lambda \phi = 0 & (\text{Ec. 1}) \\ T' + \lambda k T = 0 & (\text{Ec. 2}) \end{cases} \quad (11.36)$$

Resolveremos cada problema por separado atendiendo a las condiciones iniciales y de frontera.

Problema 1: Ecuación de Helmholtz

$$\begin{cases} \Delta \phi + \lambda \phi = 0, & \text{en } R \\ \phi(\partial R) = 0 \end{cases}$$

¹⁴⁵También se puede usar un método alternativo, suponiendo que $u(x, y, t) = f(x)g(y)h(t)$, obteniéndose el mismo resultado, ver la [Sección 11.7.2](#), página 414.

Este es un problema de autovalores bidimensional¹⁴⁶, que puede resolverse aplicando nuevamente el método de separación de variables, de forma similar a como se hizo en los distintos casos de la [Sección 11.6.1, página 402](#).

$$\phi(x, y) = X(x)Y(y) \implies \Delta\phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} = X''Y + XY'' \implies X''Y + XY'' + \lambda XY = 0 \implies \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda$$

De esta forma comprobamos que este método es válido para esta nueva ecuación. Para que pueda cumplirse la igualdad entre las variables independientes x e y , es necesario que ambas partes sean igual a una misma constante $-\mu$, obteniéndose dos nuevos *problemas de autovalores*, en este caso unidimensionales:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda = -\mu \implies \begin{cases} X'' + \mu X = 0 \\ Y'' + (\lambda - \mu)Y = 0 \end{cases}$$

$$(1) \quad \begin{cases} X'' + \mu X = 0 \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases} \quad ; \quad (2) \quad \begin{cases} Y'' + (\lambda - \mu)Y = 0 \\ Y(0) = Y(b) = 0 \end{cases}$$

El problema (1) se puede analizar en función del parámetro μ de forma similar a como se hizo por ejemplo en el Problema 1 de la [Sección 11.4.2, página 373](#), obteniéndose:

$$\mu_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2} \implies \boxed{X_n(x) = \text{sen } \frac{n\pi x}{a}} \quad ; \quad n = 1, 2, \dots$$

Y metiendo este valor en el problema (2) y resolviendo de forma análoga se tiene:

$$\lambda_{m,n} = \mu_n + \frac{m^2\pi^2}{b^2} = \frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2} \implies \boxed{Y_m(y) = \text{sen } \frac{m\pi y}{b}} \quad ; \quad m = 1, 2, \dots$$

Notar que aparecen dos autovalores μ_n y $\lambda_{m,n}$ que dependen de dos índices n y m . Teniendo en cuenta que $\phi(x, y) = X(x)Y(y)$ se tienen las siguientes autofunciones:

$$\phi_{m,n}(x, y) = X_n(x)Y_m(y) = \text{sen } \frac{n\pi x}{a} \text{sen } \frac{m\pi y}{b}$$

Que por el principio de superposición se tiene:

$$\phi_{m,n}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \text{sen } \frac{n\pi x}{a} \text{sen } \frac{m\pi y}{b}$$

Problema 2: Serie Doble de Fourier

La ecuación temporal (2) de (11.36) es fácilmente resoluble, teniendo en cuenta los valores $\lambda_{m,n}$ obtenidos en el problema anterior:

$$T' + \lambda_{m,n} kT = 0 \implies T_{m,n}(t) = c_{m,n} e^{-\lambda_{m,n} kt} = \boxed{c_{m,n} e^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}\right)kt}}$$

Finalmente la solución completa $u(x, y, t)$ será:

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \phi_{m,n}(x, y) T_{m,n}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \text{sen } \frac{n\pi x}{a} \text{sen } \frac{m\pi y}{b} e^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}\right)kt}$$

Las constantes $A_{m,n}$ se pueden obtener a partir de la condición inicial del problema $f(x, y)$:

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \text{sen } \frac{n\pi x}{a} \text{sen } \frac{m\pi y}{b}$$

que es conocida con el nombre de **serie doble de Fourier**, donde los coeficientes pueden determinarse de la siguiente forma:

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \text{sen } \frac{n\pi x}{a} \right)}_{C_m(x)} \text{sen } \frac{m\pi y}{b} = \sum_{m=1}^{\infty} C_m(x) \text{sen } \frac{m\pi y}{b}$$

¹⁴⁶La ecuación de este problema $\Delta\phi + \lambda\phi = 0$ se conoce con el nombre de **ecuación de Helmholtz** y tiene múltiples aplicaciones prácticas por ejemplo en electromagnetismo. La **ecuación de Helmholtz** es un caso particular de la **ecuación de Poisson**, $\Delta\phi = f$.

1. Para cada valor de m se obtiene una función $C_m(x)$, que son los coeficientes de la serie de Senos de Fourier de la función $f(x, y)$, y por tanto:

$$C_m(x) = \frac{2}{b} \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m\pi y}{b} dy$$

2. Para cada valor de n se tiene:

$$C_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

que corresponde con la serie de senos de Fourier de la función $C_m(x)$, y por tanto los coeficientes $A_{m,n}$ se pueden determinar como:

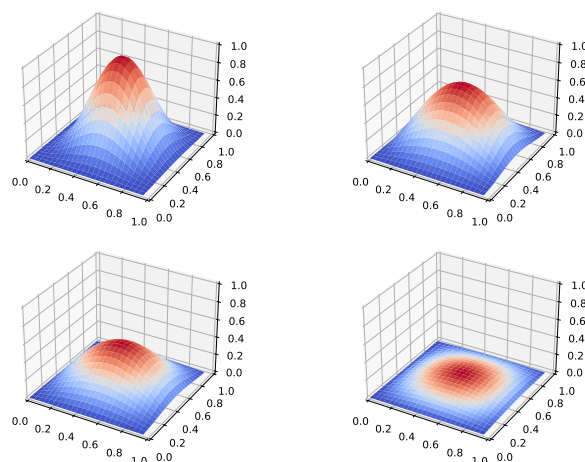
$$A_{m,n} = \frac{2}{a} \int_0^a C_m(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx$$

Por tanto los coeficientes $A_{m,n}$ se puede calcular mediante la siguiente integral doble:

$$A_{m,n} = \frac{2}{a} \int_0^a \underbrace{\left[\frac{2}{b} \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m\pi y}{b} dy \right]}_{C_m(x)} \sin \frac{n\pi x}{a} dx ; \quad A_{m,n} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m\pi y}{b} \sin \frac{n\pi x}{a} dx dy$$

Simulación espacio temporal para del problema del calor bidimensional en una placa conductora cuadrado de lado 1 y una distribución inicial de temperaturas dada por:

$$u(x, y, 0) = f(x, y) = \sin^2(\pi x) \sin^2(\pi y)$$



Este proceso es extensible a problemas con cualquier número de variables independientes, aplicando reiteradamente el método de separación de variables. Sin embargo el aumento de complejidad de los términos a medida aumenta el número de variables hace poco práctico su uso, siendo en esos casos mucho más factible el uso de métodos numéricos.

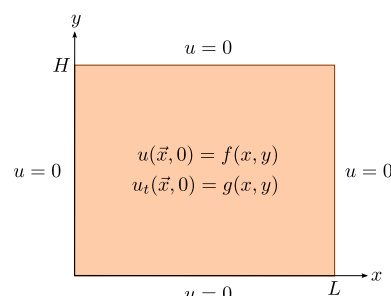
11.7.2. Ecuación de Onda Bidimensional en Coordenadas Cartesianas

Vamos a analizar las oscilaciones de una delgada membrana ideal rectangular, donde el desplazamiento vertical $u(x, y, t)$ de cada punto de la membrana satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Con las condiciones frontera e iniciales:

$$\begin{cases} u(0, y, t) = 0 & , & u(L, y, t) = 0 \\ u(x, 0, t) = 0 & , & u(x, H, t) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u(x, y, 0) = f(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = g(x, y) \end{cases}$$



Aplicamos separación de variables $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$:

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) \implies XYT'' = c^2(YTX'' + XTY'') ; \quad \frac{T''}{c^2T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda ; \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda = -\mu \implies \begin{cases} X'' + \mu X = 0 \\ Y'' + (\lambda - \mu)Y = 0 \end{cases} \\ \frac{T''}{c^2T} = -\lambda ; \quad T'' - c^2\lambda T = 0 \end{array} \right.$$

Tenemos tres problemas de EDO:

$$(1) \quad \begin{cases} X'' + \mu X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} ; \quad (2) \quad \begin{cases} Y'' + (\lambda - \mu)Y = 0 \\ Y(0) = Y(H) = 0 \end{cases} ; \quad (3) \quad \begin{cases} T'' + c^2\lambda T = 0 \\ T(0) = f(x, y) \\ T'(0) = g(x, y) \end{cases}$$

- El Problema 1 es bien conocido con soluciones:

$$\boxed{\mu_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}} ; \quad \boxed{X_n(x) = c_{1n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}} ; \quad n = 1, 2, \dots$$

- Con los valores conocidos de μ_n resolvemos el problema (2):

$$Y'' + (\lambda - \mu_n)Y = 0$$

que es del mismo tipo que el anterior y por tanto introduciendo un nuevo índice m :

$$\lambda_{m,n} - \mu_n = \frac{m^2\pi^2}{H^2} ; \quad \lambda_{m,n} = \mu_n + \frac{m^2\pi^2}{H^2} = \frac{n^2\pi^2}{L^2} + \frac{m^2\pi^2}{H^2} ; \quad \lambda_{m,n} > 0$$

$$\boxed{\lambda_{m,n} = \frac{n^2\pi^2}{L^2} + \frac{m^2\pi^2}{H^2}} ; \quad \boxed{Y_{m,n} = c_{2m} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H}} ; \quad \{m, n\} = 1, 2, \dots$$

- Finalmente con los valores conocidos de $\lambda_{m,n}$ resolvemos el problema (3) a través de su ecuación característica:

$$T'' + c^2\lambda_{m,n}T = 0 ; \quad k^2 + c^2\lambda_{m,n} = 0 ; \quad k = \sqrt{-c^2\lambda_{m,n}} = c\sqrt{-\lambda_{m,n}} \implies k = \pm ic\sqrt{\lambda_{m,n}}$$

$$\boxed{T_{m,n}(t) = c_{3m,n} \cos(tc\sqrt{\lambda_{m,n}}) + c_{4m,n} \operatorname{sen}(tc\sqrt{\lambda_{m,n}})}$$

La solución completa es por tanto:

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_{m,n} \cos(tc\sqrt{\lambda_{m,n}}) + B_{m,n} \operatorname{sen}(tc\sqrt{\lambda_{m,n}}) \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H}$$

donde las constantes $A_{m,n}$ y $B_{m,n}$ se determinan a través de las dos condiciones iniciales:

$$1. \quad u(x, y, 0) = f(x, y)$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H}$$

que es una **serie doble de Fourier**. Al igual que se hizo en el [Sección 11.7.1, página 413](#), los coeficientes $A_{m,n}$ se pueden calcular mediante dos integrales simples de la siguiente forma:

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right)}_{C_m(x)} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H} = \sum_{m=1}^{\infty} C_m(x) \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H} \implies \text{Serie Fourier de senos de } f(x, y)$$

$$C_m(x) = \frac{2}{H} \int_0^H f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H} dy$$

Como:

$$C_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \implies \text{Serie Fourier de senos de la función } C_m(x)$$

$$A_{m,n} = \frac{2}{L} \int_0^L G_n(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$$

Finalmente los coeficientes $A_{m,n}$ se puede calcular mediante la siguiente integral doble:

$$A_{m,n} = \frac{2}{L} \int_0^L \underbrace{\left[\frac{2}{H} \int_0^H f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H} dy \right]}_{G_n(x)} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$A_{m,n} = \frac{4}{HL} \int_0^L \int_0^H f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx dy$$

$$2. \ u_t(x, y, 0) = g(x, y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[-c\sqrt{\lambda_{m,n}} A_{nm} \operatorname{sen}(tc\sqrt{\lambda_{m,n}}) + c\sqrt{\lambda_{m,n}} B_{nm} \cos(tc\sqrt{\lambda_{m,n}}) \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H}$$

$$u_t(x, y, 0) = g(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} cB_{nm} \sqrt{\lambda_{m,n}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H}$$

Esta es otra **serie doble de Fourier** y de igual forma que antes, los coeficientes B_{nm} se pueden calcular a través de dos integrales simples de la siguiente forma:

$$u_t(x, y, 0) = g(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{m=1}^{\infty} cB_{nm} \sqrt{\lambda_{m,n}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right)}_{D_m(x)} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H} = \sum_{n=1}^{\infty} D_m(x) \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H}$$

$$D_m(x) = \frac{2}{H} \int_0^H g(x, s) \operatorname{sen} \frac{m\pi s}{H} ds$$

Como:

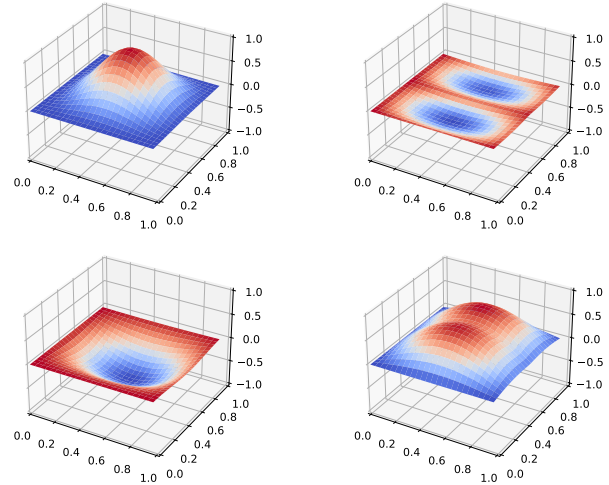
$$\sum_{n=1}^{\infty} c\sqrt{\lambda_{m,n}} B_{nm} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = D_m(x) \implies B_{nm} = \frac{2}{Lc\sqrt{\lambda_{m,n}}} \int_0^L D_m(s) \operatorname{sen} \frac{n\pi s}{L} ds$$

Finalmente los coeficientes $B_{m,n}$ se pueden calcular a través de la siguiente integral doble:

$$B_{m,n} = \frac{2}{cL\sqrt{\lambda_{m,n}}} \int_0^L \underbrace{\left[\frac{2}{H} \int_0^H g(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H} dy \right]}_{D_m(x)} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$$

Simulación espacio temporal para el problema de onda bidimensional en una membrana cuadrada de lado 1 y con condiciones iniciales dada por:

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = f(x, y) = \sin^2(\pi x) \sin^2(\pi y) \\ u_t(x, y, 0) = g(x, y) = \cos(xy) \end{cases}$$



11.7.3. Ecuación del Calor en un Cilindro con Simetría Radial

Vamos a estudiar la ecuación del calor en un cilindro circular de radio a y altura H con condiciones Dirichlet en la frontera e iniciales

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k \Delta u \\ u(r, \theta, 0, t) = u(r, \theta, H, t) = u(a, \theta, z, t) = 0 \\ u(r, \theta, z, 0) = f(r, z) \end{cases} \quad (\text{independiente de } \theta)$$

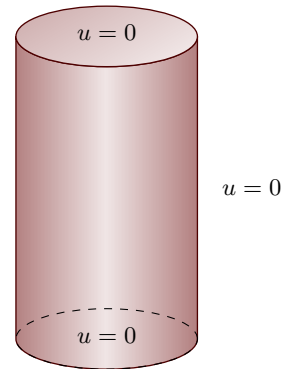
El laplaciano en coordenadas cilíndricas, teniendo en cuenta la simetría radial (independencia del ángulo θ):

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}}_0 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Aplicamos separación de variables $u(r, z, t) = R(r)Z(z)T(t)$:

$$\frac{1}{k} R Z T' = T Z R'' + \frac{1}{r} T Z R' + T R Z'' ; \quad \frac{T'}{kT} = \frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{Z''}{Z} = -\lambda \implies \boxed{T' + k\lambda T = 0} \quad (3)$$

$$\frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{Z''}{Z} = -\lambda ; \quad \frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} = -\lambda - \frac{Z''}{Z} = -\mu \implies \begin{cases} rR'' + R' + \mu rR = 0 & (1) \\ Z'' + (\lambda - \mu)Z = 0 & (2) \end{cases}$$



Problema 1

$$\begin{cases} rR'' + R' + \mu rR = 0 \\ R(a) = 0 \\ |R(0)| < \infty \quad (\text{cond. de compatibilidad}) \end{cases}$$

$$\bullet \mu = 0 \implies rR'' + R' = 0 \implies rm^2 + m = m(rm + 1) = 0 \implies m = \{0, -1/r\}$$

$$R(r) = c_1 + c_2 e^{-1/r}$$

Por la condición de compatibilidad $|R(0)| < \infty$, se tiene $c_2 = 0$, y por la condición frontera $R(a) = 0$ se tiene $c_1 = 0$, por lo que $\mu = 0$ **no** es un autovalor del problema.

$\bullet \mu \neq 0$. Si multiplicamos la ecuación por r :

$$r^2 R'' + 2R' + \mu r^2 R = 0$$

se obtiene la **ecuación paramétrica de Bessel**¹⁴⁷ de forma que con el cambio de variable:

$$z = r\sqrt{\mu} \implies \left\{ \begin{array}{l} r = \frac{z}{\sqrt{\mu}} \\ R(r) = R(z/\sqrt{\mu}) = \phi(z) \\ R'(r) = \frac{d\phi}{dz} \frac{dz}{dr} = \phi'(z)\sqrt{\mu} \\ R''(r) = \frac{d}{dz} [\phi'(z)\sqrt{\mu}] \frac{dz}{dr} = \phi''(z)\mu \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \frac{z^2}{\mu} \phi'' + \frac{z}{\sqrt{\mu}} \phi' + \phi \frac{z^2}{\mu} = 0 \\ z^2 \phi'' + z \phi' + z^2 \phi = 0 \end{array}$$

que es una **ecuación de Bessel**¹⁴⁸ de orden $m = 0$ y cuya solución es:

$$\phi(z) = c_1 J_0(z) + c_2 Y_m(z) \xrightarrow{c.v.} \boxed{R(r) = c_1 J_0(r\sqrt{\mu}) + c_2 Y_0(r\sqrt{\mu})}$$

Recordamos que la función Y_m no está acotada en el origen¹⁴⁹ y por tanto, por la concisión de compatibilidad obliga a eliminar ese término, por tanto:

$$c_2 = 0 \implies R(r) = c_1 J_0(r\sqrt{\mu})$$

Imponiendo la condición de contorno:

$$R(a) = 0 \implies c_1 J_0(r\sqrt{\mu}) = 0$$

Para que $c_1 \neq 0$ el valor $a\sqrt{\mu}$ deben coincidir con los ceros de esa función. Si denominamos z_m^n al n -ésimo cero de la función $J_m(x)$, entonces en nuestro caso:

$$J_0(a\sqrt{\mu}) = 0 \implies a\sqrt{\mu_n} = z_0^n \implies \boxed{\mu_n = \left(\frac{z_0^n}{a}\right)^2} \quad ; \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Y las autofunciones asociadas son:

$$\boxed{R_n(r) = c_1 J_0(r\sqrt{\mu_n}) = c_1 J_0\left(\frac{r z_0^n}{a}\right)}$$

Problema 2

$$\begin{cases} Z'' + (\lambda - \mu_n)Z = 0 \\ Z(0) = Z(H) = 0 \end{cases}$$

- $\lambda = \mu_n \implies Z'' = 0 \implies Z(z) = c_1 z + c_2 \implies \begin{cases} Z(0) = 0 : & c_2 = 0 \\ Z(H) = 0 : & c_1 = 0 \end{cases}$ Por tanto $\lambda = \mu_n$ **no** es autovalor.
- $\lambda \neq \mu_n \implies m^2 + (\lambda - \mu_n) = 0 \implies m = \sqrt{\mu_n - \lambda}$
- $\lambda < \mu_n \implies$ raíces reales y distintas:

$$Z(z) = c_1 \cosh(z\sqrt{\mu_n - \lambda}) + c_2 \sinh(z\sqrt{\mu_n - \lambda}) \implies \begin{cases} Z(0) = 0 : & c_2 = 0 \\ Z(H) = 0 : & c_1 = 0 \end{cases} \quad \lambda < \mu_n \text{ **no** autovalor}$$

- $\lambda > \mu_n \implies$ raíces complejas:

$$Z(z) = c_1 \cos(z\sqrt{\lambda - \mu_n}) + c_2 \sin(z\sqrt{\lambda - \mu_n}) \implies \begin{cases} Z(0) = 0 : & c_1 = 0 \\ Z(H) = 0 : & c_2 \sin(H\sqrt{\lambda - \mu_n}) = 0 \end{cases}$$

¹⁴⁷Ver la Sección 4.5.1, página 135, el Sección 11.4.3, página 382 y el Sección ??, página ??.

¹⁴⁸Ver la Sección ??, página ??.

¹⁴⁹Ver la Sección ??, página ??.

$$H\sqrt{\lambda - \mu_n} = m\pi \quad ; \quad m = 1, 2, \dots \implies \lambda_{m,n} = \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 + \mu_n$$

$$\lambda_{m,n} = \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 + \left(\frac{z_0^n}{a}\right)^2 \quad ; \quad Z_{m,n}(z) = c_2 \operatorname{sen} \frac{zm\pi}{H} \quad ; \quad m, n = 1, 2, \dots$$

Problema 3

$$T' + k\lambda_{m,n}T = 0 \implies T_{m,n}(t) = c_3 e^{-tk\lambda_{m,n}} \implies T_{m,n}(t) = c_3 e^{-tk[(m\pi/H)^2 + (z_0^n/a)^2]}$$

Finalmente la solución será:

$$u(r, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} J_0\left(\frac{r z_0^n}{a}\right) \operatorname{sen} \frac{zm\pi}{H} e^{-tk[(m\pi/H)^2 + (z_0^n/a)^2]}$$

que es una **serie doble de Fourier**. Los coeficientes $A_{m,n}$ se pueden calcular mediante una integral doble¹⁵⁰ de la siguiente forma:

$$u(r, z, 0) = f(r, z) \implies f(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} J_0(r z_0^n/a)}_{C_m(r)} \operatorname{sen} \frac{zm\pi}{H} = \sum_{m=1}^{\infty} C_m(r) \operatorname{sen} \frac{zm\pi}{H}$$

$$C_m(r) = \frac{2}{H} \int_0^H f(r, z) \operatorname{sen} \frac{zm\pi}{H} dz \quad (11.37)$$

Como:

$$C_m(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} J_0(r z_0^n/a)$$

corresponde con la serie generalizada de Fourier de la función $C_m(r)$, sus coeficientes $A_{m,n}$ se pueden determinar de la siguiente forma¹⁵¹, teniendo en cuenta la función peso r :

$$A_{m,n} = \frac{\int_0^a C_m(r) J_0(r z_0^n/a) r dr}{\int_0^a J_0^2(r z_0^n/a) r dr}$$

Finalmente, teniendo en cuenta (11.37) los coeficientes $A_{m,n}$ se pueden calcular a través de la siguiente integral doble:

$$A_{m,n} = \frac{\int_0^a \left(\frac{2}{H} \int_0^H f(r, z) \operatorname{sen} \frac{zm\pi}{H} dz \right) J_0(r z_0^n/a) r dr}{\int_0^a J_0^2(r z_0^n/a) r dr}$$

$$A_{m,n} = \frac{2 \int_0^a \int_0^H f(r, z) \operatorname{sen} \frac{zm\pi}{H} J_0(r z_0^n/a) r dz dr}{H \int_0^a J_0^2(r z_0^n/a) r dr}$$

¹⁵⁰Ver la Sección 11.7.1, página 412 y la Sección 11.7.2, página 414.

¹⁵¹Ver la Sección 10.4.2, página 356.

11.8. Unicidad y Condiciones de Compatibilidad en EDP

Teorema fundamental del cálculo (consecuencia $\rightarrow$ regla de Barrow):

$$\int f'(x) dx = f(x) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = \phi(b) - \phi(a)$$

se puede expresar como:

$$\phi(a) - \phi(b) = - \int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial x} dx$$

que podemos interpretarlo en términos de un flujo¹⁵² $\phi(x)$ a través de los bordes $\phi(a) - \phi(b)$, cuyo valor es la integral sobre todo el intervalo de la difusión del mismo, $\partial \phi / \partial x$.

Este resultado en una dimensión se puede extender a dos dimensiones a través del teorema de Green: sea C una *curva de Jordan* (simple, suave y cerrada) de $\mathbb{R}^2$ positivamente orientada y sea D la región de $\mathbb{R}^2$ limitada por C . Dado un campo vectorial $\vec{F}(x, y) = [M(x, y), N(x, y)]$ donde las funciones derivadas parciales de M y N son continuas en D .

- La integral de línea de $\vec{F}$ sobre la curva C se conoce con el nombre de **circulación** Γ y corresponde con las contribuciones de la función vectorial F que siguen la curva C en sentido positivo.

$$\Gamma = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint [M, N] \cdot [dx, dy] = \oint (M dx + N dy)$$

Teorema de Green:

$$\underbrace{\oint_C (M dx + N dy)}_{\text{Circulación}} = - \underbrace{\iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dx dy}_{\text{rotacional 2D}} \quad \Rightarrow \quad \text{Extensión a } \mathbb{R}^3 \rightarrow \text{Teo. Stokes}$$

Teorema de Stokes: $\vec{F} = [P, Q, R]$

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S \underbrace{(\nabla \times \vec{F})}_{\text{rot } F} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_{\partial S} (P dx + Q dy + R dz) = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \right]$$

- Por otra parte el **flujo** ϕ de $\vec{F}$ a través de la curva C corresponde con las contribuciones de las componentes de $\vec{F}$ perpendiculares a cada pto de C . Si $d\vec{s} = [dx, dy]$, el vector normal, $d\vec{n} = [-dy, dx]$, notar que $d\vec{s} \cdot d\vec{n} = 0$. Entonces:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{n} = \oint_C [M, N] \cdot [-dy, dx] = \oint_C (-M dy + N dx)$$

$$\underbrace{\oint_C (-M dx + N dy)}_{\text{Flujo}} = - \underbrace{\iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial x} \right) dx dy}_{\text{Divergencia}} \quad \Rightarrow \quad \text{Extensión a } \mathbb{R}^3 \Rightarrow \text{Teo. Gauss}$$

Teorema de Gauss o de la divergencia: $\vec{F} = [P, Q, R]$

$$\iint_S \underbrace{\vec{F} \cdot d\vec{S}}_{\vec{n} dS} = \iiint_V \underbrace{\text{div } \vec{F}}_{\nabla \cdot \vec{F}} dV \quad \Rightarrow \quad \int_{\partial \Omega} F \cdot \vec{n} = \int_{\Omega} \text{div } F$$

¹⁵²Cantidad de una magnitud que atraviesa un medio por unidad de tiempo y unidad de dimensión del medio.

11.8.1. Identidades de Green

Sustituyendo $\vec{F}$ por otras funciones en el teorema de la divergencia se obtienen fórmulas con interés práctico.

- **Primera Identidad:** $\boxed{\vec{F} = \nabla v}$ (v función escalar)

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot \vec{n} = \int_{\Omega} \operatorname{div} F \implies \int_{\partial\Omega} \underbrace{\nabla v \cdot \vec{n}}_{\frac{\partial v}{\partial n}} = \int_{\Omega} \underbrace{\nabla \cdot \nabla v}_{\Delta v} \implies \boxed{\int_{\Omega} \Delta v = \int_{\delta\Omega} \frac{\partial v}{\partial n}} \quad (11.38)$$

- **Segunda Identidad:** $\boxed{\vec{F} = u \nabla v}$ (u y v funciones escalares)

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot \vec{n} = \int_{\Omega} \operatorname{div} F \implies \int_{\partial\Omega} u \underbrace{\nabla v \cdot \vec{n}}_{\frac{\partial v}{\partial n}} = \int_{\Omega} \nabla \cdot (u \nabla v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v)$$

$$\boxed{\int_{\Omega} u \Delta v = \int_{\delta\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v} \quad (11.39)$$

11.8.2. Estudio de la Unicidad

Ecuación de Poisson

$$\Delta u = f$$

- Problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Sean u y v dos soluciones cualquiera del problema y sea $w = u - v$. Entonces:

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u = g \end{cases} ; \quad \begin{cases} \Delta v = f \\ v = g \end{cases} \implies \begin{cases} \Delta(u - v) = \Delta w = 0 \\ u - v = w = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \Delta w = 0 & \text{en } \Omega \\ w = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Aplicamos la segunda identidad de Green (11.39) a la función $w \Delta w$ sobre todo el dominio del problema Ω :

$$\int_{\Omega} w \underbrace{\Delta w}_0 = \int_{\delta\Omega} \underbrace{w}_0 \frac{\partial w}{\partial n} - \int_{\Omega} \Delta w \cdot \Delta w \implies \int_{\Omega} \Delta w \cdot \Delta w = 0 \implies \nabla w = 0$$

Por tanto, $w = \text{cte.}$ Como $w = 0$ en $\delta\Omega \implies w = 0$ en todo Ω , lo que implica que $u = v$ y por tanto el problema, si tiene solución, ésta es única.

- Problema de Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (11.40)$$

Repetimos el proceso anterior. Sean u y v dos soluciones cualquiera del problema y sea $w = u - v$. Entonces:

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \end{cases} ; \quad \begin{cases} \Delta v = f \\ \frac{\partial v}{\partial n} = g \end{cases} \implies \begin{cases} \Delta(u - v) = \Delta w = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \Delta w = 0 & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Aplicamos la segunda identidad de Green (11.39) a la función $w \Delta w$ sobre todo el dominio del problema Ω :

$$\int_{\Omega} w \underbrace{\Delta w}_0 = \int_{\delta\Omega} \underbrace{w}_0 \frac{\partial w}{\partial n} - \int_{\Omega} \Delta w \cdot \Delta w \implies \int_{\Omega} \Delta w \cdot \Delta w = 0 \implies \nabla w = 0$$

Por tanto, al igual que antes $w = \text{cte.}$ Pero en este caso desconocemos el valor de w en ningún sitio, por lo que solo podemos asegurar que dos soluciones u y v del problema se diferencian en una constante.

Sin embargo se puede aplicar la primera identidad de Green (11.38) sobre la función f para obtener una condición de compatibilidad:

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} \Delta u = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} = \int_{\partial\Omega} g$$

El problema de Poisson con condición Neumann (11.40) solo puede tener solución si se verifica:

$$\int_{\Omega} f = \int_{\partial\Omega} g$$

Además, si tiene solución, dos soluciones cualquiera del problema se diferencian en una constante.

Ecuación del Calor

Los problemas de la ecuación del calor, tanto con condiciones Dirichlet como Neumann, si tienen solución, ésta es única.

La demostración se hace de la siguiente forma. Sea el problema del calor con condiciones Dirichlet o Neumann:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{en } \Omega, t > 0 \\ u = f & \text{en } t = 0 \\ u = g \text{ ó } \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Sean u y v dos soluciones cualquiera del problema y sea $w = u - v$. Entonces:

$$\begin{cases} w_t = \Delta w & \text{en } \Omega, t > 0 \\ w = 0 & \text{en } t = 0 \\ u = 0 \text{ ó } \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Si definimos una nueva función:

$$W(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} w^2(x, t) dx$$

Entonces teniendo en cuenta la ecuación del calor y la segunda identidad de Green:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} w^2(x, t) dx = \int_{\Omega} w \frac{\partial w}{\partial t} dx = \int_{\Omega} w \Delta w = \int_{\partial\Omega} \underbrace{w \frac{\partial w}{\partial n}}_0 - \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla w = - \int_{\Omega} |\nabla w|^2 \leq 0$$

Entonces la función $W(t)$ es no creciente y por tanto:

$$0 \leq W(t) \leq W(0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} w^2(x, 0) = 0$$

Es decir, $W(t) = 0 \implies w(x) = 0$ y por tanto hay unicidad en los dos problemas.

Ecuación de Onda

Sea el problema de la ecuación de onda unidimensional con condiciones Dirichlet.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in (0, L), t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in (0, L) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) & x \in (0, L) \end{cases} \quad (11.41)$$

La energía total, suma de la energía cinética y potencial del sistema viene dada por:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{c^2}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$

Derivando con respecto al tiempo y aplicando la regla de la cadena:

$$E'(t) = \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx + c^2 \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} dx$$

Aplicando la regla de la cadena en la segunda integral:

$$c^2 \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \frac{\partial u}{\partial x} & du = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \\ dv = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} & v = \frac{\partial u}{\partial t} \end{array} \right\} = \underbrace{c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_0^L}_0 - c^2 \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

Notar que las condiciones de frontera $u(0, t) = u(L, t) = 0$ implican que $u_t(0, t) = u_t(L, t) = 0$. Por tanto:

$$E'(t) = \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx - c^2 \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx = \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)}_0 dx = 0$$

La energía total de toda solución $u(x, t)$ del problema (11.41) se conserva en el tiempo.

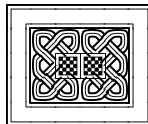
Dadas dos soluciones u y v del problema, definiendo $w = u - v$, se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & x \in (0, L), t > 0 \\ w(0, t) = w(L, t) = 0 & t > 0 \\ w(x, 0) = 0 & x \in (0, L) \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = 0 & x \in (0, L) \end{array} \right.$$

Como $w(x, 0) = 0$ la energía inicial de w es $E(0) = 0$ y como se conserva en el tiempo $E(t) = 0$ lo que implica $w(x, t) = 0$ y por tanto:

El problema (11.41) tiene a lo sumo una solución.

Estos resultados se pueden también demostrar para dimensión N usando las identidades de Green de forma similar a lo realizado en los casos anteriores.

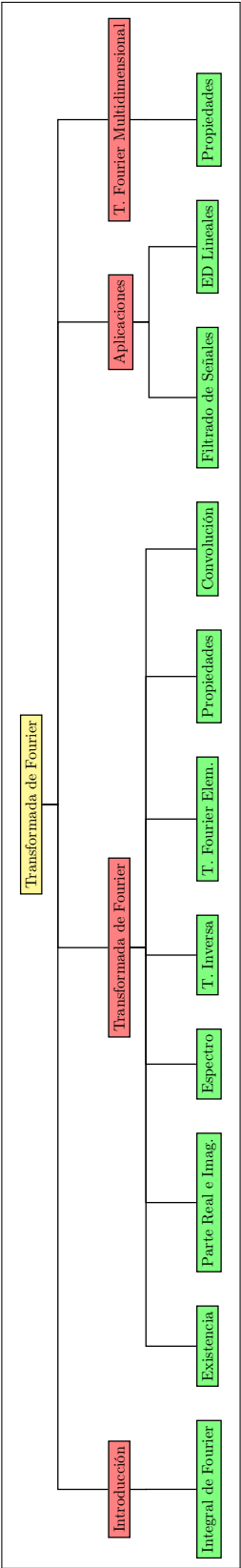




Transformada de Fourier

Contenido

12.1	Introducción	427
12.2	Integral de Fourier	427
12.3	Transformada de Fourier de una Función	428
12.3.1	Condiciones de Existencia	428
12.3.2	Parte Real y Compleja de la Transformada de Fourier	429
12.3.3	Espectro de Fourier	430
12.3.4	Transformadas Inversa de Fourier	431
12.3.5	Tabla de Transformadas de Fourier Elementales	435
12.3.6	Propiedades de la Transformada de Fourier	436
12.3.7	Convolución en la Transformada de Fourier	437
12.4	Aplicaciones de la Transformada de Fourier en EDP	438
12.4.1	Filtrado de Señales	438
12.4.2	Ecuaciones Diferenciales Lineales	438
12.5	Transformada de Fourier en Varias Dimensiones	442
12.5.1	Propiedades de la Transformada de Fourier Multidimensional	443



12.1. Introducción

En muchos de los ejemplos que usaremos en este tema la función a tratar $f(x)$ va a ser una *señal*¹ dependiente de una variable continua, que puede ser espacial o temporal, aunque la función $f(x)$ no tiene que ser necesariamente continua.

Las aplicaciones prácticas de la transformada de Fourier son múltiples tanto en ingeniería, medicina o telecomunicaciones.

- Uno de los ejemplos más usados es la transformación de señales de potencia y energía de cara al envío de información por cables u ondas. Esta transformación permite la ocupación de todo el espectro radioeléctrico.
- En acústica, las transformadas de Fourier tienen diferentes usos, desde comprimir audio a limpiar el ruido de archivos. La compresión de archivos usando este tipo de fórmulas también se usa en archivos como imágenes o vídeos; no tiene por qué ser de audio.
- En ingeniería civil es frecuente el uso de estas transformadas para calcular el comportamiento de grandes estructuras, como puentes, ante fuerzas de alta energía como el viento.
- En medicina con la formación de imágenes médicas, especialmente en la resonancia magnética (RM), donde la transformada de Fourier se utiliza para convertir los datos de una señal cruda que se recogen en el escáner de RM en imágenes útiles.
- En informática, por ejemplo con el reconocimiento de voz, una tecnología que abre las puertas a la identificación biométrica por sonido.
- En matemáticas, como método de resolución de problemas de EDP de dominio infinito².

12.2. Integral de Fourier

La **serie de Fourier** de una determinada función $f(x)$ definida en el intervalo $(-L, L)$ está dada por³:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

donde los denominados **coeficientes de Fourier** a_i y b_i vienen dados por:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad ; \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad ; \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

En la **Sección 9.4.7, página 333** se vio que esta expresión se puede expresar de forma compacta a través de la **forma compleja de la serie de Fourier**:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 x} \quad ; \quad c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx \quad ; \quad n \in \mathbb{Z}$$

donde el periodo T y la frecuencia angular ω_0 vienen dados por:

$$T = 2L \quad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{L}$$

Vamos a definir la variable principal de este tema⁴ ω de la siguiente forma:

$$\omega = n\omega_0 \quad \implies \quad \Delta\omega = n\omega_0 - (n-1)\omega_0 = \omega_0$$

¹Ver la **Definición 5.10, página 179**.

²Ver la **Sección 12.4, página 438**.

³Ver la **Definición 9.10, página 324**.

⁴La variable ω corresponde con los *armónicos*, que en matemáticas son los elementos de un conjunto infinito discreto y que todos son múltiplos enteros de uno llamado fundamental, que en este caso es ω_0 . El término procede de las ondas estacionarias que se generan en los instrumentos musicales, que corresponden a resonancias discretas y cuyas frecuencias son múltiplos enteros del tono más bajo posible, llamado fundamental.

Sustituyendo c_n en la serie compleja de Fourier y teniendo en cuenta que $1/(2L) = \omega_0/(2\pi) = \Delta\omega/(2\pi)$ y que $n\pi/L = n\omega_0 = \omega$, se tiene:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx \right] e^{in\omega_0 x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx \right] e^{i\omega x} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\omega x} dx \right] e^{i\omega x} \Delta\omega \end{aligned}$$

Si ahora hacemos tender⁵ $L \rightarrow \infty$, entonces $\Delta\omega$ se transforma en un diferencial $d\omega$ y el sumatorio $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ se transforma en una integral $\int_{-\infty}^{\infty}$, de la siguiente forma⁶, denominada **integral de Fourier**⁷:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right] e^{i\omega x} d\omega \quad (12.1)$$

Notar el coeficiente constante $1/(2\pi)$ ya que en función de él existen diferentes definiciones (todas ellas equivalentes) de la *transformada directa e inversa de Fourier* que veremos a continuación. Para ello, la ecuación (12.1) puede también expresarse como:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right] e^{i\omega x} d\omega \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right] e^{i\omega x} d\omega$$

12.3. Transformada de Fourier de una Función

Notar que la integral interior de la **Ecuación 12.1, página 428**, en caso de que exista, es una función que depende de la variable ω y se trata de una *transformada integral*⁸ que transforma una función original $f(x)$ en otra función $F(\omega)$.

Definición 12.1. Transformada de Fourier

Dada una determinada función⁹ $f(x)$, se denomina **transformada de Fourier** de $f(x)$, y se representa generalmente mediante $\mathcal{F}\{f(x)\}$, $\hat{f}(\omega)$ o bien $F(\omega)$, a la siguiente integral impropia¹⁰:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \hat{f}(\omega) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

La *transformada de Fourier* es similar a la *transformada de Laplace* que se vio en la **Definición 5.3, página 147**, salvo que en este caso ambos límites de integración son infinitos y se obtiene como resultado una función compleja, al ser el núcleo una función compleja.

12.3.1. Condiciones de Existencia

Hay dos tipos de condiciones sobre la existencia de la transformada de Fourier de una función: una débil y otra fuerte.

⁵Notar que si $L \rightarrow \infty$, entonces $T \rightarrow \infty$ y $\omega_0 \rightarrow 0$.

⁶Notar que hemos cambiado el símbolo de aproximado $\sim$ por una igualdad.

⁷En algunos textos esta ecuación aparece con los signos de las exponenciales cambiadas (la exponencial de la integral interna es positiva y la de la integral externa negativa). De esa forma, los signos en las exponenciales de la transformada de Fourier, **Definición 12.1** y de su inversa, **Definición 12.3**, son distintos de los definidos aquí. Desde un punto de vista aplicado, cualquiera de las dos definiciones son equivalentes.

⁸Ver la **Definición 5.2, página 146**.

⁹En la **Sección 12.3.1** se dan las condiciones de existencia de la transformada de Fourier de una función.

¹⁰Como se ha comentado en la sección anterior, hay varias formas de definir la transformada de Fourier en función del coeficiente constante que multiplique a la integral, por tanto al trabajar con ella siempre hay que tener presente la definición en concreto que se está utilizando. Nosotros usaremos una de las versiones más utilizada, la cual no está multiplicada por un valor $(2\pi)^\alpha$ en la transformada y sí aparece en la transformada inversa, ver la **Definición 12.3, página 431**.

1. La condición débil es suficiente pero no necesaria y establece que la transformada de Fourier de una función existe si es absolutamente integrable, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| < \infty$$

2. La condición fuerte (más estricta y general) establecen que para cualquier intervalo finito $[a, b]$ se cumpla:

$$\int_a^b |f(x)| < \infty$$

existiendo además un número finito tanto de discontinuidades infinitas como de máximos y mínimos en cada intervalo $[a, b]$.

Si la transformada de Fourier de una función existe, entonces la integral de Fourier converge en cada punto x al valor:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

donde $f(x^+)$ y $f(x^-)$ son los límites de $f(x)$ por la derecha y por la izquierda de x , respectivamente.

12.3.2. Parte Real y Compleja de la Transformada de Fourier

Ya que $w \in \mathbb{R}$, la función transformada de Fourier $F(w)$ es una función compleja de variable real, $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, y por tanto podemos separar su parte real de su parte imaginaria usando la fórmula de Euler de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} F[f] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) [\cos(wx) - i \sin(wx)] dx = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(wx) dx}_{\text{Re}(F)} - i \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(wx) dx}_{-\text{Im}(F)} \end{aligned}$$

$$F[f] = \text{Re}(F) + i \text{Im}(F) \implies \begin{cases} \text{Re}(F) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(wx) dx \\ \text{Im}(F) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(wx) dx \end{cases}$$

(12.2)

En muchos casos y siempre que sea posible, las partes real $\text{Re}(F)$ y compleja $\text{Im}(F)$ se pueden obtener más fácilmente calculando primero $F(w)$ y separando parte real e imaginaria, en lugar de calcular las integrales (12.2). Sin embargo, en el [Ejemplo 12.1, página 431](#) se ve el uso práctico de estas fórmulas.

Forma Polar o Exponencial de $F(\omega)$

Ya que la función transformada de Fourier $F(\omega)$ es una función compleja (con parte real e imaginaria) se puede expresar en su *forma polar o exponencial*¹¹ :

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{i\phi(\omega)} \quad \begin{cases} |F(\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2[F(\omega)] + \text{Im}^2[F(\omega)]} \\ \phi(\omega) = \arctan\left(\frac{\text{Im}[F(\omega)]}{\text{Re}[F(\omega)]}\right) \end{cases} \quad (12.3)$$

donde $|F(\omega)|$ es el **módulo** o **amplitud** de la función $F(\omega)$ y $\phi(\omega)$ es su **argumento** o **fase**¹².

¹¹Ver por ejemplo "Clases de Ampliación de Matemáticas para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 517.

¹² Notar que la función $\arctan(x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ solo devuelve valores (ángulos) comprendidos en el primer y cuarto cuadrante de los ejes de coordenadas cartesianas (correspondientes al plano complejo), por ello para el cálculo efectivo del argumento o fase es necesario usar la función $\text{atan2}(y, x)$ que extiende la definición de la función *arcotangente* definida para los cuatro cuadrantes.

12.3.3. Espectro de Fourier

Las funciones $|F(\omega)|$ y $\phi(\omega)$ de la **Ecuación (12.3)** tienen mucha importancia práctica en el análisis de señales periódicas.

Definición 12.2. Espectro de Fourier

Dada una función $f(x)$ y su transformada de Fourier $F(\omega)$, se denomina **espectro de Fourier** de la función a las representaciones gráficas de $|F(\omega)|$ y $\phi(\omega)$ frente a ω . Más concretamente:

- **Espectro de amplitudes:** gráfica de $|F(\omega)|$. Corresponde a la distribución de frecuencias (armónicos) que contiene la señal y sus amplitudes.
- **Espectro de fase:** gráfica de $\phi(\omega)$ frente a ω . Medida del grado en que cada componente de la frecuencia de una serie precede o sigue a la otra. Esta gráfica suele tener menor interés.

El análisis de los espectros de amplitudes y fase de una función, permite estudiar la influencia de cada frecuencia (armónico) en la composición de la señal.

Las señales originales están en lo que se conoce como **dominio del tiempo**, en la cual aparece una variación de la intensidad de la magnitud física medida en función del tiempo. Estudiar esta señal en el dominio del tiempo suele ser muy complicado ya que suele estar compuesta por diferentes señales más simples en diferente proporción dando un resultado complejo¹³.

Determinando el espectro de la señal, a través de su transformada de Fourier, se puede estudiar la misma en el denominado **dominio de la frecuencia**, donde aparecen unos picos, cuya posición indica las frecuencias de las señales simples de las que está compuesta la señal principal, y cuyas amplitudes indican la amplitud de cada una de ellas.

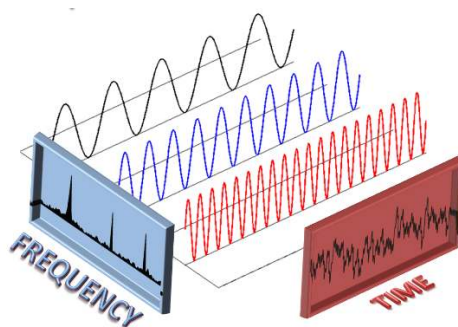


Figura 12.1: Interpretación de los dominios de tiempo y frecuencia de una señal. En el panel rojo tenemos una señal en el dominio del tiempo. Esta señal es la suma de un conjunto de señales elementales de diferente frecuencia e intensidad, que aparecen desdobladas detrás de ella. En el panel azul tenemos una representación del espectro de amplitudes de la señal, donde aparecen unos picos en las posiciones correspondientes a las frecuencias de las señales simples de las que se componen y con una altura (intensidad) correspondiente a las amplitudes de las mismas.

¹³Ver la **Sección 9.2, página 319**.

¹⁴Por ejemplo las ondas cuadradas, pulsos y dientes de sierra. Ver el **Ejemplo 12.1, página 431** el espectro del caso de una onda rectangular.

El espectro de Fourier tiene formas diversas en función del tipo de función del que proviene:

- El espectro de amplitudes de funciones periódicas que contienen discontinuidades¹⁴, está formada por curvas que decrecen lentamente.
- Por el contrario si la forma de onda periódica no contiene discontinuidades y es de aspecto suave, el espectro de amplitudes está formado por curvas que decrecen rápidamente.

En el primer caso es necesario tener en cuenta bastantes términos de la serie para generar la onda $f(t)$, mientras que en el segundo caso basta con pocos términos para generar la onda.

12.3.4. Transformadas Inversa de Fourier

En base a la [Ecuación 12.1, página 428](#), la función original $f(x)$ se puede obtener a través de su transformada de Fourier de la siguiente forma.

Definición 12.3. Transformada Inversa de Fourier

Si $f(x)$ es una función continua, se dice que es la **transformada inversa de Fourier**¹⁵,

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (12.4)$$

si $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\omega)$ es la *transformada de Fourier* de la función $f(x)$,

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\omega) \iff f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}$$

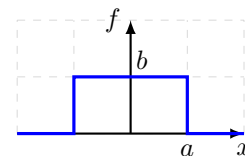
Al igual que con la *transformada de Laplace* hay dos formas básicas de calcular la *transformada de Fourier* de una función:

- A través de la definición, calculando la integral correspondiente.
- A través de las *propiedades de la transformada de Fourier* (ver la [Sección 12.3.6, página 436](#)).

Ejemplo 12.1. Cálculo de transformada de Fourier de funciones sencillas a través de la definición.

- Onda rectangular

$$f(x) = \begin{cases} b & x \in [-a, a] \\ 0 & x \notin [-a, a] \end{cases} ; \quad a, b > 0$$

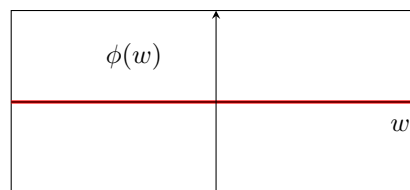
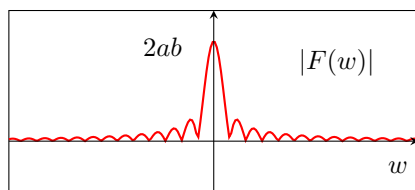


$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}\{f\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx = b \int_{-a}^a e^{-i\omega x} dx = \frac{bi}{\omega} [e^{-i\omega x}]_{-a}^a = \\ &= \frac{bi}{\omega} [\cos(\omega x) - i \operatorname{sen}(\omega x)]_{-a}^a = \frac{bi}{\omega} [\cancel{\cos(\omega a)} - i \operatorname{sen}(\omega a) - \cancel{\cos(\omega a)} - i \operatorname{sen}(\omega a)] = \\ &= \frac{2b}{\omega} \operatorname{sen}(\omega a) = 2ab \frac{\operatorname{sen}(\omega a)}{\omega a} = \boxed{2ab \operatorname{senc}(\omega a)} \implies \begin{cases} |F(\omega)| = |2ab \operatorname{senc}(\omega a)| \\ \phi(\omega) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

donde se ha introducido la función **seno cardinal**¹⁶ definida como $\operatorname{senc}(x) = \operatorname{sen}(x)/x$. En este caso particular la función transformada de Fourier $F(\omega)$ es real¹⁷, aunque de forma general es una función compleja, como se verá en los casos siguientes.

El espectro de Fourier (de amplitud y fase) de esta función viene dado por las siguientes dos gráficas.

¹⁵Recordar que esta definición depende de la forma en que se dispongan las constantes en la *integral de Fourier*, (ver la [Sección 12.2, página 427](#)), y en algunos textos la definen multiplicándola por diferentes valores $(2\pi)^\alpha$, donde α puede ser -1 o $-1/2$.

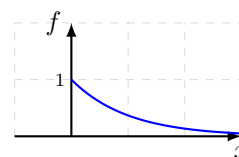


En este caso al ser una función con discontinuidades (que dan lugar a esquinas en la gráfica de la función), su espectro de amplitudes está formado por una infinidad de picos (armónicos) de distinta intensidad indicando que son necesarias una combinación infinita de funciones seno y coseno para poder obtener una forma análoga a la función. Notar también que la frecuencia fundamental (la del pico de mayor intensidad) está en el valor de frecuencia $w = 0$, que es lo que se observa en la gráfica de $f(x)$.

La fase, al ser una función real, es nula.

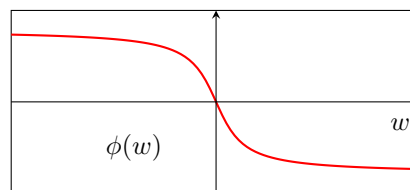
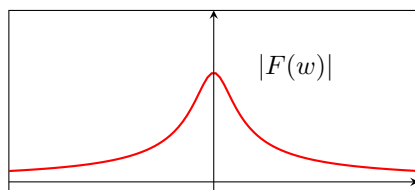
- Exponencial¹⁸

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} ; \quad \alpha > 0$$



$$\begin{aligned} F(w) &= \mathcal{F}\{f\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{(-\alpha - i\omega)x} dx = \frac{-1}{\alpha + i\omega} [e^{-\alpha - i\omega x}]_0^{\infty} = \\ &= \frac{-1}{\alpha + i\omega} (0 - 1) = \frac{1}{\alpha + i\omega} = \frac{\alpha - i\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \Rightarrow \begin{cases} |F(w)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \\ \phi(w) = -\arctan \frac{\omega}{\alpha} \end{cases} \end{aligned}$$

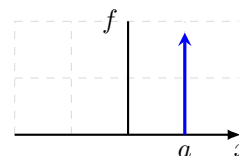
El espectro de Fourier (de amplitud y fase) de esta función viene dado por las siguientes dos gráficas.



Notar que en este caso al ser una función suave hay pocos picos en el espectro de amplitud (solo uno que está en la frecuencia fundamental).

- Delta de Dirac¹⁹

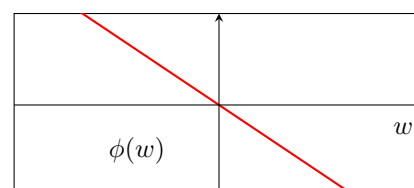
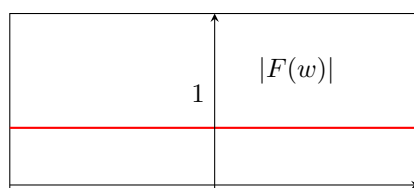
$$f(x) = \delta(x - a)$$



Recordamos: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - a) dt = f(a)$

$$F(w) = \mathcal{F}\{f\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \delta(x - a) dx = e^{-i\omega a} = \cos(\omega a) - i \sin(\omega a)$$

$$\begin{cases} |F(w)| = 1 \\ \phi(w) = -\omega a \end{cases}$$



En base a esto, vamos a encontrar la función $f(x)$ cuya transformada de Fourier es la función delta de Dirac, $F(f) = \delta(w - a)$. Teniendo en cuenta la transformada inversa de Fourier, [Ecuación 12.4, página 431](#):

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F[f] e^{iwx} dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(w - a) e^{iwx} dw = \frac{e^{iax}}{2\pi}$$

Por tanto la transformada de Fourier de esta función debe ser $\delta(w - a)$, de forma que:

$$F\left[\frac{e^{iax}}{2\pi}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} \frac{e^{iax}}{2\pi} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(a-w)ix} dx = \delta(w - a)$$

Por tanto:

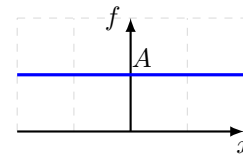
$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{(a-w)ix} dx = 2\pi\delta(w - a)} \quad \xrightarrow{a=0} \quad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} dx = 2\pi\delta(w)}$$

Teniendo en cuenta la fórmula de Euler, la última integral se puede expresar como:

$$\begin{aligned} 2\pi\delta(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} [\cos(wx) - i \sin(wx)] dx = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\cos(wx)}_{\text{Fun. Par}} dx - i \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\sin(wx)}_{\text{Fun. Impar}} dx = \\ &= 2 \int_0^{\infty} \cos(wx) dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_0^{\infty} \cos(wx) dx = \pi\delta(w)} \end{aligned}$$

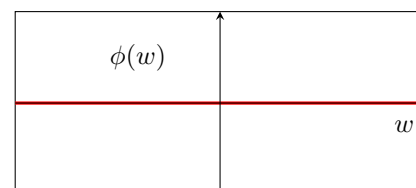
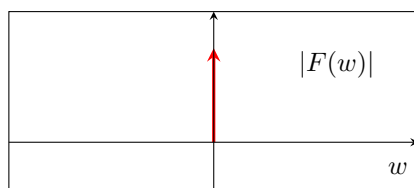
Estos resultados son útiles para determinar otras transformadas de Fourier, como la de los casos siguientes.

- Función Constante $\boxed{f(x) = A \neq 0}$

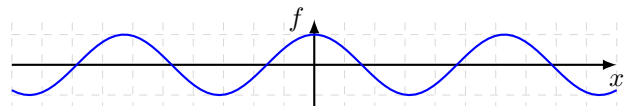


$$F(w) = \mathcal{F}\{f\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} f(x) dx = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} dx = \boxed{2\pi A\delta(w)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |F(w)| = |A|2\pi\delta(w) \\ \phi(w) = 0 \end{cases}$$

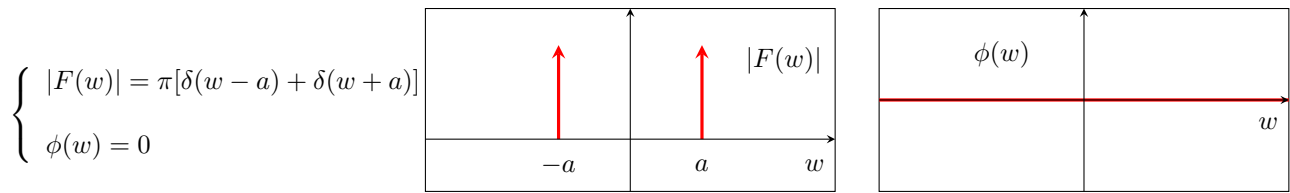
El espectro de Fourier (de amplitud y fase) de esta función viene dado por las siguientes dos gráficas.



- Coseno $\boxed{f(x) = \cos(ax)}$

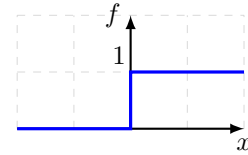


$$\begin{aligned} F(w) = \mathcal{F}\{f\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} \cos(ax) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} \frac{e^{axi} + e^{-axi}}{2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{(a-w)ix} + e^{(-a-w)ix}) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{(a-w)ix} + e^{(-a-w)ix}) dx = \boxed{\pi[\delta(w - a) + \delta(w + a)]} \end{aligned}$$



- Escalón unitario

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{H\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} H(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-iwx} dx = \left[\frac{i}{w} e^{-iwx} \right]_0^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{i}{w} e^{-iwx} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{i}{w} e^{-iwx} = \\ &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{i}{w} e^{-iwx}}_{\text{Re}(F)} - \underbrace{\frac{i}{w}}_{\text{Im}(F)} = \text{Re}(F) - \frac{i}{w} \implies \boxed{\text{Im}(F) = -\frac{i}{w}} \end{aligned}$$

El primer límite no es posible determinarlo por este camino, sin embargo podemos calcular la integral inicial mediante la fórmula de Euler de la siguiente forma:

$$\int_0^{\infty} e^{-iwx} dx = \int_0^{\infty} [\cos(wx) - i \sin(wx)] dx = \int_0^{\infty} \cos(wx) dx - i \int_0^{\infty} \sin(wx) dx$$

Teniendo en cuenta el resultado obtenido en el cálculo de la función delta de Dirac se tiene:

$$\int_0^{\infty} e^{-iwx} dx = \underbrace{\pi\delta(w)}_{\text{Re}(F)} - i \underbrace{\int_0^{\infty} \sin(wx) dx}_{\text{Im}(F)} \implies \boxed{\text{Re}(F) = \pi\delta(w)}$$

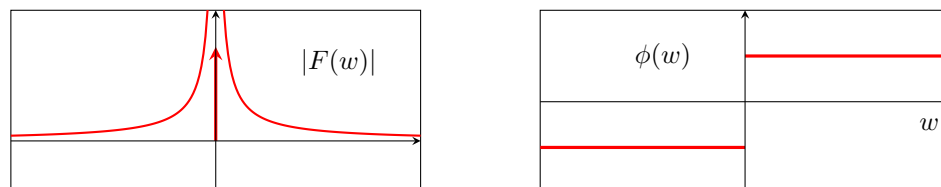
Notar que a través de esto podemos determinar el valor de otra integral interesante:

$$\boxed{\int_0^{\infty} \sin(wx) dx = \frac{i}{w}}$$

Finalmente:

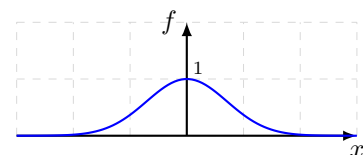
$$F(w) = \text{Re}(F) + i \text{Im}(F) = \pi\delta(w) - \frac{i}{w} \implies \begin{cases} |F(w)| = \sqrt{\pi^2\delta(w) + \frac{1}{w^2}} \\ \phi(w) = -\arctan 1/[\pi w\delta(w)] \end{cases}$$

El espectro de Fourier (de amplitud y fase) de esta función viene dado por las siguientes dos gráficas.



- Gaussiana

$$f(x) = e^{-\alpha x^2} ; \quad \alpha > 0$$



$$\begin{aligned}
F(w) &= \mathcal{F}\{f\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-\alpha x^2 - iwx)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x\sqrt{\alpha} + \frac{iw}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2 - \frac{w^2}{4\alpha}} dx = \\
&= e^{-\frac{w^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x\sqrt{\alpha} + \frac{iw}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2} dx \stackrel{\text{c.v.}}{=} e^{-\frac{w^2}{4\alpha}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz}_{\sqrt{\pi}} = \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{w^2}{4\alpha}}} = |F(w)|
\end{aligned}$$

donde se ha hecho uso del valor conocido de la *integral de Gauss*: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Notar que la transformada de Fourier de una función de tipo gaussiana es otra gaussiana.

12.3.5. Tabla de Transformadas de Fourier Elementales

Como resumen de los cálculos realizados en el [Ejemplo 5.2, página 147](#), podemos organizar una pequeña tabla con las *transformadas de Laplace* de algunas funciones elementales²⁰.

$f(x)$	$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(w)$	$f(x)$	$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(w)$
A	$2\pi A\delta(w)$	$\delta(x - a)$	e^{-iwa}
e^{iax}	$2\pi\delta(w - a)$	$e^{-a x }, a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + w^2}$
$H(x)$	$\pi\delta(w) - \frac{i}{w}$	$H(x)e^{-at}, a > 0$	$\frac{1}{a + iw}$
$\text{sen } ax$	$i\pi[\delta(w + a) - \delta(w - a)]$	$\cos ax$	$\pi[\delta(w + a) + \delta(w - a)]$
e^{-ax^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{w^2}{4\alpha}}$	$\frac{1}{2\sqrt{\alpha\pi}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}$	$e^{-\alpha w^2}$

Integrales Importantes

En el [Ejemplo 12.1, página 431](#) se han deducido el valor de una serie de integrales con interés práctico.

$$\begin{aligned}
&\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{(a-w)ix} dx = 2\pi\delta(w - a)} \quad \stackrel{a=0}{\implies} \quad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} dx = 2\pi\delta(w)} \\
&\boxed{\int_0^{\infty} \cos(wx) dx = \pi\delta(w)} \quad \boxed{\int_0^{\infty} \text{sen}(wx) dx = \frac{i}{w}}
\end{aligned}$$

¹⁸Notar que esta función se puede expresar también usando la función escalón unitario (ver la [Definición 5.6, página 155](#)) como $f(x) = \mathcal{U}(t) e^{-\alpha x}$.

¹⁹Ver la [Definición 5.12, página 182](#).

¹⁸Notar que esta función tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$ con valor 1.

¹⁹Y por tanto su módulo o amplitud $|F(w)|$ coincide con el valor absoluto de la propia función $F(w)$ y su argumento o fase $\phi(w) = 0$.

²⁰En la [Tabla 5.1, página 162](#) se muestra una colección más grande de transformadas inversas de Laplace.

12.3.6. Propiedades de la Transformada de Fourier

Las siguientes propiedades permiten calcular transformadas de Fourier de algunas función a través del conocimiento de un conjunto básico de transformaciones conocidas.

Sean funciones $f(x)$ y $g(x)$ de forma que $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(w)$ y $\mathcal{F}\{g(x)\} = G(w)$, entonces:

PROPIEDAD	EXPRESIÓN
Linealidad	$\mathcal{F}\{a f(x) + b g(x)\} = a F(w) + b G(w)$
Inversión	$\mathcal{F}\{f(-x)\} = F(-w)$
Escalamiento	$\mathcal{F}\{f(ax)\} = \frac{1}{ a } F\left(\frac{w}{a}\right)$
Dualidad ²¹	$\mathcal{F}\{F(x)\} = 2\pi f(-w)$
Traslación en x	$\mathcal{F}\{f(x - a)\} = e^{-iaw} F(w)$
Traslación ²² en w	$\mathcal{F}\{e^{iax} f(x)\} = F(w - a)$
Modulación	$\mathcal{F}\{f(x) \cos(ax)\} = \frac{1}{2}[F(w - a) + F(w + a)]$ $\mathcal{F}\{f(x) \sin(ax)\} = \frac{1}{2i}[F(w - a) - F(w + a)]$
Derivación en x	$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x)\right\} = (iw)^n F(w)$
Derivación en w	$\mathcal{F}\{x^n f(x)\} = i^n \frac{\partial^n}{\partial w^n} F(w)$
Derivación en t	$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial}{\partial t} f(x, t)\right\} = \frac{\partial}{\partial t} F(w, t)$
Transformada de una integral	$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^x f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw} + \pi F(0)\delta(w)$
Convolución ²³	$\mathcal{F}\{f(x)*g(x)\} = \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x - \tau) d\tau\right\} = F(w)G(w)$
Relación de Parseval ²⁴	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) ^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) ^2 dw$

²¹Notar que $\mathcal{F}\{F(x)\}$ es la transformada de la transformada, donde la función $F(x)$ es la función transformada $F(w)$ cambiando la variable w por x , y la función $f(-w)$ es la función original $f(x)$ cambiando la variable x por $-w$.

²²Notar que en este caso la función original es compleja.

²³Ver la Sección 12.3.7, página 437.

²⁴A la cantidad $|F(w)|^2$ se le denomina *espectro de energía*. Se suele utilizar para indicar la unicidad de cualquier transformada de Fourier y su generalización da lugar a la denominada *relación de Plancherel*.

12.3.7. Convolución en la Transformada de Fourier

En las aplicaciones de la transformada de Fourier, la operación de **convolución** de funciones es muy importante²⁵. En la **Definición 5.8, página 172** se vio una definición de convolución relativa a las aplicaciones en la *transformada de Laplace*, y en esta sección veremos otra definición diferente que está relacionada con la *transformada de Fourier*.

Definición 12.4. Convolución de Funciones

Dadas dos funciones²⁶ f y g se define su convolución como una nueva función definida por la siguiente integral:

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x - \tau) d\tau$$

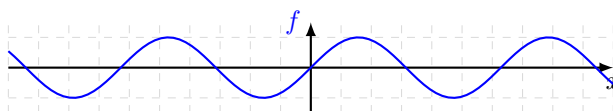
Notar que en este caso los límites de integración de la integral que define la convolución se extienden a todo el dominio real.

Ejemplo 12.2. Cálculo de una Convolución a través de la definición.

Vamos a calcular la convolución de la función seno con la función onda rectangular a través de la definición de convolución²⁷.

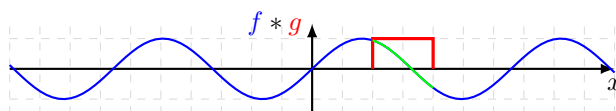
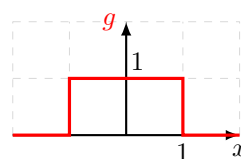
Seno

$$f(x) = \sin(x)$$

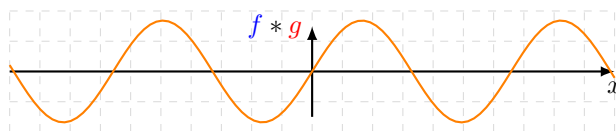


Onda rectangular

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1, 1] \\ 0 & x \notin [-1, 1] \end{cases}$$



$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x - \tau) d\tau = \int_{-1+x}^{1+x} \sin(\tau) d\tau = -\cos(\tau)|_{-1+x}^{1+x} = \cos(x - 1) - \cos(x + 1)$$



²⁵Ver la **Sección 12.4, página 438**.

²⁶Estas funciones deben decrecer suficientemente rápido en el infinito de manera que la integral que define la convolución exista.

²⁷Ver el **Ejercicio 5.22, página 173** y el **Ejemplo 5.7, página 173**.

12.4. Aplicaciones de la Transformada de Fourier en EDP

12.4.1. Filtrado de Señales

Sea una señal $f(x)$ que queremos filtrar dando lugar a una nueva señal $g(x)$, por ejemplo, eliminando una determinada zona de frecuencias (ruido). Matemáticamente, $f(x)$ está en el dominio del tiempo y queremos filtrar su correspondiente función $F(w)$ que está en el dominio de la frecuencia (su transformada de Fourier). Para ello vamos a multiplicar $F(w)$ por una función filtro $\Phi(w)$ que modifica las amplitudes de la función $F(w)$, por ejemplo la función filtro puede ser un pulso rectangular con valor 1 en las frecuencias que no queremos alterar y 0 las zonas de frecuencia que se quieren eliminar. El resultado del filtrado sería:

$$P(w) = F(w)\Phi(w)$$

Conocida la transformada inversa $\phi(t)$ del filtro $\Phi(w)$, la señal filtrada $g(x)$ se obtendrá de la **convolución**²⁸ de la señal original $f(x)$ y $\phi(x)$:

$$\mathcal{F}^{-1}\{P(w)\} = \mathcal{F}^{-1}\{F(w)\Phi(w)\} \implies g(x) = f(x) * \phi(x)$$

El proceso de filtrado de una señal consiste en la operación matemática de multiplicar una función que modula las amplitudes de otra función en una región del dominio de las frecuencias, mientras que en el dominio del tiempo el filtrado da lugar a la convolución de funciones.

12.4.2. Ecuaciones Diferenciales Lineales

Sea una ecuación diferencial definida a través de un operador lineal $L[]$ de forma:

$$L[y(x)] = f(x)$$

que puede interpretarse como un sistema que procesa una señal de entrada $f(x)$ y genera una señal de salida $y(x)$, solución de la ecuación, ambos en el dominio del tiempo. Este problema puede resolverse en el dominio de la frecuencia tomando transformada de Fourier en ambas partes de la ecuación, dando lugar a:

$$Z(w)Y(w) = F(w) \implies \begin{cases} Y(w) = \mathcal{F}\{y(x)\} \\ F(w) = \mathcal{F}\{f(x)\} \end{cases}$$

donde $Z(w)$ depende del operador $L[]$ y es consecuencia de la propiedad de derivación²⁹ en x de la transformada de Fourier. Despejando:

$$Y(w) = F(w) \frac{1}{Z(w)} = F(w)G(w)$$

donde la función $G(w) = 1/Z(w)$ se le conoce con el nombre de **función de transferencia** del sistema. Tomando transformaciones inversas de Fourier a ambas partes de la ecuación se tiene finalmente la solución de la ecuación:

$$\mathcal{F}^{-1}\{Y(w)\} = \mathcal{F}^{-1}\{F(w)G(w)\} \implies y(x) = f(x) * g(x)$$

Notar la analogía entre el filtrado de señales y la resolución de una ED lineal por el método de la *transformada de Fourier*, donde la *función de transferencia* del sistema $G(w)$, que reúne las características del problema³⁰, funciona como un filtro que modula la señal de entrada $f(x)$ y da como resultado la señal de salida $g(x)$.

En el dominio de la frecuencia, la solución del problema $Y(w)$ se obtiene fácilmente por el producto de dos funciones $F(w)$ y $G(w)$, mientras que en el dominio del tiempo (la variable original del sistema) la solución viene dada por una **convolución** de dos funciones.

Veamos algunos ejemplos de aplicación de la transformada de Fourier en resolución de EDP.

²⁸Ver la Sección 12.3.7, página 437.

²⁹Ver la Sección 12.3.6, página 436.

³⁰Notar que la función de transferencia es invariante de un problema y relaciona cualquier señal de entrada con su correspondiente señal de salida (solución del problema).

Ejercicio 12.1. Resolver el siguiente problema correspondiente a la ecuación del calor unidimensional³¹ con dominio infinito.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} ; \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ k, t > 0 \end{cases}$$

donde la condición inicial $f(x)$ es una función que admite transformada de Fourier.

Este problema corresponde a la conducción de calor en una varilla conductora delgada de longitud infinita, por tanto no tiene extremos y no es necesario imponer condiciones frontera, solo condiciones iniciales dadas por una distribución de calor inicial en la varilla definida por la función $f(x)$.

Para resolverlo empezamos tomando transformadas de Fourier a ambas partes de la EDP y de las condiciones iniciales, teniendo en cuenta las propiedades de derivación³² en t y en x :

$$\begin{cases} \mathcal{F}\{u_t(x, t)\} = k\mathcal{F}\{u_{xx}(x, t)\} \\ \mathcal{F}\{u(w, 0)\} = \mathcal{F}\{f(x)\} \end{cases} \implies \begin{cases} \hat{u}_t(w, t) = k(iw)^2 \hat{u}(w, t) = -kw^2 \hat{u}(w, t) \\ \hat{u}(w, 0) = \hat{f}(w) \end{cases}$$

Donde en azul están las funciones en el dominio de la variable original x y en rojo en el dominio de la frecuencia w . De esta forma hemos transformado el problema inicial de tipo EDP en otro más sencillo de tipo EDO, donde nuestra incógnita es la función $\hat{u}(w, t)$ en la variable independiente t . Fácilmente podemos resolverla por separación de variables:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -kw^2 \hat{u} \quad ; \quad \int \frac{\partial \hat{u}}{\hat{u}} = -kw^2 \int \partial t \quad ; \quad \ln \hat{u} = -kw^2 t + c \quad ; \quad \hat{u}(w, t) = ce^{-kw^2 t}$$

La constante de integración c se puede determinar a través de las condiciones iniciales:

$$t = 0 : \quad \hat{u}(w, 0) = \hat{f}(w) \implies \hat{f}(w) = c \implies \boxed{\hat{u}(w, t) = \hat{f}(w) e^{-kw^2 t}} \quad (12.5)$$

Para encontrar la función original $u(x, t)$ es necesario aplicar transformadas inversas de Fourier. Para ello necesitamos previamente conocer la transformada inversa de la función³³ $e^{-kw^2 t}$.

$$\mathcal{F}^{-1}\{e^{-kw^2 t}\} = \frac{1}{2\sqrt{kt\pi}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

Tomando entonces transformadas inversas en ambas partes de la ecuación (12.5) y por la propiedad de la convolución tenemos:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\hat{u}(w, 0)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(w) e^{-kw^2 t}\} \implies u(x, t) = f(x) * \left[\frac{1}{2\sqrt{kt\pi}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} \right]$$

Finalmente, teniendo en cuenta la definición de convolución en la transformada de Fourier se obtiene la solución final³⁴:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4kt}} d\tau$$

³¹Ver la Sección 11.4.2, página 372.

³²Ver la Sección 12.3.6, página 436.

³³Ver la Sección 12.3.5, página 435.

³⁴Notar que la función distribución normal o campana de Gauss tiene la forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

donde μ es la media y σ es la desviación estándar de acuerdo a su interpretación estadística.

Ejercicio 12.2. Resolver el siguiente problema correspondiente a la ecuación de onda unidimensional³⁵, con dominio infinito.

$$\begin{cases} c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u(x, 0) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ c, t > 0 \end{cases}$$

donde las funciones $f(x)$ y $g(x)$ admiten transformada de Fourier.

Este problema corresponde a las oscilaciones de una cuerda de longitud infinita, por tanto no tiene extremos y no es necesario imponer condiciones frontera, con condiciones iniciales dadas por forma inicial dada por $f(x)$ y una velocidad inicial en cada punto de la cuerda dada por $g(x)$.

Tomamos transformadas de Fourier en la ecuación:

$$\begin{cases} c^2 \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} = \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\} \\ \mathcal{F} \{ u(x, 0) \} = \mathcal{F} \{ f(x) \} \\ \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \right\} = \mathcal{F} \{ g(x) \} \end{cases} \implies \begin{cases} -c^2 w^2 \hat{u}(w, t) = \hat{u}_t t(w, t) \\ \hat{u}(w, 0) = F(w) \\ \hat{u}_t(w, 0) = G(w) \end{cases}$$

La EDP se transforma en una EDO de segundo orden homogénea y con coeficientes constantes, que se puede resolver a través de la ecuación característica³⁶:

$$\hat{u}_{tt} + c^2 w^2 \hat{u} = 0 \implies \lambda^2 + c^2 w^2 = 0 \implies \lambda = \pm c w i \implies \hat{u}(w, t) = c_1(w) \cos(c w t) + c_2(w) \sin(c w t)$$

Usando las condiciones iniciales determinamos los valores de $c_1(w)$ y $c_2(w)$:

$$\begin{cases} \hat{u}(w, 0) = F(w) & : & c_1(w) = F(w) \\ \hat{u}_t(w, 0) = G(w) & : & c_2(w) c w = G(w) \implies c_2(w) = \frac{1}{c w} G(w) \end{cases} \implies \boxed{\hat{u}(w, t) = F(w) \cos(c w t) + \frac{G(w)}{c w} \sin(c w t)}$$

Tomando entonces transformadas inversas de Fourier:

$$\mathcal{F}^{-1} \{ \hat{u}(w, t) \} = u(x, t) = \mathcal{F}^{-1} \{ F(w) \cos(c w t) \} + \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{G(w)}{c w} \sin(c w t) \right\}$$

Calculamos la transformada inversa de Fourier de ambas funciones:

$$\begin{aligned} \bullet \mathcal{F}^{-1} \{ F(w) \cos(c w t) \} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) \cos(c w t) e^{i w x} dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) \frac{e^{c w t i} + e^{-c w t i}}{2} e^{i w x} dw = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) [e^{(ct+x)iw} + e^{(x-ct)iw}] dw = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{(x+ct)iw} dw + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{(x-ct)iw} dw \right) = \\ &= \boxed{\frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)]} \\ \bullet \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{G(w)}{c w} \sin(c w t) \right\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(w)}{c w} \sin(c w t) e^{i w x} dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(w)}{c w} \frac{e^{c w t i} - e^{-c w t i}}{2i} e^{i w x} dw = \\ &= \frac{1}{4\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(w)}{i w} [e^{(x+ct)iw} - e^{(x-ct)iw}] dw \end{aligned}$$

Notar que se verifica:

$$\int_{x-ct}^{x+ct} e^{i w \tau} d\tau = \frac{1}{i w} e^{i w \tau} \Big|_{x-ct}^{x+ct} = \frac{1}{i w} [e^{(x+ct)iw} - e^{(x-ct)iw}] \implies e^{(x+ct)iw} - e^{(x-ct)iw} = i w \int_{x-ct}^{x+ct} e^{i w \tau} d\tau$$

Por tanto:

$$\frac{1}{4\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(w)}{w} [e^{(x+ct)iw} - e^{(x-ct)iw}] dw = \frac{1}{4\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(w)}{\cancel{i w} \cancel{i w}} \left[\int_{x-ct}^{x+ct} e^{i w \tau} d\tau \right] dw$$

Ordenando los términos de las integrales se obtiene finalmente la segunda:

$$\frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(w) e^{iw\tau} dw \right]}_{g(x)} d\tau = \boxed{\frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau}$$

La solución final del problema es:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau$$

Ejercicio 12.3. Resolver el siguiente problema correspondiente a la ecuación de Laplace³⁷ en un semiplano.

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y > 0 \end{cases}$$

donde la función $f(x)$ admite transformada de Fourier.

En este caso se tiene un problema con la ecuación de Laplace en un dominio infinito formado por un semiplano donde $x \in \mathbb{R}$ e $y \in [0, \infty)$ y unas condiciones frontera en la variable y .

Tomando transformada de Fourier en la variable x al problema se tiene:

$$\begin{cases} -w^2 \hat{u}(w, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{u}(w, y) = 0 \\ \hat{u}(w, 0) = F(w) \\ \lim_{y \rightarrow \infty} \hat{u}(w, y) = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} w \in \mathbb{R} \\ y > 0 \end{cases}$$

transformando un problema de EDP en otro de EDO de segundo orden homogéneo que puede resolverse a través de la ecuación característica:

$$-w^2 \hat{u} + \hat{u}_{yy} = 0 \implies -w^2 + \lambda^2 = 0 \implies \lambda = |w| \implies \hat{u}(w, y) = A e^{|w|y} + B e^{-|w|y}$$

Teniendo en cuenta las condiciones frontera:

$$\begin{cases} \hat{u}(w, 0) = F(w) \implies F(w) = A + B \\ \lim_{y \rightarrow \infty} \hat{u}(w, y) = 0 \implies A = 0 ; B = F(w) \end{cases} \implies \hat{u}(w, y) = F(w) e^{-|w|y}$$

Tomando transformadas inversas de Fourier en esta expresión se tiene:

$$\mathcal{F}^{-1} \{ \hat{u}(w, y) \} = u(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \{ F(w) e^{-|w|y} \} = \underbrace{\mathcal{F}^{-1} \{ F(w) \}}_{f(x)} * \mathcal{F}^{-1} \{ e^{-|w|y} \} = f(x) * \mathcal{F}^{-1} \{ e^{-|w|y} \}$$

Para calcular la transformada inversa de la exponencial, $\mathcal{F}^{-1} \{ e^{-y|w|} \}$, se tiene en cuenta³⁸:

$$\mathcal{F} \{ e^{-a|x|} \} = \frac{2a}{a^2 + w^2}$$

³⁵Ver la Sección 11.5.1, página 386.

³⁶Ver la Sección 3.2, página 65.

Por la propiedad de dualidad, $\mathcal{F}\{F(x)\} = 2\pi f(-w)$, y por tanto en este caso:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{2a}{a^2 + x^2}\right\} = 2\pi e^{-a|w|} \quad (\text{notar que } |-w| = |w|)$$

Y por tanto: $\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-a|w|}\right\} = \frac{1}{2\pi} \frac{2a}{a^2 + x^2} = \frac{a}{\pi} \frac{1}{a^2 + x^2} \implies \boxed{\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-y|w|}\right\} = \frac{y}{\pi} \frac{1}{y^2 + x^2}}$

Teniendo en cuenta la definición de convolución con la transformada de Fourier:

$$u(x, y) = f(x) * \left[\frac{y}{\pi} \frac{1}{y^2 + x^2}\right] = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{y^2 + (x - \tau)^2} d\tau$$

12.5. Transformada de Fourier en Varias Dimensiones

El concepto de transformada de Fourier se puede extender a funciones escalares de varias variables del tipo: $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Definición 12.5. Transformada de Fourier Multidimensional

Sean $\vec{x}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ y $f(\vec{x})$ una función escalar de n variables integrable en $\mathbb{R}^n$. Se define la **transformada de Fourier** de $f(\vec{x})$ como³⁹:

$$\mathcal{F}\{f(\vec{x})\} = \hat{f}(\vec{w}) = F(\vec{w}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) e^{i\vec{w} \cdot \vec{x}} d\vec{x}$$

donde:

$$\int_{\mathbb{R}^n} X(\vec{x}) d\vec{x} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_n X(x_1, \dots, x_n) dx_n dx_{n-1} \cdots dx_1$$

$$\vec{w} \cdot \vec{x} = \sum_{i=1}^n w_i x_i = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n$$

Definición 12.6. Transformada Inversa de Fourier Multidimensional

Sea $F(\vec{w})$ la transformada de Fourier n -dimensional de $f(\vec{x})$, entonces:

$$f(\vec{x}) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\vec{w})\} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} F(\vec{w}) e^{i\vec{w} \cdot \vec{x}} d\vec{w}$$

Definición 12.7. Convolución Multidimensional

Se define la convolución de dos funciones $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como⁴⁰:

$$f(\vec{x}) * g(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{\tau}) g(\vec{x} - \vec{\tau}) d\vec{\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) g(x_1 - \tau_1, x_2 - \tau_2, \dots, x_n - \tau_n) d\tau_n \cdots d\tau_1$$

³⁷Ver la Sección 11.6.1, página 402.

³⁸Ver la Sección 12.3.5, página 435.

³⁹Esta definición depende de la forma en que se dispongan las constantes en la *integral de Fourier*, (ver la Sección 12.2, página 427), y en algunos textos la definen multiplicándola por el valor $1/(2\pi)$.

⁴⁰Recordamos que esta definición depende de la forma en que se dispongan las constantes en la *integral de Fourier*, (ver la Sección 12.2, página 427), y en algunos textos la definen multiplicándola por diferentes coeficientes $(2\pi)^\alpha$.

Definición 12.8. Función Delta de Dirac Multidimensional

Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ es un punto en el espacio $\mathbb{R}^n$. La función **delta de Dirac**⁴¹ en dimensión n se puede definir como:

$$\delta^n(\vec{x} - \vec{a}) = \prod_{i=1}^n \delta(x_i - a_i) = \delta(x_1 - a_1) \delta(x_2 - a_2) \cdots \delta(x_n - a_n)$$

donde cada una de las $\delta(x_i - a_i)$ es la función delta de Dirac en la dimensión de la variable x_i .

La función delta de Dirac multidimensional cumple: cumpliéndose:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta^n(\vec{x} - \vec{a}) d\vec{x} = 1$$

12.5.1. Propiedades de la Transformada de Fourier Multidimensional

Algunas de las propiedades de la transformada de Fourier en n dimensiones son análogas a las vistas para una dimensión⁴².

PROPIEDAD	EXPRESIÓN
Linealidad	$\mathcal{F}\{a f(\vec{x}) + b g(\vec{x})\} = a F(\vec{w}) + b G(\vec{w})$
Escalamiento	$\mathcal{F}\{f(a\vec{x})\} = \frac{1}{ a } F\left(\frac{\vec{w}}{a}\right)$
Dualidad	$\mathcal{F}\{F(\vec{x})\} = (2\pi)^n f(-\vec{w})$
Traslación en $\vec{x}$	$\mathcal{F}\{f(\vec{x} - \vec{a})\} = e^{-i\vec{a} \cdot \vec{w}} F(\vec{w})$
Traslación en $\vec{w}$	$\mathcal{F}\{e^{i\vec{a} \cdot \vec{x}} f(\vec{x})\} = F(\vec{w} - \vec{a})$
Derivación en x_k	$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^n}{\partial x_k^n} f(\vec{x})\right\} = (i w_k)^n F(\vec{w}) \quad ; \quad k = 1, \dots, n$
Laplaciano	$\mathcal{F}\{\Delta f(\vec{x})\} = - \vec{w} ^2 F(\vec{w})$
Derivación en w_k	$\mathcal{F}\{x_k^n f(\vec{x})\} = i^n \frac{\partial^n}{\partial w_k^n} F(\vec{w}) \quad ; \quad k = 1, \dots, n$
Derivación en t	$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial}{\partial t} f(\vec{x}, t)\right\} = \frac{\partial}{\partial t} F(\vec{w}, t)$
Convolución	$\mathcal{F}\{f(\vec{x}) * g(\vec{x})\} = \mathcal{F}\left\{\int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{\tau}) g(\vec{x} - \vec{\tau}) d\vec{\tau}\right\} = F(\vec{w}) G(\vec{w})$

⁴¹Ver la Sección 5.6.1, página 181.

⁴²Ver la Sección 12.3.6, página 436.

Ejercicio 12.4. Resolver el siguiente problema correspondiente a la ecuación del calor multidimensional con dominio infinito.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u \\ u(\vec{x}, 0) = f(\vec{x}) \end{cases} ; \quad \begin{cases} \vec{x} \in \mathbb{R}^n \\ k, t > 0 \end{cases}$$

donde la condición inicial $f(x)$ es una función que admite transformada de Fourier.

Este problema corresponde a la conducción de calor con condiciones iniciales $f(\vec{x})$ en diferentes entornos infinitos en función de n :

- $n = 1$: varilla conductora delgada de longitud infinita
- $n = 2$: plano conductor delgado de dimensiones infinitas
- $n = 3$: dominio 3D conductor de dimensiones infinitas

Aquí la función distribución de temperatura $u : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar de varias variables $u(\vec{x}, t)$, al igual que correspondiente en el dominio de la frecuencia $\hat{u}(\vec{w}, t)$.

Tomando transformadas de Fourier a ambas partes de la EDP y de las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} \mathcal{F}\{u_t(\vec{x}, t)\} = k\mathcal{F}\{\Delta(\vec{x}, t)\} \\ \mathcal{F}\{u(\vec{w}, 0)\} = \mathcal{F}\{f(\vec{x})\} \end{cases} \implies \begin{cases} \hat{u}_t(\vec{w}, t) = -k|\vec{w}|^2 \hat{u}(\vec{w}, t) \\ \hat{u}(\vec{w}, 0) = \hat{f}(\vec{w}) \end{cases}$$

Al igual que el caso unidimensional⁴³, el problema de EDP original se transforma en otro EDO más sencillo que podemos resolverlo por separación de variables:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \hat{u} = -k|\vec{w}|^2 \hat{u} \quad ; \quad \int \frac{\partial \hat{u}}{\hat{u}} = -k|\vec{w}|^2 \int \partial t \quad ; \quad \ln \hat{u} = -k|\vec{w}|^2 t + c \quad ; \quad \hat{u}(\vec{w}, t) = ce^{-k|\vec{w}|^2 t}$$

La constante de integración c se puede determinar a través de las condiciones iniciales:

$$t = 0 : \quad \hat{u}(\vec{w}, 0) = \hat{f}(\vec{w}) \implies \hat{f}(\vec{w}) = c \implies \boxed{\hat{u}(\vec{w}, t) = \hat{f}(\vec{w}) e^{-k|\vec{w}|^2 t}} \quad (12.6)$$

Para encontrar la función original $u(x, t)$ es necesario aplicar transformadas inversas de Fourier. Para ello necesitamos previamente conocer la transformada inversa de la función⁴⁴ $e^{-k|\vec{w}|^2 t}$.

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-\alpha|\vec{w}|^2}\right\} = \frac{1}{(4\alpha\pi)^{n/2}} e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{4\alpha}} \implies \mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-kt|\vec{w}|^2}\right\} = \frac{1}{(4kt\pi)^{n/2}} e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{4kt}}$$

Tomando entonces transformadas inversas en ambas partes de la ecuación (12.6) y por la propiedad de la convolución⁴⁵ tenemos:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\hat{u}(\vec{w}, 0)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{f}(\vec{w}) e^{-kt|\vec{w}|^2}\right\} \implies u(\vec{x}, t) = f(\vec{x}) * \left[\frac{1}{(4kt\pi)^{n/2}} e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{4kt}}\right]$$

Finalmente, teniendo en cuenta la definición de convolución multidimensional⁴⁶ en la transformada de Fourier se obtiene la solución final:

$$u(x, t) = \frac{1}{(4k\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\tau) e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{4kt}} d\tau$$

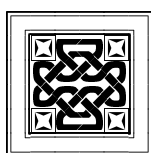
⁴³Ver el Ejercicio 12.1, página 439.

⁴⁴Ver la Sección 12.3.5, página 435.

⁴⁵Ver la Sección 12.5.1, página 443.

⁴⁶Ver la Definición 12.7, página 442.

APÉNDICE



Software Matemático

Contenido

A.0	Software Matemático Simbólico	448
A.1	SageMath	449
A.1.1	<i>SageMath</i> Básico	449
A.1.2	Cálculo III con <i>SageMath</i>	455
A.1.3	Resolución de EDO de Primer Orden	457
A.1.4	Trayectorias Ortogonales	463
A.1.5	EDO Lineales de Orden Superior	466
A.1.6	Problemas de Valores en la Frontera (PVF)	472
A.1.7	Ecuación de Bessel	473
A.1.8	Sistemas de EDO (SEDO)	476
A.1.9	Transformada de Laplace	478
A.1.10	Descomposición en Fracciones Simples	482
A.1.11	Resolución EDO con TL	483
A.1.12	Resolución SEDO con Transformada de Laplace	485
A.1.13	Ecuaciones Integrales e Integrodiferenciales	486
A.1.14	Convolución	487
A.1.15	Función Delta de Dirac	491
A.1.16	Series de Fourier	492
A.1.17	Problemas de Sturm-Liouville	497
A.1.18	Ecuaciones en Derivadas Parciales	506

A.0. Software Matemático Simbólico

Un *Sistema de Álgebra Computacional* (en inglés *CAS*, Computer Algebra System) o Simbólica (en inglés *SAS*, Symbolic Algebra System) es un software que facilita las operaciones matemáticas y el cálculo simbólico, usando variables y expresiones simbólicas además de los habituales valores numéricos.

Los CAS/SAS permiten definir y manipular expresiones algebraicas como fórmulas, funciones, sucesiones, series, sistemas de ecuaciones de diferentes tipos, matrices y grafos, entre muchos otros, con diferentes grados de complejidad y vincularlas a representaciones gráficas de muy variada naturaleza.

Una característica fundamental de los sistemas de álgebra simbólica es que permiten representar expresiones matemáticas de forma similar a las que se escriben habitualmente¹.

Además de una calculadora aritmética básica y gráfica, habitualmente incluyen un sistema de simplificación y transformación de expresiones algebraicas, una librería de funciones matemáticas y suelen incluir también un lenguaje de programación². Las capacidades simbólicas suelen englobar diferentes tipos de competencias³:

- Expresiones simbólicas
 - Manipulación, sustitución, simplificación y transformación de expresiones siguiendo reglas predefinidas o modificables.
 - Cambio en la forma de las expresiones: expansión de productos y potencias, factorización, reescritura de un cociente de polinomios como suma de fracciones parciales, reescritura de funciones trigonométricas como exponenciales (y viceversa), etc.
 - Operaciones relacionadas con vectores y matrices como sumas productos, inversa y determinante de matrices, etc.
 - Resolución de diferentes tipos de ecuaciones algebraicas, funcionales, diferenciales e integrales.
 - Cálculo de límites, desarrollos en series de potencias, derivadas en una o varias variables, integrales definidas e indefinidas y transformadas integrales.
- Expresiones numéricas
 - Manipulación exacta de fracciones y radicales.
 - Realización de operaciones con precisión arbitraria.
- Presentación de resultados
 - Visualizado de las expresiones matemáticas usando con frecuencia sistemas de composición similares al lenguaje TeX/LaTeX.

Un programa de esta clase puede encontrar limitaciones a la hora de resolver ciertas expresiones, ecuaciones, derivadas, integrales, límites, etc. cuando éstas tienen alguna complejidad, ambigüedad y/o indefinición.

Algunas versiones ofrecen al usuario la posibilidad de programar sus propios algoritmos matemáticos y solventar, en parte, tales limitaciones⁴.

El álgebra computacional es ampliamente utilizada para experimentar en matemáticas y diseñar las fórmulas que se utilizan en los programas numéricos. También se usa para cálculos científicos completos, cuando los métodos puramente numéricos fallan, como por ejemplo para algunos problemas no lineales.

¹En algunos casos la interfaz de usuario puede estar adaptada, además del teclado, al uso de *stylus* y entrada táctil.

²Lo que permite automatizar manipulaciones tediosas, repetitivas o difíciles de realizar, solo limitadas por la velocidad y precisión del ordenador.

³Cada programa tiene sus propias limitaciones en estos campos.

⁴El estudio de algoritmos aplicables a los sistemas algebraicos computarizados se denomina *álgebra computacional*.

A.1. SageMath

En la actualidad⁵ hay diferentes programas *comerciales* de tipo CAS, siendo los más conocidos *Mathematica*⁶, *Maple*⁷ y *Matlab* (paquete simbólico⁸). Aquí se estudiará el uso del *software de dominio público*⁹ *SageMath*¹⁰ para el tratamiento de los temas tratados en este curso¹¹ incluyendo:

- Resolución de EDO y SEDO
- Transformadas de Laplace
- Series de Fourier
- Resolución de EDP

Este programa se puede descargar e instalar en sistemas *Linux*, *Windows* y *macOS*, y ejecutar en nuestro ordenador de forma local¹² o bien ejecutarse de forma *online* a través de un navegador. Las formas básicas de ejecutar el programa son:

- Consola: Necesita estar instalado el programa, es rápido y potente pero menos vistoso.
- *Jupyter Notebook*¹³: Cuaderno interactivo que facilita la creación de documentos y permiten combinar código con otros elementos como texto enriquecido, imágenes, enlaces, etc. Es necesario tener instalada la aplicación.
- *SageMathCell*¹⁴: Página web que permite la ejecución de código *SageMath* sin necesidad de tener instalada la aplicación.
- *SageMath Online* (*CoCalc*¹⁵): Ejecución de SageMath online, donde es necesario registrarse y con restricciones para el modo gratuito.

En la **Figura A.1**, **página 450** se muestran imágenes de estas aplicaciones.

A.1.1. SageMath Básico

La sintaxis de *SageMath* está basada en el lenguaje *Python* siendo idéntica en muchos casos. Los comentarios se escriben anteponiendo un símbolo `#`.

```
# Este es un comentario
a = 3 # Este es un comentario en una sentencia
```

De forma general las *variables* son expresiones que almacenan valores determinados (números, cadenas, etc.). Las *variables simbólicas* son un tipo particular de variable que son tratadas como **símbolos** que pueden contener un valor genérico, como variables reales x , complejas z , o bien valores exactos como números irracionales como $\sqrt{2}$, `e` y `pi` (número π), números complejos a través `i`, etc.

⁵En sus orígenes sobre la segunda mitad del siglo XX existieron incipientes aplicaciones como *Scratchpad*, *Axiom*, *muMATH*, *Reduce*, *Derive* y *Macsyma*, que ya están casi en desuso o fueron transformadas en otras.

⁶<https://www.wolfram.com/mathematica/>.

⁷<https://www.maplesoft.com/products/maple/>.

⁸<https://es.mathworks.com/products/symbolic.html>.

⁹Un software de dominio público se puede usar sin el permiso o pago al autor, sin restricciones legales, de derechos de autor o de edición, por lo que nadie posee el derecho de restringir o controlar su uso.

¹⁰Versión 10.5 release 2024-12-04 using Python 3.13.2. <https://www.sagemath.org/>.

¹¹Ver por ejemplo una introducción y uso básico de *SageMath* en "Clases de Cálculo II para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 517. Para una mayor profundidad en el programa se puede ver el libro "Computational mathematics with SageMath" en la bibliografía o en la web del programa.

¹²*SageMath* es un programa relativamente grande que necesita aproximadamente 6Gb de espacio libre en el disco y al menos 2Mb libres de RAM y tiene dependencias con diversas librerías, programas y compiladores, entre ellos *python* y *LaTeX*.

¹³Aplicación cliente/servidor que puede correr en un navegador de Internet con o sin una conexión a Internet. Es muy general y además *SageMath* puede ejecutarse una gran variedad de lenguajes de programación.

¹⁴<https://sagecell.sagemath.org/>.

¹⁵<https://cocalc.com/features/sage>.

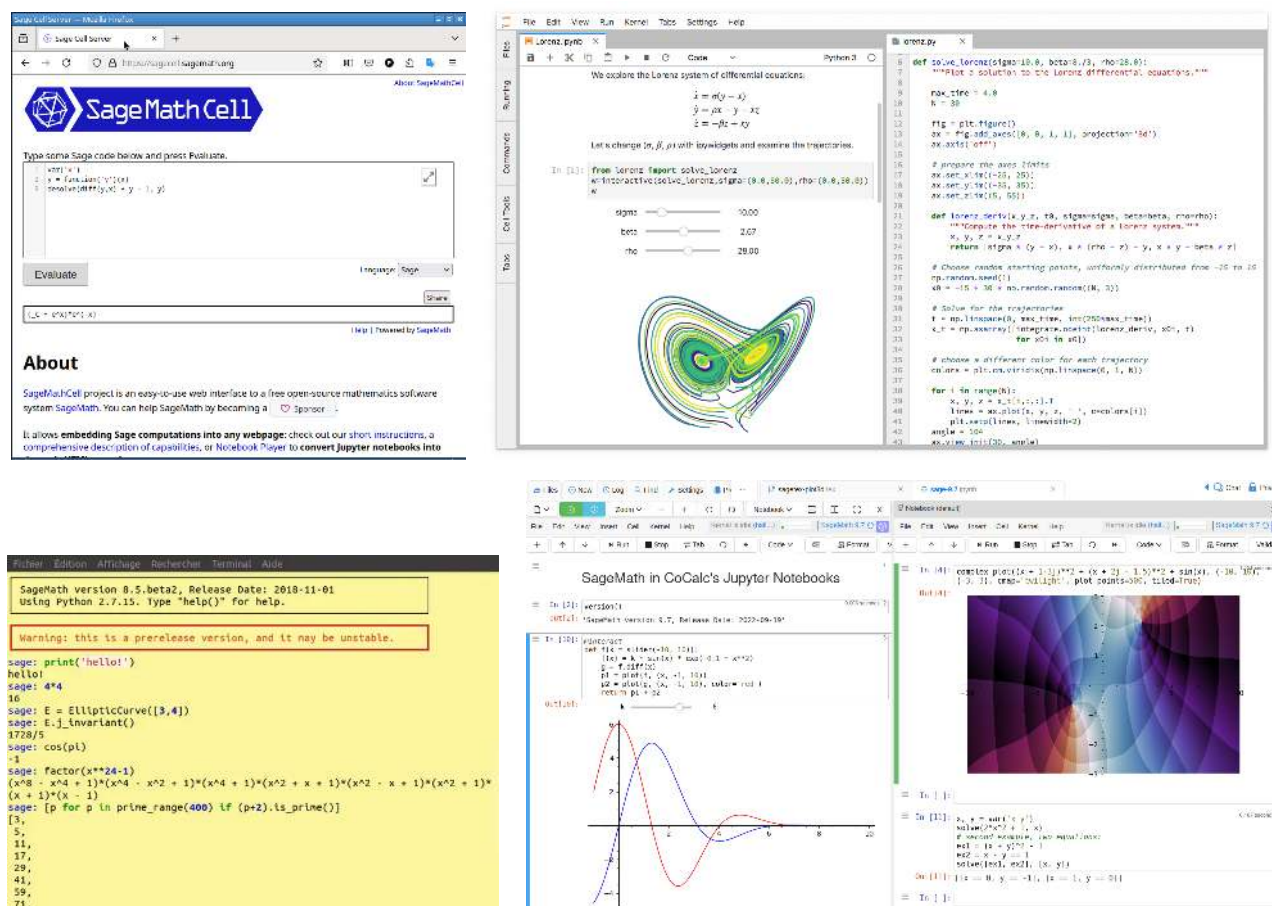


Figura A.1: Ejecución de *SageMath* a través de *SageMathCell* (superior izquierda), *Jupyter Notebook* (superior derecha), en consola (inferior izquierda) y *SageMath Online* (inferior derecha).

En *SageMath* no es necesario declarar las variables normales¹⁶ antes de usarlas, sin embargo las variables simbólicas necesitan ser declaradas antes de su primer uso. Para ello se utiliza el comando `var()`, como veremos en los siguientes ejemplos.

```
a = 3      # Variable normal
var('b')   # Declaramos la variable simbólica `b`
5*pi*a*b  # Operamos con las variables
```

```
15*pi*b
```

En el caso anterior, al operar vemos que la variable `a` (no simbólica) es sustituida por su correspondiente valor numérico y multiplicada por 5, mientras que las variables simbólicas¹⁷ `pi` y `b` mantienen su nombre indicando, en el caso de `pi` que es un número irracional (con infinitos dígitos decimales) y en el caso de `b` que puede ser cualquier valor.

Por defecto *SageMath* define la variable `x` como simbólica y por tanto no es necesario declararla antes de usarla, aunque se puede volver a declararla sin problema, como ocurre con el resto de variables.

¹⁶De forma similar a como funciona el lenguaje *Python*. Ver por ejemplo una introducción a la programación en *Python* en <http://mundogeeek.net/tutorial-python/>.

¹⁷Los números irracionales π y e , además de muchos otros, están definidos en *SageMath* a través de `pi` y `e` respectivamente.

El comando `reset()` borra todas las variables de usuario definidas hasta ese momento, dejando *SageMath* en su estado inicial.

```
reset()      # Borra todas las variables que se hayan podido definir antes
# Declaramos las variables simbólicas que usaremos
# Se pueden utilizar comillas simples ' ' o dobles " " para definir cadenas
var('x y z v t')  # Se puede definir una o varias variables simbólicas con `var`
```

$$(x, y, z, v, t)$$

Se puede utilizar el signo punto y coma ; para separar sentencias en una misma línea.

```
# Asignamos valores a variables no simbólicas
s = 10.3 ; n = 2 ; cadena = 'Nombre' ; c = "A"
```

Por defecto la salida de los comandos matemáticos se muestran en formato texto (ASCII).

```
# Definimos una función llamada `f`
f=sqrt(x)*sin(x^2)/tan(log(x))
f      # mostramos `f`, por defecto en ascii
```

$$\sqrt{x} \sin(x^2) / \tan(\log(x))$$

Con el comando `show()` se puede mostrar la salida en formato matemático de fácil lectura.

```
show(f)      # Mostramos f como fórmula matemática
```

$$\frac{\sqrt{x} \sin(x^2)}{\tan(\log(x))}$$

También se puede mostrar el resultado en formato LaTeX con el comando `latex()` y en formato ASCII (por defecto) con el comando `ascii()`.

```
latex(f)      # Mostramos f en lenguaje LaTeX
```

$$\frac{\sqrt{x} \sin(x^2)}{\tan(\log(x))}$$

Con la sentencia `%display latex` se consigue que por defecto todos los resultados, a partir de entonces, se muestren en formato matemático de fácil lectura. Éste será el formato de salida por defecto en todo este texto.

```
%display latex # Formato matemático en todos resultados a partir de aquí
f              # Mostramos f
```

$$\frac{\sqrt{x} \sin(x^2)}{\tan(\log(x))}$$

El símbolo igual $=$ se usa para asignar valores, mientras que el doble igual $==$ se utiliza como símbolo igual en las ecuaciones. Notar que en las multiplicaciones es obligatorio usar siempre el símbolo $*$ (no sirve el espacio en blanco como producto).

```
var('t r')           # Declaramos variables simbólicas
a = 3 ; t = 10.1     # Asignamos valores
# Definimos la ecuación `eq`
eq = r*t + a == r^2 + 1 # Notar el uso de = (asignación) y == (igual de la ec.)
eq                    # Mostramos el valor de `eq`
```

$$10.100000000000000\,r + 3 = r^2 + 1$$

El comando `solve(eq,var)` resuelve la ecuación `eq` en la variable `var`, devolviendo un vector `[]` con las posibles soluciones.

```
var('a') # variable o parámetro
b=3      # variable numérica
# Resolvemos una ec. y llamamos `sol` al resultado
sol=solve(a*x^2+b*x-2==5*x^2+5*x-1,x) ; sol
```

$$\left[x = -\frac{\sqrt{a-4}-1}{a-5}, x = \frac{\sqrt{a-4}+1}{a-5} \right]$$

Vemos en la salida que hay dos soluciones para la variable `x` cuyos valores dependen de la variable o parámetro `a`. Estas soluciones se almacenan en un vector definido por paréntesis cuadrados `[]`. Los elementos de un determinado vector `v` se acceden como `v[n]` siendo `n` su índice (posición) empezando por cero. Así en el caso anterior:

```
sol[0] # primer elemento del vector sol
```

$$x = -\frac{\sqrt{a-4}-1}{a-5}$$

Notar que esta expresión es una nueva ecuación.

```
ascii(sol[0])
```

```
x == -(sqrt(a - 4) - 1)/(a - 5)
```

La parte izquierda de una ecuación, como por ejemplo la salida anterior, se obtiene con `.lhs()` y la parte derecha de la ecuación con `.rhs()`.

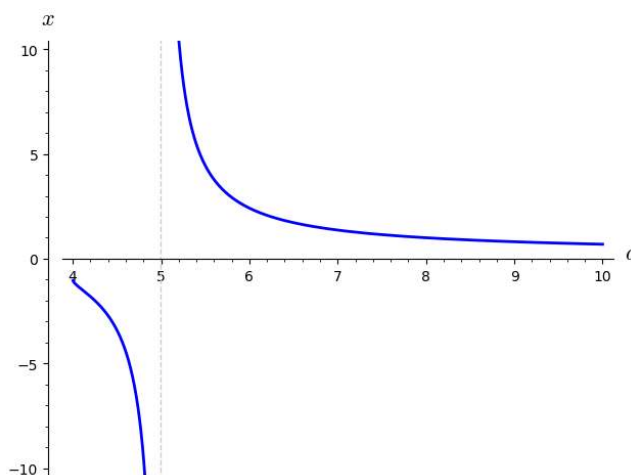
```
sol[1].rhs() # parte derecha (después del igual) de la segunda ecuación del vector 'sol'
```

$$\frac{\sqrt{a-4}+1}{a-5}$$

Esto se puede utilizar, por ejemplo, para representar gráficamente el resultado en función del parámetro `a`.

```
plot(sol[1].rhs(),a,-1,10,ymin=-10,ymax=10,axes_labels=['$a$','$x$'],detect_poles='show')
```

```
verbose 0 (3954: plot.py, generate_plot_points) WARNING: When plotting, failed to evaluate function at 91 points.
verbose 0 (3954: plot.py, generate_plot_points) Last error message: 'Unable to compute f(3.958293507777991)'
```



Notar que aparecen dos avisos (*warnings*) indicando, en este caso, que existen puntos donde la función no está definida ($a = 5$). Los *warnings* se pueden omitir anteponiendo la sentencia `set_verbose(-1)`. La identificación automática de los puntos de discontinuidad (polos) se puede hacer con el comando `detect_poles`.

El comando `solve` se puede utilizar también para despejar una determinada variable en una ecuación.

```
var('a b')
ec = 2*a+b*(a+1)==a*b ; ec # define una ecuación 'ec' con dos variables
```

$$(a+1)b + 2a = ab$$

```
solve(ec,a) # despeja la variable 'a' en función de 'b'
```

$$\left[a = -\frac{1}{2}b \right]$$

```
solve(ec,b) # despeja la variable 'b' en función de 'a'
```

$$[b = -2a]$$

El comando `diff()` o alternatively `derivative()` calcula la derivada de orden n de una función.

```
var('a b c t') # definimos variables simbólicas
h = t*e^(a*t)-b*t^2+c; h # función 'h' con varias variables y/o parámetros
```

$$-bt^2 + te^{(at)} + c$$

```
diff(h,a) # derivamos 'h' con respecto a la variable 'a'
```

$$t^2e^{(at)}$$

```
diff(h,t,5) # calculamos la derivada quinta de 'h' con respecto a 't'
```

$$a^5te^{(at)} + 5a^4e^{(at)}$$

El comando `integral()` o alternatively `integrate()` integra una expresión con respecto a una variable.

```
var('x y z a b c') # definición de var simbólicas
f=a*x^2-b*e^(b*x)-c*y+z; f # función de varias variables y/o parámetros
```

$$ax^2 - cy - be^{(bx)} + z$$

Vamos a calcular la integral indefinida (función primitiva) de la anterior función f con respecto a la variable x , manteniendo constante el resto de variables.

```
integral(f,x)
```

$$\frac{1}{3}ax^3 - cxy + xz - e^{(bx)}$$

Notar que en el resultado no aparece ninguna constante de integración¹⁸. Esto puede resultar interesante, por ejemplo en este caso, para no añadir *parámetros* innecesarios en la solución.

Calculamos ahora la integral definida entre -1 y 5 de la misma función f pero con respecto a la variable b , manteniendo el resto de variables constantes.

```
integral(f,b,-1,5)
```

$$\frac{(6ax^4e^x - 6cx^2ye^x + 6x^2ze^x - (5x-1)e^{(6x)} - x-1)e^{(-x)}}{x^2}$$

¹⁸Que indica que en realidad existen infinitas funciones primitivas de la función original.

Se puede calcular integrales impropias usando la variable¹⁹ `oo` o `infinity` (infinito, ∞), por ejemplo:

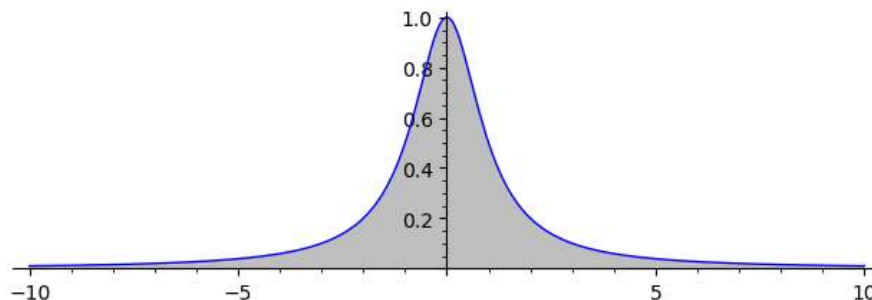
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

```
g=1/(1+x^2)           # definimos la función
integrate(g,x,-oo,oo)  # integral impropia
```

π

Representamos la gráfica de la función g y sombreada la zona de integración cuya área es π .

```
plot(g,-10,10,fill=True,aspect_ratio=6) # relación de aspecto=altura/anchura
```



Calculamos ahora la siguiente integral impropia de una función de dos variables u y x , con respecto a una de ellas, por ejemplo²⁰ u .

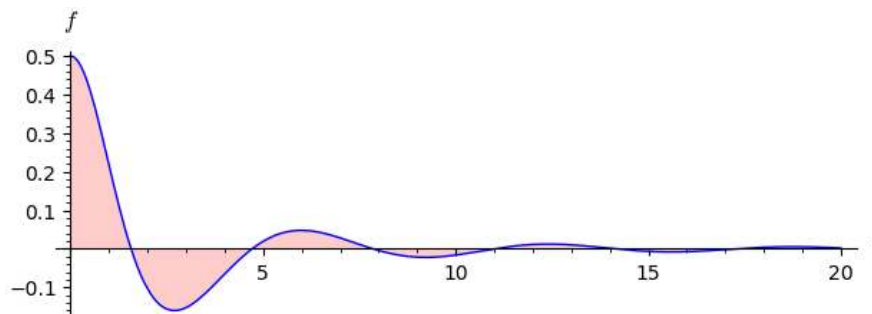
$$\int_0^{\infty} \frac{x \cos u}{u^2 + x^2} du = \frac{1}{2} \pi e^{-x} + c(x)$$

```
var('x u')
f=x*cos(u)/(u^2+x^2)
# Para que converja la integral es necesario que la variable `x` sea positiva
assume(x>0)
f.integrate(u,0,infinity) # forma alternativa de calcular una integral
```

$$\frac{1}{2} \pi e^{-x}$$

El comando `assume()` se utiliza para poner condiciones necesarias sobre variables. Representamos finalmente la gráfica de f en función de la variable u , para un determinado valor fijo de x , por ejemplo $x=2$.

```
# fijamos color e intensidad del relleno, además de la relación de aspecto
# y grado de transparencia (fillalpha)
plot(f(x=2), 0,20, fill=True,fillcolor='red', aspect_ratio=10, \
      axes_labels=['$u$', '$f$'],fillalpha=.2,axes_labels_size=1.2)
```



El área sombreada corresponde con el resultado de la integral anterior, en este caso $\pi/(2e^2)$.

¹⁹Corresponde con dos letras "o" minúsculas consecutivas.

²⁰Notar que en este caso el resultado depende de un parámetro $c(x)$ que a su vez depende de la variable sobre la que no se integra.

A.1.2. Cálculo III con SageMath

En las siguientes secciones vamos a analizar y resolver problemas relacionados con los temas cubiertos en este curso, usando para ello el programa SageMath.

1. Resolución de EDO de primer orden ([Sección A.1.3, página 457](#))
 - Solución general y familia de curvas
 - Solución particular
 - EDO de variables separables, de cambio lineal, homogénea, reducible a homogénea, lineal, Bernoulli y Ricatti
2. Trayectorias ortogonales ([Sección A.1.4, página 463](#))
3. Resolución de EDO Lineales de orden superior ([Sección A.1.5, página 466](#))
 - Método de Coeficientes indeterminados
 - Método de Variación de parámetros
 - Problema de valores iniciales
4. Problema de valores en la frontera ([Sección A.1.6, página 472](#))
5. Ecuación de Bessel ([Sección A.1.7, página 473](#))
 - Funciones de Bessel
 - Solución
6. Sistemas de EDO ([Sección A.1.8, página 476](#))
7. Transformadas de Laplace ([Sección A.1.9, página 478](#))
 - Cálculo transformada directa e inversa
 - Teoremas de traslación y propiedades
 - Funciones escalón unitario y delta y convolución de funciones
 - Resolución de EDO y SEDO
 - Ecuaciones integrales e integro-diferenciales
8. Series de Fourier
9. Problemas de Sturm-Liouville
10. Resolución de EDP

Ecuaciones Diferenciales con SageMath

Dada una EDO²¹ de orden n :

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}; c_k) = 0$$

donde aquí se ha llamado x a la variable independiente e $y(x)$ a la variable dependiente aunque ambas se pueden llamar de cualquier forma. Las funciones $y^{(i)}(x)$ son las correspondientes derivada i -ésimas de y con respecto a x . Además, se ha añadido posibles *parámetros*²² (en cualquier cantidad) c_k .

La resolución analítica²³ de EDO en *SageMath* se hace a través del comando²⁴ `desolve()` a través de los siguientes pasos.

Pasos

1. Declarar la variable dependiente e independiente de la siguiente forma:

```
var('x')           # Variable independiente (si es x no es necesario)
y=function('y')(x) # Variable dependiente
```

2. Utilizar el comando `desolve` para resolver la EDO.

```
desolve( ed, var [ , opciones ] )
```

- **ed**: expresión o ecuación que representa la EDO.
- **var**: nombre de la variable dependiente.
- **opciones**: no siempre son necesarios.
 - **ivar** = variable independiente. Si es x y la EDO no tiene *parámetros*, no es necesario indicarla.
 - **ics** = condiciones iniciales (si es un problema de EDO).
 - * Para EDO de primer orden especifica la condición inicial $[x_0, y(x_0)]$.
 - * Para PVI con EDO de segundo orden especifica las condiciones iniciales $[x_0, y(x_0), y'(x_0)]$.
 - * Para PVF con EDO de segundo orden especifica las condiciones frontera $[x_0, y(x_0), x_1, y(x_1)]$.
 - **show_method** = True|False muestra el tipo de método (tipo EDO) usado para su resolución
 - **contrib_ode** = True|False indica el método a usar en su resolución, que puede ser uno de los siguientes: `linear`, `exact`, `homogeneous`, `bernouilli`, `ricatti`, ...
 - **algorithm** = Indica el algoritmo utilizado en la resolución. Por defecto es 'maxima' ya que usa la librería matemática de *Maxima*²⁵. Para problemas más complicados se puede usar también 'fricas' que hace uso de la librería *FriCAS*²⁶.

A lo largo de las siguientes secciones haremos uso de este comando en diferentes situaciones.

²¹Ver la Sección 3.1.1, página 59.

²²Ver la Definición 1.14, página 13.

²³Ver la Sección 1.3.2, página 11.

²⁴Proporcionalmente muy pocas EDO pueden resolverse de forma analítica, aunque muchas de ellas sí pueden resolverse numéricamente. *SageMath* permite resolver, analítica y también numéricamente, una variedad importante de EDO de diversos tipos y con aplicaciones prácticas interesantes.

²⁵Por defecto *Maxima* se instala junto con *SageMath*. Para más información ver <https://maxima.sourceforge.io/>.

²⁶El software *FriCAS* no se instala con *SageMath* por defecto y es necesario instalarlo aparte para su uso. Para más información ver <https://fricas.github.io/>.

A.1.3. Resolución de EDO de Primer Orden

Buscamos la solución analítica de ecuaciones de la forma²⁷:

$$F[x, y(x), y'(x)] = 0$$

Ejemplos

Empezamos resolviendo una EDO sencilla de primer orden de *variables separables*²⁸:

$$y' = x \tag{A.1}$$

```
y = function('y')(x)      # definimos la variable dependiente
f = desolve(diff(y,x)==x,y) # definimos la EDO y la resolvemos. El resultado lo llamamos f
f                          # mostramos el resultado
```

$$\frac{1}{2}x^2 + C$$

Podemos verificar si la solución `f` es correcta, para ello vamos a comprobar que cumple la EDO original (A.1), despejada a cero para que sea más fácil verificar.

$$y' - x = 0$$

```
diff(f,x)-x
```

0

Resolvemos ahora otra EDO *separable* y preguntamos el método de resolución utilizado (que corresponde con el tipo de EDO).

$$y'y = x$$

```
y=function('y')(x)
# Definimos la EDO, la resolvemos y preguntamos el método usado en su resolución
sol = desolve(diff(y,x)*y==x,y,show_method=True)
sol  # El resultado es un vector [ ] con dos componentes: la solución y el método
```

$$\left[\frac{1}{2} y(x)^2 = \frac{1}{2} x^2 + C, \text{separable} \right]$$

Como vemos determina que la EDO es de tipo *variables separables*. Para obtener la solución de forma práctica hay que sacarla del vector y simplificarla si es posible.

```
sol[0]  # el índice de los elementos de un vector empiezan en 0
```

$$\frac{1}{2}y(x)^2 = \frac{1}{2}x^2 + C$$

```
f=solve(sol[0],y); f  # despejamos la var. dependiente `y` y mostramos resultado
```

$$\left[y(x) = -\sqrt{x^2 + 2C}, y(x) = \sqrt{x^2 + 2C} \right]$$

El resultado vuelve a ser un vector (hay dos soluciones correspondientes con el signo $\pm$ de la raíz). Si obtenemos la solución en formato ASCII:

```
ascii(f)
```

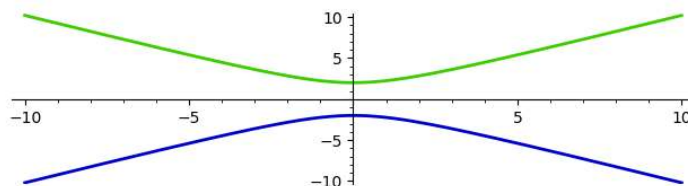
```
[y(x) == -sqrt(x^2 + 2*_C), y(x) == sqrt(x^2 + 2*_C)]
```

Vemos que la constante de integración se identifica como `_C` (precedido por un símbolo subrayado `_`). Vamos a dibujar las dos soluciones dando un determinado valor a la constante de integración (solución particular), por ejemplo para `_C=2`.

²⁷Ver el Tema 2, página 25.

²⁸Ver la Sección 2.2, página 29.

```
# Extraemos las partes derechas de ambas soluciones y las representamos gráficamente
plot([f[0].rhs()(_C=2),f[1].rhs()(_C=2)],-10,10,ymin=-10,ymax=10,aspect_ratio=0.25)
```



Resolvemos ahora una EDO de tipo *cambio de variable lineal*²⁹.

$$y' = (x + y - 1)^2$$

```
y=function('y')(x)
# Indicamos que esta EDO se puede resolver por algún método básico con `contrib_ode`
sol=desolve(diff(y,x)==(x+y-1)^2,y,contrib_ode=True) ; sol
```

$$\left[\left[x = C - \arctan(\sqrt{t}), y(x) = -x - \sqrt{t} + 1 \right], \left[x = C + \arctan(\sqrt{t}), y(x) = -x + \sqrt{t} + 1 \right] \right]$$

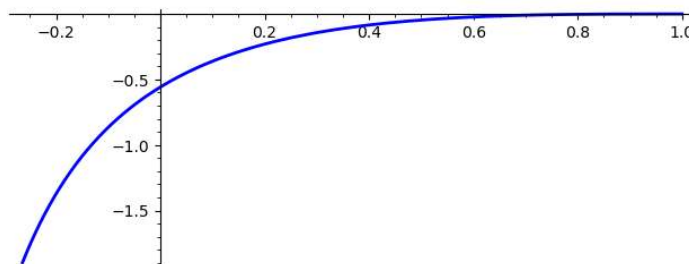
Se obtiene una doble solución a través de una matriz (vector de vectores), donde cada uno de los dos vectores contienen las componentes paramétricas, a través del parámetro t , de ambas soluciones. Vamos a representar la primera de las soluciones (la segunda es similar), para ello es necesario sacar las dos partes de la función paramétrica.

```
# sol[0][0] hace referencia a la primera componente del primer vector y sol[0][1] a la
# segunda componente del primer vector. Llamamos `fx` y `fy` a estas dos componentes.
# Notar que la segunda componente `fy` depende de la primera a través de la variable `x`
# por lo que es necesario sustituir la primera en la segunda.
fx=sol[0][0].rhs(); fy=sol[0][1].rhs()(x=fx)
show([fx,fy]) # Mostramos ambas componentes
```

$$\left[C - \arctan(\sqrt{t}), -C - \sqrt{t} + \arctan(\sqrt{t}) + 1 \right]$$

Para representar gráficamente esta solución se puede transformar a su forma cartesiana eliminando el *parámetro* entre las dos fórmulas³⁰, o bien se puede representar directamente en forma paramétrica con el comando³¹ `parametric_plot()` de la siguiente forma, para un valor fijo del *parámetro*, por ejemplo $_C=1$.

```
var('t') # Declaramos el parámetro `t`
# Representamos gráficamente la primera solución para el valor del parámetro `_C=1`
# mediante una curva paramétrica
parametric_plot((fx(_C=1),fy(_C=1)),(t,0,10),thickness=2,aspect_ratio=0.25)
```



²⁹Ver la Sección 2.3, página 29.

³⁰Ver un ejemplo del proceso en el ejemplo de la EDO de tipo *Riccati* en la 461.

³¹A través de este parámetro se pueden representar tanto curvas 2D como 3D. Ver por ejemplo "Clases de Cálculo II para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 517..

Vamos a resolver ahora una EDO *homogénea*³²:

$$y' = \frac{y^2 + xy + x^2}{x^2}$$

```
reset()
y=function('y')(x)
sol=desolve(diff(y,x)==(y^2+x*y+x^2)/x^2,y,show_method=True) ; sol
```

$$\left[Cx = e^{\arctan\left(\frac{y(x)}{x}\right)}, \text{homogeneous} \right]$$

Para obtener la solución de forma explícita lo hacemos en dos pasos, primero despejamos y/x y posteriormente despejamos y , ya que *SageMath* no es capaz de hacerlo directamente.

```
g=solve(sol[0],y/x) ; ff=solve(g,y) ; ff
```

$$[y(x) = x \tan(\log(Cx))]$$

Podemos comprobar la validez de la solución.

```
f=ff[0].rhs() # asigamos a f la parte derecha (solución y)
# comprobamos la EDO y simplificamos el resultado con `simplify_full()`
(diff(f,x)-(f^2+x*f+x^2)/x^2).simplify_full()
```

0

Vamos ahora con una EDO *reducible a homogénea*³³:

$$y' = \frac{2y + x - 1}{y + 2x + 1}$$

```
y=function('y')(x)
sol=desolve(diff(y,x)==(2*y+x-1)/(y+2*x+1),y,contrib_ode=True) ; sol
```

$$\left[-\frac{1}{2} \log(x + y(x)) + \frac{3}{2} \log(x - y(x) + 2) = C \right]$$

Recordamos que una EDO *exacta*³⁴ tiene la forma:

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad ; \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Por ejemplo:

$$(e^y + 6x) dx + xe^y dy = 0$$

Para resolverla con *SageMath* es necesario dar una expresión en términos de $y' = dy/dx$.

```
y=function('y')(x)
sol = desolve(diff(y,x)==(-e^y-6*x)/(x*e^y),y,show_method=True) # Despejamos y'
sol
```

$$\left[3x^2 + xe^{y(x)} = C, \text{exact} \right]$$

Podemos expresar la solución en forma explícita despejando la variable dependiente $y(x)$ en función de la variable independiente x .

³²Ver la Sección 2.4, página 30.

³³Ver la Sección 2.4.1, página 33.

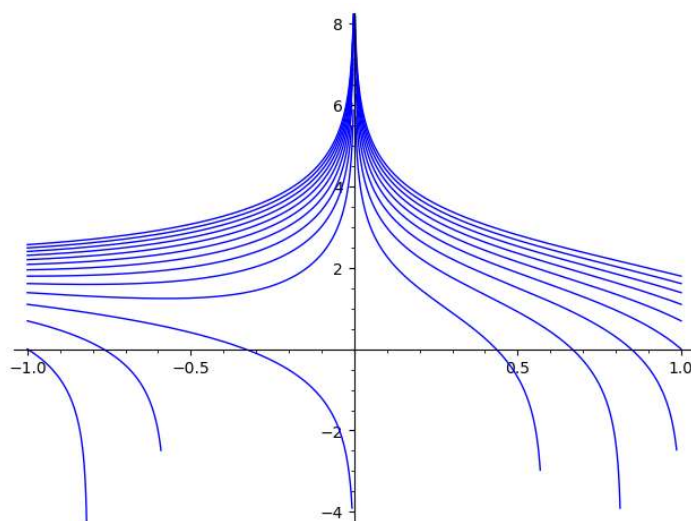
³⁴Ver la Sección 2.5, página 35.

```
f=solve(sol[0],y) ; f
```

$$\left[y(x) = \log\left(-3x + \frac{C}{x}\right) \right]$$

A través de esta solución vamos a dibujar la familia de curvas que forman la solución general de esta EDO, para ello creamos inicialmente un gráfico vacío, que lo llamamos `G`, y a través de un bucle `for` dibujamos cada una de las gráficas correspondientes a distintos valores del parámetro `_C`. Cada de estas graficas individuales se van añadiendo al gráfico global `G`. Finalmente mostramos el resultado con el comando `show()`.

```
set_verbose(-1) # para que no muestre avisos de error (`warnings`)
G=Graphics()
for i in range(-10,10,1):
    G+=plot(f[0].rhs(_C=i),(-1,1),ymin=-4,ymax=10)
show(G)
```



Vamos ahora a resolver un PVI³⁵ formado por una EDO lineal de primer orden³⁶:

$$\begin{cases} y' + \frac{y}{x} = e^x \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

```
y=function('y')(x) # definimos var. dep.
eq= diff(y,x)+y/x==e^x # definimos y ponemos nombre a la EDO
eq # mostramos la EDO definida
```

$$\frac{y(x)}{x} + \frac{\partial}{\partial x} y(x) = e^x$$

```
f=solve(sol[0],y) ; f
```

$$\frac{(x-1)e^x + 2}{x}$$

Notar que en este caso el resultado es una única función que no depende de la constante `_C`.

³⁵Ver la Definición 1.17, página 15.

³⁶Ver la Sección 2.6.1, página 42.

Podemos también resolver una *EDO lineal de primer orden* genérica con funciones generales $g(x)$ y $h(x)$.

$$y' + g(x) * y = h(x)$$

```
y=function('y')(x)
g=function('g')(x)
h=function('h')(x)
desolve(diff(y,x)+g*y==h,y)
```

$$\left(C + \int e^{\left(\int g(x) dx \right)} h(x) dx \right) e^{\left(- \int g(x) dx \right)}$$

Vamos ahora a resolver una EDO de tipo *Bernoulli*³⁷.

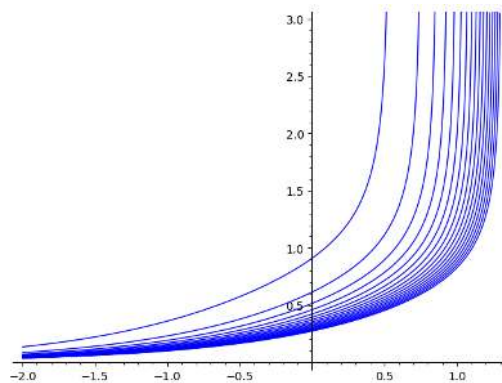
$$y' - y = xy^4$$

```
y=function('y')(x)
f=desolve(diff(y,x)-y==x*y^4,y,show_method=True)
f
```

$$\left[\frac{e^x}{\left(-\frac{1}{3} (3x - 1) e^{(3x)} + C \right)^{\frac{1}{3}}}, \text{bernoulli} \right]$$

Dibujamos algunas de las curvas de la solución general.

```
set_verbose(-1) # para que no muestre avisos (warnings)
G=Graphics()    # Creamos un gráfico vacío y lo llamamos G
for i in range(-50,50,3):
    G+=plot(f[0](_C=i),(-2,5),ymin=0, ymax=3, plot_points=1000)
show(G)
```



Resolvemos finalmente una EDO de tipo *Riccati*³⁸.

$$y' + 2xy = 1 + x^2 + y^2$$

```
y=function('y')(x)
ec = diff(y,x)+2*x*y==1+x^2+y^2
sol = desolve(ec,y,ivar=x,contrib_ode=True) ; sol
```

$$\left[\left[x = C + \frac{1}{\sqrt{t-1}}, y(x) = x - \sqrt{t-1} \right], \left[x = C - \frac{1}{\sqrt{t-1}}, y(x) = x + \sqrt{t-1} \right] \right]$$

³⁷Ver la [Sección 2.7](#), página 43.

³⁸Ver la [Sección 2.8](#), página 44.

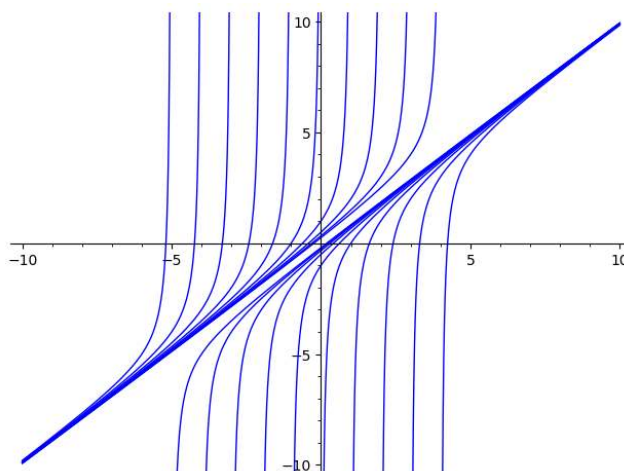
Podemos transformar la primera solución (la segunda es equivalente) dada en forma paramétrica, a la misma solución pero de forma explícita, eliminando para ello el parámetro t . Mostramos aquí abajo el proceso.

```
var('t')
sq1 = solve(sol[0][0],sqrt(t-1)) # despejamos sqrt(t-1) de la primera componente
sq2 = solve(sol[0][1],sqrt(t-1)) # despejamos sqrt(t-1) de la segunda componente
eq=sq1[0].rhs()==sq2[0].rhs()   # creamos una nueva ecuación igualando las anteriores
f=solve(eq,y) ; f                # y despejamos finalmente la variable `y`
```

$$\left[y(x) = \frac{Cx - x^2 + 1}{C - x} \right]$$

Representamos algunas de las curvas que forman esta familia de soluciones, de la misma forma que se ha hecho en otros casos anteriores.

```
set_verbose(-1) # para que no muestre avisos (warnings)
G=Graphics()    # Creamos un gráfico vacío y lo llamamos G
ff=f[0].rhs()
for i in range(-5,5,1):
    G+=plot(ff(_C=i),(-10,10),ymin=-10, ymax=10, detect_poles=True)
show(G)
```



Notar que las trayectorias parecen converger en la recta $y = x$. Es fácil comprobar que efectivamente ésta es solución de la EDO. Para ello substituímos en la EDO ec la función `test` y su derivada, y comprobamos su veracidad a través de la función `bool()` de la siguiente forma:

```
g=x # solución test a comprobar
bool(ec.subs(diff(y,x)==diff(g,x),y==g)) # sustituimos en la EDO y comprobamos
```

True

La función `bool(exp)` evalúa si una expresión `exp` es cierta (`True`) o falsa (`False`). Así, la solución $y = x$ no verifica la solución general obtenida `f`, ya que:

```
bool(f[0].subs(y==g))
```

False

Por tanto, en nuestro caso, $y(x) = x$ es una **solución extraña o singular**³⁹. Esto es debido a la parametrización particular de la solución obtenida⁴⁰.

³⁹Ver la [Definición 1.19](#), página 16.

⁴⁰Recordar que hay infinitas parametrizaciones de una función, siendo algunas más apropiadas que otras para cada ocasión.

Finalmente, si en una EDO aparecen *parámetros*⁴¹, es necesario especificar, además de la variable dependiente $y(x)$, la variable independiente x . Por ejemplo, dada la siguiente EDO lineal de primer orden con dos parámetros a y b :

$$x^2 y' = a + by$$

```
var('a b')
y=function('y')(x)
# La variable independiente se indica mediante `ivar`
desolve(x^2*diff(y,x)==a+b*y,y,ivar=x,contrib_ode=True)
```

$$\left(C - \frac{ae^{\frac{b}{x}}}{b}\right)e^{\left(-\frac{b}{x}\right)}$$

Notar que dependiendo del orden y dificultad de la ecuación, este tipo de EDO con parámetros generalmente será difícil de resolver y *SageMath* fallará en su resolución.

A.1.4. Trayectorias Ortogonales

Recordamos que dada una *familia de curvas uniparamétrica*⁴²:

$$F(x, y; c) = 0$$

se puede obtener la *familia de curvas ortogonales*⁴³ a la original de la siguiente forma:

1. Con la familia y su derivada se puede eliminar la constante c , dando una EDO cuya solución es la familia de curvas original.

$$\left. \begin{aligned} F(x, y; c) &= 0 \\ \frac{d}{dx} F(x, y; c) &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \frac{dy}{dx} = g(x, y)$$

2. La pendiente de las curvas ortogonales a las curvas de la familia de curvas original corresponde el inverso negativo de la pendiente de las curvas de la familia original.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{g(x, y)}$$

3. Resolviendo la EDO anterior se obtiene la familia de curvas ortogonal a la familia de curvas original.

Ejemplo

Vamos a calcular la familia de curvas ortogonales a la familia de curvas:

$$y = \frac{c}{1+x^2}$$

Representamos la familia de curvas original.

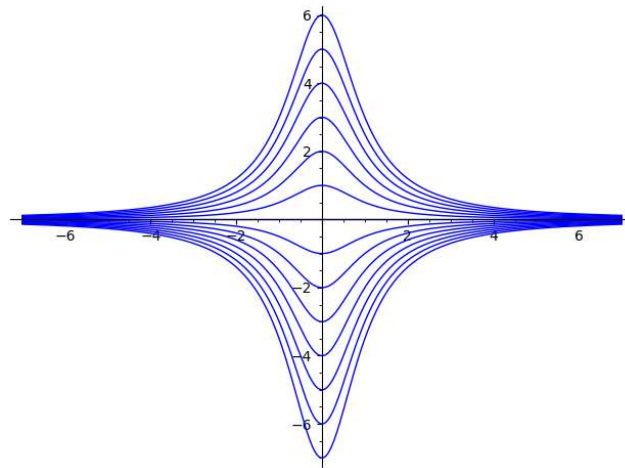
```
var('c')
y=function('y')(x)
f=c/(1+x^2)
G=Graphics()
for i in range(-7,7,1): G += plot(f(c=i),(-7,7))
show(G)
```

definimos función y(x)
familia de curvas
Definimos gráfico vacío
Bucle de curvas
muestra familia de curvas

⁴¹Recordamos que un *parámetro* es una entidad (distinta de las variables) cuyos valores dan lugar a diferentes casos en un problema.

⁴²Ver la [Sección 2.11.1, página 48](#).

⁴³Ver la [Definición 2.11, página 50](#).



Despejamos la constante c de la familia original.

```
f1 = solve(y == f,c) ; f1
```

$$[c = (x^2 + 1)y(x)]$$

Despejamos también la cte c de la derivada de la familia original.

```
f2 = solve(diff(y,x)==diff(f,x),c) ; f2
```

$$\left[c = -\frac{(x^4 + 2x^2 + 1) \frac{\partial}{\partial x} y(x)}{2x} \right]$$

Igualando las dos expresiones anteriores, $f1$ y $f2$, se puede eliminar la constante c . De esta nueva expresión se puede despejar la derivada $y'(x)$, obteniéndose la ODE de la familia de curvas original.

```
dy = solve(f1[0].rhs()==f2[0].rhs(),diff(y,x)) ; dy # ODE de la familia de curvas original
```

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} y(x) = -\frac{2xy(x)}{x^2 + 1} \right]$$

Se determina la inversa negativa de la parte derecha de esta expresión dy .

```
idy = -1/dy[0].rhs() ; idy # pendiente de las trayectorias ortogonales
```

$$\frac{x^2 + 1}{2xy(x)}$$

Con idy se construye la EDO asociada a la familia de curvas ortogonal a la anterior, cuya solución da lugar a las curvas ortogonales.

```
# resolvemos la ODE de la familia ortogonal
ff=desolve(diff(y,x)==idy,y,ivar=x) ; ff # solución
```

$$y(x)^2 = \frac{1}{2}x^2 + C + \frac{1}{2}\log(x^2)$$

De la solución ff es necesario despejar $y(x)$.

```
fff=solve(ff,y) ; fff # solución despejada
```

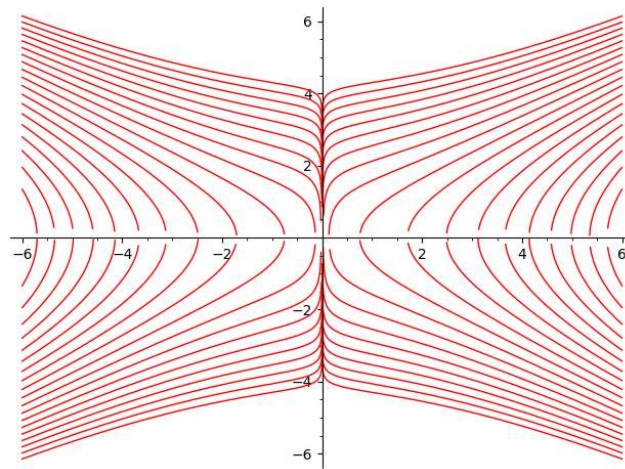
$$\left[y(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + C + \frac{1}{2}\log(x^2)}, y(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + C + \frac{1}{2}\log(x^2)} \right]$$

Estas funciones⁴⁴ corresponden con la familia de las curvas ortogonales buscadas. Representamos gráficamente las trayectorias ortogonales.

```
set_verbose(-1)
G1=Graphics()
for i in range(-20,20,2):
    G1+= plot(fff[0].rhs()(_C=i),(-6,6),plot_points=1000,color='red')

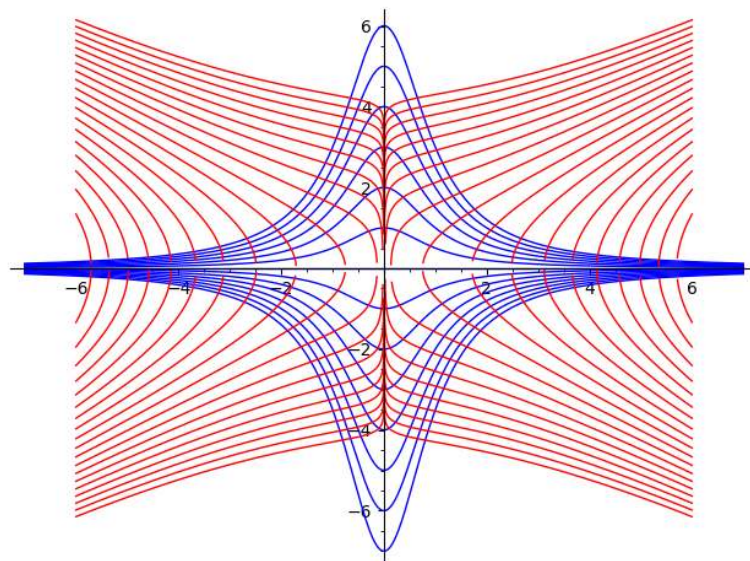
G2=Graphics()
for i in range(-20,20,2):
    G2+= plot((-1)*fff[0].rhs()(_C=i),(-6,6),plot_points=1000,color='red')

show(G1+G2)
```



Finalmente representamos juntas ambas familias de curvas en una misma gráfica, observándose la relación de ortogonalidad entre ellas.

```
show(G+G1+G2)
```



⁴⁴Notar que ambas son la misma en valor absoluto, es decir: $y(x) = \pm \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + C + \frac{1}{2}\log(x^2)}$.

A.1.5. EDO Lineales de Orden Superior

Buscamos la solución analítica de ecuaciones de la forma⁴⁵:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

donde las funciones $a_i(x)$ y la función $f(x)$ son continuas en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Ejemplos

Empezamos resolviendo una EDO sencilla de *segundo orden lineal con coeficientes constantes y homogénea*⁴⁶.

$$2y'' - 3y' + y = 0$$

La resolución se hace a través del comando⁴⁷ `desolve()` de forma similar a lo visto anteriormente.

```
y = function('y')(x)           # var. dependiente
ode = 2*diff(y,x,2)-3*diff(y,x)+y == 0 # definimos la EDO y le ponemos nombre
sol = desolve(ode,y) ; sol      # Resolvemos y ponemos nombre a la sol
```

$$K_2 e^{\left(\frac{1}{2}x\right)} + K_1 e^x$$

Se obtiene una *familia de curvas biparamétrica*⁴⁸. Si vemos el nombre de los *parámetros* en ASCII:

```
ascii(sol)
```

```
_K2*e^(1/2*x) + _K1*e^x
```

comprobamos que son `_K1` y `_K2`. Las variables que comienzan con un signo subrayado '_' son internas del programa y aunque no son *variables simbólicas* se puede interaccionar con ellas⁴⁹.

Verificamos la validez de la solución obtenida `sol` substituyendo con el comando `.subs()` esta función solución y sus derivadas en la EDO original `ode`, y comprobando que se cumple con el comando `bool()`.

```
bool( ode.subs( y==sol , diff(y,x)==diff(sol,x) , diff(y,x,2)==diff(sol,x,2) ) )
```

True

Para resolver una EDO de orden mayor que dos, por ejemplo la siguiente de quinto orden:

$$2y^{(5)} - 7y^{(4)} + 12y''' + 8y'' = 0$$

es necesario utilizar la librería de *FriCAS* de la siguiente forma.

```
y = function('y')(x)
ode = 2*diff(y,x,5)-7*diff(y,x,4)+12*diff(y,x,3)+8*diff(y,x,2) == 0
sol = desolve(ode,y,algorithm='fricas') ; sol # Resolución usando FriCAS
```

$$C_3 \cos(2x) e^{(2x)} + C_4 e^{(2x)} \sin(2x) + C_1 x + C_2 e^{(-\frac{1}{2}x)} + C_0$$

```
ascii(sol)
```

```
_C3*cos(2*x)*e^(2*x) + _C4*e^(2*x)*sin(2*x) + _C1*x + _C2*e^(-1/2*x) + _C0
```

En este caso los cinco *parámetros* van desde `_C0` hasta `_C4`. Podemos dibujar una curva solución de la familia de curvas correspondiente a unos determinados valores de los *parámetros*, de la siguiente forma.

```
plot(sol(_C0=-1,_C1=-1,_C2=0,_C3=0,_C4=0.01),-1,5,ymin=-10,ymax=40,thickness=2)
```

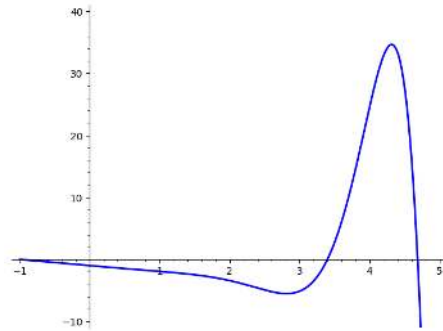
⁴⁵Ver la Definición 3.1, página 59.

⁴⁶Ver la Sección 3.2, página 65.

⁴⁷Ver la Sección A.1.2, página 456.

⁴⁸Ver la Sección 2.11.1, página 48.

⁴⁹Ver la Sección A.1.6, página 472.



Resolvemos ahora una EDO también lineal con coeficientes constantes pero no homogénea.

$$y'' + 2y = x^2 - x + 1$$

El proceso de resolución es similar.

```
y = function('y')(x)
ode = diff(y,x,2)+2*y == x^2-x+1
sol = desolve(ode,y) ; sol
```

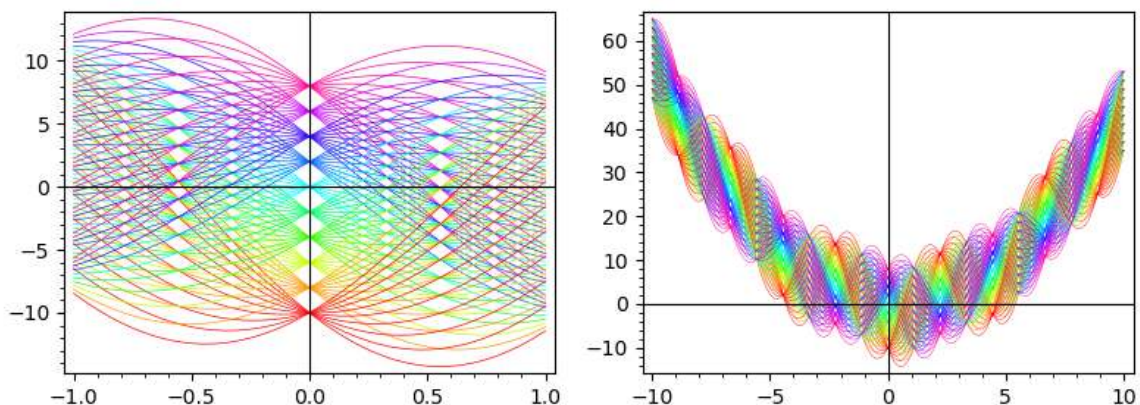
$$\frac{1}{2}x^2 + K_2 \cos(\sqrt{2}x) + K_1 \sin(\sqrt{2}x) - \frac{1}{2}x$$

Vamos a representar gráficamente esta familia de curvas biparamétrica. Al tener dos parámetros `_K1` y `_K2` es necesario usar un bucle `for()` doble para recorrer sus valores. Debido a la complejidad del conjunto de soluciones vamos a representar dos gráficas, siendo una un *zoom* de la otra (cada una sobre un intervalo distinto).

```
P1 = Graphics() # Gráfico 1 en intervalo pequeño x=[-1,1]
P2 = Graphics() # Gráfico 2 en intervalo mayor x=[-10,10]
C = rainbow(10) # Genera vector de 10 colores para diferenciar las curvas

for i in range(-10,10,2): # Bucle doble
    k=-1
    for j in range(-10,10,2):
        k+=1
        P1 += plot(sol(_K1=i, _K2=j), (-1,1), color=C[k], thickness=0.5)
        P2 += plot(sol(_K1=i, _K2=j), (-10,10), color=C[k], thickness=0.3)

# Representamos ambas en horizontal
graphics_array([P1, P2]).show(frame=True, figsize=[8,3])
```



Vamos ahora a encontrar la solución general y particular de un PVI formado con una EDO de segundo orden no homogénea que puede resolverse tanto por el *método de los coeficientes indeterminados*⁵⁰ como por el *método de variación de parámetros*⁵¹.

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x} \cos(2x) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Empezamos primero con la solución general de la EDO del problema, mostrando el método empleado por el comando.

```
y = function('y')(x)
ode = diff(y,x,2)+2*diff(y,x)+5*y == 4*e^(-x)*cos(2*x)
s1 = desolve(ode,y,show_method=True) ; s1 # sol. general, mostramos método
```

$$\left[(K_2 \cos(2x) + K_1 \sin(2x))e^{(-x)} + \frac{1}{2} (2x \sin(2x) + \cos(2x))e^{(-x)}, \text{variationofparameters} \right]$$

El algoritmo determina que puede resolverse por el método general de *variación de parámetros*.

Notar que los dos primeros términos de la expresión corresponden con la *solución general* de la EDO homogénea asociada y el último término es una *solución particular de la EDO completa*⁵². Vamos ahora a encontrar la *solución particular* del PVI, añadiendo las *condiciones iniciales* mediante un vector $[x_0, y(x_0), y'(x_0)]$ de la siguiente forma:

```
s2 = desolve(ode,y,[0,1,0]) ; s2 # sol. particular
```

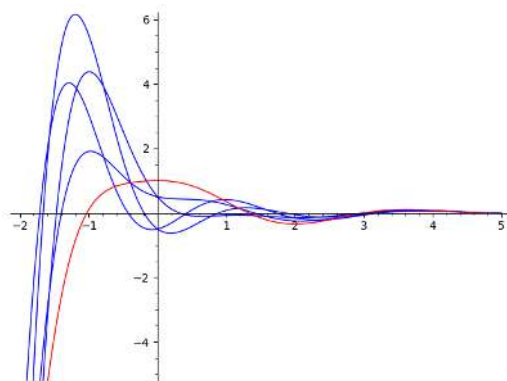
$$\frac{1}{2} (2x \sin(2x) + \cos(2x))e^{(-x)} + \frac{1}{2} (\cos(2x) + \sin(2x))e^{(-x)}$$

Vemos, como es lógico, que la solución en este caso no contiene *parámetros*. Vamos a representar ambas soluciones, donde la general lo haremos representando un pequeño grupo de ellas, a través de bucles `for()`.

```
P1=Graphics() # Gráfico de la familia de curvas (en azul)
for i in range(-1,1):
    for j in range(-1,1):
        P1 += plot(s1[0](_K1=i,_K2=j),(-2,5),ymin=-5,ymax=5,color='blue')

P2=plot(s2,(-2,5),ymin=-5,ymax=6,color='red') # Gráfico de la solución particular

show(P1+P2) # Representamos ambos en un mismo gráfico
```



En principio no hay límite sobre el orden de la EDO, siempre que se use la librería *friCAS*, así podríamos encontrar la solución general y/o particular de un problema formado con la siguiente EDO de décimo orden.

$$y^{(10)} + 2y^{(9)} - y^{(8)} + 11y^{(6)} + 10y^{(5)} - 3y^{(4)} + 4y''' + 20y'' + 16y' + 4y = 0$$

⁵⁰Ver la Sección 3.3.1, página 72.

⁵¹Ver la Sección 3.3.2, página 77.

⁵²Ver el Teorema 3.2, página 64.

Aquí mostramos la solución general (el carácter \ se utiliza para partir sentencias largas).

```
ED = diff(y,x,10)+2*diff(y,x,9)-diff(y,x,8)+11*diff(y,x,6)+10*diff(y,x,5) \
-3*diff(y,x,4)+4*diff(y,x,3)+20*diff(y,x,2)+16*diff(y,x)+4*y == 0
desolve(ED,y,contrib_ode=true,algorithm='fricas').show() # Resuelve y muestra la solución
```

$$C_5 x^5 e^{(-x)} + C_4 x^4 e^{(-x)} + C_3 x^3 e^{(-x)} + C_2 x^2 e^{(-x)} + C_8 x \cos(x) e^x + C_9 x e^x \sin(x) + C_1 x e^{(-x)} + C_6 \cos(x) e^x + C_7 e^x \sin(x) + C_0 e^{(-x)}$$

Usando *friCAS*, las *condiciones iniciales* para una EDO de orden n tiene la forma:

$$[x_0, y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)]$$

así el siguiente PVI:

$$\begin{cases} y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0 \\ y(2) = 0, y'(2) = 1, y''(2) = -1, y'''(2) = 0 \end{cases}$$

puede resolverse mediante el siguiente código:

```
y = function('y')(x)
ec = diff(y,x,4)-4*diff(y,x,3)+8*diff(y,x,2)-8*diff(y,x)+4*y==0
s = desolve(ec,y,[2,0,1,-1,0],algorithm='fricas') ; s
```

$$\frac{(7(x-2)\cos(2) - 3(x-5)\sin(2))\cos(x)e^x + (3(x-5)\cos(2) + 7(x-2)\sin(2))e^x\sin(x)}{2(\cos(2)^2 e^2 + e^2 \sin(2)^2)}$$

Veamos ahora cómo resolver *problemas de valores en la frontera*⁵³ (PVF) a través del siguiente ejemplo formado por una EDO de segundo orden *reducible a primer orden*⁵⁴ (falta la variable independiente):

$$\begin{cases} y'' + y(y')^3 = 0 \\ y(0) = 1, y(1) = 3 \end{cases}$$

Encontramos primero la solución general, mostrando su tipo.

```
sg = desolve(diff(y,x,2)+y*(diff(y,x))^3==0,y,show_method=True) ; sg
```

$$\left[\frac{1}{6} y(x)^3 + K_1 y(x) = K_2 + x, \text{free of } x \right]$$

Vemos que indica *free of x* (falta variable x). Como la solución es una función *implícita*, para representar la familia de curvas es necesario utilizar el comando `implicit_plot()` que necesita tener una expresión (ecuación) despejada a cero. Además es necesario cambiar la variable $y(x)$ por otra simbólica que no sea de tipo `function()` como lo es y . En nuestro caso usaremos la variable t para este fin.

```
var('t') # cambiamos la variable y(x) por t
ecg = (sg[0].lhs()-sg[0].rhs()).subs(y==t) ; ecg # Pasamos parte dcha de la ec a la izda
```

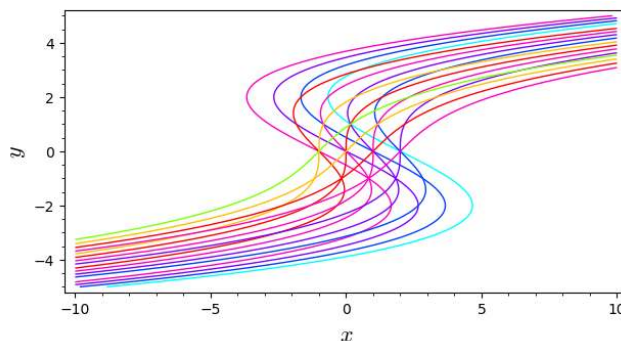
$$\frac{1}{6} t^3 + K_1 t - K_2 - x$$

Ahora estamos en disposición de representar las soluciones como *funciones implícitas*.

```
G=Graphics()
for i in range(-2,2,1):
    for j in range(-2,2,1):
        G+= implicit_plot(ecg(_K1=i,_K2=j),(x,-10,10),(t,-5,5), \
            color=rainbow(8)[i+j],plot_points=100,linewidth=1)
show(G,axes_labels=['$x$', '$y$']) # representación familia de curvas original
```

⁵³Ver la Definición 3.6, página 61.

⁵⁴Ver la Sección 3.4, página 84.



Una vez obtenida la solución general vamos a resolver ahora el PVF. Las *condiciones frontera* de una EDO de segundo orden se especifican mediante un vector $[x_1, y(x_1), x_2, y(x_2)]$ de la siguiente forma:

```
sp = desolve(diff(y,x,2)+y*(diff(y,x))^3==0,y,[0,1,1,3]); sp # sol. particular
```

$$\frac{1}{6}y(x)^3 - \frac{5}{3}y(x) = x - \frac{3}{2}$$

Para representar esta función implícita, al igual que antes, necesitamos despejarla a la izquierda.

```
eep = (sp.lhs()-sp.rhs()).subs(y==t) ; eep # Ec. implícita de la sol. particular
```

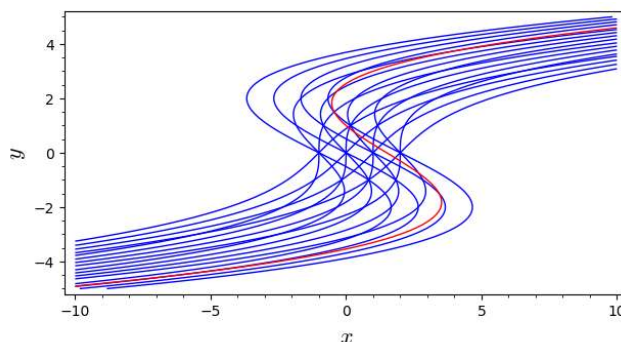
$$\frac{1}{6}t^3 - \frac{5}{3}t - x + \frac{3}{2}$$

Representamos finalmente la *solución general* (en azul) y *particular* (en rojo) juntas.

```
G1=Graphics() # gráfico con las sol de la general
for i in range(-2,2,1):
    for j in range(-2,2,1):
        G1 += implicit_plot(ecg(_K1=i,_K2=j),(x,-10,10),(t,-5,5), \
            plot_points=100,linewidth=1,color='blue')

G2 = implicit_plot(eep,(x,-10,10),(t,-5,5), \
    plot_points=100,linewidth=1,color='red') # gráfico de la sol. particular

show(G1+G2,axes_labels=['$x$','$y$']) # representación conjunta
```



Veamos ahora una EDO que solo se puede resolver por el *método de variación de parámetros*.

$$y'' + 2y' + y = \cos^2(x)$$

```
desolve(diff(y,x,2)+2*diff(y,x)+y == cos(x)^2,y,show_method=True)
```

$$\left[(K_2 x + K_1) e^{(-x)} - \frac{3}{50} \cos(2x) + \frac{2}{25} \sin(2x) + \frac{1}{2}, \text{variationofparameters} \right]$$

Las ecuaciones de tipo *Cauchy-Euler*⁵⁵ se resuelven de igual forma, por ejemplo la siguiente no homogénea.

$$x^3 y''' - 2x^2 y' + x y' - y = 2x$$

```
y=function('y')(x)
ec = x^3*diff(y,x,3)-2*x^2*diff(y,x,2)+x*diff(y,x)-y==2*x
desolve(ec,y,algorithm='fricas')
```

$$C_2 x^2 x(\sqrt{3}) + \frac{C_1 x^2}{x(\sqrt{3})} + C_0 x + x \log(x) - x$$

A través de la librería *FriCAS* también se pueden resolver algunas EDO no lineales⁵⁶.

$$y' = \frac{y}{x + y \log y}$$

```
de = diff(y, x) == y / (x+y*log(y))
desolve(de,y,algorithm='fricas')
```

$$\frac{\log(y(x))^2 y(x) - 2x}{2y(x)}$$

En determinados casos, por ejemplo donde se aplica el método de *variación de parámetros*, pueden aparecer soluciones que contienen *integrales no elementales*⁵⁷, sin solución analítica⁵⁸. Aquí mostramos un ejemplo de una EDO lineal con coeficientes constantes no homogénea que puede resolverse a través del *método de variación de parámetros*⁵⁹.

$$y'' + 2y' + y = \frac{1}{\cos x}$$

```
desolve(diff(y,x,2)+2*diff(y,x)+y == 1/cos(x),y,show_method=True)
```

$$\left[(K_2 x + K_1) e^{(-x)} + \left(x \int \frac{e^x}{\cos(x)} dx - \int \frac{x e^x}{\cos(x)} dx \right) e^{(-x)}, \text{variationofparameters} \right]$$

Las dos *integrales indefinidas* que aparecen en esta solución son de tipo *no elemental*. Probamos a calcular una de ellas.

```
f = e^x/cos(x) ; integral(f,x)
```

$$\int \frac{e^x}{\cos(x)} dx$$

Al igual que antes, muestra la integral sin poder obtener la solución. Mediante el comando `numerical_integral()` podemos obtener una aproximación numérica de una integral definida. A continuación mostramos dentro de la gráfica de la función, la zona de integración y su aproximación numérica.

```
P1 = plot(f,-2*pi,2*pi,detect_poles='show',ymin=-20,ymax=10,plot_points=2000)
P2 = plot(f,-1,1,fill=true)
(P1+P2).show(aspect_ratio=0.15)
```

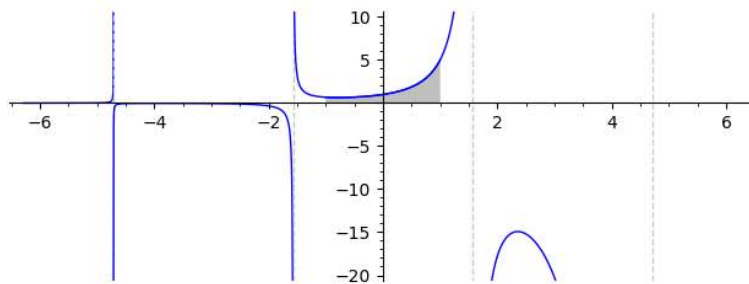
⁵⁵Ver la [Sección 3.4.3](#), página 87.

⁵⁶Ver la [Definición 1.8](#), página 9.

⁵⁷Una *integral no elemental* es una integral para la cual se puede demostrar que no existe ninguna fórmula en términos de *funciones elementales* (polinomios, funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas y productos y composiciones de estas funciones). Se puede demostrar que, dada una función al azar de cierta complejidad, la probabilidad de que tenga una primitiva elemental es muy pequeña.

⁵⁸En el caso de que tenga solución, ésta se puede determinar de forma numérica.

⁵⁹A la hora de encontrar una solución particular.



```
# Muestra el valor aproximado y su error de la integral entre [-1,1]
numerical_integral(f, -1, 1)
```

$(2.955844634804547, 3.2816467707747454 \times 10^{-14})$

A.1.6. Problemas de Valores en la Frontera (PVF)

De forma general, los *problemas de valores en la frontera* (PVF) necesitan un tratamiento especial. Como sabemos⁶⁰ los problemas PVF pueden tener una, varias, infinitas o ninguna solución (a diferencia de los PVI de EDO lineales cuya solución siempre es única).

SageMath no tiene una forma directa de resolver PVF con EDO de alto orden, de forma que el proceso a seguir es encontrar la solución general de la EDO (en caso de que exista y el algoritmo sea capaz de encontrarla), que tendrá n parámetros (donde n es el orden de la EDO) y posteriormente, a través de los valores de las condiciones frontera, formar un *sistema de ecuaciones lineales* para encontrar los valores de los *parámetros* que dan lugar a la solución particular del problema.

Veamos un ejemplo, resolviendo el siguiente PVF con una EDO lineal no homogénea de cuarto orden.

$$\begin{cases} xy^{(4)} - y''' - 4xy'' + 4y' = 96x^2 \\ y(1) = -5, y'(0) = -12, y''(-1) = 60, y'''(0) = -48 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Primeramente buscamos soluciones con *SageMath* a través de *friCAS*:

```
y=function('y')(x)
ode = x*diff(y,x,4)-diff(y,x,3)-4*x*diff(y,x,2)+4*diff(y,x)==96*x^2
s = desolve(ode,y,algorithm='fricas') ; s
```

$$C_0 x^2 - 8x^3 + \frac{37}{2} x^2 + C_2 e^{(2x)} + C_3 e^{(-2x)} + C_1 - 12x$$

Los parámetros `_C` son internos del programa y no son *variables simbólicas* que el usuario puede usar directamente. Para que puedan ser utilizadas es necesario declararlas como *variables simbólicas*⁶¹ mediante el comando `var()`.

```
var('_C0 _C1 _C2 _C3')
```

$$(C_0, C_1, C_2, C_3)$$

Ahora, a través de los valores frontera conocidos del problema (A.2) vamos a formar un sistema de ecuaciones lineales donde las incógnitas serán los parámetros `_C`.

```
sis = [s(x=1)==-5,diff(s,x)(x=0)==-12,diff(s,x,2)(x=-1)==60,diff(s,x,3)(x=0)==-48] ; sis
```

$$\left[C_2 e^2 + C_3 e^{(-2)} + C_0 + C_1 - \frac{3}{2} = (-5), 2C_2 - 2C_3 - 12 = (-12), 4C_3 e^2 + 4C_2 e^{(-2)} + 2C_0 + 85 = 60, 8C_2 - 8C_3 - 48 = (-48) \right]$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales.

⁶⁰Ver el Ejemplo 3.9, página 63.

⁶¹Ver la Sección A.1.1, página 449.

```
solsis=solve(sis,_C0,_C1,_C2,_C3) ; solsis
```

$$\left[\left[C_0 = -\frac{1}{2} (4r_1 e^4 + 4r_1 + 25e^2) e^{(-2)}, C_1 = (r_1 e^4 + r_1 + 9e^2) e^{(-2)}, C_2 = r_1, C_3 = r_1 \right] \right]$$

Vemos que hay infinitas soluciones que dependen en este caso de un parámetro⁶² r_1 . De ellas vamos a escoger una solución sencilla, por ejemplo para $r_1=0$ el valor de nuestros parámetros es:

```
for i in range(0,4): print(solsis[0][i](r1=0))
```

```
_C0 == (-25/2)
_C1 == 9
_C2 == 0
_C3 == 0
```

Sustituyendo estos valores en la solución ss se tiene:

```
s0 = s(_C0=solsis[0][0](r1=0).rhs(), _C1=solsis[0][1](r1=0).rhs(), \
      _C2=solsis[0][2](r1=0).rhs(), _C3=solsis[0][3](r1=0).rhs()) ; s0
```

$$-8x^3 + 6x^2 - 12x + 9$$

Comprobamos que esta solución es válida, es decir que cumple la EDO y que se verifican las condiciones frontera. Empezamos con la verificación de la EDO.

```
bool(ode.subs(y==s0,diff(y,x)==diff(s0,x),diff(y,x,2)==diff(s0,x,2), \
      diff(y,x,3)==diff(s0,x,3),diff(y,x,4)==diff(s0,x,4)))
```

True

Se cumple la EDO, comprobamos ahora las condiciones frontera:

```
print('f(1)=' ,s0(x=1), " , f'(0)=",diff(s0,x)(x=0), " , \
      f''(-1)=",diff(s0,x,2)(x=-1), " , f'''(0)=",diff(s0,x,3)(x=0))
```

$$f(1) = -5 \quad , \quad f'(0) = -12 \quad , \quad f''(-1) = 60 \quad , \quad f'''(0) = -48$$

También se cumplen, por tanto la solución es válida. De igual forma se podría hacer con cualquier otro valor del parámetro r_1 .

A.1.7. Ecuación de Bessel

La *ecuación de Bessel*⁶³ en su forma canónica es una EDO lineal de segundo orden dada por:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - m^2)y = 0$$

donde $m \geq 0$ se denomina **orden de la ecuación**. Las soluciones de esta ecuación vienen dadas por:

$$y(x) = c_1 J_m(x) + c_2 Y_m(x)$$

donde $J_m(x)$ e $Y_m(x)$ se denominan **funciones de Bessel de primera clase o especie** y pueden definirse como:

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{2k+m}}{k! \Gamma(k+m+1)} \quad ; \quad \begin{cases} Y_m(x) = \frac{J_m(x) \cos(m\pi) - J_{-m}(x)}{\sin(m\pi)} & m \notin \mathbb{Z} \\ Y_m(x) = \lim_{n \rightarrow m} Y_n(x) & m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

⁶²El nombre de este parámetro puede ser distinto al ejecutar esta sentencia.

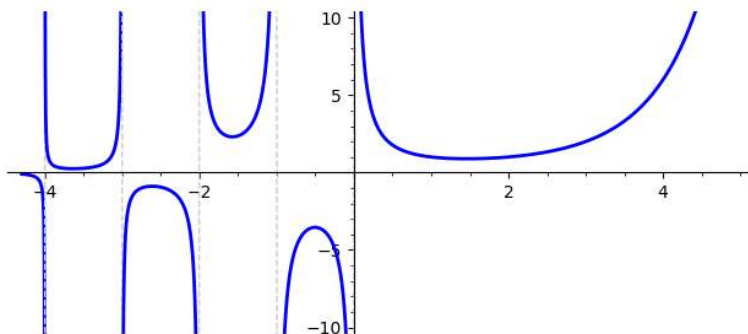
⁶³Ver la Sección ??, página ??.

donde $\Gamma(x)$ es la **función gamma**⁶⁴ definida por:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

En *SageMath* la función gamma $\Gamma(x)$ se representa mediante `gamma(x)`.

```
plot(gamma(x), -4.3, 5, ymin=-10, ymax=10, detect_poles='show', thickness=2)
```



Funciones de Bessel en SageMath

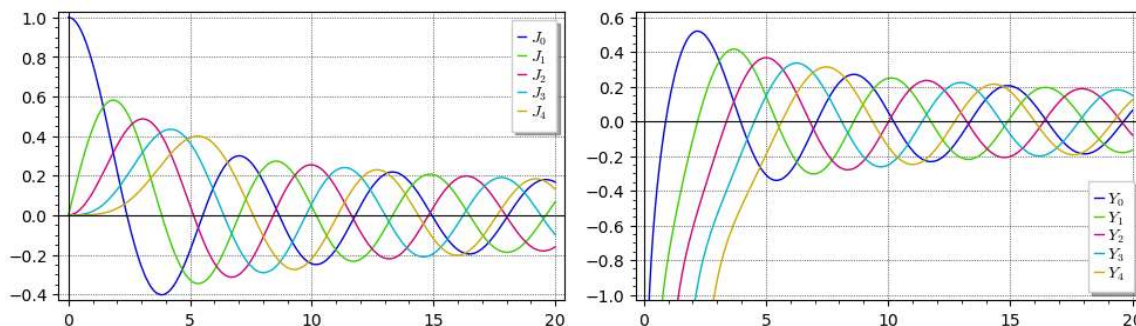
Hay varias formas de usar las funciones de Bessel en *SageMath*:

- Mediante las funciones `bessel_J(n, x)` para la primera especie y `bessel_Y(n, x)` para la segunda especie.
- Mediante la función `Bessel(n, tipo)(x)` donde `tipo` puede ser J (por defecto), Y, K o I.

```
bessel_J(0,2).n() # Aproximación numérica de J_0(2)
```

0.223890779141236

```
def j(n): return lambda x: Bessel(n)(x) # redefinimos nombre función Bessel
def y(n): return lambda x: Bessel(n, 'Y')(x)
P1 = plot([j(0), j(1), j(2), j(3), j(4)], 0, 20, \
    legend_label=['$J_0$', '$J_1$', '$J_2$', '$J_3$', '$J_4$'], \
    ticks=[None, None], gridlines=true, frame=true)
P2 = plot([y(0), y(1), y(2), y(3), y(4)], 0, 20, ymin=-1, ymax=0.6, \
    legend_label=['$Y_0$', '$Y_1$', '$Y_2$', '$Y_3$', '$Y_4$'], \
    ticks=[None, None], gridlines=true, frame=true)
graphics_array([P1, P2]).show(figsize=[10, 3])
```



Se puede obtener un *desarrollo en serie de Taylor*⁶⁵ de las *funciones de Bessel* en torno a un punto $x = x_0$.

⁶⁴Ver la [Sección 4.5.1](#), página 132.

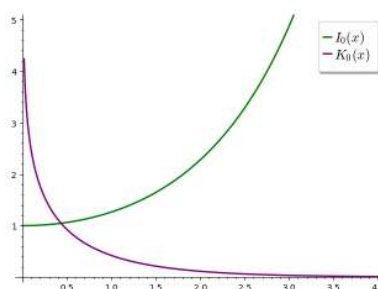
⁶⁵Ver por ejemplo "Clases de Cálculo I para Ingeniería" en la *Bibliografía*, pág. 517.

```
# Desarrollo en serie de J_0(x) alrededor de x = 0
taylor(bessel_J(0, x), x, 0, 6) # Polinomio Taylor orden 6 en torno x=0
```

$$-\frac{1}{2304}x^6 + \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{4}x^2 + 1$$

Además de las *funciones de Bessel* estándar, *SageMath* también soporta las funciones de Bessel modificadas, como $I_m(x)$ y $K_m(x)$:

```
# Gráficas de I_0(x) y K_0(x)
P = plot(bessel_I(0, x), 0, 4, ymax=5, color='green', thickness=2, legend_label='$I_0(x)$')+ \
plot(bessel_K(0, x), 0, 4, ymax=5, color='purple', thickness=2, legend_label='$K_0(x)$')
P.set_legend_options(font_size=16) ; P.show()
```



Los ceros o raíces de las funciones de bessel se pueden obtener a través de la librería⁶⁶ *mpmath*.

- `besseljzero(m,n,deriv)` : Encuentra el zero n -ésimo positivo de la función $J_m(x)$, siendo el primer cero $n = 1$. Si se indica el valor `deriv=1` se obtienen los ceros no negativos de la derivada $J'_m(x)$, por defecto `deriv=0`.
- `besselyzero(m,n,deriv)` : igual que el anterior pero con la función $Y_m(x)$.

La librería *mpmath* es de precisión arbitraria y tiene muchas funciones útiles en muchas áreas de las matemáticas. Para usar rutinas de esta librería dentro de *SageMath* es necesario importarla antes de su uso, como se indica a continuación.

```
from mpmath import besseljzero, besselyzero # importamos rutinas de mpmath
z1 = besseljzero(2,3) # tercer cero>0 (n=3) de J_2(x)
z2 = besselyzero(0,1,1) # primer cero>0 (n=1) de Y_0'(x)
print("3er cero J_2 = ", z1, " ; 1er cero Y_0' = ", z2)
```

3er cero J_2 = 11.6198411721491 ; 1er cero Y_0' = 2.19714132603102

Resolución de la Ecuación de Bessel

Resolvemos la ec. de Bessel para orden m entero

```
var('m') # orden
assume(m, 'integer')
assume(m>=0)
y=function('y')(x)
ecbessel = x^2 * diff(y, x, 2) + x * diff(y, x) + (x^2 - m^2) * y == 0
sol = desolve(ecbessel, y, ivar=x) ; sol # Sol general
```

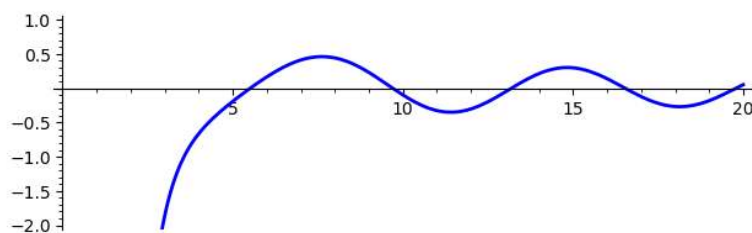
$$K_1 J_m(x) + K_2 Y_m(x)$$

```
ascii(sol)
```

$$_K1 \cdot \text{bessel_J}(m, x) + _K2 \cdot \text{bessel_Y}(m, x)$$

⁶⁶<https://mpmath.org/>.

```
# Representamos una sol. particular
set_verbose(-1)
plot(sol(m=5, _K1=1, _K2=1), 0, 20, ymin=-2, ymax=1, thickness=2)
```



A.1.8. Sistemas de EDO (SEDO)

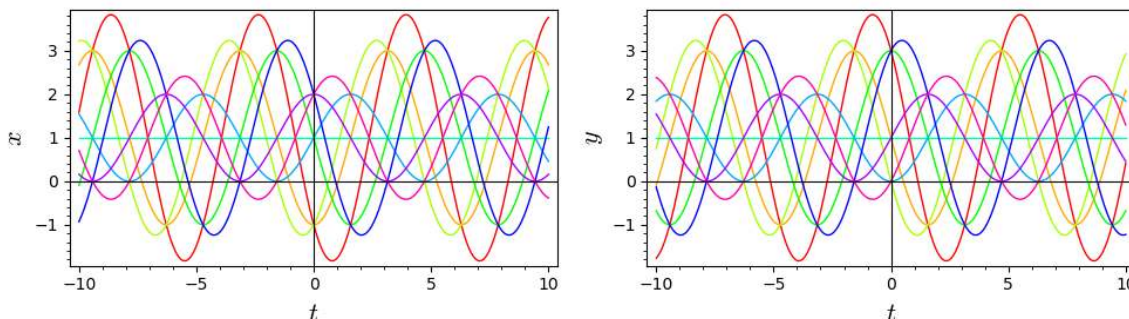
SageMath permite la resolución de SEDO de *primer orden* formadas por cualquier número de ecuaciones, mediante el uso del comando `desolve_system()` de una forma similar al uso del comando⁶⁷ `desolve()`. Internamente este comando hace uso de `desolve_laplace` (ver la [Sección A.1.11, página 483](#)). Veamos algunos ejemplos, empezando encontrando la solución general de un sistema de dos EDO.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + 1 \\ \frac{dy}{dx} = x - 1 \end{cases}$$

```
var('t')          # var independiente
x = function('x')(t) # vars dependientes
y = function('y')(t)
ec1 = diff(x,t) + y - 1 == 0
ec2 = diff(y,t) - x + 1 == 0
s = desolve_system([ec1, ec2], [x,y], algorithm='fricas') ; s
```

$$\left[x(t) = C_0 \cos(t) + \cos(t)^2 + C_1 \sin(t) + \sin(t)^2, y(t) = -C_1 \cos(t) + C_0 \sin(t) + 1 \right]$$

```
c = rainbow(7)
P1=Graphics() ; P2=Graphics()
for i in [-2, 0, 1]:
    for j in [-2, 0, 1]:
        P1 += plot(s[0].rhs()(_C0=i, _C1=j), -10, 10, color=c[i+j], thickness=1)
        P2 += plot(s[1].rhs()(_C0=i, _C1=j), -10, 10, color=c[i+j], thickness=1)
graphics_array([P1, P2]).show(figsize=[10, 3], frame=true)
```



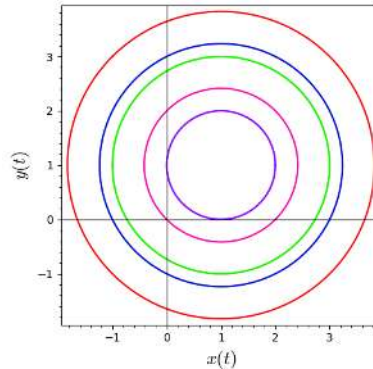
Estas gráficas dan poca información debido a su cantidad y complejidad. Una forma más útil es representar la variable $y(t)$ frente a la variable $x(t)$ para los mismos valores de la variable t (que no aparecerá en la gráfica), de la siguiente forma.

⁶⁷Ver la [Sección A.1.2, página 456](#).

```

c = rainbow(9)
P=Graphics()
k=-1
for i in [-2, 0, 1]:
    for j in [-2,0,1]:
        k+=1
        x=s[0].rhs()(_C0=i,_C1=j)
        y=s[1].rhs()(_C0=i,_C1=j)
        P+=parametric_plot([x,y],(t,0,2*pi),color=c[k],plot_points=500)
P.show(axes_labels=['$x(t)$','$y(t)$'],frame=true)

```



Aquí vemos que las trayectorias $[x, y]$ en función de t corresponden con circunferencias de centro $(1, 1)$ y radio dependiente de las condiciones iniciales.

Vamos ahora a resolver un PVI dada a través de un SEDO.

$$\begin{cases} x' = -ty + t \\ y' = 3tx - t \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 1 \end{cases}$$

```

var('t') # var independiente
x = function('x')(t) # vars dependientes
y = function('y')(t)
ec1 = diff(x,t) + t*y - t == 0
ec2 = diff(y,t) - 3*t*x + t == 0
s = desolve_system([ec1, ec2], [x,y], ics=[0,1,1], algorithm='fricas') ; s

```

$$\left[x(t) = \frac{1}{3} e^{\left(\frac{1}{2} \sqrt{-3} t^2\right)} + \frac{1}{3} e^{\left(-\frac{1}{2} \sqrt{-3} t^2\right)} + \frac{1}{3}, y(t) = -\frac{1}{3} \sqrt{-3} e^{\left(\frac{1}{2} \sqrt{-3} t^2\right)} + \frac{1}{3} \sqrt{-3} e^{\left(-\frac{1}{2} \sqrt{-3} t^2\right)} + 1 \right]$$

Notar que aparentemente se obtienen soluciones complejas dadas por valores de raíces negativas. Teniendo en cuenta la fórmula de Euler $e^{a+bi} = \cos(a) + i \sin(b)$, podemos simplificar las soluciones a través del comando `simplify_full()`.

```

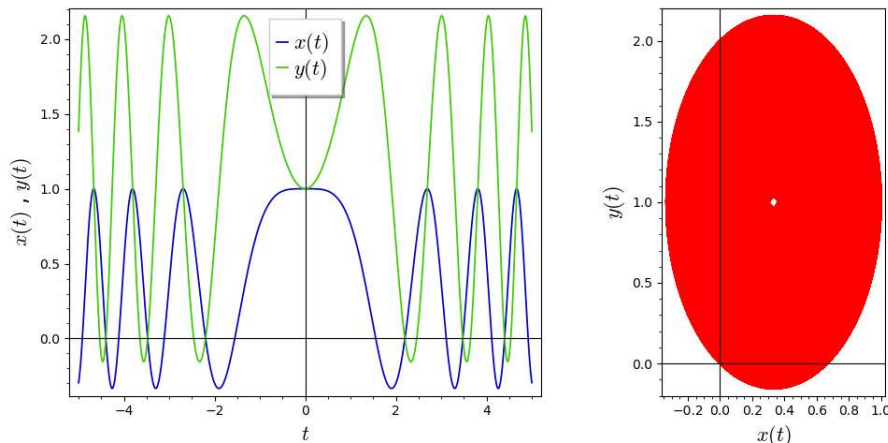
xt=s[0].rhs().simplify_full()
yt=s[1].rhs().simplify_full()
[xt,yt]

```

$$\left[\frac{2}{3} \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{3} t^2\right) + \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \sqrt{3} \left(\sqrt{3} + 2 \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{3} t^2\right)\right) \right]$$

Vemos que son soluciones reales. Vamos a representar estas soluciones. En una gráfica representaremos $[x(t), t]$ e $[y(t), t]$ y en una segunda gráfica $[x(t), y(t)]$. Esta última es una curva paramétrica en función del parámetro t (que podría representar, por ejemplo, el tiempo en un sistema físico).

```
P1 = plot([s[0].rhs(),s[1].rhs()],-5,5,thickness=1.2, \
        legend_label=['$x(t)$','$y(t)$'],axes_labels=['$t$','$x(t)$ , $y(t)$'])
P2 = parametric_plot([xt,yt],(t,0,50*pi),thickness=1.5, \
        axes_labels=['$x(t)$','$y(t)$'],color='red',plot_points=500)
graphics_array([P1,P2]).show(figsize=[20,10],frame=true)
```



En la segunda gráfica (paramétrica) se observa que la trayectoria es una espiral de forma elíptica que a medida que avanza el tiempo t se acerca a su centro.

A.1.9. Transformada de Laplace

Recordamos⁶⁸ que dada una determinada⁶⁹ función $f(t)$ definida para $t \geq 0$, se denomina **transformada de Laplace** de $f(t)$, y se representa mediante $\mathcal{L}\{f(t)\}$, al resultado de la siguiente integral impropia:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt = F(s) \quad (\text{A.3})$$

siempre y cuando converja. El resultado es una nueva función $F(s)$ en una nueva variable s . La operación opuesta viene dada por la **transformada inversa de Laplace**⁷⁰.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Cálculo y Propiedades de la TL

En *SageMath* la *transformada de Laplace* (TL) de una función $f(t)$ se calcula mediante el comando:

```
laplace(f(t),t,s)
```

donde t es la *variable original* (denominada *dominio del tiempo*) y s en la *variable transformada* (denominada *dominio de la frecuencia*). Por ejemplo, calculemos la transformada de Laplace de la función $f(t) = t^2$.

```
var('t s')           # Def. var original y transformada
f = t^2              # función original
F = laplace(f, t, s) ; F # Función transformada de Laplace
```

$$\frac{2}{s^3}$$

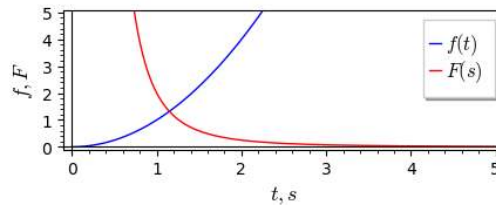
Representamos gráficamente la función y su transformada.

⁶⁸Ver la Definición 5.3, página 147.

⁶⁹Ver la Sección 5.3.4, página 151.

⁷⁰Ver la Definición 5.7, página 160.

```
P1 = plot(f,0,5,color='blue',legend_label='$f(t)$',axes_labels_size=1.3)
P2 = plot(F,0,5,color='red',ymax=10,legend_label='$F(s)$')
P=P1+P2; P.set_legend_options(font_size=12)
P.show(ymax=5,axes_labels=['$t,s$','$f,F$'],figsize=[4.5,2],frame=true)
```



Comprobamos el valor de la transformada obtenida a través del cálculo de la integral de definición (A.3).

```
assume(s>0)
int = integral(f*e^(-t*s),t,0,oo); int
```

$$\frac{2}{s^3}$$

La **transformada inversa de Laplace**⁷¹ se realiza mediante el comando:

```
inverse_laplace(F(s),s,t)
```

de la siguiente forma:

```
# Cálculo de la transformada inversa de Laplace del caso anterior
f_inv = inverse_laplace(F, s, t)
print("Transformada inversa de Laplace de F(s)=",F," es f(t) = ",f_inv)
print('Comprobamos el resultado con el anterior =',bool(f==f_inv))
```

Transformada inversa de Laplace de $F(s) = 2/s^3$ es $f(t) = t^2$
Comprobamos el resultado con el anterior = True

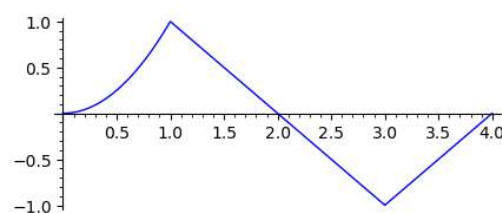
Las funciones *definidas a trozos* se definen en *SageMath* con el comando:

```
piecewise([ [(ini1,fin1),fun1] , [(ini2,fin2),fun2] ,... ] , var=variable )
```

por ejemplo la siguiente función:

$$\begin{cases} x^2 & x \in [0, 1] \\ 2 - x & x \in (1, 3) \\ x - 4 & x \in [3, 4] \end{cases}$$

```
# Ejemplo de función definida a trozos
f = piecewise([ ([0,1],x^2), ((1,3),2-x), ([3,4],x-4) ])
plot(f,0,4,figsize=[4.5,2])
```

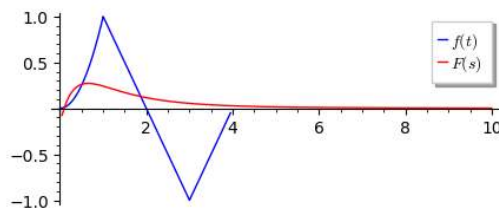


⁷¹Ver la Definición 5.7, página 160.

```
# Calculamos la TL de la función anterior
F = f.laplace(x, s) ; F
```

$$\frac{(s-1)e^{(-s)}}{s^2} + \frac{(s+1)e^{(-3s)}}{s^2} - \frac{(s-1)e^{(-3s)}}{s^2} - \frac{(s^2+2s+2)e^{(-s)}}{s^3} - \frac{e^{(-4s)}}{s^2} + \frac{2}{s^3}$$

```
# Representamos gráficamente ambas
set_verbose(-1) # previene warnings
P1 = plot(f,0,10,color='blue',legend_label='$f(t)$')
P2 = plot(F,0,10,color='red',ymax=10,legend_label='$F(s)$') ; P=P1+P2
P.set_legend_options(font_size=10); P.show(ymax=-1,ymax=1,figsize=[4.5,2])
```



Vamos a ver un par de ejemplos donde se comprueban los resultados del comando `laplace()` a través de las propiedades de la TL⁷². Empezamos recordando el **primer teorema de traslación**⁷³:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

Por ejemplo:

$$\mathcal{L}\{e^t \cos t\} = \mathcal{L}\{\cos t\}|_{s \rightarrow s-1} = \frac{s}{s^2+1} \Big|_{s \rightarrow s-1} = \frac{s-1}{(s-1)^2+1} = \frac{s-1}{s^2-2s+2}$$

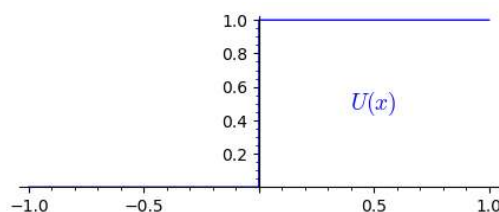
Comprobamos:

```
var('t s')
f = e^t*cos(t) # primer teo traslación
laplace(f,t,s)
```

$$\frac{s-1}{s^2-2s+2}$$

La función **escalón unitario**⁷⁴ se define en *SageMath* a través de la función `unit_step(x)`.

```
# Función escalon unitario U(x)
G = plot(unit_step(x),figsize=[4.5,2])
G += text('$U(x)$',(0.5,0.5),fontsize=14) ; G
```



A través del uso de esta función recordamos el **segundo teorema de traslación**⁷⁵:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

⁷²Ver la Sección 5.3.5, página 153.

⁷³Ver el Teorema 5.3, página 154.

⁷⁴Ver la Definición 5.6, página 155.

⁷⁵Ver el Teorema 5.4, página 156.

Por ejemplo:

$$\mathcal{L}\{\sin(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{\sin(t)\} = e^{-as}\frac{1}{s^2+1}$$

Comprobamos:

```
var('t s a')
assume(a>0)
g = sin(t)
f = g(t=t-a)*unit_step(t-a) # segundo teo traslación
laplace(f,t,s)
```

$$\frac{e^{-as}}{s^2+1}$$

Recordamos ahora la propiedad de la **derivada de una transformada**⁷⁶:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Por ejemplo:

$$\mathcal{L}\{t \sin(kt)\} = (-1) \frac{d}{ds} \mathcal{L}\{\sin(kt)\} = -\frac{d}{ds} \frac{k}{s^2+1} = \frac{k2s}{(s^2+1)^2}$$

Comprobamos:

```
var('t s k')
f = t*sin(k*t) # derivada de una transformada
laplace(f,t,s)
```

$$\frac{2ks}{(k^2+s^2)^2}$$

Veamos la propiedad de la **integral de una transformada**⁷⁷:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(r) dr$$

Por ejemplo:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin(2t)}{t}\right\} = \int_s^\infty \mathcal{L}\{\sin(2t)\}|_{s \rightarrow r} dr = \int_s^\infty \frac{2dr}{r^2+2^2} = \arctan \frac{r}{2} \Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{s}{2}$$

Comprobamos:

```
var('t s')
assume(s>0)
f = sin(2*t)/t # integral de una transformada
L=laplace(f,t,s); L
```

$$\frac{1}{2}i \log\left(\frac{s-2i}{s+2i}\right)$$

Podemos simplificar esta expresión para que no sea compleja, para ello primero hay que romper el logaritmo del cociente con el comando `canonicalize_radical()` y posteriormente simplificar con `simplify_full()`.

```
L2= L.canonicalize_radical().simplify_full() ; L2
```

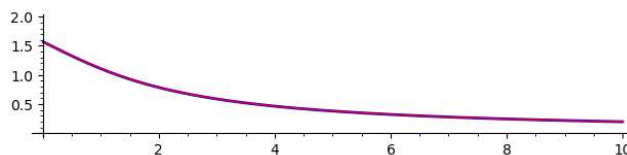
$$\arctan\left(\frac{2}{s}\right)$$

Comprobamos la equivalencia de ambos resultados para $s > 0$ representando sus gráficas.

⁷⁶Ver el Teorema 5.6, página 158.

⁷⁷Ver el Teorema 5.7, página 160.

```
plot(pi/2-atan(x/2),0.01,5,ymin=-1,ymax=5,color='blue',thickness=2)+ \
plot(atan(2/x),0.01,5,ymin=-1,ymax=5,color='red',thickness=1)
```



Recordamos ahora la propiedad de la **transformada de la derivada de una función**⁷⁸:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Por ejemplo:

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

Comprobamos:

```
var('t s')
f=function('f')(t)
L = laplace(diff(f,t,3),t,s) ; L # Transformada de la tercera derivada
```

$$s^3 \mathcal{L}(f(t), t, s) - s^2 f(0) - s D_0(f)(0) - D_{0,0}(f)(0)$$

donde D_0 y $D_{0,0}$ hacen referencia a las derivadas.

Veamos la propiedad de la **transformada de la integral de una función**⁷⁹:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(r) dr\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Comprobamos:

```
var('t s r')
f=function('f')(t)
laplace(integral(f(t=r),r,0,t),t,s) # Transformada de una integral
```

$$\frac{\mathcal{L}(f(t), t, s)}{s}$$

A.1.10. Descomposición en Fracciones Simples

SageMath permite encontrar la descomposición de una función racional en sumas y restas de *fracciones simples*⁸⁰ mediante el comando `partial_fraction()` de la siguiente forma⁸¹:

```
# Ejer. 4.14
f=(x^2-5*x+6)/(x^4-3*x^3-3*x^2+11*x-6)
ff = f.partial_fraction(x)
sys.stdout.flush()
show(f) ; print('=') ; sys.stdout.flush() ; show(ff)
```

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6} = -\frac{4}{9(x+2)} + \frac{4}{9(x-1)} - \frac{1}{3(x-1)^2}$$

⁷⁸Ver el Teorema 5.8, página 163.

⁷⁹Ver el Teorema 5.9, página 164.

⁸⁰Ver la Sección 5.4, página 165.

⁸¹Ver el Ejercicio 5.14, página 166.

A.1.11. Resolución EDO con TL

El procedimiento de la *transformada de Laplace* para la resolución de EDO⁸² se puede realizar en *SageMath* mediante la sentencia:

```
desolve_laplace(edo,var,[ics,ivar,...])
```

de forma similar a como se utiliza el comando normal⁸³ `desolve()`. Resolvemos a modo de ejemplo el Ejercicio 5.15, página 168.

$$\begin{cases} y''(t) + 3y'(t) - 4y(t) = 0 \\ y(0) = 3 \quad ; \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

```
# Ejer. 4.15
var('t')
y=function('y')(t)
edo=diff(y,t,2)+3*diff(y,t)-4*y==0
desolve_laplace(edo,y,ics=[0,3,1])
```

$$\frac{2}{5}e^{(-4t)} + \frac{13}{5}e^t$$

Notar que este comando realiza automáticamente todos los pasos necesarios para la resolución de un PVI por el método de la *transformada de Laplace*⁸⁴. Estos pasos se pueden realizar en *SageMath* manualmente como indicamos a continuación para la resolución del caso anterior.

```
var('t,s')                                # var ind
y = function('y')(t)                     # var dep
edo=diff(y,t,2)+3*diff(y,t)-4*y==0       # EDO
L = laplace(edo,t,s)                      # Tranf. Laplace
S = solve(L,laplace(y,t,s))               # Despejamos la TL
F=S[0].rhs()                              # parte dcha
y0=3; dy0=1                              # cond. ini
f=F.subs(y(t=0)==y0, diff(y,t)(t=0)==dy0) # sustituimos
inverse_laplace(f,s,t)                   # transf. inversa Laplace
```

$$\frac{2}{5}e^{(-4t)} + \frac{13}{5}e^t$$

Comprobamos que se obtiene el mismo resultado que anteriormente con el comando `desolve_laplace()`. A pesar de que realizar estos pasos manualmente es más largo y pesado, veremos que van a resultar muy interesantes para resolver problemas de tipo más general que el que permite el comando.

Si no se especifican unas condiciones iniciales al usar este comando se obtiene el resultado dependiente de un *parámetro libre*. Por ejemplo:

```
u=function('u')(x)
eq = diff(u,x) - exp(-x) - u == 0
sg = desolve_laplace(eq,u) ; sg # sol. general (sin cond. ini)
```

$$\frac{1}{2}(2u(0) + 1)e^x - \frac{1}{2}e^{(-x)}$$

```
sp = desolve_laplace(eq,u,ics=[0,3]) ; sp # sol. particular (con sol. ini)
```

$$-\frac{1}{2}e^{(-x)} + \frac{7}{2}e^x$$

Si la EDO es de orden n aparecerán n constantes de integración.

⁸²Ver la Sección 5.5, página 167.

⁸³Ver la Sección A.1.2, página 456.

⁸⁴Ver la Sección 5.5.1, página 167.

```
f = function('f')(x)
de = diff(f,x,2) - 2*diff(f,x) + f # EDO 2do orden
sg = desolve_laplace(de,f) ; sg    # sol. general
```

$$-xe^x f(0) + xe^x D_0(f)(0) + e^x f(0)$$

```
desolve_laplace(de,f,ics=[0,1,2]) # sol. particular
```

$$xe^x + e^x$$

Veamos ahora cómo pueden resolverse las *EDO lineales con coeficientes polinómicos*⁸⁵, por ejemplo⁸⁶:

$$\begin{cases} ty'(t) + y(t) = a + t^2 \\ y(0) = a \end{cases}$$

Este problema no se puede resolver con el comando `desolve()` (da error) y si intentamos resolverlo con el comando `desolve_laplace()` se obtiene una solución no válida, como se comprueba a continuación.

```
# Ejer 4.16 (sol. particular con desolve_laplace) -> Erróneo!
var('a t')
y = function('y')(t)
ec = t*diff(y,t) + y == a + t^2 # EDO Lineal polinómica
desolve_laplace(ec,y,ivar=t,ics=[0,a])
```

$$-\frac{1}{3}t^3 - at$$

Notar que esta solución no cumple la condición inicial. El origen del problema podemos determinarlo encontrando la solución general del problema.

```
# Ejer 4.16 (sol. general con desolve)
var('a t')
y = function('y')(t)
ec = t*diff(y,t) + y == a + t^2 # EDO Lineal polinómica
desolve(ec,y,ivar=t)             # No ponemos cond. iniciales
```

$$\frac{t^3 + 3at + 3C}{3t}$$

Notar que al imponer la condición inicial en $t = 0$ se produce una *indeterminación*. Si imponemos otras condiciones compatibles con ésta pero en un punto distinto no nulo de t , por ejemplo $[t = 1, y = a + 1/3]$, el problema sí se puede resolver con ambos comandos.

```
# Ejer 4.16 (cond. ini distintas)
var('a t')
y = function('y')(t)
ec = t*diff(y,t) + y == a + t^2 # EDO Lineal polinómica
desolve(ec,y,ivar=t,ics=[1,a+1/3]) # Sin cond. iniciales
```

$$\frac{1}{3}t^2 + a$$

Para resolver el problema original de forma apropiada podemos utilizar el método de la *transformada de Laplace* utilizado de forma manual, siguiendo los pasos dados en el código de la [Sección A.1.11, página 483](#). En este caso es necesario hacer uso de la librería⁸⁷ *SymPy*, importándola en nuestro código a través de la sentencia `from sympy import *`, como se muestra a continuación.

⁸⁵Ver la [Sección 5.5.2, página 168](#).

⁸⁶Ver el [Ejercicio 5.16, página 168](#).

⁸⁷<https://www.sympy.org/en/index.html>.

```
# Ejer 4.16 por Laplace Manual -> Resultado correcto!
from sympy import * # Es necesario importar sympy
var('a s t _C0')
y=function('y')(t)
Y=function('Y')(s)
eq = t*diff(y,t)+y-a-t^2
L=laplace(eq,t,s); ascii(L)
solve(L,diff(laplace(y,t,s),s),s)
s1 = solve(L,diff(laplace(y,t,s),s),s)
s1[0][0]
s2=desolve(diff(Y,s)-s1[0][0],Y,ivar=s,algorithm='fricas')
s2=s2.subs(_C0=0); s2
inverse_laplace(s2.expand(),s,t)
```

$$\frac{1}{3}t^2 + a$$

A.1.12. Resolución SEDO con Transformada de Laplace

Como hemos visto en la [Sección A.1.8, página 476](#), los SEDO se pueden resolver en *SageMath* con el comando `desolve_system`. Este comando utiliza internamente transformadas de Laplace. Veamos la resolución de un ejemplo sencillo con coeficientes constantes (ejer 4.18)

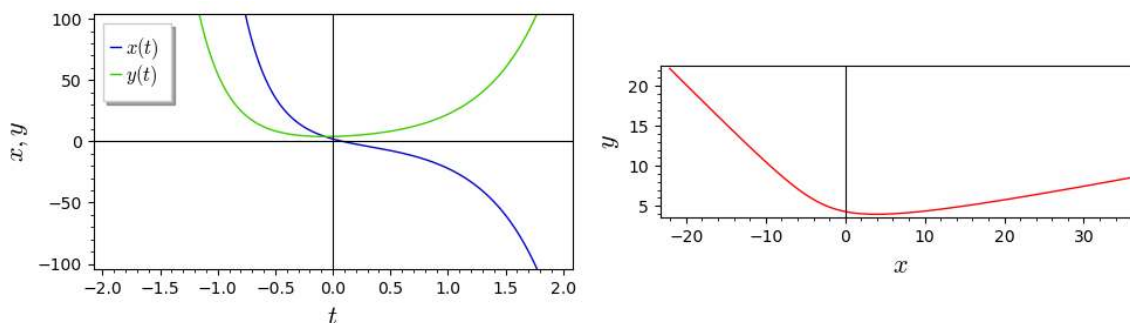
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 3\frac{dy}{dt} = -6x - 2y & ; \quad x(0) = 2 \\ \frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} = -5x - 3y & ; \quad y(0) = 4 \end{cases}$$

```
# SEDO Ejer 4.18
reset()
var('t')
x=function('x')(t)
y=function('y')(t)
ec1 = diff(x,t)+3*diff(y,t) == -6*x-2*y
ec2 = diff(x,t)+2*diff(y,t) == -5*x-3*y
sol = desolve_system([ec1, ec2], [x,y],ics=[0,2,4]) ; sol
```

$$\left[x(t) = -3e^{(2t)} + 5e^{(-4t)}, y(t) = 3e^{(2t)} + e^{(-4t)} \right]$$

Representamos gráficamente las soluciones.

```
P1 = plot([sol[0].rhs(),sol[1].rhs()],-2,2,ymin=-100,ymax=100, \
    legend_label=['$x(t)$','$y(t)$'],axes_labels=['$t$','$x,y$'])
P1.set_legend_options(font_size=12)
P2 = parametric_plot((sol[0].rhs(),sol[1].rhs()),(t,-0.5,1), \
    axes_labels=['$x$','$y$'],color='red')
graphics_array([P1, P2]).show(frame=True,figsize=[10,3])
```



A.1.13. Ecuaciones Integrales e Integrodiferenciales

Las **ecuaciones integrales e integrodiferenciales**⁸⁸ son *ecuaciones funcionales* que incluyen integrales de la función incógnita. Este tipo de ecuaciones pueden ser resueltas aplicando el método de la *transformada de Laplace*⁸⁹, siguiendo los pasos que hemos visto en diversos casos anteriores.

Vamos a usar *SageMath* para resolver algunos de los ejercicios sobre ecuaciones de este tipo que se han planteado en este curso.

Empezamos con la ecuación integral resuelta en el [Ejercicio 5.19, página 170](#).

$$f(t) + \int_0^t f(r) dr = 2$$

```
var('t r s')
f=function('f')(t)
ec = f+integral(f(t=r),r,0,t) == 2
L = laplace(ec,t,s)
LL = solve(L,laplace(f,t,s))
sol = inverse_laplace(LL[0].rhs(), s, t) ; sol
```

$$2e^{(-t)}$$

Veamos ahora la resolución de un PVI definido a través de una ecuación integrodiferencial resuelta en el [Ejercicio 5.20, página 171](#).

$$\begin{cases} y' + 6y + 9 \int_0^t y(r) dr = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

```
var('t r s')
y=function('y')(t)
ec = diff(y,t)+6*y+9*integral(y(t=r),r,0,t) == 1 ; ec
L = laplace(ec,t,s) ; L
L = L.subs(y(t=0)==0) # sustituimos la cond. ini
LL = solve(L,laplace(y,t,s)) ; LL
sol = inverse_laplace(LL[0].rhs(), s, t) ; sol
```

$$te^{(-3t)}$$

El siguiente problema corresponde con el caso aplicado dado en el [Ejercicio 5.21, página 171](#).

$$\begin{cases} 0.1 \frac{di}{dt} + 2i(t) + \frac{1}{0.1} \int_0^t i(r) dr = 4 \sin(5t) \\ i(0) = 0 \end{cases}$$

⁸⁸Ver la [Sección 1.1.2, página 4](#).

⁸⁹Ver la [Sección 5.5, página 167](#).

```

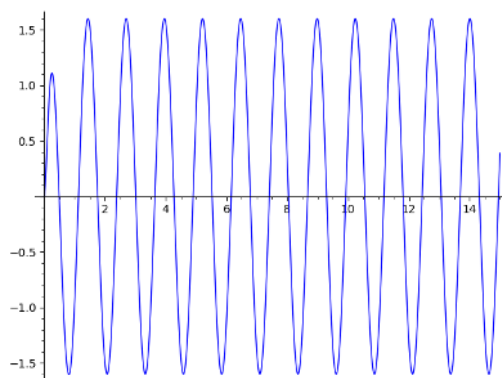
var('t r s')
y=function('y')(t) # cambiamos el nombre i por y (da problemas complejos)
ec = 0.1*diff(y,t)+2*y+1/0.1*integral(y(t=r),r,0,t) == 4*sin(5*t) ; ec
L = laplace(ec,t,s) ; L
L = L.subs(y(t=0)==0) ; L # sustituimos la cond. ini
ss = solve(L,laplace(y,t,s))
sol = inverse_laplace(ss[0].rhs(),s,t) ; sol # sol. particular

```

$$-16te^{(-10t)} + \frac{24}{25}\cos(5t) - \frac{24}{25}e^{(-10t)} + \frac{32}{25}\sin(5t)$$

Representamos gráficamente la solución obtenida para comprobar el transitorio inicial y el comportamiento estacionario oscilatorio del que se comenta en el ejercicio.

```
plot(sol,0,15)
```



A.1.14. Convolución

Recordamos la definición de **convolución**⁹⁰ de dos funciones $f(t)$ y $g(t)$.

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

y el **Teorema de la convolución**⁹¹:

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s)$$

Empecemos calculando la convolución de dos funciones dada en el [Ejercicio 5.22, página 173](#).

$$f * g = (t) * (t^2) = \int_0^t \tau(t - \tau)^2 d\tau$$

```

var('t r')
f=t ; g=t^2;
integral(f(t=r)*g(t=t-r),r,0,t)

```

$$\frac{1}{12}t^4$$

Vamos ahora a calcular la transformada inversa de Laplace de la siguiente función en la variable de la frecuencia s , que es resuelta en el [Ejercicio 5.23, página 174](#) aplicando el teorema de la convolución.

$$F(s) = \frac{3}{(s+2)(s^2+9)}$$

⁹⁰Ver la [Definición 5.8, página 172](#).

⁹¹Ver el [Teorema 5.10, página 174](#).

```
var('t s')
inverse_laplace(3/((s+2)*(s^2+9)),s,t)
```

$$-\frac{3}{13} \cos(3t) + \frac{3}{13} e^{(-2t)} + \frac{2}{13} \sin(3t)$$

Calculamos la transformada de Laplace de la siguiente función definida a través de una convolución, resuelta en el [Ejercicio 5.24, página 175](#).

$$f(t) = \int_0^t e^r \sin(t-r) dr$$

```
var('t s r')
assume(t>0)
f=integral(e^r*sin(t-r),r,0,t)
L=laplace(f,t,s) ; L
L.factor() # factorizamos el resultado
```

$$\frac{1}{(s^2+1)(s-1)}$$

Cálculo de la transformada inversa de la siguiente función resuelta en el [Ejercicio 5.25, página 176](#).

$$F(s) = \frac{1}{(s^2+a^2)^2}$$

```
# Ejer 4.25
var('t s a')
assume(s>0)
assume(a>0)
F=1/(s^2+a^2)^2
f= inverse_laplace(F,s,t)
f.simplify_full()
```

$$-\frac{at \cos(at) - \sin(at)}{2a^3}$$

Resolución de la siguiente PVI tratada en el [Ejercicio 5.26, página 176](#).

$$\begin{cases} y'' + a^2 y = f(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

```
reset()
var('t a')
assume(a>0)
y=function('y')(t)
f=function('f')(t)
ec = diff(y,t,2)+a^2*y==f
sol = desolve(ec,y,ivar=t) ; show(sol)
```

$$K_2 \cos(at) + K_1 \sin(at) - \frac{\cos(at) \int f(t) \sin(at) dt - \int \cos(at) f(t) dt \sin(at)}{a}$$

Notar que esta expresión es ambigua ya que los límites de las integrales tienen que ser $[0,t]$, por tanto la variable de estas integrales debe ser una variable distinta de t . Redefinimos la solución general.

```
var('r _K1 _K2')
assume(r>0)
assume(t>0)
```

```
sol=_K2*cos(a*t)+_K1*sin(a*t)- \
(cos(a*t)*integral(f(t=r)*sin(a*r),r,0,t)-sin(a*t)*integral(f(t=r)*cos(a*r),r,0,t))/a
show(sol) # Sol. general
```

$$K_2 \cos(at) + K_1 \sin(at) - \frac{\cos(at) \int_0^t f(r) \sin(ar) dr - \int_0^t \cos(ar) f(r) dr \sin(at)}{a}$$

La determinación de la solución particular se hace obteniendo los valores de las constantes K_1 y K_2 a través de las condiciones iniciales.

```
show(sol(t=0)==0)
show(diff(sol,t)(t=0)==0)
# t=0 -> Implica _K1=0
s=sol(_K1=0,_K2=0) ; s # sol particular
```

$$K_2 = 0$$

$$K_1 a = 0$$

$$-\frac{\cos(at) \int_0^t f(r) \sin(ar) dr - \int_0^t \cos(ar) f(r) dr \sin(at)}{a}$$

Por tanto ambas constantes son nulas en la solución particular. Notar que esta solución es aparentemente distinta de la obtenida en el ejercicio 4.26. Simplificamos aquella solución se tiene:

```
# Comprobamos si esta sol. corresponde con la convolución del resultado
s2=1/a*integral(f(t=r)*sin(a*(t-r)),r,0,t); show(s2)
s2=s2.simplify_full(); show(s2)
```

$$\frac{\int_0^t f(r) \sin(ar - at) dr}{a} - \frac{\int_0^t -(\cos(at) \sin(ar) - \cos(ar) \sin(at)) f(r) dr}{a}$$

Analizando este resultado vemos que efectivamente ambas soluciones coinciden, aunque comprobamos que *SageMath* no es capaz de determinar esta semejanza.

```
bool(s==s2)
```

False

Lo cual determina las limitaciones en determinados casos de este programa (y en general de todos los programas de tipo *CAS*) y que obliga a analizar y comprobar siempre los resultados obtenidos.

Vamos a resolver ahora el [Ejercicio 5.27, página 177](#) formado por una EDO de tipo *Volterra*⁹².

$$\begin{cases} y' = \cos t + \int_0^t y(r) \cos(t-r) dr \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

```
# Ejer 4.27
reset()
var('t s r')
assume(t>0)
assume(s>0)
y=function('y')(t)
ec = diff(y,t) == cos(t) + integral(y(t=r)*cos(t-r),r,0,t)
# desolve(ec,y,ivar=t,algorithm='fricas') #-> No funciona directamente
```

⁹²Ver la [Definición 5.9, página 177](#).

```
L = laplace(ec,t,s)
ss = solve(L,laplace(y,t,s))
sg = inverse_laplace(ss[0].rhs(),s,t) # sol. general
sg.subs(y(t=0)==1)
```

$$\frac{1}{2}t^2 + t + 1$$

Resultado que coincide con el obtenido en este ejercicio.

Resolvemos otro caso de una ecuación integrodiferencial dado en el [Ejercicio 5.28, página 178](#).

$$\begin{cases} y'(t) + y(t) - \int_0^t y(r) \sin(t-r) dr = -\sin t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

```
reset()
var('t s r')
assume(t>0)
assume(s>0)
#x0=0 ; y0=1
y=function('y')(t)
ec = diff(y,t) + y - integral(y(t=r)*sin(t-r),r,0,t) == -sin(t) ; ec
L = laplace(ec,t,s) ; L
ss = solve(L,laplace(y,t,s))
sg = inverse_laplace(ss[0].rhs(),s,t) # sol. general
sg.subs(y(t=0)==1) # sol. particular
```

$$-\frac{1}{3} \left(\sqrt{3} \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{3}t \right) - 3 \cos \left(\frac{1}{2} \sqrt{3}t \right) \right) e^{(-\frac{1}{2}t)}$$

En este caso comprobamos que esta solución coincide con la obtenida en el ejercicio.

Como hemos visto en los diversos ejercicios resueltos hasta aquí el procedimiento de la *transformada de Laplace*⁹³ para la resolución de problemas diferenciales es el mismo en todos los casos, aunque las operaciones específicas a realizar dependen de las características particulares de cada problema. Basándonos en esto vamos a definir un procedimiento o función `metLaplace()` en *SageMath* que automatice el proceso de resolución de un determinado problema diferencial.

Vamos a aplicar este procedimiento a la resolución del [Ejercicio 5.29, página 178](#).

$$\begin{cases} f(x) - 1 = \int_0^x f(r) (x-r) dr \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

```
reset()
# Función para resolver prob. por Laplace
def metlaplace(y,x,ec,x0,y0):
    var('s r')
    assume(s>0)
    assume(x>0)
    #y(t=0)==x0
    L = laplace(ec,x,s)
    ss = solve(L,laplace(y,x,s))
    sg = inverse_laplace(ss[0].rhs(),s,x) # sol. general
    sg.subs(y(x=x0)==y0) # sol. particular
    return(sg)
```

⁹³Ver la [Sección 5.5, página 167](#).

```

var('x r')
assume(x>0)
f=function('f')(x)
ec = f - 1 == integral(f(x=r)*(x-r),r,0,x) # Ec. Integrodiferencial
x0=0 ; y0=1                                # Cond. iniciales

sol = metlaplace(f,x,ec,x0,y0) ; sol        # Sol. particular

```

$$\frac{1}{2}e^{(-x)} + \frac{1}{2}e^x$$

Comprobamos que efectivamente esta solución coincide con la obtenida en el ejercicio.

A.1.15. Función Delta de Dirac

Recordamos la definición de la *función delta de Dirac*⁹⁴ y algunas de sus propiedades.

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & t = t_0 \\ 0 & t \neq t_0 \end{cases} \quad ; \quad \delta(t - a) = \frac{d}{dt} \mathcal{U}(t - a) \quad ; \quad \begin{cases} \mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-st_0} & ; t_0 > 0 \\ \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 & ; t_0 = 0 \end{cases}$$

En *SageMath* la *función delta de Dirac* se define a través de:

`dirac_delta(x)`

Vamos por último a resolver un problema diferencial donde aparece la función delta de Dirac, dado por el [Ejercicio 5.31, página 183](#) usando el método de la transformada de Laplace.

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 3y = 5\delta(t - 2) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

```

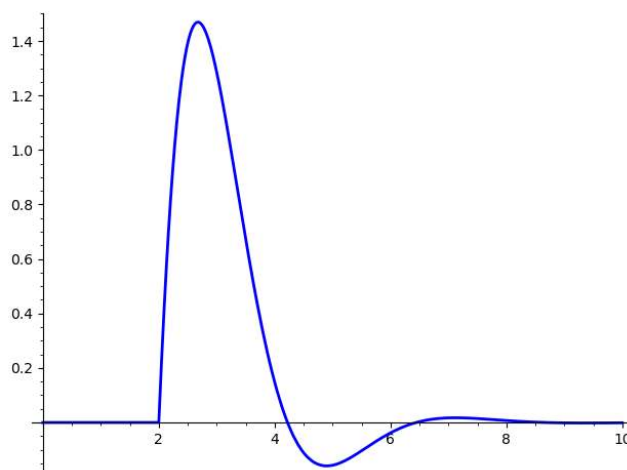
var('t s r')
assume(t>0)
assume(s>0)
t0=0 ; y0=0 ; dy0=0 # Cond. iniciales
y=function('y')(t)
ec = diff(y,t,2) + 2*diff(y,t) + 3*y == 5*dirac_delta(t-2) # EDO
# Aplicamos el Método de Laplace
L = laplace(ec,t,s) ; L
L = L.subs(y(t=t0)==y0,diff(y,t)(t=t0)==dy0) # Sust. cond.
ss = solve(L,laplace(y,t,s))
ss = ss[0].rhs().expand().simplify_full() ; # Fun. transformada
print("Y(s) = "); sys.stdout.flush() ; show(ss)
s = inverse_laplace(ss,s,t,algorithm='sympy') # sol. particular
print("y(t) = "); sys.stdout.flush() ; show(s)
plot(s,0,10,thickness=2)

```

$$Y(s) = \frac{5e^{(-2s)}}{s^2 + 2s + 3}$$

$$y(t) = \frac{5}{2}\sqrt{2}e^{(-t+2)}H(t-2)\sin\left(\sqrt{2}(t-2)\right)$$

⁹⁴Ver la [Sección 5.6.1, página 181](#).



A.1.16. Series de Fourier

Recordamos la definición de la **serie de Fourier**⁹⁵ de una función $f(x)$ definida en el intervalo $(-L, L)$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

donde los denominados **coeficientes de Fourier** a y b vienen dados por:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad ; \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad ; \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

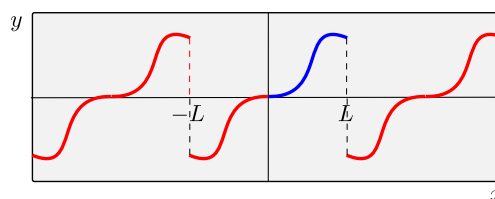
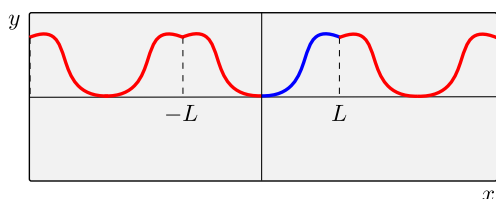
Consecuencia del resultado de la serie de Fourier para funciones pares e impares⁹⁶, para funciones $f(x)$ definidas en el intervalo $[0, L]$ se define:

- **Serie de Fourier de cosenos de $f(x)$ en el intervalo $[0, L]$**

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \quad ; \quad a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx \quad ; \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

- **Serie de Fourier de senos de $f(x)$ en el intervalo $[0, L]$**

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad ; \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$



⁹⁵Ver la **Definición 9.10**, página 324.

⁹⁶Ver la **Sección 9.4.4**, página 328.

Función Definida a Trozos

La serie de Fourier de una función en *SageMath* se puede calcular fácilmente si previamente se define la función como una *función definida a trozos* mediante el siguiente comando:

```
piecewise([ rama1 , rama2, ... ])
```

donde cada una de las *ramas* o *trozos* se pueden definir entre paréntesis () o corchetes cuadrados [] indistintamente y en ellos debe aparecer un intervalo, cerrado [] o abierto (), y la función que define ese trozo.

- $([x1, x2], f)$: define una rama con una función 'f' en un intervalo cerrado $[x1, x2]$
- $[[x1, x2], f]$: define una rama con una función 'f' en un intervalo cerrado $[x1, x2]$
- $((x1, x2), f)$: define una rama con una función 'f' en un intervalo abierto $(x1, x2)$
- $[(x1, x2), f]$: define una rama con una función 'f' en un intervalo abierto $(x1, x2)$

No se pueden usar intervalos mixtos abierto-cerrado o cerrado-abierto, además no se pueden solapar puntos o zonas. Veamos algunos ejemplos:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & x \in [-1, -2] \\ 1+x & x \in (1, 2) \end{cases} \quad : \quad f = \text{piecewise}([(-1, -2], 1-x), [[1, 2], 1+x]]$$

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & x \in [-1, 2] \\ \log(x) & x \in (2, 3) \\ \frac{x+1}{x} & x \in [3, 4] \end{cases} \quad : \quad g = \text{piecewise}([[-1, 2], x+1], [(2, 3), \log(x)], [[3, 4], (x+1)/x]]$$

Entonces, dada una *función definida a trozos* en un intervalo cualquiera, los primeros n términos de su serie de Fourier puede determinarse mediante el comando:

```
fourier_series_partial_sum(n, [L])
```

donde L (optativo) es la mitad del *periodo*⁹⁷ $[-L, L]$. Si no se especifica, el semi-periodo corresponde con el dominio completo que define la función. Si se especifica, el dominio debe ser un múltiplo del semi-periodo dado. Cada uno de los *coeficientes* de la *serie de Fourier* pueden ser determinados por los comandos:

- `f.fourier_series_cosine_coefficient(n)` : coeficiente a_n
- `f.fourier_series_sine_coefficient(n)` : coeficiente b_n

Por ejemplo, dada la siguiente función:

$$f(x) = 3 - 2x \quad x \in [-\pi, \pi]$$

Definimos la función en *SageMath* y calculamos los primeros términos de su serie de Fourier, dada por:

$$sf(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi x}{L} + b_1 \sin \frac{\pi x}{L} + a_2 \cos \frac{2\pi x}{L} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{L} + \dots$$

```
fun=3-2*x
f = piecewise([(-pi, pi), fun])
sf = f.fourier_series_partial_sum(2) # num. términos = 2
sf
```

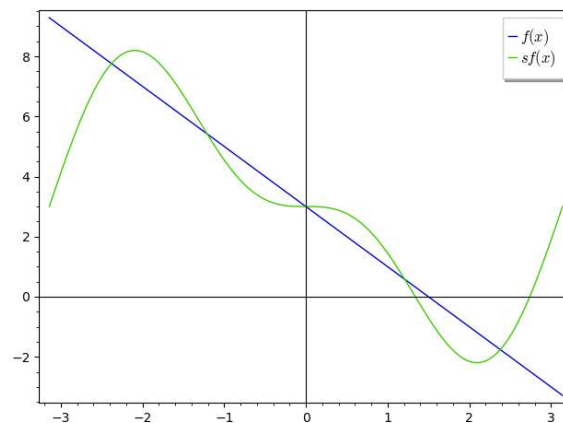
$$2 \sin(2x) - 4 \sin(x) + 3$$

⁹⁷El periodo es en este caso $T = 2L$. Ver la [Sección 9.2, página 319](#).

```
# Calculamos los coeficientes por separado
a0 = f.fourier_series_cosine_coefficient(0)
a1 = f.fourier_series_cosine_coefficient(1)
a2 = f.fourier_series_cosine_coefficient(2)
b1 = f.fourier_series_sine_coefficient(1)
b2 = f.fourier_series_sine_coefficient(2)
print('a0=',a0,' a1=',a1,' b1=',b1,' a2=',a2,' b2=',b2)
```

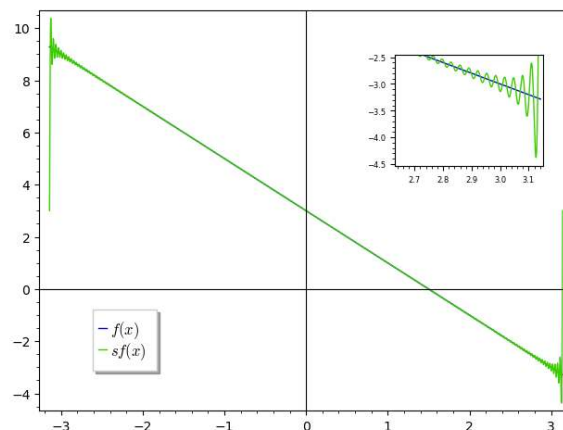
a0= 6 a1= 0 b1= -4 a2= 0 b2= 2

```
# Representación gráfica de la función y su serie de Fourier calculada
P = plot([f,sf],-pi,pi,legend_label=['$f(x)$', '$sf(x)$'],frame=true)
P.set_legend_options(font_size=12) ; P
```



Calculamos los primeros 200 términos de la serie de Fourier y representamos gráficamente, observando con más detenimiento el fenómeno del *efecto Gibbs*⁹⁸ en la discontinuidad de los extremos.

```
sf200 = f.fourier_series_partial_sum(200,pi)
P = plot([f,sf200],-pi,pi,legend_label=['$f(x)$', '$sf(x)$'],frame=true)
P.set_legend_options(font_size=12, \
bbox_to_anchor=(0.1, 0.1, 0.12, .1), loc=3, mode="expand", borderaxespad=0.)
P2=plot([f,sf200],pi-0.5,pi,ymin=-4.5,ymax=-2.5,frame=true)
P.inset(P2, pos=(0.65, 0.6, 0.25, 0.25))
```



⁹⁸Ver la Sección 9.4.2, página 327.

Veamos otro ejemplo:

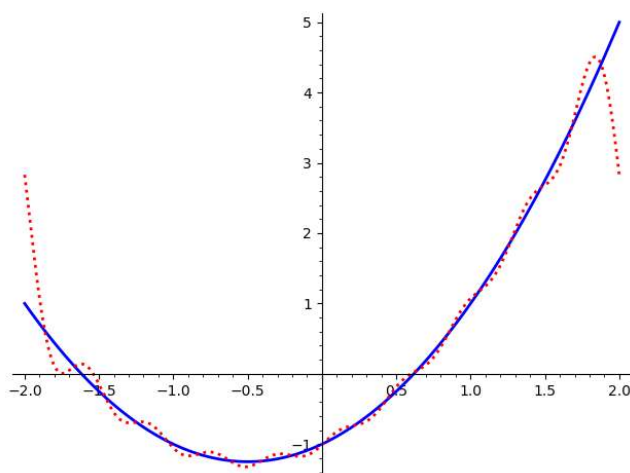
$$f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & x \in [-3, 0] \\ x & x \in (0, 3] \end{cases}$$

Calculamos dos series de Fourier una con diez términos y otra con 100, representando los resultados. Podemos también calcular la serie de Fourier de forma manual, determinando los coeficientes a_k y b_k

```
reset()
f=x^2+x-1                                # f(x)
a0(L)=1/L*integrate(f,x,-L,L);           # Coef a0
a(n,L)=1/L*integral(f*cos(n*pi*x/L),x,-L,L) # Coef an
b(n,L)=1/L*integral(f*sin(n*pi*x/L),x,-L,L) # Coef bn

# Serie de Fourier de f con n términos y semi-período L
def sf(n,L):
    return a0(L)/2+sum(a(k,L)*cos(k*pi*x/L)+b(k,L)*sin(k*pi*x/L) for k in range(1,n))
```

```
n = 10 # núm. términos
L = 2  # semi-periodo
plot(f,-L,L,color='blue',thickness=2)+plot(sf(n,L),-L,L,color='red',thickness=2,linestyle=':↪')
```



De esta forma podemos también calcular la *serie de senos* y la *serie de cosenos* de una función definida en un intervalo $[0, L]$.

```
reset()
var('L')
assume(L>0)
f=x^2+x-1                                # f(x)
a0(L)=1/L*integrate(f,x,0,L);            # Coef a0
a(n,L)=2/L*integral(f*cos(n*pi*x/L),x,0,L) # Coef an
b(n,L)=2/L*integral(f*sin(n*pi*x/L),x,0,L) # Coef bn

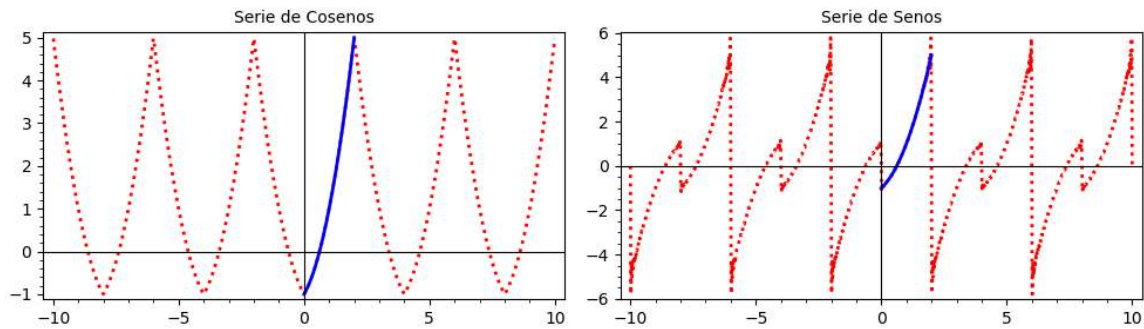
# Serie de Fourier de cosenos de f con n términos y semi-período L
def sfc(n,L):
    return a0(L)+sum(a(k,L)*cos(k*pi*x/L) for k in range(1,n))

# Serie de Fourier de senos de f con n términos y semi-período L
def sfs(n,L):
    return sum(b(k,L)*sin(k*pi*x/L) for k in range(1,n))
```

```

n = 100 # núm. términos
L = 2   # semi-periodo
P1 = plot(sfc(n,L),-5*L,5*L,color='red',thickness=2,linestyle=':')+\
    plot(f,0,L,color='blue',thickness=2,title=r'Serie de Cosenos')
P2 = plot(sfs(n,L),-5*L,5*L,color='red',thickness=2,linestyle=':')+\
    plot(f,0,L,color='blue',thickness=2,title=r'Serie de Senos')
graphics_array([P1, P2]).show(frame=True,figsize=[10,3])

```



Notar que la función `fourier_series_partial_sum` de una función definida en un intervalo $[0, L]$ no corresponde ni con la serie de cosenos (par) ni con la serie de senos (impar), sino que es la serie de Fourier de la función:

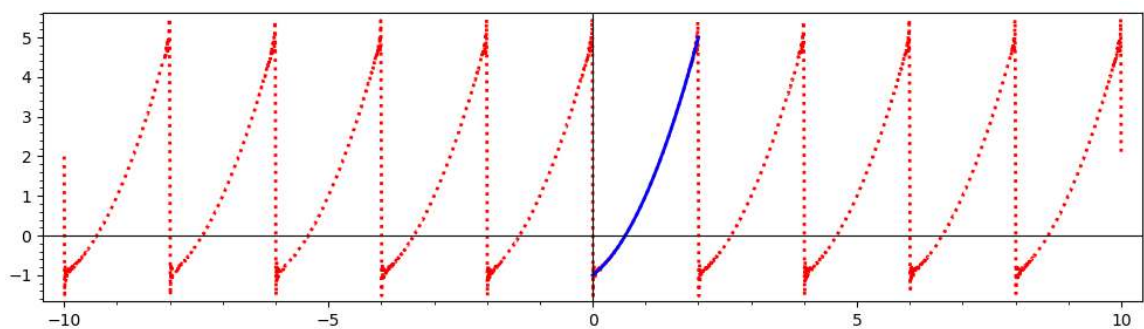
$$\begin{cases} f(x+L) & x \in [-L, 0) \\ f(x) & x \in [0, L] \end{cases}$$

donde $f(x+L)$ corresponde con $f(x)$ desplazada a la izquierda L unidades.

```

ff = piecewise([ [[0,2],f] ])
sf=ff.fourier_series_partial_sum(100)
P = plot(sf,-5*L,5*L,color='red',thickness=2,linestyle=':')+\
    plot(f,0,L,color='blue',thickness=2)
P.show(frame=True,figsize=[10,3])

```



A.1.17. Problemas de Sturm-Liouville

Recordamos que un *problema regular de Sturm-Liouville*⁹⁹ viene definido por el siguiente PVF:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}[p(x)y'] + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0 \\ A_1 y(a) + B_1 y'(a) = 0 \\ A_2 y(b) + B_2 y'(b) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

donde:

- Las funciones $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son reales y continuas en el intervalo $[a, b]$, donde $p(x)$ y $r(x)$ no cambian de signo en ese intervalo y a la función $r(x)$ se le denomina *función peso*.
- Las constantes A_1 y B_1 no pueden ser cero a la vez, al igual que A_2 y B_2 .

Para aquellos valores $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales el problema anterior tiene solución no nula $y(x)$, se denominan respectivamente **autovalor** o **valor propio** y **autofunción** o **función propia** asociada del problema¹⁰⁰.

En este tipo de problemas *SageMath* puede ayudar a simplificar las operaciones involucradas en su análisis, pero debido a su complejidad no hay un camino simple para su resolución.

Problema 1

Vamos a ver a modo de ejemplo cómo se analizaría el problema de Sturm-Liouville dado en el [Sección 10.2.1, página 338](#).

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u(0) = 0, u(L) = 0 \end{cases} \quad u(x) \in [0, L] \quad L > 0$$

Definimos inicialmente la EDO del problema¹⁰¹.

```
reset()
u=function("u")(x)
var("lambda_ L s mu_")
assume(L>0)
assume(mu_>0)
edo = diff(u,x,2)+lambda_*u==0 ; show(edo)
```

$$\lambda u(x) + \frac{\partial^2}{(\partial x)^2} u(x) = 0$$

Una forma sencilla de resolverla es a través de la *transformada de Laplace*, así aplicamos dicha transformada a la ecuación y despejamos.

```
EL = laplace(edo.lhs(),x,s); show(EL)
S = solve(EL,laplace(u,x,s)); S      # Transf. de Laplace
```

$$s^2 \mathcal{L}(u(x), x, s) + \lambda \mathcal{L}(u(x), x, s) - su(0) - D_0(u)(0)$$

$$\left[\mathcal{L}(u(x), x, s) = \frac{su(0) + D_0(u)(0)}{s^2 + \lambda} \right]$$

Notar que no hemos incluido las condiciones frontera ya que de esa forma solo se obtendría la solución trivial. Lo que haremos es dejarla en función de los valores de $u(0)$ y $u'(0)$ que posteriormente lo transformaremos en *parámetros* para obtener la solución general. Estudiamos todos los posible casos en función del valor de λ .

⁹⁹Ver la [Definición 10.2, página 344](#).

¹⁰⁰Ver la [Definición 10.1, página 337](#).

¹⁰¹El signo subrayado '_' después del nombre de la variable `lambda` sirve para su visualización apropiada en LaTeX.

- Caso: $\lambda = 0$

Este valor es fundamental ya que cambia radicalmente la naturaleza de la EDO. Sustituimos el valor $\lambda = 0$ en la EDO y resolvemos obteniendo la solución general de la ecuación, que depende de las condiciones iniciales del problema.

```
S0 = S[0].rhs().subs(lambda_=0) # lambda = 0
SG0 = inverse_laplace(S0,s,x).demoivre(force=true).simplify_full() ; show(SG0)
```

$$xD_0(u)(0) + u(0)$$

Aquí se ha utilizado el comando `.demoivre(force=true)` para forzar que el resultado se muestre en forma polinómica/trigonométrica en lugar de exponencial.

Ahora vamos a poner la solución general en función de $u(0)$ y $u'(0)$, que en nuestro caso dependerán de los valores de $u(0)$ y $u(L)$, para ello introducimos dos parámetros C_1 y C_2 .

```
var('C1 C2')
SG0.subs(u(x=0)==C1,diff(u,x)(x=0)==C2)
SG0 = SG0.subs(u(x=0)==C1,diff(u,x)(x=0)==C2) ; show(SG0) # Sol. General
```

$$C_2x + C_1$$

Imponemos las condiciones frontera y resolvemos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas C_1 y C_2 .

```
solve([SG0.subs(x=0)==0,SG0(x=L)==0],[C1,C2])
```

$$[[C_1 = 0, C_2 = 0]]$$

Por tanto se obtiene la solución trivial y $\lambda = 0$ no es autovalor del problema.

- Caso: $\lambda < 0$ Hacemos el cambio $\lambda = -\mu^2$ para $\mu > 0$.

```
assume(mu_>0)
SS = S[0].rhs().subs(lambda_=-mu_^2) # lambda < 0
SG = inverse_laplace(SS,s,x).demoivre(force=true).simplify_full() ; show(SG)
```

$$\frac{\mu \cosh(\mu x) u(0) + \sinh(\mu x) D_0(u)(0)}{\mu}$$

Aquí se ha utilizado el comando `.demoivre(force=true)` para forzar que el resultado se muestre en forma trigonométrica (hiperbólica) en lugar de exponencial.

Ponemos la solución general en función de $u(0)$ y $u'(0)$, que en nuestro caso dependerán de los valores de $u(0)$ y $u(L)$, a través de los parámetros C_1 y C_2 .

```
SG.subs(u(x=0)==C1,diff(u,x)(x=0)==C2)
SG = SG.subs(u(x=0)==C1,diff(u,x)(x=0)==C2) ; show(SG) # Sol. General
```

$$\frac{C_1\mu \cosh(\mu x) + C_2 \sinh(\mu x)}{\mu}$$

Sustituimos la primera condición frontera $u(0) = 0$ y determinamos la primera constante C_1 , substituyendo su valor en la solución general.

```
S1 = solve(SG(x=0)==0,C1) ; show(S1)
S2 = SG(C1=S1[0].rhs()); show(S2)
```

$$[C_1 = 0]$$

$$\frac{C_2 \sinh(\mu x)}{\mu}$$

Estudiamos ahora la segunda condición frontera $u(L) = 0$.

```
S2(x=L)
```

$$\frac{C_2 \sinh(L\mu)}{\mu}$$

Como $L, \mu \neq 0$ entonces $\sinh(L\mu) \neq 0$ y por tanto $C_2 = 0$, con los que se obtiene la solución trivial y por tanto $\lambda < 0$ no es autovalor del problema.

- Caso: $\lambda \geq 0$ Hacemos el cambio $\lambda = \mu^2$ para $\mu > 0$.

Obtenemos la solución general introduciendo las constantes C_1 y C_2 .

```
SS = S[0].rhs().subs(lambda_=mu^2) # lambda > 0
SG = inverse_laplace(SS,s,x).demoivre(force=true).simplify_full()
SG = SG.subs(u(x=0)==C1,diff(u,x)(x=0)==C2) ; show(SG)
```

$$\frac{C_1 \mu \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x)}{\mu}$$

Notar que en este caso, a diferencia del caso anterior la solución general depende de los valores trigonométricos $\cos(\mu x)$ y $\sin(\mu x)$, en lugar de $\cosh(\mu x)$ y $\sinh(\mu x)$.

Al igual que antes, teniendo en cuenta la primera condición frontera $u(0) = 0$ se tiene.

```
S1 = solve(SG(x=0)==0,C1) ; show(S1)
S2 = SG(C1=S1[0].rhs()); show(S2)
```

$$\frac{[C_1 = 0] C_2 \sin(\mu x)}{\mu}$$

Estudiamos ahora los posibles valores para $x = L$ (segunda condición frontera).

```
SS2 = S2.subs(x=L); show(SS2)
```

$$\frac{C_2 \sin(L\mu)}{\mu}$$

Este valor debe ser 0 para que se cumpla la segunda condición frontera, pero para que la solución general no sea la trivial, se debe cumplir $C_2 \neq 0$ y por tanto $\sin(L\mu) = 0$. Buscamos los posibles valores de μ para que se cumpla esto.

```
sol = solve(sin(L*mu_)==0,mu_,to_poly_solve='force');
sol = sol[0]; show(sol)
```

$$\mu = \frac{\pi z_{1853}}{L}$$

Donde z_{xxx} es un valor entero que llamaremos k . En este caso la sentencia `to_poly_solve='force'` sirve para obtener soluciones trigonométricas que de otra forma no son mostradas.

```
var('k z1883')
assume(k,'integer')
assume(k>0)
sol = sol.subs(z1883==k); show(sol)
```

$$\mu = \frac{\pi k}{L}$$

Y como en este caso $\lambda = \mu^2$ se tiene:

```
solve(Sx.subs(mu_=sqrt(lambda_)),lambda_)
```

$$\left[\lambda = \frac{\pi^2 k^2}{L^2} \right]$$

```
SOL = u==S2(mu=sol.rhs()); SOL # sol. final
```

$$u(x) = \frac{C_2 L \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right)}{\pi k}$$

Donde $C_2 L / (\pi k) = C$ constante. Por tanto finalmente los autovalores y autovectores de este problema son:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 k^2}{L^2} \quad ; \quad u_n(x) = C \operatorname{sen} \frac{k \pi x}{L} \quad ; \quad k = 1, 2, \dots$$

Problema 2

Veamos ahora el [Ejercicio 10.1, página 345](#), obteniendo los autovalores y autofunciones del siguiente problema.

$$\begin{cases} y'' + 2y' + (1 + \lambda)y = 0 \\ y(0) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

Aplicamos el *método de la transformada de Laplace* para resolver la EDO del problema.

```
reset()
var("lambda_ mu_ L s C1 C2")
y=function("y")(x)
assume(L>0)
assume(mu_>0)
edo = diff(y,x,2)+2*diff(y,x)+(1+lambda_)*y==0 ; show(edo) # EDO
EL = laplace(edo.lhs(),x,s); show(EL) # Transf. Laplace
S = solve(EL,laplace(y,x,s)); S # Despejamos Y(s)
```

$$(\lambda + 1)y(x) + 2 \frac{\partial}{\partial x} y(x) + \frac{\partial^2}{(\partial x)^2} y(x) = 0$$

$$s^2 \mathcal{L}(y(x), x, s) + (\lambda + 1) \mathcal{L}(y(x), x, s) + 2s \mathcal{L}(y(x), x, s) - sy(0) - 2y(0) - D_0(y)(0)$$

$$\left[\mathcal{L}(y(x), x, s) = \frac{sy(0) + 2y(0) + D_0(y)(0)}{s^2 + \lambda + 2s + 1} \right]$$

Estudiamos ahora todos los posible casos en función del valor de λ . Estudiamos primero el valor $\lambda = -1$ para el cual hay un cambio radical de la EDO.

- $\lambda = -1$

```
S0 = S[0].rhs().subs(lambda_=-1) # sustituimos lambda = -1
SG0 = inverse_laplace(S0,s,x); show(SG0) # Transformada inversa
SG0 = SG0.subs(y(x=0)==C1,diff(y,x)(x=0)==C2) ; show(SG0) # C1=y(0), C2=y'(0)
solve([SG0.subs(x=0)==0,diff(SG0,x)(x=1)==0],[C1,C2]) # Cond. frontera y resolvemos
```

$$-\frac{1}{2} e^{(-2x)} D_0(y)(0) + y(0) + \frac{1}{2} D_0(y)(0)$$

$$-\frac{1}{2} C_2 e^{(-2x)} + C_1 + \frac{1}{2} C_2$$

$$[[C_1 = 0, C_2 = 0]]$$

Por tanto $\lambda = -1$ no es un autovalor del problema.

- $\lambda = 0$

```

S0 = S[0].rhs().subs(lambda_=0) # Sustituimos lambda = 0
SG0 = inverse_laplace(S0,s,x); show(SG0) # Transformada inversa
SG0 = SG0.subs(y(x=0)==C1,diff(y,x)(x=0)==C2) ; show(SG0) # C1=y(0), C2=y'(0)
solve([SG0.subs(x=0)==0,diff(SG0,x)(x=1)==0],[C1,C2]) # Cond. frontera y resolvemos

```

$$xe^{(-x)}y(0) + xe^{(-x)}D_0(y)(0) + e^{(-x)}y(0)$$

$$C_1xe^{(-x)} + C_2xe^{(-x)} + C_1e^{(-x)}$$

$$[[C_1 = 0, C_2 = r_1]]$$

En este caso al obtenerse soluciones no nulas (r_1), el valor $\lambda = 0$ sí es un autovalor del problema siendo las autofunciones asociadas $y(x) = Cxe^{-x}$.

$$\lambda_0 = 0 \quad y_0(x) = Cxe^{-x}$$

- $\boxed{\lambda < 0}$ Haciendo el cambio $\lambda = -\mu^2$ para $\mu > 0$, donde $\mu \neq 1$.

```

var('K1 K2') # nuevas ctes
assume(mu_ != 1) # lambda != -1
SS = S[0].rhs().subs(lambda_=-mu_^2) # sustituimos lambda=-mu^2
SG = inverse_laplace(SS,s,x) ; show(SG) # Transf. Inversa
SG = SG.subs(y(x=0)==C1,diff(y,x)(x=0)==C2) ; show(SG) # ctes C1, C2
SG = SG.subs(C1*mu_-C1-C2==K1,C1*mu_+C1+C2==K2) ; show(SG) # simplificamos con ctes K1, K2
Ec1 = SG(x=0)==0 ; show(Ec1) # Primera cond. frontera
sol1 = solve(Ec1,K1); show(sol1)
Ec2 = diff(SG,x)(x=1)==0 ; # Segunda cond. frontera
Ec2 = Ec2.subs(K1=sol1[0].rhs()); show(Ec2)
sol = solve(Ec2,mu_); show(sol) # Despejamos valores mu

```

$$\frac{(\mu y(0) - y(0) - D_0(y)(0))e^{-(\mu+1)x}}{2\mu} + \frac{(\mu y(0) + y(0) + D_0(y)(0))e^{(\mu-1)x}}{2\mu}$$

$$\frac{(C_1\mu - C_1 - C_2)e^{-(\mu+1)x}}{2\mu} + \frac{(C_1\mu + C_1 + C_2)e^{(\mu-1)x}}{2\mu}$$

$$\frac{K_1e^{-(\mu+1)x}}{2\mu} + \frac{K_2e^{(\mu-1)x}}{2\mu}$$

$$\frac{K_1}{2\mu} + \frac{K_2}{2\mu} = 0$$

$$[K_1 = -K_2]$$

$$\frac{K_2(\mu-1)e^{(\mu-1)}}{2\mu} + \frac{K_2(\mu+1)e^{(-\mu-1)}}{2\mu} = 0$$

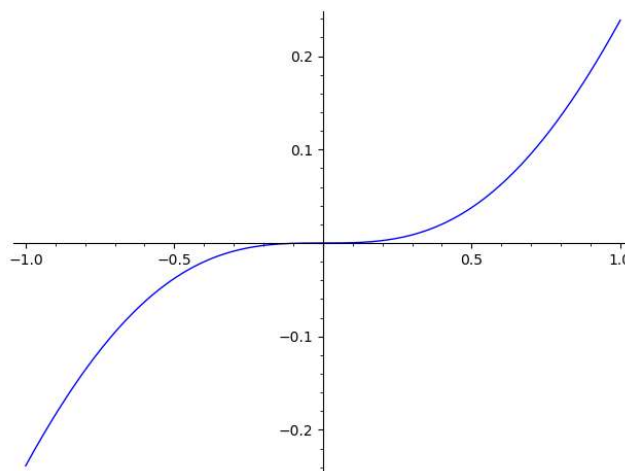
$$\left[\mu = \frac{e^{(\mu-1)} - e^{(-\mu-1)}}{e^{(\mu-1)} + e^{(-\mu-1)}} \right]$$

Representamos gráficamente estos valores μ para buscar si hay soluciones no nulas.

```

plot(sol[0].lhs()-sol[0].rhs(),mu_,-1,1)

```



Solo $\mu = 0$ daría soluciones no nulas para K_1 y K_2 , pero $\mu > 0$ con $\mu \neq 1$ y por tanto las únicas soluciones son la trivial $K_1 = K_2 = 0$, lo que concluye que $\lambda < 1$ con $\lambda \neq -1$ no son autovalores del problema.

- $\lambda > 0$ haciendo el cambio $\lambda = \mu^2$ para $\mu > 0$.

```
assume(mu_>0)
SS = S[0].rhs().subs(lambda_=mu_^2)
SG = inverse_laplace(SS,s,x) ; show(SG)
SG = SG.subs(y(x=0)==C1,diff(y,x)(x=0)==C2) ; show(SG)
SG = SG.subs(C1*mu_-C1-C2==K1,C1*mu_+C1+C2==K2) ; show(SG)
Ec1 = SG(x=0)==0 ; show(Ec1)
Ec2 = SG(C1=0) ; show(Ec2)
EE = diff(Ec2,x)(x=1)==0 ; show(EE)
```

lambda > 0
Transf. Inversa
ctes C1, C2
simplf con ctes K1, K2
Cond. frontera 1 => C1=0
Sustituimos C1=0
Ec. solución

$$\left(\cos(\mu x) y(0) + \frac{(y(0) + D_0(y)(0)) \sin(\mu x)}{\mu} \right) e^{(-x)}$$

$$\left(C_1 \cos(\mu x) + \frac{(C_1 + C_2) \sin(\mu x)}{\mu} \right) e^{(-x)}$$

$$\left(C_1 \cos(\mu x) + \frac{(C_1 + C_2) \sin(\mu x)}{\mu} \right) e^{(-x)}$$

$$C_1 = 0$$

$$\frac{C_2 e^{(-x)} \sin(\mu x)}{\mu}$$

$$C_2 \cos(\mu) e^{(-1)} - \frac{C_2 e^{(-1)} \sin(\mu)}{\mu} = 0$$

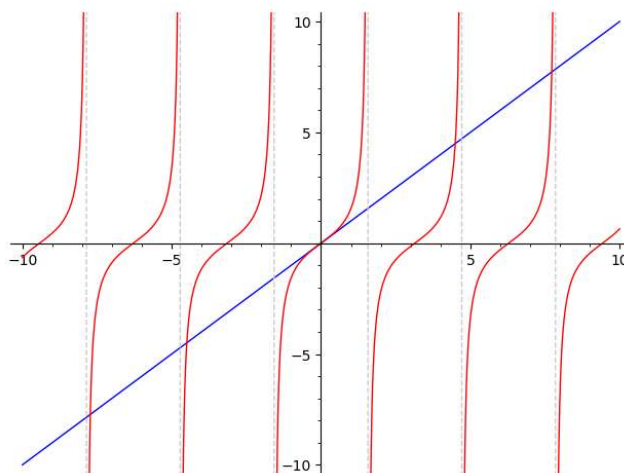
Buscamos soluciones para que $C_2 \neq 0$.

```
f = solve(EE,mu_); show(f)
```

$$\left[\mu = \frac{\sin(\mu)}{\cos(\mu)} \right]$$

Representamos gráficamente para buscar soluciones $\mu = r_n$ no nulas.

```
plot(f[0].lhs(),mu_,-10,10,color='blue')+\  
plot(f[0].rhs(),mu_,-10,10,ymax=10,color='red',detect_poles='show')
```



Viendo la gráfica, claramente existen, además de la solución nula $\mu = 0$ otros infinitos valores de μ no nulos (puntos de corte entre gráfica azul y roja).

Buscamos algunas de estas soluciones numéricas r_n de esta ecuación. Para ello primero simplificamos algo la expresión y usamos comando `.find_root(x1,x2)` para encontrar soluciones de ecuaciones o funciones¹⁰² en un intervalo $[x_1, x_2]$.

```
fun=solve(f[0],sin(mu_)) ; show(fun)

r0 = fun[0].find_root(-1,1) ;
r1 = fun[0].find_root(1,5) ;
r2 = fun[0].find_root(7,8) ;
print('r0=',r0,' , r1=',r1,' , r2=',r2)
```

$[\sin(\mu) = \mu \cos(\mu)]$

$r0= 0.0$, $r1= 4.493409457909064$, $r2= 7.725251836937707$

Finalmente los autovalores y autofunciones del problema son.

$$\lambda_n = \sqrt{\mu_n} = \sqrt{r_n} \quad y_n(x) = C \sin(\mu_n x) = C \sin(r_n x)$$

Problema 3

Resolvemos aquí el problema de SL del [Ejercicio 10.3, página 349](#).

$$\begin{cases} y'' - y' + \lambda y = 0, & 0 < x < 2 \\ y'(0) = 0, & y'(2) = 0 \end{cases}$$

```
reset()
var("lambda_ mu_ s C1 C2")
y=function("y")(x)
assume(mu_>0)
edo = diff(y,x,2)-diff(y,x)+lambda_*y==0 ; show(edo)      # EDO
EL = laplace(edo.lhs(),x,s); show(EL)                     # Transf. Laplace
EL = EL.subs(diff(y,x)(x=0)==0); show(EL)                 # subst cond. y'(0)=0
S = solve(EL,laplace(y,x,s)); S                           # Despejamos Y(s)
```

$$\lambda y(x) - \frac{\partial}{\partial x} y(x) + \frac{\partial^2}{(\partial x)^2} y(x) = 0$$

¹⁰²Las funciones se considerarán ecuaciones igualadas a cero.

$$s^2 \mathcal{L}(y(x), x, s) + \lambda \mathcal{L}(y(x), x, s) - s \mathcal{L}(y(x), x, s) - sy(0) + y(0) - D_0(y)(0)$$

$$s^2 \mathcal{L}(y(x), x, s) + \lambda \mathcal{L}(y(x), x, s) - s \mathcal{L}(y(x), x, s) - sy(0) + y(0)$$

$$\left[\mathcal{L}(y(x), x, s) = \frac{sy(0) - y(0)}{s^2 + \lambda - s} \right]$$

Estudiamos ahora todos los posible casos en función del valor de λ . Estudiamos primero el valor $\lambda = 0$ para el cual hay un cambio radical de la EDO.

- $\lambda = 0$

```
S0 = S[0].rhs().subs(lambda_=0); show(S0)           # Sustituimos lambda = 0
SG0 = inverse_laplace(S0,s,x); show(SG0)           # Transformada inversa
SG0 = SG0.subs(y(x=0)==C1,diff(y,x)(x=0)==C2) ; show(SG0) # C1=y(0), C2=y'(0)
DG0 = diff(SG0,x).subs(x=2)==0 ; show(DG0)         # Sustituimos la otra cond
↪ y'(2)=0
```

$$\frac{sy(0) - y(0)}{s^2 - s}$$

$$y(0)$$

$$C_1$$

$$0 = 0$$

En este caso se obtiene una solución constante $y(x) = C_1$, distinta de la trivial, y por tanto $\lambda = 0$ sí es un autovalor del problema.

- $\lambda \neq 0$

Aquí al calcular la transformada inversa de Laplace con *SageMath* da error avisando que depende del valor de $D = 4\lambda - 1$. Estudiamos tres casos para $D = 0$, $D < 0$ y $D > 0$.

- $4\lambda - 1 = 0 \quad \lambda = 1/4$

```
SS = S[0].rhs().subs(lambda_==1/4)
SS = inverse_laplace(SS,s,x); show(SS)           # Transformada inversa
SS = SS.subs(y(x=0)==C1,diff(y,x)(x=0)==C2) ; show(SS) # C1=y(0), C2=y'(0)
DS = diff(SS,x).subs(x=2)==0 ; show(DS)         # Sustituimos la otra cond y'(2)=0
solve(DS,C1)
```

$$-\frac{1}{2}xe^{(\frac{1}{2}x)}y(0) + e^{(\frac{1}{2}x)}y(0)$$

$$-\frac{1}{2}C_1xe^{(\frac{1}{2}x)} + C_1e^{(\frac{1}{2}x)}$$

$$-\frac{1}{2}C_1e = 0$$

$$[C_1 = 0]$$

En este caso se obtiene la solución trivial y por tanto $\lambda = 1/4$ no es un autovalor del problema.

- $4\lambda - 1 < 0 \quad \lambda < 1/4 \quad (\lambda \neq 0)$

```
assume(4*lambda_-1<0)
SS = inverse_laplace(S[0].rhs(),s,x)           # Transformada inversa
SS = SS.subs(y(x=0)==C1,diff(y,x)(x=0)==C2) ; show(SS) # Sol. General C1=y(0), C2=y'(0)
DS = diff(SS,x).subs(x=2)==0                   # Sustituimos la otra cond y'(2)=0
DS = DS.simplify_full() ; show(DS)
```

$$\left(C_1 \cosh \left(\frac{1}{2} \sqrt{-4\lambda + 1} x \right) - \frac{C_1 \sinh \left(\frac{1}{2} \sqrt{-4\lambda + 1} x \right)}{\sqrt{-4\lambda + 1}} \right) e^{\left(\frac{1}{2} x \right)} - \frac{2 C_1 \lambda e \sinh \left(\sqrt{-4\lambda + 1} \right)}{\sqrt{-4\lambda + 1}} = 0$$

Notar que todos los términos aquí son no nulos y por tanto para que se cumpla la última ecuación es necesario que $C_1 = 0$. Por tanto, en este caso se vuelve a obtener la solución trivial y por tanto $\lambda = 1/4$ no es un autovalor del problema.

- $4\lambda - 1 > 0 \quad \lambda > 1/4$

Usamos inicialmente el comando `forget()` para borrar todas las imposiciones establecidas anteriormente sobre las variables con el comando `assume()`.

```
forget() # borra assume anterior
assume(4*lambda_-1>0)
SS = inverse_laplace(S[0].rhs(),s,x) # Transformada inversa
SS = SS.subs(y(x=0)==C1,diff(y,x)(x=0)==C2) ; show(SS) # Sol. General C1=y(0), C2=y'(0)
DS = diff(SS,x).subs(x=2)==0 # Sustituimos la otra cond y'(2)=0
DS = DS.simplify_full() ; show(DS)
```

$$\left(C_1 \cos \left(\frac{1}{2} \sqrt{4\lambda - 1} x \right) - \frac{C_1 \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{4\lambda - 1} x \right)}{\sqrt{4\lambda - 1}} \right) e^{\left(\frac{1}{2} x \right)} - \frac{2 C_1 \lambda e \sin \left(\sqrt{4\lambda - 1} \right)}{\sqrt{4\lambda - 1}} = 0$$

Notar que a diferencia del caso anterior, donde aparecía $\sinh()$, en este caso el término $\sin()$ sí puede anularse en infinitos argumentos no nulos y por tanto los autovalores λ_n vendrán dados por:

$$\sqrt{4\lambda_n - 1} = n\pi \implies \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{4} - \frac{1}{4}$$

Lo hacemos en *SageMath* obteniendo los autovalores y autofunciones correspondientes.

```
var('n')
assume(n,'integer')
assume(n>0)
Sx = solve(sqrt(4*lambda_-1)==n*pi,lambda_); show(Sx)
SS = SS.subs(lambda_==Sx[0].rhs()); show(SS)
```

$$\left[\lambda = \frac{1}{4} \pi^2 n^2 + \frac{1}{4} \right] \left(C_1 \cos \left(\frac{1}{2} \pi n x \right) - \frac{C_1 \sin \left(\frac{1}{2} \pi n x \right)}{\pi n} \right) e^{\left(\frac{1}{2} x \right)}$$

Estos autovalores y autovectores junto con los obtenidos para $\lambda = 0$ son las soluciones del problema. Vamos ahora a comprobar la ortogonalidad de las autofunciones con la función peso ¹⁰³ e^{-x} .

```
var('m')
assume(m,'integer')
assume(m>0)
assume('m != n')
SI = integral(SS*SS.subs(n==m)*exp(-x),x,0,2).simplify_full() ; show(SI)
```

0

¹⁰³Ver el Ejercicio 10.3, página 349.

A.1.18. Ecuaciones en Derivadas Parciales

Recordamos el concepto de **ecuación diferencial en derivadas parciales**¹⁰⁴ (EDP):

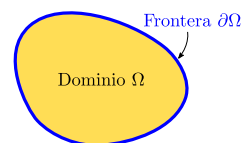
$$u(x, y, z, t, \dots) \xrightarrow{\text{EDP}} F(x, y, z, t, u, u_x, u_t, u_{xy}, \dots) = 0$$

De ellas, desde un punto de vista aplicado, el grupo de EDP más importante son las **EDP lineales de segundo orden**¹⁰⁵:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\vec{z}) \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial z_j} + \sum_{i=1}^n b_i(\vec{z}) \frac{\partial u}{\partial z_i} + c(\vec{z}) u(\vec{z}) = f(\vec{z})$$

Se denomina **problema de valores en la frontera**¹⁰⁶ (PVF) al conjunto de una EDP definida en un dominio Ω junto con las *condiciones iniciales y/o de frontera o contorno*.

$$\text{Problema EDP (PVF)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{EDP en un dominio} \\ + \\ \text{Condiciones iniciales y/o de contorno} \end{array} \right.$$



Uno de los métodos más importantes en la resolución de problemas de EDP es el **método de Separación de Variables**¹⁰⁷, en el cual la EDP se descompone en un conjunto de problemas de EDO más sencillos de resolver. Recordamos los problemas básicos de EDO de tipo Sturm-Liouville¹⁰⁸ que suelen aparecer en la resolución de EDP.

Problema Básico de Autovalores

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u = 0$$

Cond. Frontera	$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u(L) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} u'(0) = 0 \\ u'(L) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} u(-L) = u(L) \\ u'(-L) = u'(L) \end{cases}$
Autovalores λ_n	$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ $n = 1, 2, \dots$	$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ $n = 0, 1, 2, \dots$	$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ $n = 0, 1, 2, \dots$
Autofunciones	$\text{sen } \frac{n\pi x}{L}$	$\cos \frac{n\pi x}{L}$	$\text{sen } \frac{n\pi x}{L}, \cos \frac{n\pi x}{L}$
Serie	$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen } \frac{n\pi x}{L}$	$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L}$	$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} + B_n \text{sen } \frac{n\pi x}{L}$
Coeficientes	$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen } \frac{n\pi x}{L} dx$	$A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$ $A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$	$A_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$ $A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$ $B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \text{sen } \frac{n\pi x}{L} dx$

¹⁰⁴Ver el Tema 11, página 359.

¹⁰⁵Ver la Definición 11.2, página 362.

¹⁰⁶También denominados con condiciones de borde o contorno.

¹⁰⁷Ver la Sección 11.2, página 367.

¹⁰⁸Ver la Sección 10.2.1, página 337.

EDP de Primer Orden

Empezamos viendo cómo resolver a través de *SageMath* usando el método de separación de variables una EDP de primer orden resuelta en el [Ejercicio 11.1, página 368](#).

$$y \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Empezamos definiendo las variables y la EDP.

```
var('x y')
u=function('u')(x,y)
edp = y*diff(u,x) == diff(u,y) ; edp
```

$$y \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} u(x, y)$$

Aplicamos el método de separación de variables

```
X=function('X')(x)
Y=function('Y')(y)
u=X*Y
edp1 = y*diff(u,x) == diff(u,y) ; edp1
```

$$yY(y) \frac{\partial}{\partial x} X(x) = X(x) \frac{\partial}{\partial y} Y(y)$$

Intentamos separar los dos términos dependientes de x e y .

```
var('lambda_')
s1 = solve(edp1,diff(X,x)); show(s1)           # Separamos X'
s2 = (s1[0].rhs()==1).solve(X); show(s2)       # Separamos X de la parte dcha
s3 = s1[0].lhs()/s2[0].lhs()==1/s2[0].rhs() ; show(s3) # Juntamos partes
edox = s3.lhs()==lambda_ ; show(edox)          # Parte X(x)
edoy = s3.rhs()==lambda_ ; show(edoy)          # Parte Y(y)
```

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} X(x) = \frac{X(x) \frac{\partial}{\partial y} Y(y)}{yY(y)} \right]$$

$$\left[X(x) = \frac{yY(y)}{\frac{\partial}{\partial y} Y(y)} \right]$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x} X(x)}{X(x)} = \frac{\frac{\partial}{\partial y} Y(y)}{yY(y)}$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x} X(x)}{X(x)} = \lambda$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial y} Y(y)}{yY(y)} = \lambda$$

Resolvemos las dos EDO independientes.

```
solx = desolve(edox,X,ivar=x) ; show(solx)
soly = desolve(edoy,Y,ivar=y) ; show(soly)
```

$$C e^{(\lambda x)}$$

$$C e^{(\frac{1}{2} \lambda y^2)}$$

Juntamos ambas soluciones en la solución general final y cambiamos nombre de los parámetros C y λ por los típicos C_1 y C_2 .

```
var('_C C1 C2')
u = solx*soly ; show(u)
u = u.subs(_C^2==C1,lambda_==C2) ; show(u)
```

$$C^2 e^{\left(\frac{1}{2} \lambda y^2 + \lambda x\right)}$$

$$C_1 e^{\left(\frac{1}{2} C_2 y^2 + C_2 x\right)}$$

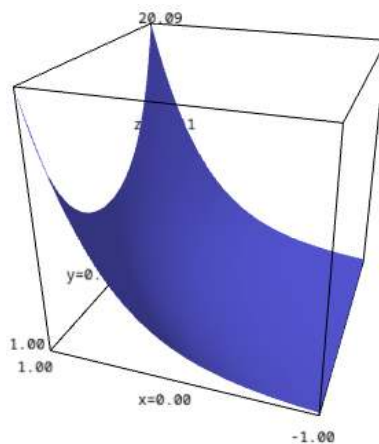
Comprobamos la validez de la solución general.

```
bool(y*diff(u,x) == diff(u,y))
```

True

Representamos una solución particular.

```
plot3d(u(C1=1,C2=2),(x,-1,1),(y,-1,1),aspect_ratio=[1,1,0.1])
```



Ecuación del Calor Unidimensional

Resolvemos en este caso el problema en EDP dado en el [Sección 11.4.2, página 372](#) correspondiente a la conducción del calor en una varilla unidimensional.

$$\begin{cases} k u_{xx} = u_t & 0 < x < L, t > 0 \\ u(0, t) = 0, u(L, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < L \end{cases}$$

```
reset()
var('k x t L')
assume(k>0)
assume(L>0)
u=function('u')(x,t)
edp = k*diff(u,x,2) == diff(u,t) ; edp
```

$$k \frac{\partial^2}{(\partial x)^2} u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x, t)$$

Aplicamos separación de variables.

```
X=function('X')(x)
T=function('T')(t)
u=X*T
edp1 = k*diff(u,x,2) == diff(u,t) ; edp1
```

$$kT(t) \frac{\partial^2}{(\partial x)^2} X(x) = X(x) \frac{\partial}{\partial t} T(t)$$

```

var('lambda_')
s1 = solve(edp1,diff(X,x,2)); show(s1)           # Separamos X''
s2 = (s1[0].rhs()==1).solve(X); show(s2)         # Separamos X de la parte dcha
s3 = s1[0].lhs()/s2[0].lhs()==1/s2[0].rhs() ; show(s3) # Juntamos partes
edox = s3.lhs()==-lambda_ ; show(edox)           # Parte X(x)
edot = s3.rhs()==-lambda_ ; show(edot)           # Parte T(t)

```

$$\left[\frac{\partial^2}{(\partial x)^2} X(x) = \frac{X(x) \frac{\partial}{\partial t} T(t)}{kT(t)} \right]$$

$$\left[X(x) = \frac{kT(t)}{\frac{\partial}{\partial t} T(t)} \right]$$

$$\frac{\frac{\partial^2}{(\partial x)^2} X(x)}{X(x)} = \frac{\frac{\partial}{\partial t} T(t)}{kT(t)}$$

$$\frac{\frac{\partial^2}{(\partial x)^2} X(x)}{X(x)} = -\lambda$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial t} T(t)}{kT(t)} = -\lambda$$

Empezamos resolviendo el primer problema sobre $X(x)$.

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0, X(L) = 0 \end{cases}$$

que corresponde con un problema básico de *Sturm-Liouville* cuyas soluciones son conocidas¹⁰⁹.

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad ; \quad X_n(x) = C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad ; \quad n = 1, 2, \dots$$

```

var('n')
assume(n,'integer')
assume(n>0)
edo1= sin(n*pi*x/L) ; show(edo1)
Lambda = (n^2*pi^2/L^2) ; show(Lambda)
#show(LatexExpr('X(x) = '),edo1,LatexExpr('\quad,\quad \lambda = '),Lambda)

```

$$\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$

$$\frac{\pi^2 n^2}{L^2}$$

La segunda EDO sobre $T(t)$ es fácilmente resoluble con *SageMath*.

```

var('_C')
C=function('C')(n)
edo2 =desolve(edot,T,ivar=t) ; show(edo2)
edo2 = edo2(lambda_=Lambda,_C=C); show(edo2)

```

$$Ce^{(-k\lambda t)}$$

¹⁰⁹Ver la [Sección A.1.18](#), página 506.

$$C(n) e^{\left(-\frac{\pi^2 k n^2 t}{L^2}\right)}$$

Por el *principio de superposición*¹¹⁰ la solución final es por tanto:

```
sol = edo1*edo2
u=sum(sol,n,1,oo); show(u)
```

$$\sum_{n=1}^{+\infty} C(n) e^{\left(-\frac{\pi^2 k n^2 t}{L^2}\right)} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$

Las constantes C_n se pueden obtener a través de la condición inicial del problema:

$$u(x, 0) = X(x)T(0) = f(x) \quad \Rightarrow \quad u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

Esto corresponde con la *serie de Fourier de senos*¹¹¹ de $f(x)$ y por tanto las constantes c_n correspondientes a los coeficientes de la serie se pueden obtener como:

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(s) \sin\left(\frac{n\pi}{L}s\right) ds$$

Vamos a crear un pequeño código para representar gráficamente algunas soluciones para una determinada función de la condición inicial $f(x)$.

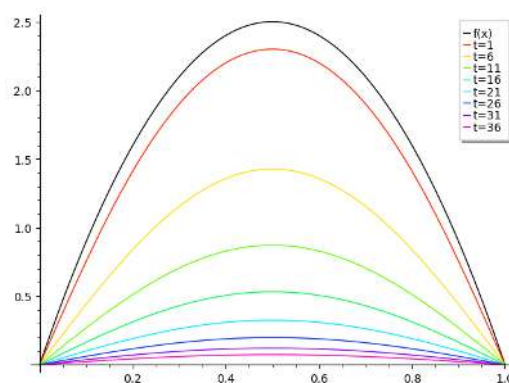
```
var('n i ')
L=1
k=0.01
f(x) = 10*(-x^2+L*x)

def C(nn,l):
    coeff = 2/l*integral(f(x)*sin(nn*pi*x/l), (x,0,l))
    return coeff

def FF(nn,l,tt):
    return sum(C(i,l)*sin(i*pi*x/l)*exp(-k*tt*i^2*pi^2/l^2), i, 1, nn)

T=40
q=sum([plot(FF(10,1,n), (x,0,L), color=hue(n/(T+1)), legend_label='t='+str(n))
for n in range(1,T,5)])

p=plot(f(x), (x, 0, 1), color='black', legend_label='f(x)')
(p+q).show()
```



¹¹⁰Ver el Teorema 11.1, página 370.

¹¹¹Ver la Sección 9.4.4, página 329.

Ecuación del Calor en Polares con Simetría Radial

Resolvemos el siguiente problema correspondiente al problema dado en el [Sección 11.4.3, página 382](#).

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) & r \in (0, a), t > 0 \\ u(a, t) = 0 & t > 0 \\ |u(0, t)| < \infty & t > 0 \\ u(r, 0) = f(r) & r \in (0, a) \end{cases} \quad (\text{Cond. Compatibilidad})$$

```
reset()
var('k a r t')
assume(k>0)
assume(a>0)
u=function('u')(r,t)
edp = diff(u,t) == k/r*diff(r*diff(u,r),r) ; edp
```

$$\frac{\partial}{\partial t} u(r, t) = \frac{\left(r \frac{\partial^2}{(\partial r)^2} u(r, t) + \frac{\partial}{\partial r} u(r, t) \right) k}{r}$$

Aplicamos separación de variables.

```
R = function('R')(r)
T = function('T')(t)
u = R*T
edp1 = diff(u,t) == k/r*diff(r*diff(u,r),r) ; edp1
```

$$R(r) \frac{\partial}{\partial t} T(t) = \frac{\left(r T(t) \frac{\partial^2}{(\partial r)^2} R(r) + T(t) \frac{\partial}{\partial r} R(r) \right) k}{r}$$

```
var('lambda_')
s1 = solve(edp1, diff(T, t)); show(s1) # Separamos T'
s1r = s1[0].rhs().expand() ; show(s1r)
s2 = (s1r==1).solve(T); show(s2) # Separamos T de la parte dcha
s3 = s1[0].lhs()/(k*s2[0].lhs())==(1/(k*s2[0].rhs())).expand() ; show(s3) # Juntamos_
↳ partes
edot = s3.lhs()==-lambda_ ; show(edot) # Parte T(t)
edor = s3.rhs()==-lambda_ ; show(edor) # Parte R(r)
```

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} T(t) = \frac{\left(kr \frac{\partial^2}{(\partial r)^2} R(r) + k \frac{\partial}{\partial r} R(r) \right) T(t)}{r R(r)} \right]$$

$$\frac{kT(t) \frac{\partial^2}{(\partial r)^2} R(r)}{R(r)} + \frac{kT(t) \frac{\partial}{\partial r} R(r)}{r R(r)}$$

$$\left[T(t) = \frac{r R(r)}{kr \frac{\partial^2}{(\partial r)^2} R(r) + k \frac{\partial}{\partial r} R(r)} \right]$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial t} T(t)}{kT(t)} = \frac{\frac{\partial^2}{(\partial r)^2} R(r)}{R(r)} + \frac{\frac{\partial}{\partial r} R(r)}{r R(r)}$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial t} T(t)}{kT(t)} = -\lambda$$

$$\frac{\frac{\partial^2}{(\partial r)^2} R(r)}{R(r)} + \frac{\frac{\partial}{\partial r} R(r)}{r R(r)} = -\lambda$$

Empezamos analizando el primer problema de Sturm-Liouville

```
# lambda = 0
edor = (edor.lhs()*R*r).expand() -edor.rhs()*R*r; show(edor)
u0 = desolve(edor(lambda_=0),R,ivar=r,contrib_ode=True) ; show(u0)
```

$$\lambda r R(r) + r \frac{\partial^2}{(\partial r)^2} R(r) + \frac{\partial}{\partial r} R(r)$$

$$K_1 \log(r) + K_2$$

Por la condición de compatibilidad $K_1 = 0$ y con la condición frontera $R(a) = 0$ hace que $k_2=0$, obteniéndose la solución trivial y por tanto $\lambda = 0$ no es autovalor del problema.

```
# lambda != 0
ur = desolve(edor,R,ivar=r,contrib_ode=True) ; show(u0)
```

$$K_1 \log(r) + K_2$$

Por la condición de compatibilidad se tiene $K_2 = 0$. Para que se cumpla la condición frontera $R(a) = 0$ y evitar la solución trivial es necesario $K_1 \neq 0$. Notar que la función de Bessel $J_0(x)$ es simétrica y por tanto $J_0(-x) = J_0(x)$.

Es necesario entonces que $a\sqrt{\lambda}$ sea un cero z_n de la función $J_0(x)$. Recordamos que los ceros de las funciones de Bessel¹¹² se puede obtener a través de la librería *mpmath* como en la [Sección A.1.7, página 474](#). Por tanto los autovalores y autofunciones de este problema son:

```
from mpmath import besseljzero
var('z_n n')
assume(n, 'integer')
assume(n>0)
assume(z_n>0)
#def z(n): return besseljzero(0,n)

A = a*sqrt(lambda_)==z_n
L = solve(A,lambda_) ; show(L)
ur = ur[0](_K2=0,r=-r,lambda_=L[0].rhs()).rhs() ; show(ur)
```

$$\left[\lambda = \frac{z_n^2}{a^2} \right]$$

$$K_1 J_0\left(\frac{r z_n}{a}\right)$$

La segunda EDO en la variable $T(t)$ es fácil de resolver:

```
edot = edot.lhs()*k*T-edot.rhs()*k*T; show(edot)
```

$$k\lambda T(t) + \frac{\partial}{\partial t} T(t)$$

```
ut = desolve(edot,T,ivar=t,contrib_ode=True) ; show(ut)
ut=ut(lambda_=L[0].rhs()); show(ut)
```

$$C e^{(-k\lambda t)}$$

$$C e^{\left(-\frac{k t z_n^2}{a^2}\right)}$$

Y por tanto la solución final es:

¹¹²Ver la [Sección 10.4.1, página 355](#).

```

var('_C')
C=function('C')(n)
Z=function('Z')(n)
sol = ur(_K1=1,z_n=Z)*ut(_C=C,z_n=Z) ; show(sol)
u=sum(sol,n,1,oo); show(u)

```

$$C(n) J_0\left(\frac{rZ(n)}{a}\right) e^{\left(-\frac{ktZ(n)^2}{a^2}\right)}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} C(n) J_0\left(\frac{rZ(n)}{a}\right) e^{\left(-\frac{ktZ(n)^2}{a^2}\right)}$$

Para determinar los coeficientes es necesario tener en cuenta la condición inicial del problema original.

$$u(r, 0) = f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(\frac{r z_0^n}{a}\right)$$

Notar que esto corresponde con la **serie de Fourier generalizada**¹¹³ de la función $f(r)$ en términos de las funciones de Bessel. Teniendo en cuenta las propiedades de ortogonalidad de las funciones de Bessel¹¹⁴ con la función peso r se tiene finalmente:

$$C_n = \frac{\int_0^a f(r) J_0\left(\frac{r z_0^n}{a}\right) r dr}{\int_0^a J_0^2\left(\frac{r z_0^n}{a}\right) r dr}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Vamos a crear un pequeño código para representar gráficamente algunas soluciones para una determinada función de la condición inicial $f(x)$.

```

# Importamos librerías necesarias
from scipy.special import *
import sage.libs.mpmath.all as a
from matplotlib import cm

var('x y r n i ')
a=pi      # radio
k=0.01    # conductividad

# Fun. ini t=0
f(x) = sin(pi/2+3*x)

# Ceros de J_0 (los 50 primeros)
zn=jn_zeros(0, 50)

# Función de Bessel J_0
def JO(x): return bessel_J(0,x)

# Cte de la serie de Fourier Geneneralizada
def C(n,a):
    z=zn[n-1]/a
    i=numerical_integral(x*(JO(x*z))^2,0,a)[0]
    return 1/i*numerical_integral(x*f(x)*JO(x*z),0,a)[0]

# Solución
def FF(nn,RR,tt):
    return sum(C(i,RR)*JO(x*zn[i-1]/RR)*exp(-k*tt*(zn[i-1]/RR)^2) for i in [1..nn])

```

¹¹³Ver la Sección 10.3.2, página 348.

¹¹⁴Ver la Sección 10.4.1, página 355.

Representación gráfica usando *Matplotlib* para un tiempo determinado ($t = 3$) donde se muestra la temperatura $u(r, t)$ en forma de superficie en 3D en coordenadas cartesianas, de mapa de contorno en 2D en coordenadas polares y como una curva en función del radio (independiente del ángulo).

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import cm

fig = plt.figure(figsize=plt.figaspect(0.3))
plt.subplots_adjust(wspace=0.35)

N=100      # Núm. ptos gráfica
# Vectores
theta = np.radians(np.linspace(0, 360, N)) # ángulo
r = np.arange(0, a, a/N)                  # radio
u = np.arange(0, a, a/N)                  # u(r,t)
# Matrices
RR, AA = np.meshgrid(r, theta)
U = np.random.random((theta.size, r.size))
RR = RR.astype(float) ; AA = AA.astype(float) ; U = U.astype(float)

a=np.pi # radio
t=3      # tiempo
NN=10    # num términos serie

# Función sol u(r,t)
for i in range(0,r.size):
    u[i] = FF(NN,a,t)(x=r[i]).n()
    for j in range(0,theta.size):
        U[j,i] = u[i]

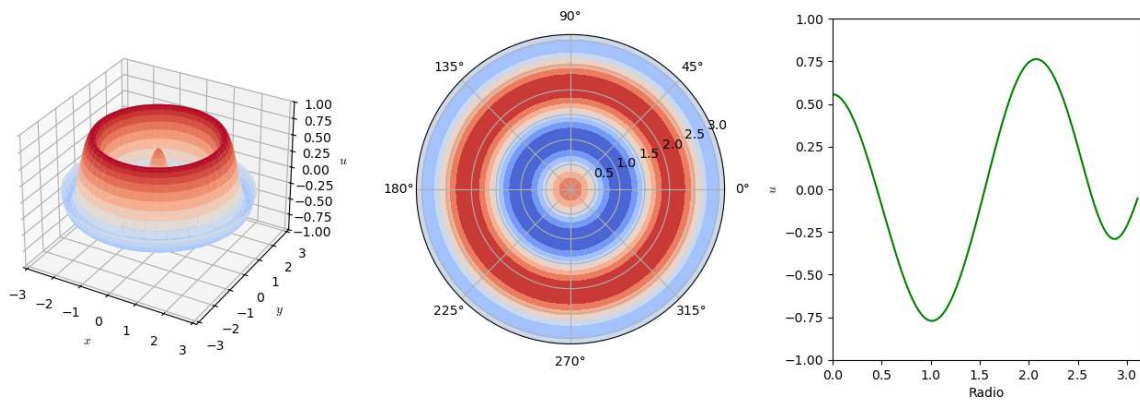
# Coord. cartesianas
X, Y = RR*np.cos(AA), RR*np.sin(AA)

#-- Plot Surface -----
ax1 = fig.add_subplot(1, 3, 1, projection='3d')
ax1.plot_surface(X, Y, U, cmap=cm.coolwarm)

ax1.set_zlim(-1, 1)
ax1.set_xlim(-a, a)
ax1.set_ylim(-a, a)
ax1.set_xlabel(r'$x$')
ax1.set_ylabel(r'$y$')
ax1.set_zlabel(r'$u$')

#-- Plot Contour -----
ax2 = fig.add_subplot(1, 3, 2, projection='polar')
ax2.contourf(AA, RR, U, cmap=cm.coolwarm)

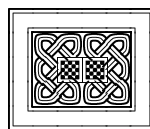
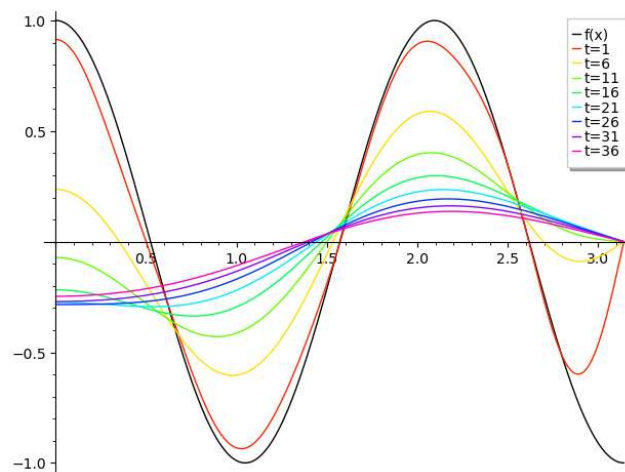
#-- Plot Lineal -----
ax3 = fig.add_subplot(1, 3, 3)
ax3.plot(r,u,color='green')
ax3.set_xlim(0, a)
ax3.set_ylim(-1, 1)
ax3.set_xlabel(r'Radio')
ax3.set_ylabel(r'$u$')
plt.show()
```

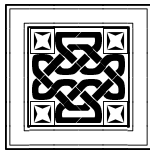


En la siguiente gráfica se muestra la evolución de los perfiles de temperatura (curvas) en función del radio, para distintos tiempos.

```
# Rep. Gráfica unidimensional (radio) en función del tiempo
T=40 # Tiempo máximo
q=sum([plot(FF(10,a,n), (x,0,a), color=hue(n/(T+1)), legend_label='t='+str(n)) \
      for n in range(1,T,5)])

# Función inicial
p=plot(f(x), (x, 0, a), color='black', legend_label='f(x)')
(p+q).show()
```





Bibliografía

- N. H. ASMAR, **Partial differential equations with Fourier series and boundary value problems**, Tercera Edición, (Pearson-Prentice Hall, 2016).
- BOYCE y DIPRIMA, **Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera**, Cuarta Edición, (Limusa-Wiley, 2000).
- C. H. EDWARDS, D. E. PENNEY, **Ecuaciones diferenciales**, Cuarta Edición, (Prentice Hall, 2001).
- R. HABERMAN, **Ecuaciones en derivadas parciales con series de Fourier y problemas de contorno**, Tercera Edición, (Pearson-Prentice Hall, 2003).
- P. J. HERNANDO, **Clases de Álgebra Lineal para Ingeniería**, Versión 6.6, (Septiembre 2025).
- P. J. HERNANDO, **Clases de Cálculo I para Ingeniería**, Versión 3.8, (Septiembre 2025).
- P. J. HERNANDO, **Clases de Cálculo II para Ingeniería**, Versión 4.2, (Septiembre 2025).
- P. J. HERNANDO, **Clases de Cálculo III para Ingeniería**, Versión 2.2, (Septiembre 2025).
- G. JAMES, **Matemáticas Avanzadas para ingeniería**, Segunda Edición, (Prentice Hall, 2002).
- R. K. NAGLE, E. B. SAFF, A. D. SNIDER, **Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera**, Tercera Edición, (Addison Wesley, 2001).
- F. MARCELLAN, L. CSASÚS, A. ZARZO **Ecuaciones diferenciales**, Primera Edición, (McGraw-Hill, 1990).
- D. PESTANA, J. M. RODRÍGUEZ, F. MARCELLÁN, **Variable compleja: un curso práctico**, Primera Edición, (Síntesis, 2014).
- S. L. ROSS, **Ecuaciones diferenciales**, Primera Edición, (Reverté, 1992).
- G. F. SIMMONS, **Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas**, Segunda Edición, (McGraw-Hill, 1993).
- M. R. SPIEGEL, S. LIPSCHUTZ, J. J. SCHILLER, D. SPELLMAN, **Variable compleja**, Segunda Edición, (McGraw-Hill, 2011).
- J. WARD BROWN y R. V. CHURCHILL, **Variable compleja y aplicaciones**, Séptima Edición, (McGraw-Hill, 2004).
- A. D. WUNSCH, **Complex variables with applications**, Tercera Edición, (Pearson, 2005).
- D. G. ZILL y M. CULLEN, **Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera**, Séptima Edición, (Cengage Learning Editores, 2009).
- D. G. ZILL y M. R. CULLEN, **Matemáticas avanzadas para ingeniería**, Tercera Edición, (McGraw-Hill Interamericana Editores, 2008).
- P. ZIMMERMANN y Co. **Computational mathematics with SageMath**, (Free license Creative Commons, 2018). <https://www.sagemath.org/sagebook>

